مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد۱۴، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۹، صفحه ۹۲-۸۱

# اجماع خروجی مشارکتی مقاوم $H_\infty$ برای سیستم‌های چند عاملی ناهمگن پیوسته با استفاده از روش یادگیری تقویتی انتگرالی

امیر پرویز ولدبیگی[۱]، علی خاکی صدیق[۲]، علی معرفیان پور[۳]، فرانک لوییس[۴]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات تهران، amirp.valad@ieee.org

[۲] استاد، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، sedigh@kntu.ac.ir

[۳] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و مکانیک، گروه کنترل، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات تهران ، moarefian@srbiau.ac.ir

[۴] استاد، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل ، دانشگاه تگزاس آرلینگتون، lewis@uta.edu

دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۸ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۵

**چکیده:** این مقاله به مسأله اجماع خروجی مشارکتی[۱] مقاوم در سیستم‌های چند عاملی ناهمگن پیوسته با گراف ارتباطی جهت‌دار می‌پردازد. حل استاندارد مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم با استفاده از روش $p$ - کپی مدل داخلی[۲] است، که در این روش دانستن معادلات دینامیکی عوامل و عامل رهبر[۳] ضروری است. در این مقاله با استفاده از ایده سیستم کمکی معادل[۴]، یک سیستم کمکی جدید برای حل مسأله به دست می‌آید. سپس مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم با محدودیت $H_\infty$ به صورت یک مسأله کنترل $H_\infty$ تبدیل می‌شود. با استفاده از روش یادگیری تقویتی انتگرالی (IRL) [۵] یک الگوریتم بدون مدل[۶] برای حل معادلات جبری ریکاتی مقاوم(RARE) [۷] بدون نیاز به مدل عوامل ارائه می‌شود. ثابت می‌شود که این روش معادلات تنظیم خروجی را نیز برآورده می‌سازد. نتایج شبیه سازی توانایی این روش در حل مسأله تنظیم خروجی مشارکتی مقاوم با محدودیت $H_\infty$ را نشان می‌دهند.

**کلمات کلیدی:** اجماع خروجی مشارکتی مقاوم، سیستم کمکی معادل، کنترل $H_\infty$، یادگیری تقویتی.

# Cooperative Robust $H_\infty$ Output Consensus in Continuous-Time Heterogeneous Multi-Agent Systems Using Integral Reinforcement Learning Method

**Amir Parviz Valadbeigi, Ali Khaki Sedigh, Frank.l Lewis, Ali Moarefian Poor**

**Abstract:** The Robust Cooperative Output Consensus (RCOC) in continuous time Heterogeneous Multi-Agent Systems with the directed graph is addressed. In the standard solution of the RCOC, the p-copy internal model method is used. This method requires dynamical equations of the agents and the leader. In the present paper, based on the equivalent auxiliary system method, a new auxiliary system is obtained. Then, the RCOC is transformed to a $H_\infty$ control problem. Moreover, a model-free algorithm is proposed to solve the Robust Algebraic Riccati Equation using the Integral Reinforcement Learning (IRL) method. It is shown that the proposed method satisfies the output regulation equations. A simulation example verifies the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** Robust Cooperative Output Consensus, Equivalent Auxiliary System, $H_\infty$ Control, Reinforcement Learning.

[1] Cooperative Output Consensus
[2] P-copy Internal Model
[3] Leader
[4] Equivalent Auxiliary System
[5] Integral Reinforcement Learning
[6] Model-Free
[7] Robust Algebraic Riccati Equation



