

طراحی کنترل کننده مقاوم H_∞ بر پایه رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته برای سیستم‌های تکین نامعین در حضور اغتشاش

سید محسن سعید جلالی^۱، علی اکبرزاده کلات^۲

^۱دانشجوی دکتری برق-کنترل، دانشکده مهندسی برق و رباتیک- دانشگاه صنعتی شاهرود، msjalali@shahroodut.ac.ir

^۲دانشیار، دانشکده مهندسی برق و رباتیک- دانشگاه صنعتی شاهرود، akbarzadeh@shahroodut.ac.ir

پذیرش: ۹۹/۰۳/۱۶

ویرایش دوم: ۹۹/۰۱/۲۴

ویرایش اول: ۹۸/۱۰/۲۴

دریافت: ۹۸/۰۵/۱۳

چکیده: در این مقاله یک طراحی کنترل کننده مقاوم H_∞ بر پایه رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته برای سیستم‌های تکین نامعین، در حضور اغتشاش ارائه شده است تا سیستم حلقه بسته را مجاز کند. ویژگی مهم این روش در این است که نامعینی می‌تواند در ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و ماتریس خروجی وجود داشته باشد و اینکه برای تخمین حالت‌های سیستم از رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته استفاده شده است. این نوع رؤیت گر به دلیل وجود بخش انتگرالی تضمین می‌کند که خطای تخمین به صفر خواهد رسید و همچنین به دلیل وجود بخش دینامیکی، سرعت تخمین بالاتری نسبت به رؤیت گرهای تناسبی-انتگرالی دارد. ابتدا برای سیستم یک رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته مقاوم طراحی شده و شرایط وجود جواب برای آن مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین محاسبه بعضی از ضرایب رؤیت گر به صورت پارامتری به گونه‌ای انجام می‌شود که خطای تخمین به سمت صفر میل کند. سپس با استفاده از فیدبک حالت، کنترل کننده تناسبی H_∞ برای مجاز بودن سیستم تکین به آن اعمال می‌شود. شرایط وجود هم‌زمان جواب برای رؤیت گر و کنترل کننده با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب برآورده می‌شود. نامعادلات موجود توسط مجموعه‌ای از روابط جبر خطی به نامعادلات ماتریسی خطی تبدیل می‌شوند و با حل این نامعادلات ضرایب مربوط به رؤیت گر و کنترل کننده به دست می‌آید. در انتها با ارائه یک الگوریتم روش محاسبه به صورت منظم بیان خواهد شد و با ذکر یک مثال کارایی آن بررسی می‌شود و نتایج با یک رؤیت گر تناسبی مقایسه خواهد شد.

کلمات کلیدی: سیستم‌های تکین نامعین، رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته مقاوم، کنترل کننده بر پایه رؤیت گر، کنترل کننده مقاوم H_∞ ، نامعادلات ماتریسی خطی.

Robust H_∞ Controller design based on Generalized Dynamic Observer for Uncertain Singular system with Disturbance

Seyed Mohsen Saeed Jalali, Ali Akbarzade kalat

Abstract: This paper presents a robust H_∞ controller design, based on a generalized dynamic observer for uncertain singular systems in the presence of disturbance. The controller guarantee that the closed loop system be admissible. The main advantage of this method is that the uncertainty can be found in the system, the input and the output matrices. Also the generalized dynamic observer is used to estimate the states of system. This type of observer increases the steady state accuracy because of the integral term, and because of the dynamic term, it has a higher estimation speed than proportional-integral observers. First, the necessary condition for existence a generalized dynamic robust observer is presented and some coefficients matrices of observer are computed that the estimation error asymptotically converges to zero. The robust H_∞ controller is then designed using state feedback in order to guarantee that the closed loop system is admissible. The existence conditions of the observer and the controller are given simultaneously using suitable Lyapunov function. Moreover, existing inequalities are transformed into linear matrix inequalities (LMI) using a set of algebraic relationships, and by solving these LMIs, the coefficients of the observer and the controller are obtained. Finally, by presenting an algorithm, the computational method will be expressed in a systematic way, and a numerical example demonstrates the efficiency of proposed method.

Keywords: Uncertain singular systems, generalized dynamic observer, Observer based controller, Robust H_∞ controller, Linear matrix inequalities.

۱- مقدمه

سیستم های تکین (Singular Systems) یا سیستم های فضای حالت توسعه یافته (Generalized state space) در دهه های اخیر اهمیت زیادی بین محققان پیدا کرده است. این سیستم ها حالت کلی تری از نمایش فضای حالت سیستم های معمولی (Normal) را ارائه می کنند [۱]. تفکیک بیان محدودیت های جبری و محدودیت های دیفرانسیلی بین متغیرهای فیزیکی سیستم (متغیرهای حالت سیستم) در بسیاری از سیستم ها مانند سیستم های مقیاس بزرگ بسیار مشکل است. همچنین در بسیاری از موارد شرایط خاصی بر سیستم حاکم می شود که برخی از معادلات دیفرانسیلی به معادلات جبری تبدیل می شوند. به عنوان مثال عملکرد یک بازوی ربات موازی در قالب معادلات دیفرانسیلی مدل می شود، ولی در بعضی حالت ها و شرایط، سیستم ربات تکین می شود و در این شرایط مدل سیستم در قالب معادلات جبری قرار می گیرد. به طور کلی مزایای سیستم های تکین را می توان به این صورت بیان کرد: سادگی مدل سازی به روش تکین، حفظ ماهیت فیزیکی متغیرها، دسترسی به اطلاعات کامل سیستم، تسهیل در مسئله شناسایی سیستم. با توجه به این مزیت ها کاربرد سیستم های توصیفی یا سیستم های تکین در تئوری و عمل رو به افزایش است. این نوع سیستم ها به طور گسترده در فرآیندهای الکتریکی، شیمیایی، معدن، اقتصاد و همچنین در سیستم های مقیاس بزرگ مورد استفاده قرار گرفته اند [۲-۸].

فیدبک حالت یکی از پرکاربردترین روش های طراحی سیستم های کنترل است [۷]. با فیدبک حالت می توان قطب های سیستم را در هر مکان دلخواه جانمایی کرد و پیرو آن رفتار سیستم را به دلخواه کنترل نمود. ولی مشکل در اینجا است که متغیرهای حالت سیستم همواره در دسترس نیستند و یا حس گر لازم برای اندازه گیری آن گران قیمت است [۹]. بنابراین لازم است با استفاده از روش های تخمین، حالت های سیستم را به دست آوریم. به همین دلیل تخمین حالت های سیستم یا طراحی رؤیت گرهای حالت از موضوعاتی است که مطالعات زیادی روی آن انجام شده است [۱۰-۱۳]. با توجه به نکات بالا، طراحی رؤیت گرهای حالت برای سیستم های تکین مطرح می شود و تحقیقات زیادی روی آن صورت گرفته است. در صورت تخمین مناسب حالت های سیستم تکین، می توان با استفاده از فیدبک حالت، جانمایی قطب را برای تأمین ویژگی های خاصی که در سیستم کنترل مورد نظر است اعمال کرد [۱۴]. در مورد سیستم های تکین یکی از مهم ترین مسائل، مجاز (Admissible) بودن سیستم است که نیازمند شرایطی بیشتر از پایداری نسبت به سیستم های معمولی است. این کار توسط کنترل گرهای مبتنی بر رؤیت گر انجام می شود [۱۵-۱۷].

طراحی رؤیت گرهای تناسبی (Proportional Observer) به طور گسترده برای سیستم های تکین مورد مطالعه قرار گرفته اند [۱۸-۱۹]. در [۲۰] نویسندگان رؤیت گر تناسبی (PO) را توسعه دادند و رؤیت گر تناسبی انتگرالی (Proportional Integral Observer) را تعریف کردند. این رؤیت گر علاوه بر اینکه خطای حالت مانای تخمین را کاهش

می دهد، حساسیت رؤیت گر نسبت به نامعینی در پارامترها را نیز کم می کند. مانند سیستم های معمولی، با توجه به اهمیت بخش انتگرالی در رؤیت گرها، در سیستم های تکین نیز مطالعات بیشتری روی آن انجام شد [۲۱-۲۲].

رؤیت گرهای دینامیکی توسعه یافته (Generalized Dynamic Observer) ابتدا توسط گودوین و میدلتون ارائه گردید. آن ها این ایده را مطرح کردند که با افزایش یک بخش دینامیکی به رؤیت گر، می توان به درجه آزادی بیشتری در طراحی رؤیت گر دست یافت [۲۳-۲۴]. سپس این ایده برای سیستم های تکین نیز توسعه یافت و رؤیت گرهای دینامیکی توسعه یافته (GDO) برای سیستم های تکین طراحی شد که حالت کلی تری نسبت به PO و PIO داشت [۲۵]. تحقیقات بیشتری توسط داروچ و همکارانش بر روی رؤیت گرهای دینامیکی توسعه یافته انجام شده است. در [۲۶] رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته برای سیستم های تکین خطی و در [۲۷] طراحی رؤیت گر برای سیستم های غیرخطی بدون در نظر گرفتن نامعینی در ماتریس ها انجام شده است. همچنین در [۲۸] یک کنترل گر بر پایه رؤیت گر برای سیستم تکین طراحی شده است که ماتریس های آن معلوم هستند.

در سیستم های واقعی در بیشتر موارد شاهد وجود عدم قطعیت در پارامترهای سیستم و یا نامعینی در ساختار سیستم هستیم [۲۹-۳۰]. وجود این نامعینی ها و یا پارامترهای نامعلوم، تخمین حالت های سیستم را با مشکل مواجه می کند. بنابراین مطالعات زیادی بر روی تخمین حالت در سیستم های معمولی و تکین دارای نامعینی و یا نامعلومی انجام شده است. نتیجه آن طراحی رؤیت گرهای تطبیقی و یا مقاوم برای سیستم های معمولی و تکین است [۲۵] [۳۱-۳۸]. در [۳۹] یک رؤیت گر تطبیقی برای سیستم های تکین یک ورودی و یک خروجی با پارامترهای نامعلوم طراحی شد، به طوری که علاوه بر تخمین حالت ها سیستم، پارامترهای نامعلوم سیستم را نیز تعیین می کرد. از سوی دیگر ورودی نامعلوم و یا اغتشاش در سیستم های کنترل امری اجتناب ناپذیر است. سیستم های تحت اغتشاش عملکرد رؤیت گرها را دچار اشکال می کنند و تخمین حالت های سیستم با افزایش زمان تخمین و خطای حالت مانا همراه می شوند. بنابراین محققان روش هایی را برای غلبه بر این مشکل ابداع کردند که نمونه هایی از آن را می توان در [۴۰-۴۲] دید.

هدف اصلی در این مقاله طراحی یک کنترل کننده مقاوم H_{∞} بر اساس حالت های تخمین زده شده توسط یک رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته است تا در حضور اغتشاش سیستم حلقه بسته را مجاز کند. مهم ترین ویژگی در این مقاله وجود داشتن نامعینی در سه ماتریس سیستم، ورودی و خروجی است.

ادامه مقاله به صورت زیر بیان شده است:

در بخش دوم صورت مسئله فرمول بندی شده است. چند تعریف و فرض که در ادامه مقاله به آن ها نیاز داریم در این بخش بیان می شود، قالب کلی رؤیت گر برای تخمین حالت های سیستم معرفی خواهد شد و تعدادی

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E) \quad (2)$$

و یا معادل آن رابطه زیر برقرار باشد:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E \\ \emptyset A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (3)$$

که در آن $\emptyset \in \mathbb{R}^{r \times n}$ یک ماتریس با رتبه کامل سطری است که در رابطه $\emptyset [E \ M_B] = 0$ صدق می کند و $r = n - \text{rank}([E \ M_B])$ خواهد بود.

اکنون با ضرب کردن $\emptyset$ از سمت چپ در اولین معادله از (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \emptyset(E\dot{x}(t) - \Delta B u(t)) &= \emptyset(Ax(t) + \Delta Ax(t) + Bu(t) + D_i w(t)) \\ &\Rightarrow \\ \emptyset(E\dot{x}(t) - M_B \Lambda_B N_B u(t)) &= \emptyset Ax(t) + \emptyset \Delta Ax(t) + \emptyset Bu(t) \\ &\quad + \emptyset D_i w(t) \Rightarrow \\ \emptyset [E \ M_B] \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \Lambda_B N_B u(t) \end{bmatrix} &= \emptyset Ax(t) + \emptyset \Delta Ax(t) + \emptyset Bu(t) \\ &\quad + \emptyset D_i w(t) \Rightarrow \\ 0 &= \emptyset Ax(t) + \emptyset \Delta Ax(t) + \emptyset Bu(t) + \emptyset D_i w(t) \Rightarrow \\ -\emptyset Bu(t) &= \emptyset Ax(t) + \emptyset \Delta Ax(t) + \emptyset D_i w(t) \end{aligned} \quad (4)$$

این رابطه در بخش های بعدی در طراحی رؤیت گر مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

فرض ۳: سیستم (۱) یا سه تایی (E, A, B) کنترل پذیر کامل (Completely Controllable) است. به عبارت دیگر:

$$\text{rank}[sE - A \ B] = n, \forall s \in \mathbb{C}, s \text{ finite} \quad (5)$$

$$\text{و همچنین } \text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E) \quad [43]$$

حال رؤیت گر مقاوم دینامیکی توسعه یافته (Generalized Dynamic Robust Observer) با درجه q که در آن $0 \leq q \leq n$ است به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= N\xi(t) + Hv(t) + F \begin{bmatrix} -\emptyset Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t) \\ \dot{v}(t) &= S\xi(t) + Lv(t) + M \begin{bmatrix} -\emptyset Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\ \hat{x}(t) &= P\xi(t) + Q \begin{bmatrix} -\emptyset Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

به طوری که $\xi(t) \in \mathbb{R}^q$ بردار حالت رؤیت گر، $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار تخمین حالت های $x(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$ و $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$ یک بردار کمکی هستند. همچنین $P \in \mathbb{R}^{n \times q}, M \in \mathbb{R}^{q_1 \times (r+p)}, L \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1}, S \in \mathbb{R}^{q_1 \times q}, J \in$

از ضرایب رؤیت گر به صورت پارامتری تعیین می شود. در بخش سوم کنترل کننده تعریف شده و سیستم حلقه بسته در حضور اغتشاش فرموله خواهد شد. با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب شرط لازم و کافی برای وجود هم زمان رؤیت گر و کنترل کننده بررسی خواهد شد و محدودیت های لازم برای پایدار بودن رؤیت گر و مجاز شدن سیستم حلقه بسته به نامعادلات ماتریسی خطی (LMI) تبدیل می شوند. با حل نامعادلات ماتریسی خطی می توان به ضرایب کنترل کننده و باقیمانده ضرایب رؤیت گر دست یافت. در پایان الگوریتمی برای محاسبه پارامترهای رؤیت گر و کنترل گر ارائه شده است. در بخش چهارم با ارائه یک مثال و مقایسه نتایج آن با یک رؤیت گر تناسبی، عملکرد روش پیشنهادی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲- تعریف مسئله و طراحی رؤیت گر

سیستم تکین خطی غیر متغیر با زمان زیر را که دارای نامعینی در ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و ماتریس خروجی است در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + D_i w(t) \\ y(t) &= (C + \Delta C)x(t) + D_o w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z w(t) \end{aligned} \quad (1)$$

به طوری که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار نیمه حالت (Semi-State) $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی معلوم، $w(t) \in \mathbb{R}^d$ بردار ورودی اغتشاش، $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی قابل اندازه گیری (Measured Output)، $z(t) \in \mathbb{R}^s$ خروجی کنترل شده (Controlled Output)، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, E \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D_i \in \mathbb{R}^{n \times d}, D_o \in \mathbb{R}^{p \times d}, C_z \in \mathbb{R}^{s \times n}, D_z \in \mathbb{R}^{s \times d}$ ماتریس های معلوم و ثابت، و $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ ماتریس های نامعینی با ابعاد مناسب هستند. ماتریس مربعی E می تواند تکین باشد یعنی $\text{Rank}(E) \leq n$. همچنین فرض می کنیم $\det(sE - A) \neq 0$ ، این فرض به این معناست که سیستم (۱) منظم است یعنی یک پاسخ منحصربه فرد دارد [۱] و نامعینی به گونه ای است که این فرض را نقض نمی کند. اکنون چند فرض که در ادامه به آن ها نیاز داریم را مورد بررسی قرار می دهیم.

فرض ۱: نامعینی های $\Delta B, \Delta A$ و ΔC از نوع نامعینی محدود ساختاریافته (Structured Bounded Uncertainty) هستند [۴۳]، یعنی $\Delta C = M_C \Lambda_C(t) N_C$ و $\Delta B = M_B \Lambda_B(t) N_B$ ، $\Delta A = M_A \Lambda_A(t) N_A$ بطوریکه $M_C, N_C, M_B, N_B, M_A, N_A$ ماتریس های ثابت و معلوم با ابعاد مناسب هستند. همچنین $\Lambda_A^T(t) \Lambda_A(t) \leq I$ ، $\Lambda_B^T(t) \Lambda_B(t) \leq I$ و $\Lambda_C^T(t) \Lambda_C(t) \leq I$ می باشد.

فرض ۲: فرض می کنیم سیستم (۱) رؤیت پذیر ضربه (Impulse observable) باشد، به این معنی که توانایی تشخیص رفتار ضربه در حالت های سیستم، از روی رفتار ضربه در خروجی سیستم، به صورت منحصربه فرد تضمین شده است [۱]. به عبارت دیگر [۴۴-۴۵]:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= \dot{\xi}(t) - TE\dot{x}(t) \\ &= N\xi(t) + Hv(t) + F \begin{bmatrix} -\phi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t) \\ &\quad - T((A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) \\ &\quad + D_i w(t))\end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن $NTE\dot{x}(t)$ به سمت راست معادله بالا و استفاده از (۴) روابط زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= N\varepsilon(t) + Hv(t) + \left(NTE - TA + F \begin{bmatrix} \phi A \\ C \end{bmatrix} \right) x(t) \\ &\quad + (J - TB)u(t) \\ &\quad + \left(F \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} - T\Delta A \right) x(t) \\ &\quad - T\Delta Bu(t) \\ &\quad + \left(F \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} - TD_i \right) w(t)\end{aligned}\quad (7)$$

اکنون با اعمال شرایط ۱ و ۲ به (۷)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= N\varepsilon(t) + Hv(t) + \left(F \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} - T\Delta A \right) x(t) \\ &\quad - T\Delta Bu(t) \\ &\quad + \left(F \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} - TD_i \right) w(t)\end{aligned}\quad (8)$$

از طرف دیگر با اضافه و کم کردن $STE\dot{x}(t)$ به سطر دوم (۶) و اعمال (۴) به آن داریم:

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= S\varepsilon(t) + Lv(t) + \left(STE + M \begin{bmatrix} \phi A \\ C \end{bmatrix} \right) x(t) + M \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} x(t) \\ &\quad + M \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} w(t)\end{aligned}$$

که با شرط ۳ می توان آن را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= S\varepsilon(t) + Lv(t) + M \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} x(t) \\ &\quad + M \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} w(t)\end{aligned}\quad (9)$$

معادلات (۸) و (۹) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N & H \\ S & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} - T\Delta A \\ M \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} \end{bmatrix} x \\ &\quad + \begin{bmatrix} -T\Delta B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} F \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} - TD_i \\ M \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} \end{bmatrix} w(t)\end{aligned}\quad (10)$$

به طور مشابه برای سطر سوم (۶) می توانیم رابطه زیر را به دست آوریم:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= P\varepsilon(t) + \left(PTE + Q \begin{bmatrix} \phi A \\ C \end{bmatrix} \right) x(t) + Q \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} x(t) \\ &\quad + Q \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} w(t)\end{aligned}$$

و با بهره گیری از شرط ۴ معادله فوق به صورت زیر خواهد شد:

$Q \in \mathbb{R}^{n \times (r+p)}$ و $\mathbb{R}^{q \times m}, F \in \mathbb{R}^{q \times (r+p)}, H \in \mathbb{R}^{q \times q_1}, N \in \mathbb{R}^{q \times q}$
ماتریس های ثابتی هستند که باید از روی ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ به گونه ای تعیین شوند که به ازای هر شرط اولیه برای $x(0)$ و $\xi(0)$ و هر ورودی $u(t)$ خطای تخمین به صورت مجانبی به صفر میل کند، یا $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$ و کنترل کننده $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ به شکلی محاسبه شود تا سیستم حلقه بسته مجاز باشد، یعنی $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

تذکر: در مقالات دیگری مانند [۴۷] و [۴۸] طراحی کنترل کننده بر پایه رؤیت گر برای سیستم تکین با حضور نامعینی و اغتشاش مورد بررسی قرار گرفته اند. تفاوت عمده روش ارائه شده در این مقاله نوع و ساختار رؤیت گر پیشنهاد شده در (۶) است. رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته که در این مقاله پیشنهاد شده است دارای برتری هایی در مقایسه با رؤیت گر تکین ارائه شده در تحقیقات قبلی است که به چند مورد آن اشاره می شود. ۱- در رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته به دلیل وجود بخش انتگرالی، تضمین می شود که خطای تخمین در حضور اغتشاش ثابت صفر خواهد شد و سرعت همگرایی خطا به صفر، در مقایسه با رؤیت گر تناسبی بیشتر است. ۲- رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته می تواند درجه دینامیک پایین تری در مقایسه با رؤیت گر تکین تناسبی داشته باشد. ۳- در رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته قابلیت انعطاف در انتخاب نوع رؤیت گر وجود دارد و با انتخاب ضرایب می توان یک رؤیت گر تناسبی و یا تناسبی-انتگرالی داشته باشیم. بنابراین دقت و سرعت تخمین در رؤیت گر پیشنهاد شده در این مقاله در مقایسه با [۴۷] و [۴۸] می تواند بهتر باشد.

قضیه زیر شرایط وجود جواب و پایداری رؤیت گر (۶) را ارائه می کند.