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

## ۱- مقدمه

کنترل توزیع شده سیستم‌های چند عاملی[1] به علت قابلیت‌های بالا به صورت گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف علوم مهندسی استفاده شده است [۱] [۴-۲]. در حل مسأله اجماع، قانون کنترل که تنها به اطلاعات همسایگان وابسته است، به گونه‌ای طراحی می‌شود که شبکه متشکل از عوامل به یک مقدار مورد نظر همگرا گردند [۵, ۶]. مسأله اجماع در دو دسته کلی مورد توجه قرار گرفته است. دسته اول سیستم‌های چندعاملی همگن[2] هستند (کلیه عوامل دینامیک یکسان دارند). در این حالت مسأله اجماع به صورت دومسأله اجماع بدون رهبر و مسأله ردیابی رهبر- دنبال کننده [3] مطرح می‌شود. روش حل به این صورت است که یک کنترل کننده پایدار ساز برای یک عامل تنها طراحی می‌شود، سپس یک محدودیت عددی که به گراف ارتباطی وابسته است به دست می‌آید. حل این مسائل به پاسخ یک سری معادلات جبری ریکاتی یا ناتساوی ماتریسی[4] خطی وابسته است [۳, ۴, ۷]. دسته دیگر سیستم‌های چند عاملی ناهمگن[5] هستند [۱۰-۸]. که از مهم ترین مسائل مطرح شده برای این نوع سیستم‌ها می‌توان به اجماع خروجی مشارکتی اشاره نمود. به دلیل وجود عدم قطعیت در سیستم‌های عملیاتی، توسعه روش‌های اجماع خروجی مشارکتی در حضور نامعینی یکی از مسائل مهم در این حوزه است. این روش‌ها در دو حوزه سیستم‌های گسسته و پیوسته مطرح شده‌اند. روش استاندارد در حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم استفاده از $p$ -کپی مدل داخلی است [۱۱] [۱۲]. در این روش با به کاربردن کنترل کننده‌های توزیع شده- ای که در ساختار آنها از $p$ -کپی مدل داخلی استفاده شده است، مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم حل می‌شود. در [۱۳] و [۱۴]، [۱۵] مساله تنظیم خروجی مشارکتی مقاوم برای دسته‌ای از سیستم‌های چند عاملی نامعین غیر خطی مورد مطالعه قرار گرفته و برای حل این مساله ابتدا یک مدل داخلی غیر متمرکز برای سیستم معرفی شده ، سپس مساله تنظیم خروجی مقاوم به مساله پایدار سازی مقاوم سراسری سیستم چند عاملی افزوده[6] تبدیل شده است و با استفاده از این سیستم افزوده، حل مساله بررسی شده است. در [۱۶] مساله تنظیم خروجی مشارکتی سیستم‌های چند عاملی توصیفی بررسی گردیده است. برای حل مساله رویتگرهای غیر متمرکز کلی پیشنهاد شده است که وظیفه آنها به دست آوردن تخمین حالات با توجه به سیستم بیرونی است. سپس کنترل کننده‌های فیدبک خروجی تکین[7] غیر متمرکز برای حل این مساله طراحی شده‌اند. در [۳] مساله تنظیم خروجی مشارکتی برای سیستم‌های چند عاملی خطی با گراف ارتباطی جهتدار با وجود یک سیستم بیرونی که خروجی آن تنها برای بخشی از زیر سیستم‌ها در دسترس است بررسی شده است. برای زیر سیستم‌های خطی نامعین از یک رویتگر غیر متمرکز استفاده شده است، سپس با استفاده از اصل مدل داخلی[8] کنترل کننده مناسب طراحی شده است. نقطه قوت این مقاله استفاده از پروتکل‌های تطبیقی است که باعث می‌شود مساله به صورت کاملاً توزیع شده[9] حل شود. در این حالت نیازی به اطلاعات کلی در مورد شبکه نیست و تنها از اطلاعات محلی برای حل مساله استفاده می‌شود. در [۱۷] یک مدل کلی برای مساله تنظیم خروجی در نظر گرفته شده است که گراف ارتباطی بین عوامل یک گراف جهتدار است. در این مقاله نشان داده شده است که شرایط کافی برای وجود فیدبک حالت و خروجی، بر اساس نرم $H_\infty$ قابل بیان است. در بیشتر روش‌های موجود دینامیک‌های عوامل به صورت یکسان و نامعینی‌های هر یک از عوامل به صورت متفاوت در نظر گرفته می‌شود. همچنین در روش- های ارائه شده برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی، دانستن دینامیک‌های عوامل ضروری است.

یادگیری تقویتی یکی از روشهای یادگیری ماشین است که بطور گسترده‌ای در مسائل کنترل بهینه استفاده شده است. در این روش در هر گام هر یک از عوامل یادگیری تقویتی، یک بازخورد ارزیابی در مورد عملکرد خود دریافت می‌کند و بر اساس آن عملکردش را بهبود میبخشد. در بین روشهای موجود یادگیری تقویتی تکرار سیاست[10] بطور گسترده‌ای در طراحی کنترل کننده‌ها استفاده شده است. بخصوص این روش برای حل مسائل تنظیم کننده های درجه دوم خطی[11] (LQR) در محیط‌های پیوسته و گسسته استفاده شده است. یکی دیگر از کاربردهای روش یادگیری تقویتی حل مسائل مربوط به کنترل $H_\infty$ است. حل مسأله کنترل $H_\infty$ ارتباط نزدیکی با مسأله بازی با جمع صفر[12] دارد. یافتن پاسخ مساله بازی با جمع صفر در سیستم‌های خطی به حل یک معادله جبری ریکاتی منجر می‌شود که این معادله را می‌توان با استفاده از روشهای یادگیری تقویتی حل نمود [۱۸-۲۱]. روشهای یادگیری تقویتی برای حل مسأله اجماع در حوزه سیستم‌های چند عاملی نیز استفاده شده است. اکثر روشهای موجود برای حل مسأله اجماع خروجی وابسته به یافتن پاسخ معادلات تنظیم خروجی[13] است. اما حل معادلات تنظیم خروجی نیازمند داشتن اطلاعات دقیق از دینامیک سیستم است. در [۲۲] و [۲۳] دو روش برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی ارائه شده است. این روش‌ها بدون نیاز به دینامیک‌های عوامل مسأله اجماع خروجی را حل می‌کند. با این وجود در این مقالات اثر وجود نامعینی و اغتشاش در نظر گرفته نشده است.

با توجه به موارد یاد شده در این مقاله یک راهکار جدید برای حل مساله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم ارائه می‌گردد. این روش مسأله

[1] Distributed Control of Multi-Agent Systems
[2] Homogeneous
[3] Leader-follower
[4] Linear Matrix Inequality
[5] Heterogeneous
[6] Augmented Systems
[7] Singular
[8] Internal Model Principle
[9] Fully Distributed
[10] Policy Iteration
[11] Linear Quadratic Regulator
[12] Zero-Sum Game Problem
[13] Output Regulation Equations



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

اجماع خروجی مشارکتی مقاوم را با در نظر گرفتن نامعینی‌های موجود در مدل عوامل حل می‌نماید. لازم به ذکر است که در این حالت دینامیک‌های عوامل نیز به صورت ناهمگن در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از ساختار سیستم کمکی معادل، مسأله اجماع خروجی مقاوم به یک مسأله کنترل $H_\infty$ تقلیل یافته تبدیل می‌شود. جهت تضمین پایداری سیستم حلقه بسته یک حد بالا برای ضریب تقلیل به دست می‌آید. ثابت می‌شود که روش پیشنهادی معادلات تنظیم خروجی برای سیستم نامعین را برآورده می‌سازد. با استفاده از ساختار سیستم کمکی معادل، یک الگوریتم یادگیری تقویتی انتگرالی برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم پیشنهاد می‌گردد. این الگوریتم مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم را بدون نیاز به مدل عوامل حل می‌کند.

## ۲- مقدمات و فرموله سازی مسأله

در این بخش مقدمه‌ای کوتاه در مورد نظریه گراف و همچنین حل استاندارد مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم بیان می‌شود.

### ۲-۱ نظریه گراف

گیریم $G=\{V,\varepsilon,A\}$ یک گراف جهتدار[1] باشد، $V=\{1,2,...,N\}$ مجموعه‌ای از گره‌هاست که گره $i$ ام نشان دهنده یک عامل است. $\varepsilon\in V\times V$ مجموعه‌ای ازیال‌هاست. زوج مرتب $(j,i)\in\varepsilon$ نشان می‌دهد که عامل $i$ می‌تواند اطلاعات را از عامل $j$ دریافت کند. عامل $j$ را همسایه عامل $i$ گویند. مجموعه همسایگان عامل $i$ ام را با $N_i$ نمایش می‌دهند. در این مقاله فرض می‌شود که گراف ساده است ($(i,i)\notin\varepsilon$). ماتریس مجاورت[2] $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{N\times N}$ با وزنهای $a_{ij}$ به گونه‌ای است که اگر $(j,i)\in\varepsilon$ باشد آنگاه $a_{ij}>0$ و $a_{ij}=0$ اگر $(j,i)\notin\varepsilon$. درجهٔ داخلی[3] گره $i$ به صورت $d_{in}(i)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}$ تعریف می‌شود. ماتریس قطری درون درجه به صورت $D=diag\left(d_{in}(i)\right)$ تعریف می شود. ماتریس لاپلاسین گراف عبارت است از $L=D-A$. یک درخت جهتدار، یک گراف جهتدار متصل است به طوری که هر گره به جز یکی که گره ریشه[4] نامیده می‌شود، دارای درجه داخلی ۱ باشد. درخت پوشا[5] در یک گراف، یک درخت جهتدار است که کلیه گره‌های یک گراف را به هم متصل می کند. بهره اتصال $g$ یک است، اگر گره به گره رهبر متصل باشد، در غیر این صورت صفر است. ماتریس اتصال $G$ به صورت $G=diag\left(g_i\right)$ تعریف می‌شود [۲۴].