قضیه ۱: در صورتی که فرض ۲ و ۳ وجود داشته باشند، معادلات (۶) یک رؤیت گر پایدار برای سیستم تکین (۱) است به طوری که $\hat{x}(t)$ به طور مجانبی به $x(t)$ همگرا می شود اگر ماتریس با ابعاد مناسب T وجود داشته باشد تا شرایط زیر را برآورده کند:

$$NTE + F \begin{bmatrix} \phi A \\ C \end{bmatrix} - TA = 0 \quad (1)$$

$$TB - J = 0 \quad (2)$$

$$STE + M \begin{bmatrix} \phi A \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

$$PTE + Q \begin{bmatrix} \phi A \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (4)$$

$$\begin{aligned}(5) \quad \text{ماتریس } \begin{bmatrix} N & H \\ S & L \end{bmatrix} \text{ در شرایط } w(t) = 0 \text{ و } \begin{bmatrix} A_A(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_B(t) & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_C(t) \end{bmatrix} = 0 \text{ هرویز باشد.}\end{aligned}$$

اثبات: سیگنال $\varepsilon(t)$ به صورت $\varepsilon(t) = \xi(t) - TE\dot{x}(t)$ تعریف می شود که در آن ماتریس ثابت طراحی است. با مشتق گیری از $\varepsilon(t)$ روی مسیر اولین سطر از معادلات (۱) و (۶) داریم:

$$S + DA(t)H + H^T \Lambda(t)^T D^T < 0 \quad (۱۲)$$

$$S + \alpha DD^T + \alpha^{-1} H^T H < 0 \quad \text{for some } \alpha > 0 \quad (۱۳)$$

$$\hat{x}(t) - x(t) = P\varepsilon(t) + Q \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \\ \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} x(t) + Q \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} w(t) \quad (۱۱)$$

لم ۳ [۵۱]: لم حذف (Elimination Lemma) بیان می کند که اگر ماتریس های $\mathcal{D} = \mathcal{D}^T, \mathcal{C}, B$ با ابعاد مناسب وجود داشته باشند، آنگاه دو جمله زیر باهم معادل هستند:

الف) ماتریس $\mathcal{K}$ با ابعاد مناسب وجود دارد که رابطه $BKC + (BKC)^T + \mathcal{D} < 0$ را برآورده می کند.

ب) دو شرط $\mathcal{C}^T \mathcal{D} \mathcal{C}^{T^T} < 0$ و $B^T \mathcal{D} B^{T^T} < 0$ هم زمان باهم وجود دارند.

در لم ۳ $(\cdot)^\perp$ نماد یک ماتریس با بیشترین رتبه سطری است که $(\cdot)^\perp (\cdot) = 0$ را ارضاء می کند و به آن مکمل متعارف (Orthogonal Complement) میگویند.

روابط قسمت (ب) در لم ۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید r_c و r_b به ترتیب رتبه ماتریس های B و $\mathcal{C}$ باشد و B_l, B_r و $\mathcal{C}_l, \mathcal{C}_r$ فاکتورهایی با رتبه کامل از B و $\mathcal{C}$ باشند به گونه ای که $B = B_l B_r$ و $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \mathcal{C}_r$ ، آنگاه ماتریس $\mathcal{K}$ در جمله (الف) از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\mathcal{K} = (B_r^\dagger X \mathcal{C}_l^\dagger + Z - B_r^\dagger B_r Z \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^\dagger)^T \quad (۱۴)$$

که در آن Z یک ماتریس دلخواه است و

$$X = -\mathcal{R}^{-1} B_l^\dagger \mathcal{V} \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \mathcal{V} \mathcal{C}_r^T)^{-1} + \mathcal{S}^{1/2} \mathcal{L} (\mathcal{C}_r \mathcal{V} \mathcal{C}_r^T)^{-1/2}$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} B_l^\dagger [\mathcal{V} - \mathcal{V} \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \mathcal{V} \mathcal{C}_r^T)^{-1} \mathcal{C}_r \mathcal{V}] B_l \mathcal{R}^{-1}$$

و $\mathcal{L}$ نیز یک ماتریس دلخواه است که شرط $\|\mathcal{L}\|_2 < 1$ را برآورده می کند و همچنین $\mathcal{R}$ یک ماتریس دلخواه مثبت معین است که رابطه زیر را تأمین می کند:

$$\mathcal{V} = (B_r \mathcal{R}^{-1} B_l^T - \mathcal{D})^{-1} > 0$$

اکنون می خواهیم تعدادی از ماتریس های رؤیت گر را به صورت پارامتری تعیین کنیم تا شرایط ۱ تا ۴ قضیه ۱ برآورده شود [۲۵].

لم ۴ [۲۵ و ۵۲]: فرض کنید $R \in \mathbb{R}^{q \times n}$ یک ماتریس با رتبه کامل

سطری باشد که $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ \emptyset A \\ C \end{bmatrix}$ را تبدیل به ماتریسی با رتبه کامل ستونی

می کند؛ همچنین $\Omega = \begin{bmatrix} E \\ \emptyset A \\ C \end{bmatrix}$ تعریف شده است. اکنون اگر فرض ۳

وجود داشته باشد و شرایط ۱ تا ۴ از قضیه ۱ برقرار باشد آنگاه فرم کلی ماتریس های Q, P, M, S, F, N, T و J به صورت زیر به دست خواهد آمد:

که معادل خطای تخمین رؤیت گر است. اکنون اگر شرط ۵ وجود داشته باشد، یعنی $w(t) = 0$ و $\begin{bmatrix} \Lambda_A(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_B(t) & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_C(t) \end{bmatrix} = 0$ و $\begin{bmatrix} N & H \\ S & L \end{bmatrix}$ هرویتر باشد، در (۱۰) خواهیم داشت $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \rightarrow 0$ و همان طور که در (۱۱) دیده می شود نتیجه این است که خطای تخمین رؤیت گر به طور مجانبی به صفر میل خواهد کرد. به عبارت دیگر $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$ و اثبات کامل می شود. $\square$

در ادامه بر اساس شرط های ۱ تا ۴ قضیه ۱ می توان یک حل پارامتری برای تعدادی از ماتریس های رؤیت گر به دست آورد. در قضیه فوق شرط ۵ در شرایط $w(t) = 0$ و $\begin{bmatrix} \Lambda_A(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_B(t) & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_C(t) \end{bmatrix} = 0$ بررسی گردید، در حالی که سیستم هم دارای نامعینی و هم دارای اغتشاش در نظر گرفته شده است. بنابراین باید محاسبات به گونه ای انجام شود که معادله دینامیکی (۱۰) در هر شرایطی پایدار مقاوم باشد و بر اساس آن باقیمانده ضرایب رؤیت گر و کنترل گر محاسبه خواهند شد. پیش از آن چند تعریف و لم را بیان می کنیم.

تعریف ۱: (معکوس انتزاعی) (Generalized Inverse) [۴۹]

ماتریس $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times m}$ مفروض است. اگر $\text{rank}(\Omega) = m$ باشد آنگاه $\Omega^\dagger \Omega = I$ و ارون از چپ Ω است اگر رابطه $\Omega^\dagger \Omega = I$ را برآورده کند. همچنین اگر $\text{rank}(\Omega) = n$ باشد، آنگاه $\Omega^\dagger$ و ارون از راست Ω است اگر $\Omega^\dagger \Omega = I$ باشد. در هر دو حالت و ارون از راست و و ارون از چپ رابطه $\Omega \Omega^\dagger \Omega = \Omega$ صادق است.

لم ۱ [۵۰]: معادله $\bar{A}X = \bar{B}$ مفروض است که در آن $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ماتریس های ثابت و $X \in \mathbb{R}^{m \times p}$ برداری است که باید مشخص شود. این معادله دارای جواب است اگر و فقط اگر $\bar{B}$ عضو فضای رنج $\bar{A}$ باشد. به عبارت دیگر $\text{rank}(\bar{A}) = \text{rank}[\bar{A} \quad \bar{B}]$ در این صورت جواب عمومی معادله فوق به صورت $X = \bar{A}^\dagger \bar{B} - (I - \bar{A}^\dagger \bar{A})Z$ خواهد بود. همچنین به طور مشابه پاسخ عمومی برای معادله $X\bar{A} = \bar{B}$ به صورت $X = \bar{B}\bar{A}^\dagger - Y(I - \bar{A}\bar{A}^\dagger)$ می باشد که Z و Y ماتریس های دلخواه با ابعاد مناسب هستند.

لم ۲ [۳۳]: ماتریس های ثابت D, H و ماتریس متقارن و ثابت S با ابعاد مناسب مفروض هستند. همچنین فرض می کنیم ماتریس ثابت و نامعلوم $\Lambda(t)$ با ابعاد مناسب به گونه ای وجود داشته باشد که شرط $\Lambda(t)^T \Lambda(t) \leq I$ را برآورده کند. در این صورت دو رابطه زیر معادل یکدیگر هستند:

اکنون فیدبک حالت $u(t) = -\kappa \hat{x}(t)$ را برای سیستم تکین (۱) در نظر بگیریم:

$$u(t) = -\kappa \hat{x}(t) = -\kappa(P\varepsilon(t) + x(t) + Q \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} x(t) + Q \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} w(t))$$

با جاگذاری آن در (۱) و استفاده از (۴) سیستم حلقه بسته به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} E\dot{\hat{x}}(t) &= [A - B\kappa \quad -B\kappa P] \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \\ &+ \left[\Delta A - \Delta B\kappa - B\kappa Q \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} - \Delta B\kappa Q \begin{bmatrix} \phi \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} \quad -\Delta B\kappa P \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \\ &+ \left(D_i - B\kappa Q \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} - \Delta B\kappa Q \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} \right) w(t) \end{aligned}$$

با استفاده از تعاریف موجود در فرض ۱ و روابط (۲۰) و (۲۱) معادله فوق را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} E\dot{\hat{x}}(t) &= [A - B\kappa \quad -B\kappa P_1] \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + \\ &\left(\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{bmatrix} \tau(t) \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + (D_i - \\ &B\kappa Q_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix}) w(t) - M_B \Lambda_B N_B \kappa Q_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} M_A - (B + M_B N_B) \kappa Q_1 \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \\ -(B + M_B N_B) \kappa Q_1 \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \\ M_B \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\Pi_2 = -M_B \quad (25)$$

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} N_A \\ N_C \\ N_B \kappa \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = N_B \kappa P_1 \quad (26)$$

و $\tau(t)$ یک ماتریس نامعین متغیر بازمان است که در شرط $\tau^T(t)\tau(t) \leq I$ صدق می کند. به عبارت دیگر در بازنویسی بالا سعی شده است بخش های معلوم و بخش های دارای نامعینی در معادلات به طور جداگانه دسته بندی شوند.

از سوی دیگر با جاگذاری فیدبک حالت در (۸) و فرض ۱ و نتایج لم ۴ داریم:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= N\varepsilon(t) + H v(t) \\ &+ \left(\begin{bmatrix} \Pi_3 & \Pi_4 \end{bmatrix} \tau(t) \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \\ &+ T M_B \Lambda_B N_B \kappa Q_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} w(t) \\ &+ \left(F \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} - T D_i \right) w(t) \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \begin{bmatrix} -T_1 M_A + (F_1 - Y_1 F_3 + T_1 M_B N_B \kappa Q_1) \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \\ (F_1 - Y_1 F_3 + T_1 M_B N_B \kappa Q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \\ T_1 M_B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -T_1 M_A + (F_1 - Y_1 F_3 + T_1 M_B N_B \kappa Q_1) \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \\ (F_1 - Y_1 F_3 + T_1 M_B N_B \kappa Q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \\ T_1 M_B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

$$T = T_1 - Z_1 T_2 \quad (15)$$

$$T_1 = R\Omega^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = (I_{n+r+p} - \Omega\Omega^+) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} N &= N_1 - Z_1 N_2 - Y_1 N_3 \\ N_1 &= T_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, N_2 = T_2 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, N_3 \\ &= (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} F &= F_1 - Z_1 F_2 - Y_1 F_3 \\ F_1 &= T_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, F_2 = T_2 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, F_3 \\ &= (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} K &= K_1 - Z_1 K_2 \\ K_1 &= R\Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, K_2 = (I_{n+r+p} - \Omega\Omega^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r+p} \end{bmatrix} \\ S &= -Y_2 N_3 \end{aligned} \quad (19)$$

$$M = -Y_2 F_3 \quad (20)$$

$$P = P_1 - Y_3 N_3 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \\ Q &= Q_1 - Y_3 F_3 \\ Q_1 &= \Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

$$J = T B \quad (23)$$

که در آن ها Z, Y_1, Y_2 و Y_3 ماتریس های ثابت دلخواه با ابعاد مناسب هستند که با انتخاب آن ها می توان ماتریس های رؤیت گر را تعیین کرد. برای ساده شدن محاسبات و با توجه به اینکه Z_1 و Y_3 تأثیری در محاسبات بعدی ندارند آن ها را صفر در نظر می گیریم. ماتریس های Y_1 و Y_2 در روابط (۱۵) تا (۱۹) می توانند به طور دلخواه انتخاب شوند ولی همان طور که بعداً ملاحظه خواهد شد این ماتریس ها به همراه ماتریس های H و L در تحقق شرط ۵ قضیه ۱ و مجاز بودن سیستم حلقه بسته مؤثر هستند و باید به گونه ای تعیین شوند تا این خواسته ها را برآورده کنند.