### ۲-۲ حل استاندارد مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم

سیستم چند عاملی نامعین زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t)&=A_{wi}\,x_i(t)+B_{wi}\,u_i(t)+B_i\,d_i(t)\\ y_i(t)&=C_i\,x_i(t)\end{aligned}\qquad(۱)$$

که $x_i\in R^{n_i}$ بردار حالت عامل $i$ ام، $u_i\in R^{m_i}$ ورودی کنترل، $d_i(t)\in R^{l_i}$ ورودی اغتشاش و $y_i\in R^p$ خروجی اندازه گیری شده هستند. همچنین ماتریس‌های $A_{iw}$ ، $B_{iw}$ $(i=1,...,N)$ ماتریس‌های نامعین هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned}&A_{iw}=A_i+\delta A_i\quad,\quad B_{iw}=B_i+\delta B_i\\ &\delta A_i=H_i\,F_i(t)\,E_{1i},\ \ \delta B_{1i}=H_i\,F_i(t)\,E_{2i}\\ &F_i^T(t)\,F_i(t)\le I\end{aligned}\qquad(۲)$$

$\delta A_i$ ، $\delta B_i$ نشان دهنده نامعینی‌های موجود در سیستم هستند، همچنین که $H_i\,,E_{1i},E_{2i}$ ماتریس‌هایی معلوم هستند. ماتریسهای $A_i$ و $B_i$ ماتریسهای سیستم نامعین با ابعاد مناسب هستند. $F_i(t)\in R^{t\times m}$ تابع ماتریسی نامشخص است که $F_i^T(t)F_i(t)\le I$. برای سادگی کلیه مقادیر نامعینی را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$w=(vec(\delta A_1,...,\delta A_N),vec(\delta B_1,...,\delta B_N))\qquad(۳)$$

**تعریف ۱:** برای ماتریس $X=[x_1,x_2,...,x_m]$ ($x_i\in R^n$) ، $vec(X)=col(x_1,x_2,...,x_m)$ که در این رابطه $col(x_1,x_2,...,x_m)=[x_1^T,x_2^T,...,x_m^T]^T$ است.

فرض کنید دینامیک عامل رهبر به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_0&=S\,\varepsilon_0\\ y_0&=R\,\varepsilon_0\end{aligned}\qquad(۴)$$

که $\varepsilon_0\in R^q$ دینامیک رهبر یا مسیر مرجعی است که باید توسط دنبال کنندگان ردیابی شود. $y_0\in R^p$ خروجی عامل رهبر است. ماتریس $S\in R^{q\times q}$ ماتریس دینامیک رهبر و $R\in R^{p\times q}$ ماتریس خروجی است.

فرض‌های استاندارد زیر در حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم در نظر گرفته می‌شوند:

**فرض۱** : $(A_i,B_i)$ پایدار پذیر و $(A_i,C_i)$ آشکار پذیر هستند.

**فرض۲** : بخش حقیقی مقادیر ویژه ماتریس $S$ نامنفی است.

**فرض۳:**

$$rank\begin{bmatrix}A_i-\lambda I & B_i\\ C_i & 0\end{bmatrix}=n+p\qquad\lambda\in\sigma(S)\quad i=1,2,...,N$$

($\sigma(S)$ مجموعه مقادیر ویژه $S$ است).

**فرض٤:** گراف دارای درخت پوشا است و عامل رهبر حداقل با یک عامل در ارتباط است.

[1] Directed Graph
[2] Adjacency Matrix
[3] In-Degree
[4] Root Node
[5] Spanning Tree



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

**تعریف۲**: سیستم (۱) دارای بهره $L_2$ (نرم $H_\infty$) تقلیل یافته[1] محدود به $\gamma$ اگر

$$J_i = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)}\left(\|z_i\|^2 - \gamma^2\|w_i\|^2\right)d\tau < 0 \qquad (۵)$$

در این رابطه $\gamma$ ضریب تضعیف اغتشاش، $\alpha$ ضریب تقلیل و $z_i$ خروجی کنترل شده هستند.

مسأله اصلی مورد بحث در این مقاله به صورت زیر بیان می‌شود.

**مسأله ۱ ( تنظیم خروجی مشارکتی مقاوم با معیار تقلیل یافته $H_\infty$):**

هدف از مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم با محدودیت $H_\infty$، طراحی کنترل کننده توزیع شده $u_i(t)$ برای کلیه عوامل در معادله (۱) است چنانکه [۲۵]، [۲۶] [۱۱]:

۱. ماتریس سیستم حلقه بسته نامی $A_{C0}$ هرویتز باشد.

۲. یک همسایگی $W$ از $w=0$ وجود داشته باشد که برای خطای ردیابی سیستم حلقه بسته رابطه زیر صادق باشد(به ازای $d_i(t)=0$)

$$J_i = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)}\left(\|z_i\|^2 - \gamma^2\|w_i\|^2\right)d\tau < 0 \qquad (۶)$$

$$J_i = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)}\left(\|z_i\|^2 - \gamma^2\|w_i\|^2\right)d\tau < 0$$

که $\gamma$ ضریب تضعیف اغتشاش است.

در ادامه روش استاندارد حل مسائل کنترل اجماع خروجی مشارکتی مقاوم ارائه می گردد.

خروجی تنظیم شده مجازی[2] $e_{iv}$ برای زیر سیستم $i$ ام به صورت زیر تعریف می‌شود

$$e_{iv} = \sum_{j\in N_i} a_{ij}(y_i - y_j) \qquad (۷)$$

تعریف ۳: زوج ماتریس $(M_1, M_2)$، $p$ - کپی مدل داخلی ماتریس $S$ گفته می‌شود اگر

$$M_1 = F\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & G_1 \end{bmatrix}F^{-1} \;,\; M_2 = F\begin{bmatrix} T_3 \\ G_2 \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

که $T_i$ $(i=1,2,3)$ ماتریس‌های با ابعاد مناسب هستند. $F$ یک ماتریس نا ویژه است و

$$\begin{aligned} G_1 &= block\ diag\,\underbrace{(\beta,\ldots,\beta)}_{p} \\ G_2 &= block\ diag\,\underbrace{(\sigma,\ldots,\sigma)}_{p} \end{aligned} \qquad (۹)$$

$\beta$ یک ماتریس مربعی است و $\sigma$ یک بردار ستونی است، چنانکه $(\beta,\sigma)$ کنترل پذیر و چند جمله‌ای مشخصه مینیمال $S$ با چند جمله‌ای مشخصه مینیمال $\beta$ یکسان است. در حالت خاص می‌توان $(G_1, G_2)$ را به صورت $P$ - کپی مدل داخلی در نظر گرفت.

با توجه به (۷) و تعریف ۲ قانون کنترل فیدبک حالت دینامیکی توزیع شده برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم به صورت زیر ارائه می‌شود [۱۱]

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \\ &K_x\Big(\sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_i(t)-x_j(t)) + a_{i0}\,x_i(t)\Big) + K_z\,\eta_i(t) \\ \dot{\eta}_i(t) &= G_1\,\eta_i(t) + G_2 e_{iv} \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که $\eta_i(t)\in R^{n_z}$ و $K_x$، $K_z$ ماتریس‌های طراحی هستند. لازم به ذکر است می‌توان از قانون کنترل فیدبک دینامیکی خروجی نیز برای حل این مسأله نیز استفاده نمود. ثابت می‌شود که استفاده از قانون کنترل (۱۰) مسأله ۱ را حل می‌کند. همچنین سبب می‌شود معادلات تنظیم خروجی زیر برآورده شوند [۱۱, ۲۷].

$$\begin{aligned} A_{iw}\Pi_{iw} + B_{iw}\Gamma_{iw} &= \Pi_{iw}\,S \\ C_i\,\Pi_{iw} &= R \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

که $\Pi_{iw}\in R^{n_i\times p}$ و $\Gamma_{iw}\in R^{m_i\times p}$ هستند.