۳- طراحی کنترل کننده مبتنی بر رؤیت گر

اکنون هدف طراحی کنترل کننده مقاوم H_∞ است که با استفاده از حالت های تخمین زده شده توسط رؤیت گر به گونه ای عمل کند که سیستم تکین (۱) در حالت حلقه بسته مجاز (Admissible) باشد. مجاز بودن در سیستم های تکین حالت کلی تری از پایداری را شامل می شود، به این معنی که سیستم (۱) مجاز است اگر سه ویژگی داشته باشد: الف) منظم باشد. ب) پاسخ آن بدون ضربه باشد. ج) تمامی قطب های محدود آن در LHP باشد [۷ و ۱].

لم ۵ [۵۳]: زوج (E, A) مجاز است اگر و فقط اگر ماتریس ناویژه P وجود داشته باشد تا $P^T E = P^T A + A^T P < 0$ و $E^T P = P^T E \geq 0$ باشد.

و

$$\mathbb{B}_2 = \text{و } \mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix} -T_1 D_i + F_1 \left[\frac{\phi D_i}{D_o} \right] \\ 0 \end{bmatrix} \text{ با تعریف } \Theta_5 = \begin{bmatrix} T_1 M_B \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و}$$

و با کمک (۳۳) و (۳۴) ضرایب سیستم دینامیکی (۳۲) به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} A - B\kappa & [-B\kappa P_1 & 0] \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbb{A}_1 - \mathbb{Y}\mathbb{A}_2 \end{bmatrix}, M_{\mathbb{A}} \\ &= \begin{bmatrix} & \Pi_1 & & \Pi_2 & 0 \\ \begin{bmatrix} \theta_1 - \mathbb{Y}\theta_2 & \theta_3 - \mathbb{Y}\theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix} & & \Pi_4 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{B} \\ &= \begin{bmatrix} D_i - B\kappa Q_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} \\ \mathbb{B}_1 - \mathbb{Y}\mathbb{B}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و ضرایب دیگر مانند روابط بعد از (۳۲) باقی می ماند. ملاحظه می شود که ضرایب بر حسب دو مجهول $\mathbb{Y}$ و $\mathcal{K}$ دسته بندی شده اند.

اکنون مسئله طراحی کنترل گر بر پایه رؤیت گر به مسئله یافتن دو مجهول $\mathbb{Y}$ و $\mathcal{K}$ تبدیل شده است تا:

الف) سیستم (۳۲) در حالتی که $w(t) = 0$ است پایدار مجانبی باشد و حالت‌های آن یعنی $\mathbb{X}(t)$ به سمت صفر میل کند که در نتیجه آن خروجی کنترل‌شده سیستم $z(t)$ به سمت صفر میل کند.

(ب) سیستم (۳۲) در حالتی که $w(t) \neq 0$ است پایدار مقاوم باشد و $\sup_{u \neq 0} \frac{\|z\|}{\|w\|} = \|G_{zw}\|_{\infty} < \lambda$ که در آن G_{zw} تابع انتقال از ورودی اغتشاش به خروجی کنترلی سیستم و $\lambda > 0$ یک اسکالر است. این شرط معادل این است که تابع هزینه زیر به ازای تمامی $w(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ دارای مقدار منفی باشد (۵۵-۵۴) یعنی:

$$J = \int_0^\infty [z(t)^T z(t) - \lambda^2 w(t)^T w(t)] dt < 0 \quad (35)$$

قضیه زیر راه حل این مسئله را ارائه می دهد.

قضیه ۲: در صورتی که فرض‌های ۱، ۲ و ۳ برقرار باشند، مجموعه
معادلات

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= N\xi(t) + H\nu(t) + F \begin{bmatrix} -\Phi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t) \\ \dot{\nu}(t) &= S\xi(t) + L\nu(t) + M \begin{bmatrix} -\Phi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\hat{x}(t) = P\xi(t) + Q \begin{bmatrix} -\phi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -\kappa \hat{x}(t)$$

یک کنترل گر بر پایه ر‌ویت گر مقاوم توسعه یافته برای سیستم تکین (۱) است که (۳۲) را مجاز می کند اگر و فقط اگر ماتریس نا ویژه $\mathbb{P}_1$ و ماتریس مثبت متقارن $\mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21}^T & \mathbb{P}_{21} \\ \mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{22} \end{bmatrix}$ که در آن $\mathbb{P}_{21} = (\mathbb{P}_{21})^T$ وجود داشته باشد تا نامعادلات ماتریسی خطی زیر برقرار باشند.

$$\mathbb{P}_1 E^T = E \mathbb{P}_1^T \geq 0 \quad (37)$$

9

$$\Pi_4 = T_1 M_B \quad (29)$$

همچنین با انجام عملیات مشابه و دسته‌بندی بخش‌های معلوم و بخش‌های دارای نامعنی، روی (۹) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = & S\varepsilon(t) + Lv(t) + (\Pi_5\tau(t)\varphi_2)x(t) \\ & + M \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (3.)$$

کے

$$\Pi_5 = \begin{bmatrix} -Y_2 F_3 \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} & -Y_2 F_3 \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

حال سه معادله (۲۳)، (۲۷) و (۳۰) را می‌توان به صورت یک سیستم حلقه بسته با ورودی اغتشاش به صورت زیر بازنویم، کرد:

$$\mathbb{E}\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\mathbf{X}(t) + (\mathbb{B} + \Delta\mathbb{B})w(t) \quad (32)$$

$$z(t) = \mathbb{C}X(t) + \mathbb{D}w(t)$$

$$\mathbb{A} = \mathbb{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{و } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} A - B\kappa & -B\kappa P_1 & 0 \\ 0 & N & H \\ 0 & S & L \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} D_i - B\kappa Q_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} \\ -TD_i + F \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} \\ M \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad N_A = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & 0 \\ \Pi_3 & \Pi_4 & 0 \\ \Pi_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \iota N_{\mathbb{B}} = N_B K Q_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} \quad \iota M_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} -M_B \\ TM_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_{\mathbb{B}} = M_{\mathbb{B}} \Gamma(t) N_{\mathbb{B}}$$

است با ابعاد مناسب است که در شرط $\Gamma^T(t)\Gamma(t) \leq I$ صدق می کند.

در (۳۲) تعدادی از ضرایب رؤیت گر و همچنین بهره فیدبک حالت کنترل گر K مجهول هستند. از سوی دیگر با توجه به $\ell_m = 4$ ملاحظه می شود که ضرایب رؤیت گر به صورت پارامتری برحسب ماتریس های ثابت دلخواه Y_1 و Y_2 قابل محاسبه هستند. اکنون با بازنویسی ضرایب (۳۲) سعی می کنیم تمامی مجهولات را برحسب ماتریس های Y_1 و Y_2 کنترل گر K به صورت زیر مرتب کنیم.

$$\begin{bmatrix} N & H \\ S & I \end{bmatrix} = A_1 - Y A_2 \quad (33)$$

به طوری که $\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ و $\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & H \\ Y_2 & L \end{bmatrix}$ است. همچنین

$$\begin{bmatrix} \Pi_3 \\ \Pi_- \end{bmatrix} = [\theta_1 - \mathbb{Y}\theta_2 \quad \theta_3 - \mathbb{Y}\theta_4 \quad \theta_5] \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Theta_2 = \quad & \Theta_1 = \begin{bmatrix} -T_1 M_A + (F_1 + T_1 M_B N_B \kappa Q_1) \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \\ \Theta_4 = \begin{bmatrix} F_3 \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad & \Theta_3 = \begin{bmatrix} (F_1 + T_1 M_B N_B \kappa Q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[F_3 \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21}(F_1 \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix}) \\ \mathbb{P}_{21}(F_1 \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix}) \end{bmatrix} - \mathbb{P}_Y \begin{bmatrix} F_3 \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\Sigma_4 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21}(T_1 M_B) \\ \mathbb{P}_{21}(T_1 M_B) \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\Sigma_5 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21}(-T_1 D_i + F_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix}) \\ \mathbb{P}_{21}(-T_1 D_i + F_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix}) \end{bmatrix} - \mathbb{P}_Y \begin{bmatrix} F_3 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathcal{C}^{T\perp} = \begin{bmatrix} (\mathcal{C}^{T\perp})_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathcal{C}^{T\perp})_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (N_B^T)^{\perp} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$(\mathcal{C}^{T\perp})_{11} = \left(\begin{bmatrix} -B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_B N_B & 0 \\ 0 & T_1 M_B N_B \end{bmatrix} \right)^{\perp} \quad (50)$$

$$(\mathcal{C}^{T\perp})_{33} = \left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_B^T \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} N_B^T \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right)^{\perp} \quad (51)$$

$$\mathcal{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} (\mathcal{B}^{\perp})_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathcal{B}^{\perp})_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\mathcal{B}^{\perp})_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$(\mathcal{B}^{\perp})_{11} = \left(0 \begin{bmatrix} (P_1)^T \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{\perp} \quad (53)$$

$$(\mathcal{B}^{\perp})_{22} = \left(\begin{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \\ Q_1 \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{\perp} \quad (54)$$

$$(\mathcal{B}^{\perp})_{55} = \left(Q_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} \right)^{\perp} \quad (55)$$

همچنین $\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_2 \mathbb{Y}$ است. در این حالت کنترل گر $\mathcal{K}$ را می توان از رابطه (۱۴) در لم ۳ به دست آورد، که در آن:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & (*) & (*) \\ \mathcal{D}_{21} & -\alpha_1 I & 0 \\ \mathcal{D}_{31} & 0 & -\alpha_1^{-1} I \\ \mathcal{D}_{41} & 0 & 0 & \dots \\ ([D_i]^T \quad \Sigma_5^T) & 0 & 0 \\ (C_Z \mathbb{P}_1^T \quad [0 \quad 0]) & 0 & 0 \\ (0 \quad 0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathcal{C}^{T\perp} \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & (*) & (*) \\ \mathcal{D}_{21} & -\alpha_1 I & 0 \\ \mathcal{D}_{31} & 0 & -\alpha_1^{-1} I \\ \mathcal{D}_{41} & 0 & 0 & \dots \\ ([D_i]^T \quad \Sigma_5^T) & 0 & 0 \\ (C_Z \mathbb{P}_1^T \quad [0 \quad 0]) & 0 & 0 \\ (0 \quad 0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & 0 \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} \mathcal{C}^{T\perp T} < 0$$

و

$$\mathcal{B}^{\perp} \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & (*) & (*) \\ \mathcal{D}_{21} & -\alpha_1 I & 0 \\ \mathcal{D}_{31} & 0 & -\alpha_1^{-1} I \\ \mathcal{D}_{41} & 0 & 0 & \dots \\ ([D_i]^T \quad \Sigma_5^T) & 0 & 0 \\ (C_Z \mathbb{P}_1^T \quad [0 \quad 0]) & 0 & 0 \\ (0 \quad 0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & 0 \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} \mathcal{B}^{\perp T} < 0$$

که در آن ها:

$$\mathcal{D}_{11} = \begin{pmatrix} A \mathbb{P}_1^T + \mathbb{P}_1 A^T & 0 \\ 0 & \Sigma_1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$\mathcal{D}_{21} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} M_A^T \\ 0 \\ M_B^T \\ -M_B^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Sigma_2^T \\ \Sigma_3^T \\ \Sigma_4^T \\ [\Theta_5]^T \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\mathcal{D}_{31} = \begin{pmatrix} \varphi_{1s} \mathbb{P}_1^T & [0 \quad 0] \\ [0] & [0 \quad 0] \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\mathcal{D}_{41} = \begin{pmatrix} -M_B^T & [0 \quad 0] \\ [0] & [\Sigma_4^T] \\ [0] & [0] \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21} N_1 + N_1^T \mathbb{P}_{21} & N_1^T \mathbb{P}_{21} \\ \mathbb{P}_{21} N_1 & 0 \\ & -\mathbb{P}_Y \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \\ & -\begin{bmatrix} N_3^T & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \mathbb{P}_Y^T \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21}(-T_1 M_A + F_1 \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix}) \\ \mathbb{P}_{21}(-T_1 M_A + F_1 \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix}) \\ -\mathbb{P}_Y \begin{bmatrix} F_3 \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (45)$$

سمت راست معادله (۶۱) را می توان با استفاده از مکمل شر (Schur Complement) [۵۶] به صورت زیر به شکل ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{X}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{G} & \mathbb{C}^T \mathbb{D} + \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{B} \\ \mathbb{D}^T \mathbb{C} + \mathbb{B}^T \bar{\mathbb{P}} & \mathbb{D}^T \mathbb{D} - \lambda^2 I + \alpha_2 N_{\mathbb{B}}^T N_{\mathbb{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{X}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathbb{G} = \mathbb{A}^T \bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{A} + \alpha_1^{-1} \bar{\mathbb{P}}^T M_{\mathbb{A}} M_{\mathbb{A}}^T \bar{\mathbb{P}} + \alpha_1 N_{\mathbb{A}}^T N_{\mathbb{A}} + \alpha_2^{-1} \bar{\mathbb{P}}^T M_{\mathbb{B}} M_{\mathbb{B}}^T \bar{\mathbb{P}} + \mathbb{C}^T \mathbb{C}$$

که نتیجه خواهد داد:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}^T \bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{A} & (*) & (*) \\ M_{\mathbb{A}}^T \bar{\mathbb{P}} & -\alpha_1 I & 0 \\ N_{\mathbb{A}} & 0 & -\alpha_1^{-1} I \\ M_{\mathbb{B}}^T \bar{\mathbb{P}} & 0 & 0 & \dots \\ \mathbb{B}^T \bar{\mathbb{P}} & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & (*) \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & N_{\mathbb{B}} & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (62)$$

(*) نشان دهنده ترانواده در آیه ای است که در موقعیت قرینه قرار دارد.

اکنون با جاگذاری روابط قبلی در (۶۲) و ضرب آن از سمت چپ در

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbb{P}}_1^{-T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{P}}_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

و از سمت راست در

$$\mathbb{P}_1 = \text{و همچنین یادآوری این که}$$

(۶۲)، $(\bar{\mathbb{P}}_1)^{-T}$ به نامعادله زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & (*) & (*) \\ \psi_{21} & -\alpha_1 I & 0 \\ \psi_{31} & 0 & -\alpha_1^{-1} I \\ \psi_{41} & 0 & 0 & \dots \\ \psi_{51} & 0 & 0 \\ \psi_{61} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & (*) \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & N_{\mathbb{B}} & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (63)$$

$$\Psi_{11} = \begin{pmatrix} (A - B\kappa)\mathbb{P}_1^T + \mathbb{P}_1(A - B\kappa)^T & \dots \\ \begin{bmatrix} (-B\kappa P_1)^T \\ 0 \end{bmatrix} & \dots \\ \dots & \mathbb{P}_2(\mathbb{A}_1 - \mathbb{Y}\mathbb{A}_2) + (\mathbb{A}_1 - \mathbb{Y}\mathbb{A}_2)^T \mathbb{P}_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & 0 \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix}$$

اثبات: تابع لیپانوف مثبت معین زیر را در نظر بگیرید:

$$V(\mathbb{X}(t)) = \mathbb{X}^T(t) E^T \bar{\mathbb{P}} \mathbb{X}(t) \quad (57)$$

که $\mathbb{P}_2 = (\mathbb{P}_2)^T = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{21} \\ \mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{22} \end{bmatrix}$ ، $\bar{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{P}}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_2 \end{bmatrix}$ فرض شده است $E^T \bar{\mathbb{P}} = \bar{\mathbb{P}}^T E \geq 0$ می توان از آن نتیجه گرفت $\mathbb{P}_1 = (\bar{\mathbb{P}}_1)^{-T}$ که در آن $\mathbb{P}_1 E^T = E(\mathbb{P}_1)^T \geq 0$ است. اکنون از تابع لیپانوف (۵۷) در مسیر سیستم حلقه بسته (۳۲) مشتق می گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbb{X}(t)) &= \dot{\mathbb{X}}^T(t) E^T \bar{\mathbb{P}} \mathbb{X}(t) + \mathbb{X}^T(t) E^T \bar{\mathbb{P}} \dot{\mathbb{X}}(t) \\ &= \mathbb{X}^T(t) (\mathbb{A}^T \bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{A}) \mathbb{X}(t) + \mathbb{X}^T(t) \bar{\mathbb{P}}^T \Delta \mathbb{A} \mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t) \Delta \mathbb{A}^T \bar{\mathbb{P}} \mathbb{X}(t) + \mathbb{X}^T(t) \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{B} w(t) \\ &\quad + w^T(t) \mathbb{B}^T \bar{\mathbb{P}} \mathbb{X}(t) + \mathbb{X}^T(t) \bar{\mathbb{P}}^T \Delta \mathbb{B} w(t) \\ &\quad + w^T(t) \Delta \mathbb{B}^T \bar{\mathbb{P}} \mathbb{X}(t) \\ &= \mathbb{X}^T(t) (\mathbb{A}^T \bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{A}) \mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t) \bar{\mathbb{P}}^T M_{\mathbb{A}} \Gamma(t) N_{\mathbb{A}} \mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t) N_{\mathbb{A}}^T \Gamma^T(t) M_{\mathbb{A}}^T \bar{\mathbb{P}} \mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t) \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{B} w(t) + w^T(t) \mathbb{B}^T \bar{\mathbb{P}} \mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t) \bar{\mathbb{P}}^T M_{\mathbb{B}} \Gamma(t) N_{\mathbb{B}} w(t) \\ &\quad + w^T(t) N_{\mathbb{B}}^T \Gamma^T(t) M_{\mathbb{B}}^T \bar{\mathbb{P}} \mathbb{X}(t) \end{aligned}$$

می دانیم برای پایداری سیستم حلقه بسته باید مشتق تابع لیپانوف انتخاب شده منفی باشد. با این فرض و با استفاده از لم ۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbb{X}(t)) &< 0 \\ \Rightarrow \mathbb{X}^T(t) (\mathbb{A}^T \bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{A}) \mathbb{X}(t) + 2\mathbb{X}^T(t) \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{B} w(t) \\ &+ \alpha_1^{-1} \mathbb{X}^T(t) \bar{\mathbb{P}}^T M_{\mathbb{A}} M_{\mathbb{A}}^T \bar{\mathbb{P}} \mathbb{X}(t) \\ &+ \alpha_1 \mathbb{X}^T(t) N_{\mathbb{A}}^T N_{\mathbb{A}} \mathbb{X}(t) \\ &+ \alpha_2^{-1} \mathbb{X}^T(t) \bar{\mathbb{P}}^T M_{\mathbb{B}} M_{\mathbb{B}}^T \bar{\mathbb{P}} \mathbb{X}(t) \\ &+ \alpha_2 w^T(t) N_{\mathbb{B}}^T N_{\mathbb{B}} w(t) < 0 \end{aligned} \quad (58)$$

که در آن $\alpha_1 > 0$ و $\alpha_2 > 0$ است.

برای اینکه معادله (۳۵) و (۵۸) هم زمان اتفاق بیفتند باید:

$$J < \int_0^\infty [z(t)^T z(t) - \lambda^2 w(t)^T w(t) + \dot{V}(\mathbb{X}(t))] dt < 0 \quad (59)$$

و شرط لازم برای اینکه $J < 0$ باشد این است که:

$$[z(t)^T z(t) - \lambda^2 w(t)^T w(t) + \dot{V}(\mathbb{X}(t))] < 0 \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (60)$$

اکنون با جاگذاری از (۳۲) و (۵۸) در (۶۰) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^T(t) (\mathbb{A}^T \bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{A} + \alpha_1^{-1} \bar{\mathbb{P}}^T M_{\mathbb{A}} M_{\mathbb{A}}^T \bar{\mathbb{P}} + \alpha_1 N_{\mathbb{A}}^T N_{\mathbb{A}} \\ + \alpha_2^{-1} \bar{\mathbb{P}}^T M_{\mathbb{B}} M_{\mathbb{B}}^T \bar{\mathbb{P}} + \mathbb{C}^T \mathbb{C}) \mathbb{X}(t) \\ + \mathbb{X}^T(t) (\mathbb{C}^T \mathbb{D} + \bar{\mathbb{P}}^T \mathbb{B}) w(t) \\ + w^T(t) (\mathbb{D}^T \mathbb{C} + \mathbb{B}^T \bar{\mathbb{P}}) \mathbb{X}(t) \\ + w^T(t) (\mathbb{D}^T \mathbb{D} - \lambda^2 I + \alpha_2 N_{\mathbb{B}}^T N_{\mathbb{B}}) w(t) < 0 \end{aligned} \quad (61)$$

در ماتریس (۶۴) و عملیات ساده سازی، ماتریس $\mathcal{D}$ را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & (*) & (*) \\ \mathcal{D}_{21} & -\alpha_1 I & 0 \\ \mathcal{D}_{31} & 0 & -\alpha_1^{-1} I \\ \mathcal{D}_{41} & 0 & 0 & \dots \\ ([D_i]^T \ \Sigma_5^T) & 0 & 0 \\ (C_Z \mathbb{P}_1^T \ [0 \ 0]) & 0 & 0 \\ (0 \ 0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & 0 \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix}$$

که $\mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{31}, \mathcal{D}_{41}$ و Σ_5 در روابط (۴۰) تا (۴۳) و (۴۸) ارائه شده اند. بنابراین باقیمانده ماتریس سمت چپ نامعادله (۶۳) باید در قالب $BK^T C + (BK^T C)^T$ قرار گیرد. انتخاب های زیر خواسته مورد نظر را تأمین می کند.