تذکر۱ : همانطور که از معادلات (۱۰) مشخص است، در این ساختار دینامیک کلیه عوامل و همچنین دینامیک عامل رهبر برای به دست آوردن قانون کنترل توزیع شده مورد نیاز است.

## ۳- روش پیشنهادی حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم با استفاده ازمعادلات سیستم کمکی افزوده

با توجه به راه حل استاندارد که در بخش قبل ارائه شد، در این روش داشتن اطلاعات کامل دینامیک‌های سیستم ضروری است. در ادامه با استفاده از ایده سیستم کمکی افزوده، کنترل کننده توزیع شده‌ای ارائه می‌شود که بدون استفاده از $p$ -کپی مدل داخلی و همچنین بدون در اختیار داشتن اطلاعات سیستم مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم با معیار $H_\infty$ را حل می‌کند. ساختار کلی این کنترل کننده به صورت زیر است

$$u_i(t) = K_{1i}\,x_i(t) + K_{2i}\,\varepsilon_0(t) \qquad (۱۲)$$

سیستم افزوده که به صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= A_i' X_i + \Delta A_i' X_i + B_{1i}' u_i + B_{2i}' w_i \\ z_i &= e_i = y_i - y_0 = C_{1i} X_i \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که $X_i = \begin{bmatrix} x_i^T & \varepsilon_0^T \end{bmatrix}^T$ بردار حالت سیستم افزوده است. ماتریس‌های $A_i'$, $\Delta A_i'$, $B_{1i}'$, $\Delta B_{1i}'$, $B_{2i}'$ و $C_{1i}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

[1] Discounted Factor

[2] Virtual Regulated Output



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

$$A_i' = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, B_{1i}' = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{bmatrix}, B_{2i}' = \begin{bmatrix} B_{2i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

$$C_{1i} = \begin{bmatrix} C_i & -R \end{bmatrix}$$
$$\Delta A_i' = \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = H_i' F' E_{1i}', \Delta B_i' = H_i' F' E_{2i}' \quad (۱۵)$$

$$H_i' = \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F' = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_{1i}' = \begin{bmatrix} E_{1i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{2i}' = \begin{bmatrix} E_{2i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

جهت یافتن قانون کنترلی که مسأله ۱ را حل کند، شاخص عملکرد زیر را در نظر بگیرید

$$J_i(x_i, u_i, w_i) = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau - t)} \left[ z_i^T z_i - \gamma_i^2 d_i^T d_i \right] d\tau \quad (۱۷)$$

قضیه زیر نحوه به دست آوردن سیستم کمکی معادل که برای حل مسأله ۱ استفاده می‌شود را بیان می کند [۳۱].

**قضیه ۱ :** دینامیک عامل نامعین $i$ام را در نظر بگیرید، این سیستم پایدار مقاوم با معیار $H_\infty$ تقلیل یافته است اگر و فقط اگر سیستم کمکی زیر

$$\dot{X}_i = A_i' X_i + B_i' u_i + \left[ \sqrt{\zeta_i}\, H_i' \quad \gamma^{-1} B_{2i}' \right] \tilde{d}_i$$
$$\tilde{z}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{E_{1i}'}{\sqrt{\zeta_i}} \\ C_{1i} \end{bmatrix} X_i + \begin{bmatrix} \dfrac{E_{2i}'}{\sqrt{\zeta_i}} \\ 0 \end{bmatrix} u_i \quad (۱۸)$$

پایدار باشد و شرط زیر را بر آورده سازد

$$J_{2i}(x_i, u_i, \tilde{d}_i) = \int_t^\infty e^{-\alpha_i(\tau - t)} \left[ \tilde{z}_i^T \tilde{z}_i - \tilde{d}_i^T \tilde{d}_i \right] d\tau < 0 \quad (۱۹)$$

در رابطه فوق ضریب تضعیف اغتشاش ۱ است. همچنین $\tilde{z}_i \in R^{p+m}$ و $\tilde{d}_i \in R^{l_i+m}$ هستند. عدد $\zeta_i$ یکی از پارامتر های طراحی برای مسأله کنترل مقاوم با معیار تقلیل یافته است.