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 & B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

که در آیه های آن به صورت $B_{21} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 & (*) \\ [P_1]^T & 0 \end{pmatrix}$ ، $B_{13} = \begin{pmatrix} -Q_1 [\phi D_i]^T & 0 \end{pmatrix}$ ، $B_{31} = \begin{pmatrix} Q_1 [\phi M_A]^T \\ Q_1 [0 \ M_C]^T \end{pmatrix}$ و $B_{34} = \begin{pmatrix} Q_1 [\phi D_i]^T & 0 \\ [P_1] [0 \ 0 \ I] & [0 \ 0] \\ [0] & [P_1^T \ 0] \\ [0] & [0 \ 0] \end{pmatrix}$ استفاده از $\mathbb{P}_2$ و انجام چند عملیات ساده B_{22} را به این شکل خواهیم داشت:

$$B_{22} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 [\phi M_A]^T \\ Q_1 [0 \ M_C]^T \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (Q_1) [\phi M_A]^T \\ 0 \\ (Q_1) [0 \ M_C]^T \end{bmatrix}^T \mathbb{P}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 [\phi M_A]^T \\ Q_1 [0 \ M_C]^T \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21} Q_1 [\phi M_A]^T \\ \mathbb{P}_{21} Q_1 [0 \ M_C]^T \\ \mathbb{P}_{21} Q_1 [0 \ M_C]^T \end{bmatrix}^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$\Psi_{21} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} M_A - (B + M_B N_B) \kappa Q_1 [\phi M_A]^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -(B + M_B N_B) \kappa Q_1 [0 \ M_C]^T \\ M_B^T \\ -M_B^T \end{bmatrix} \\ \dots \begin{bmatrix} [\theta_1 - \mathbb{Y} \theta_2]^T \\ [\theta_3 - \mathbb{Y} \theta_4]^T \\ [\theta_5]^T \end{bmatrix} \mathbb{P}_2 \\ [\theta_5]^T \end{pmatrix},$$

$$\Psi_{31} = \begin{pmatrix} \varphi_{15} \mathbb{P}_1^T & [0 \ 0] \\ [0] & \begin{bmatrix} \varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

$$\Psi_{41} = \begin{pmatrix} -M_B^T & [0 \ 0] \\ [0] & \begin{bmatrix} (T_1 M_B)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{P}_2 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_{51} = \begin{pmatrix} [D_i - B \kappa Q_1 [\phi D_i]^T] & [\mathbb{B}_1 - \mathbb{Y} \mathbb{B}_2]^T \mathbb{P}_2 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_{61} = (C_Z \mathbb{P}_1^T \ [0 \ 0]),$$

حال برای استفاده از لم ۳، (۶۳) را به فرم $BK^T C + (BK^T C)^T + \mathcal{D} < 0$ تبدیل می کنیم به طوری که:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} A \mathbb{P}_1^T + \mathbb{P}_1 A^T & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_2 (\mathbb{A}_1 - \mathbb{Y} \mathbb{A}_2) + (\mathbb{A}_1 - \mathbb{Y} \mathbb{A}_2)^T \mathbb{P}_2 \\ \begin{pmatrix} [M_A]^T \\ 0 \\ M_B^T \\ -M_B^T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} [\theta_{15} - \mathbb{Y} \theta_2]^T \\ [\theta_{35} - \mathbb{Y} \theta_4]^T \\ [\theta_5]^T \end{pmatrix} \mathbb{P}_2 \\ \begin{pmatrix} \varphi_{15} \mathbb{P}_1^T & [0 \ 0] \\ [0] & \begin{bmatrix} \varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} & \dots \\ \begin{pmatrix} -M_B^T & [0 \ 0] \\ [0] & \begin{bmatrix} (T_1 M_B)^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{P}_2 \end{pmatrix} & \\ ([D_i]^T \ [\mathbb{B}_1 - \mathbb{Y} \mathbb{B}_2]^T \mathbb{P}_2) & \\ (C_Z \mathbb{P}_1^T \ [0 \ 0]) & \\ (0 \ 0) & \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 \\ -\alpha_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^{-1} I \end{bmatrix} \quad (64)$$

که در آن $\theta_{35} = \begin{bmatrix} (F_1) [0] \\ (F_1) [M_C] \end{bmatrix}$ ، $\theta_{15} = \begin{bmatrix} -T_1 M_A + (F_1) [\phi M_A]^T \\ 0 \end{bmatrix}$

$\varphi_{15} = \begin{bmatrix} N_A \\ N_C \\ 0 \end{bmatrix}$ بخش های از توابع θ_1 ، θ_3 و φ_1 هستند که متغیر κ در آن ها وجود ندارند. به عبارت دیگر سعی شده است تمام بخش هایی از ماتریس سمت راست (۶۳) که پارامتر κ در آن ها دخالتی ندارد در ماتریس $\mathcal{D}$ دسته بندی شوند. با استفاده از $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & H \\ Y_2 & L \end{bmatrix}$ ، $\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & H \\ Y_2 & L \end{bmatrix}$ ، $\mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{21} \\ \mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{22} \end{bmatrix}$ و تعریف $\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_2 \mathbb{Y}$

گام سوم: ماتریس $R \in \mathbb{R}^{q \times n}$ که یک ماتریس با رتبه کامل سطری

است را محاسبه کنید تا $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ \emptyset A \\ C \end{bmatrix}$ را تبدیل به ماتریسی با رتبه کامل

ستونی کند؛ همچنین $\Omega = \begin{bmatrix} E \\ \emptyset A \\ C \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

گام چهارم: ماتریس های Q, P, T, J را با استفاده از روابط (۱۵) و (۲۰) تا (۲۲) به دست آورید.

گام پنجم: با حل نامعادلات ماتریسی خطی (۳۷) تا (۳۹) ماتریس های $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_{21}$ و $\mathbb{P}_Y$ را به دست آورید.

گام ششم: $\mathbb{P}_2$ با توجه به $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2^T > 0$ ، محاسبه کنید و از روی آن $\mathbb{Y} = \mathbb{P}_2^{-1} \cdot \mathbb{P}_Y$ را تعیین کنید.

گام هفتم: با تجزیه $\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & H \\ Y_2 & L \end{bmatrix}$ ، دو ماتریس دیگر از ضرایب رؤیت گر یعنی H, L و همچنین دو ماتریس دلخواه Y_1 و Y_2 را مشخص کنید.

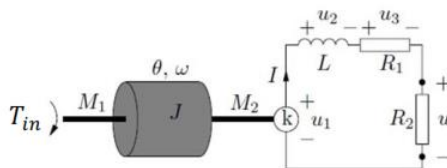
گام هشتم: باقیمانده ماتریس های ضرایب رؤیت گر را که ماتریس های S, F, N هستند را با استفاده از روابط (۱۶) تا (۱۹) به دست آورید.

گام نهم: با استفاده از (۱۴) در لم ۳ و رابطه (۶۸) بهره کنترل گر را به دست آورید و سیستم حلقه بسته با کنترل گر تناسبی را پیاده سازی کنید.

۴- مثال عددی

در این بخش با ارائه یک مثال روش پیشنهادی را بررسی می کنیم.
مثال: سیستم در نظر گرفته شده مدل یک ژنراتور DC است که در شکل ۱ دیده می شود. این مدل به این صورت تشریح می شود: ورودی سیستم گشتاور T_{in} است که در سمت چپ محور به آن اعمال می شود. به محور جرم دوار با اینرسی J و ضریب اصطکاک B_m متصل است که با سرعت زاویه ای ω_m می چرخد. گشتاور الکتریکی T_e به ژنراتور اعمال می شود و طبق رابطه $T_e = kI$ جریان I را تولید می کند. در مدل تکین از این سیستم فرض شده است که $x_1 = \theta, x_2 = \omega_m, x_3 = I$ و $x_4 = u_4$ حالت های سیستم باشند.

مدل نمایش فضای حالت برای این سیستم به صورت زیر خواهد بود:



شکل ۱) مدل یک ژنراتور DC

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{47} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$C_{33} = C_{21} = \begin{pmatrix} -(M_B N_B)^T & 0 \\ 0 & (T_1 M_B N_B)^T \end{pmatrix}, C_{11} = \begin{pmatrix} -B^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{47} = (N_B^T) \text{ و } \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_B^T \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} N_B^T \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

است. و

$$K = \text{diag}(\kappa) \quad (68)$$

اکنون می توانیم از لم ۳ استفاده کنیم و نامعادله (۶۳) را به دو نامعادله ماتریسی خطی (LMI) زیر تبدیل کنیم.

$$B^+ D B^{+T} < 0 \quad (69)$$

$$C^{T+} D C^{T+T} < 0 \quad (70)$$

که در آن B^+, D و C^{T+} به ترتیب در (۵۲)، (۴۹) و (۵۶) تعریف شده اند.

با حل نامعادله های ماتریسی خطی (۳۷)، (۶۹) و (۷۰)، $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_Y$ و $\mathbb{P}_{21}$ به دست می آیند. سپس با توجه به اینکه $\mathbb{P}_2$ یک ماتریس مثبت معین انتخاب شده است، و به کارگیری رابطه $\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_2 \mathbb{Y}$ می توان $\mathbb{Y}$ و $\mathbb{P}_2$ را تعیین کرد. با توجه به تعریف ماتریس $\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & H \\ Y_2 & L \end{bmatrix}$ ماتریس های دلخواه Y_1 و Y_2 و همچنین باقیمانده ماتریس های رؤیت گر تعیین می شوند. با مشخص شدن ماتریس های دلخواه می توان با استفاده از نتایج لم ۴ کلیه ماتریس های ضرایب رؤیت گر را تعیین نمود. در انتها با به کارگیری (۱۴) و (۶۸) می تواند کنترل گر مناسب را برای اینکه سیستم حلقه بسته پایدار مقاوم شود را تعیین نمود. با توجه به برقراری (۶۲) می توان نتیجه گرفت که $A^T \mathbb{P} + \mathbb{P}^T A < 0$ است و از آنجا که $\mathbb{E}^T \mathbb{P} = \mathbb{P}^T \mathbb{E} \geq 0$ است، با استفاده از لم ۵ می توان نتیجه گرفت که سیستم حلقه بسته مجاز خواهد شد و در این مرحله اثبات کامل شده است.

الگوریتم زیر مراحل طراحی رؤیت گر و کنترل گر را برای یک سیستم تکین نشان می دهد.

الگوریتم:

گام اول: بر مبنای تعریف موجود در فرض ۱ ماتریس های N_C, N_B, M_B, N_A, M_A را تعیین کنید و برقراری فرض های ۲ و ۳ را بررسی کنید.

گام دوم: ماتریس $\emptyset \in \mathbb{R}^{r \times n}$ با رتبه کامل سطری را به دست آورید تا در رابطه $\emptyset [E \quad M_B] = 0$ صدق کند.

از نوع محدود ساختاریافته هستند، می توان ماتریس های زیر را به دست آورد:

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.9 \\ 3.6 \times 10^3 \\ 10 \end{bmatrix}, N_A = [0 \quad 0.02 \quad 1 \quad 0], M_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, N_B = 1, M_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, N_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_A = \Lambda_B = \Lambda_C = \sin 2t$$

ماتریس $\phi = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ را با توجه به روابط فرض ۲ به دست می آوریم. بدیهی است که روابط (۲)، (۳) و (۵) برآورده می شود. با توجه به لم ۴ ماتریس $R = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ را انتخاب می کنیم. اکنون با استفاده از روابط (۱۵) و (۲۰) تا (۲۲) ضرایب زیر را به دست خواهیم آورد:

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.17 \\ 0.43 \\ 0.06 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -0.23 & 0.02 & 0.23 \\ -0.65 & -0.07 & -0.65 \\ 0.22 & 0.87 & 0.52 \\ 0.27 & -0.39 & 0.46 \end{bmatrix}, J = [4]$$

سپس با حل نامعادلات ماتریسی خطی (۳۷) تا (۳۹) توسط نرم افزار YALMIP [۵۸] ماتریس های $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$ و $\mathbb{P}_4$ را به دست می آوریم و با بهره گیری از رابطه $\mathbb{Y} = \mathbb{P}_2^{-1} \cdot \mathbb{P}_3$ را تعیین می کنیم که نتایج زیر را به دست می دهد:

$$\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} 22.94 & -41.32 & -61.07 \\ 56.23 & -9.26 & 3.89 & \dots \\ 26.98 & 51.04 & -37.20 & 34.27 & 10.26 & -2.1 & 3.2 \\ \dots & 25.90 & 28.72 & -0.7 & 0 \\ 22.96 & 12.92 & 0.2 & -0.7 \end{bmatrix}$$

با مشخص شدن $\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & H \\ Y_2 & L \end{bmatrix}$ ماتریس های ضرایب H و L به صورت زیر به دست می آیند. همچنین ماتریس های دلخواه Y_1 و Y_2 تعیین می شوند که با به کارگیری روابط (۱۶) تا (۱۹) می توانیم باقیمانده ماتریس های ضرایب رؤیت گر یعنی N, F, S و M را محاسبه کنیم.

$$H = [-2.1 \quad 3.2], L = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 \\ 0.2 & -0.7 \end{bmatrix}, N = [-4.2], F = \begin{bmatrix} 4.89 & 2.07 & 1.90 \end{bmatrix},$$

$$S = [0.51 \quad -0.08], M = \begin{bmatrix} -0.76 & 1.22 & 0.12 \\ 2.28 & 1.78 & 0.02 \end{bmatrix},$$

حال تمامی ضرایب رؤیت گر (۶) محاسبه شده اند و کافی است با استفاده از رابطه (۱۴) و انتخاب ماتریس های دلخواه، ماتریس کنترل کننده را به دست آوریم:

$$\kappa = [-22.54 \quad -15.35 \quad 39.45 \quad 0.38]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-B_m}{J_m} & \frac{-k}{J_m} & 0 \\ 0 & \frac{k}{L} & \frac{-(R_1 + R_2)}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -R_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_{in}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

مقادیر نامی پارامترهای سیستم در جدول ۱ مشاهده می شود [۵۷].

همچنین فرض می کنیم که پارامترهای J_m و R_2 به طور کامل معلوم نیستند و هر کدام می تواند ۵% نامعینی داشته باشند. در این شرایط ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و ماتریس خروجی دارای نامعینی هستند که به صورت زیر تعیین می شود:

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 5.9 & 0 \\ 0 & 0 & 3600 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

باقیمانده ضرایب برای سیستم (۱) به صورت زیر در نظر گرفته شده اند:

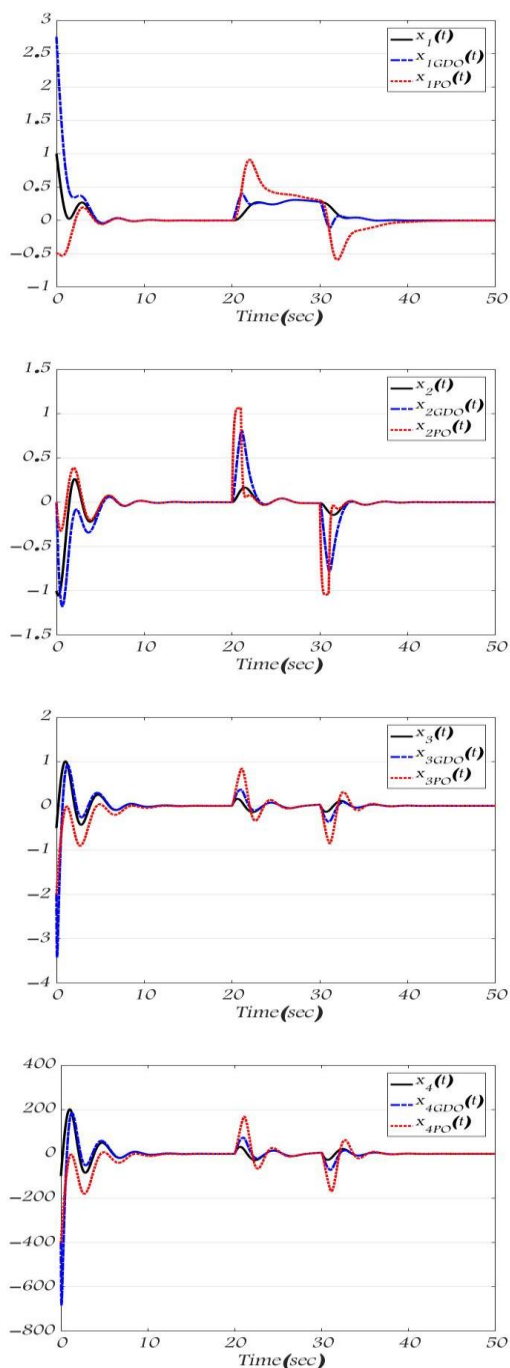
$$D_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D_o = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C_z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0], D_z = 0.2$$

که ماتریس های $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ حداکثر نامعینی ماتریس های سیستم، ورودی و خروجی هستند. با محاسبه مقادیر ویژه سیستم مشاهده می شود که سیستم دارای یک قطب نامحدود و سه قطب محدود است که همه قطب های محدود آن در سمت چپ محور $j\omega$ قرار ندارند و سیستم مجاز نیست. اکنون هدف طراحی رؤیت گر و سپس کنترل کننده ای است تا سیستم حلقه بسته را مجاز نماید. ابتدا با استفاده از فرض ۱ و اینکه نامعینی ها

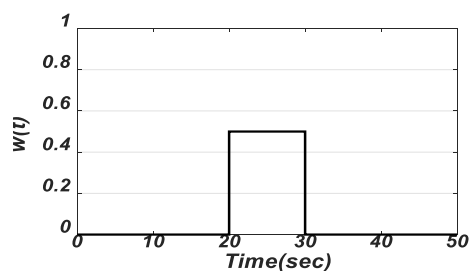
جدول (۱) مقادیر نامی ژنراتور DC

Parameters with symbols	Numerical values (units)
: moment of inertia the motor J_m	3.23×10^{-3} (kg.m ²)
: motor viscus friction constant B_m	3.5×10^{-3} (N.m.s/rad)
: electromotive force constant k	0.0274 (V.rad/sec)
: electric resistance of motor R_1	40 (Ω)
: electric inductance of motor L	2.75×10^{-3} (H)
: electric resistance of load R_2	200 (Ω)

رؤیت گر پیشنهاد شده باعث افزایش دقت و سرعت تخمین حالت ها شده است.

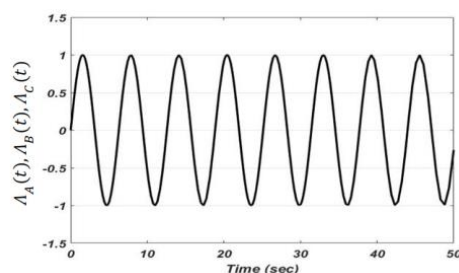


شکل ۵) حالت های سیستم $x(t)$ و مقادیر تخمین زده شده توسط رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته $x_{GDO}(t)$ و رؤیت گر تناسبی $x_{PO}(t)$.

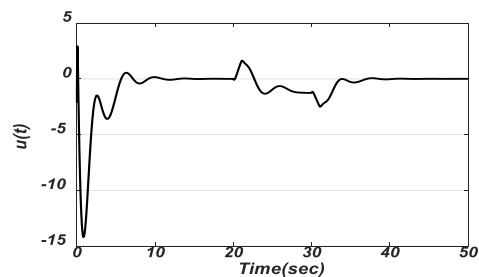


شکل ۲) سیگنال اغتشاش اعمال شده به سیستم

نتایج شبیه سازی در شکل های زیر آورده شده اند. در شکل ۲ تابع اغتشاش اعمال شده به سیستم مشاهده می شود. شکل ۳ تابع تغییر نامعینی در ضرایب سیستم را نشان می دهد که یک تابع سینوسی با فرکانس ۲ رادیان بر ثانیه است. این تابع نامعینی های موجود در پارامترهای سیستم را در رنج تعریف شده در صورت مسئله مدل می کند. سیگنال کنترلی سیستم را



شکل ۳) تابع تغییرات نامعینی $\Lambda_A = \Lambda_B = \Lambda_C$



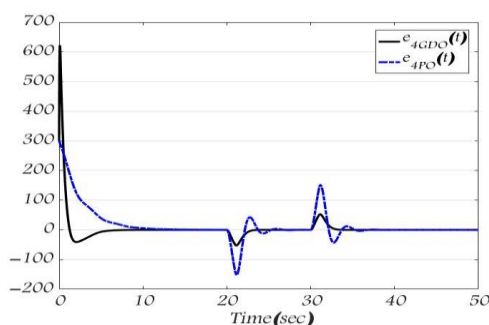
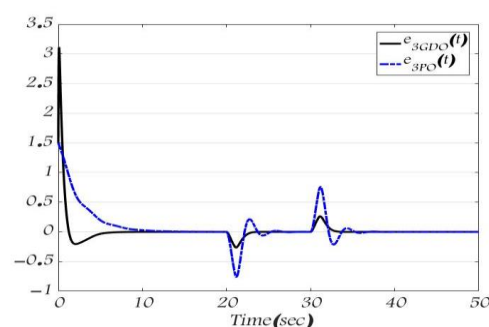
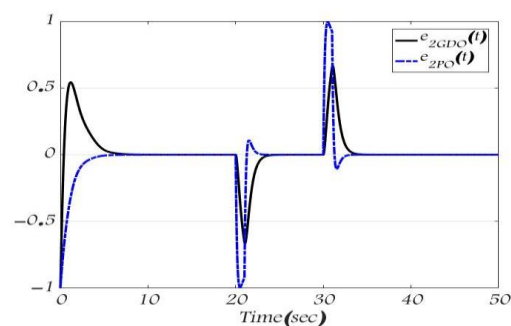
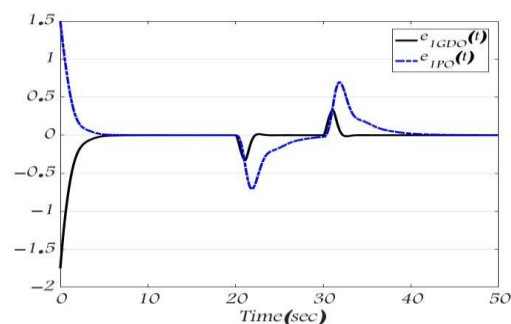
شکل ۴) سیگنال کنترلی سیستم $u(t)$

می توان در شکل ۴ مشاهده کرد. همچنین حالت های سیستم $x(t)$ و حالت های تخمین زده شده با رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته ارائه شده در این مقاله $x_{GDO}(t)$ و مقایسه آنها با یک رؤیت گر تناسبی $x_{PO}(t)$ در شکل ۵ رسم شده است. همان طور که دیده می شود با توجه به اینکه سیستم حلقه بسته دارای ورودی خارجی نیست، حالت های سیستم به سمت صفر میل کرده است و نشان دهنده این است که سیستم حلقه بسته مجاز شده است. مقایسه خطاهای تخمین در دو روش رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته $(e_{GDO}(t))$ و رؤیت گر تناسبی $(e_{PO}(t))$ [۴۸] نیز در شکل ۶ قابل رؤیت هستند. ملاحظه می شود که در رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته خطای تخمین کمتر و زمان تخمین حالت های سیستم نیز در مقایسه با رؤیت گر تناسبی کوتاه تر است و وجود بخش دینامیکی و بخش انتگرالی در

پایداری رؤیت گر و کنترل کننده با انتخاب یک تابع مناسب لیاپانوف نشان داده شد. شرایط لازم و کافی برای وجود جواب، به صورت نامعادلات ماتریسی خطی ارائه شد. نامعادلات ماتریسی خطی با استفاده از جعبه ابزار YALMIP حل شده و ماتریس های ضرایب رؤیت گر و کنترل کننده محاسبه شدند. کنترل کننده H_∞ به گونه ای طراحی شد تا در حضور اغتشاش بتواند مجاز بودن سیستم حلقه بسته را تضمین کند. با حل یک مثال عددی عملکرد روش پیشنهادی و الگوریتم ارائه شده مورد بررسی و مقایسه قرار گرفت.

مراجع

- [1] G. R. Duan, Analysis and design of descriptor linear systems, Springer Science & Business Media, 2010 .
- [2] M. Darouach and L. Boutat-Baddas, "Observers for a class of nonlinear singular systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 11, pp. 2627-2633, 2008 .
- [3] I. Zamani, M. Shafiee and A. Ibeas, "Exponential stability of hybrid switched nonlinear singular systems with time-varying delay," Journal of the Franklin Institute, vol. 350, no. 1, pp. 171-193, 2013 .
- [4] M. Darouach and M. Zasadzinski, "Data reconciliation in generalized linear dynamic systems," AICHE journal, vol. 37, no. 2, pp. 193-201, 1991 .
- [5] J. Huang, W. Zhang, M. Shi, L. Chen and L. Yu, " H_∞ observer design for singular one-sided Lur'e differential inclusion system," Journal of the Franklin Institute, vol. 354, no. 8, pp. 3305-3321, 2017
- [6] F. L. Lewis, "A survey of linear singular systems," Circuits, Systems, and Signal Processing, vol. 5, no. 1, pp. 3-36, 1986 .
- [7] J. Dai, "Singular control systems," in Singular control systems, 1989, pp. 3-36.
- [8] C. Farhat and M. Geradin, "On the general solution by a direct method of a large-scale singular system of linear equations: application to the analysis of floating structures," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 41, no. 4, pp. 675-696, 1998 .
- [9] R. Shahnazi and Q. Zhao, "Adaptive fuzzy descriptor sliding mode observer-based sensor fault estimation for uncertain nonlinear systems," Asian Journal of Control, vol. 18, no. 4, pp. 1478-1488, 2016 .
- [10] J. M. Araújo, P. R. Barros and C. E. Dorea, "Design of observers with error limitation in discrete-time descriptor systems: A case study of a hydraulic tank system," IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 20, no. 4, pp. 1041-1047, 2012 .



شکل ۶ مقایسه خطای تخمین رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته $e_{GDO}(t)$ بر رؤیت گر تناسبی $e_{PO}(t)$

۵- نتیجه گیری

در این مقاله طراحی کنترل کننده بر پایه رؤیت گر برای سیستم های تکین خطی و دارای نامعینی در حضور اغتشاش ارائه شد. رؤیت گر دینامیکی توسعه یافته مقاوم برای تخمین حالت های سیستم بکار گرفته شد و قانون کنترل به گونه ای محاسبه گردید تا سیستمی را که ذاتاً ناپایدار است، در حالت حلقه بسته مجاز نماید. ویژگی مهم این مقاله در این است که نامعینی می تواند در سه ماتریس سیستم، ورودی و خروجی باشد. تحلیل

- dynamical observers design for linear descriptor systems," IET Control Theory & Applications, vol. 10, no. 17, pp. 2223-2232, 2016 .
- [26] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach, L. Boutat-Baddas and C. M. Astorga-Zaragoza, "On Dynamic Observers Design for Descriptor Systems," in New Trends in Observer-Based Control, 2019, pp. 3-45.
- [27] L. Boutat-Baddas, G. L. Osorio-Gordillo and M. Darouach, " H_∞ dynamic observers for a class of nonlinear systems with unknown inputs," International Journal of Control, pp. 1-12, 2019 .
- [28] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach, L. Boutat-Baddas and C. M. Astorga-Zaragoza, "dynamical observer-based control for descriptor systems," IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 35, no. 3, pp. 707-734, 2017 .
- [29] S. P. Bhattacharyya, "Robust control under parametric uncertainty: An overview and recent results," Annual Reviews in Control, vol. 44, pp. 45-77, 2017 .
- [30] M. S. Asadina, T. Binazadeh and B. Safarinejadian, "A delay-range-dependent stabilization of uncertain singular time-delay systems with one-sided Lipschitz nonlinearities subject to input saturation," Journal of Vibration and Control, vol. 25, no. 4, pp. 868-881, 2019 .
- [31] E. Arefinia, H. A. Talebi and A. Doustmohammadi, "A robust adaptive observer for a class of singular nonlinear uncertain systems," International Journal of Systems Science, vol. 48, no. 7, pp. 1404-1415, 2017 .
- [32] Y. Ma, P. Yang, Y. Yan and Q. Zhang, " Robust observer-based passive control for uncertain singular time-delay systems subject to actuator saturation," ISA transactions, vol. 67, pp. 9-18, 2017 .
- [33] E. K. Boukas and Z. K. Liu, "Robust H_∞ filtering for polytopic uncertain time-delay systems with Markov jumps," Computers & Electrical Engineering, vol. 28, no. 3, pp. 171-193, 2002 .
- [34] M. S. Pasand, M. A. Sh and H. D. Taghirad, "Unknown input-proportional integral observer for singular systems: Application to fault detection," in Electrical Engineering (ICEE), 2010 18th Iranian Conference, 2010 .
- [35] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach and C. M. Astorga-Zaragoza, " H_∞ dynamical observer design for linear descriptor systems," in American Control Conference (ACC), 2014 .
- [36] M. Alma and M. Darouach, "Adaptive observers design for a class of linear descriptor systems," Automatica, vol. 50, no. 2, pp. 578-583, 2014 .
- [37] N. F. Shamloo, A. A. Kalat and L. Chisci, "Indirect adaptive fuzzy control of nonlinear descriptor systems," European Journal of Control, 2019 .
- [11] D. G. Luenberger, "Observing state of linear system," IEEE Trans. Military Electron, Vols. MIL-8, no. 2, pp. 74-77, 1964 .
- [12] M. Darouach and M. Boutayed, "Design of observers for descriptor systems," IEEE transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 7, pp. 1323-1327, 1995 .
- [13] M. Hou and P. C. Muller, "Observer design for descriptor systems.," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, no. 1, pp. 164-169., 1999 .
- [14] M. Darouach, "Observers and observer-based control for descriptor systems revisited," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 59, no. 5, pp. 1367-1373, 2014 .
- [15] M. Cao and F. Liao, "Design of a PD feedback controller for continuous-time descriptor systems," in Control and Decision Conference, 2014 .
- [16] Y. Han, Y. Kao and C. Gao, "Robust observer-based H_∞ control for uncertain discrete singular systems with time-varying delays via sliding mode approach," ISA Transactions, vol. 80, pp. 81-88, 2018 .
- [17] M. Wang and T. Liang, "Adaptive Kalman filtering for sensor fault estimation and isolation of satellite attitude control based on descriptor systems," Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2019 .
- [18] M. Darouach, " H_∞ unbiased filtering for linear descriptor systems via LMI," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 8, pp. 1966-1972, 2009 .
- [19] P. C. Muller and M. Hou, "On the observer design for descriptor systems," in Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on (pp. 1960-1961). IEEE., 1991 .
- [20] A. G. Wu and G. R. Duan, "Design of generalized PI observers for descriptor linear systems," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 53, no. 12, pp. 2828-2837, 2006 .
- [21] A. G. Wu and G. R. Duan, "Generalized PI observer design for linear systems," IMA Journal of Mathematical Control and Information, pp. 239-250, 2007 .
- [22] D. Koenig, "Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems," IEEE Transactions on Automatic control, pp. 212-217, 2005 .
- [23] G. C. Goodwin and R. H. Middleton, "The class of all stable unbiased state estimators," Systems & Control Letters, pp. 161-163, 1989 .
- [24] H. J. Marquez, "A frequency domain approach to state estimation," Journal of the Franklin Institute, pp. 147-157, 2003 .
- [25] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach, C. M. Astorga-Zaragoza and L. Boutat-Baddas, "New

- [53] S. Xu and J. Lam, Robust control and filtering of singular systems, Vol. 332, Berlin: Springer, 2006 .
- [54] W. Xie, "An equivalent LMI representation of bounded real lemma for continuous-time systems," Journal of Inequalities and Applications, vol. 1, p. 672905, 2008 .
- [55] H. S. Wang, C. F. Yung and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H_{∞} control for descriptor systems," IEE Proceedings-Control Theory and Applications, vol. 145, no. 3, pp. 316-322, 1998 .
- [56] S. Boed, L. EL Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear matrix inequalities in system and control theory, vol. 15, Siam, 1994.
- [57] M. Gerdin, Paramete estimation in linear descriptor systems, Linkoping University, Sweden, 2004 .
- [58] J. Löfberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in Proceedings of the CACSD Conference, 2004.
- [38] Y. Feng and M. Yagoubi, Robust Control of Linear Descriptor Systems, Springer, 2017 .
- [39] Y. Uetake, "Adaptive observer for continuous descriptor systems," IEEE Transactions on automatic Control, vol. 39, no. 10, pp. 2095-2100, 1994 .
- [40] M. Hou and P. C. Muller, "Design of observers for linear systems with unknown inputs," IEEE Transactions on automatic control, vol. 37, no. 6, pp. 871-875, 1992 .
- [41] M. Darouach, M. Zasadzinski and M. Hayar, "Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs," IEEE transactions on automatic control, vol. 41, no. 7, pp. 1068-1072, 1996 .
- [42] M. Darouach, M. Zasadzinski, A. B. Onana and S. Nowakowski, "Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems," International journal of systems science, vol. 26, no. 10, pp. 2015-2028, 1995 .
- [43] X. Mao, N. Koroleva and A. Rodkina, "Robust stability of uncertain stochastic differential delay equations1," Systems & Control Letters, vol. 35, no. 5, pp. 325-336, 1998 .
- [44] E. L. Boukas, Control of singular systems with random abrupt changes, Springer Science & Business Media, 2008 .
- [45] M. K. Gupta, N. K. Tomar and S. Bhaumik, "On detectability and observer design for rectangular linear descriptor systems," International Journal of Dynamics and Control, vol. 4, no. 4, pp. 438-446, 2016 .
- [46] H. Kimura, Chain-scattering approach to H_{∞} control, Springer Science & Business Media, 1996 .
- [47] M. Yuechao and Y. Yifang, "Observer-based H_{∞} guaranteed cost control for uncertain singular time-delay systems with input saturation," International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 14, no. 5, pp. 1254-1261, 2016 .
- [48] M. Yuechao and Y. Yifang , "Observer-based H_{∞} control for uncertain singular time-delay systems with actuator saturation," Optimal Control Applications and Methods, vol. 37, no. 5, pp. 867-884, 2016 .
- [49] B. Zheng and R. B. Bapat, "Generalized inverse A (2) T, S and a rank equation," Applied mathematics and computation, vol. 155, no. 2, pp. 407-415, 2004 .
- [50] D. C. Lay, Linear algebra and its applications, Greg Tobin, 2006 .
- [51] R. E. Skelton, T. Lwasaki and D. E. Griqoriadis, A unified algebraic approach to control design, CRC Press, 1997 .
- [52] J. Lan and R. J. Patton, "A new strategy for integration of fault estimation within fault-tolerant control," Automatica, vol. 69, pp. 48-59, 2016 .