حال با توجه به قضیه ۱ می‌توان از سیستم کمکی معادل و شاخص (۱۹) برای حل مسأله ۱ استفاده نمود. برای این کار رابطه (۱۸) را در رابطه (۱۹) جایگذاری می کنیم، در نتیجه به دست می آید

$$J_{2i}(x_i, u_i, \tilde{d}_i) = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau - t)} [x_i^T \left( \frac{1}{\zeta_i} E_{1i}'^T E_{2i}' + C_{1i}^T C_{1i} \right) x_i$$
$$+ u_i^T \left( \frac{E_{2i}' E_{1i}}{\zeta_i} \right) u_i + 2 x_i^T \left( \frac{E_{2i}'^T E_{1i}'}{\zeta_i} \right) u_i - \tilde{d}_i^T \tilde{d}_i ] d_\tau \quad (۲۰)$$

$$V_i^*(X_i(t)) = J_{2i}(u_i^*, \tilde{d}_i^*) = \min_{u_i} \max_{\tilde{d}_i} J_{2i}(u_i, \tilde{d}_i) \quad (۲۱)$$

که در این رابطه $V_i^*(X_i(t))$ تابع ارزش بهینه است. این بازی با جمع صفر دارای جواب منحصر بفرد است اگر و فقط اگر شرط تعادل نش زیر برقرار باشد [۲۱].

$$V_i^*(X_i(t)) = \min_{u_i} \max_{\tilde{d}_i} J_{2i}(u_i, \tilde{d}_i)$$
$$= \max_{\tilde{d}_i} \min_{u_i} J_{2i}(u_i, \tilde{d}_i) \quad (۲۲)$$

با توجه به روابط (۲۰) و (۲۲) تابع همیلتونین به صورت زیر به دست می‌آید

$$H_i(V_i, u_i, \tilde{d}_i) = X_i^T Q_{\zeta_i} X_i + 2 X_i^T \left( \frac{1}{\zeta_i} E_{1i}^T E_{2i} \right) u_i$$
$$+ u_i^T R_{\zeta_i} u_i - \tilde{d}_i^T \tilde{d}_i - \alpha_i V_i$$
$$+ (2 P_i X_i)^T \left( A_i' X_i + B_{1i}' u_i + \left[ \sqrt{\zeta_i}\, H_i' \quad \gamma_i^{-1} B_{2i}' \right] \tilde{d}_i \right)$$

با اعمال شرایط ایستایی[1] $\frac{\partial H}{\partial \tilde{d}_i} = 0, \frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$ ، کنترل بهینه و ورودی اغتشاش به صورت زیر به دست می آیند

$$u_i^*(t) = -R_{\zeta_i}^{-1} \left( B_{1i}'^T P_i + \frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} \right) X_i(t)$$
$$= -R_{\zeta_i}^{-1} \left( \begin{bmatrix} B_{1i} P_{11}^i & B_{1i}^T P_{11}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{1i}^T E_{2i} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_i \\ \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{d}_i^*(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{\zeta_i}\, H'^T \\ \gamma^{-1} B_2' \end{bmatrix} P_i X_i(t) \quad (۲۴)$$
$$P_i = \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i \end{bmatrix}$$

جایگذاری (۲۴) در (۲۳) و همچنین با توجه به اینکه $H(V_i^*, u_i^*, \tilde{d}_i^*) = 0$ ، معادله ریکارتی زیر را نتیجه می‌دهد

$$A_i'^T P_i + P_i A_i' + Q_{\zeta_i}$$
$$- \left( \frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} + P_i B_{1i}' \right) R_{\zeta_i}^{-1} \left( \frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} + P_i B_{1i}' \right)^T \quad (۲۵)$$
$$+ P_i \left( \zeta_i H_i' H_i'^T + \gamma_i^{-2} B_{2i}' B_{2i}'^T \right) P_i - \alpha_i P_i = 0$$

با حل معادله جبری ریکاتی (۲۵) ماتریس $P_i$ به دست می‌آید، با استفاده از ماتریس $P_i$ می‌توان قانون کنترل (۲۴) را محاسبه نمود.

قضیه زیر نشان می‌دهد با اعمال قانون کنترل (۲۴) و با انتخاب ضریب تقلیل به گونه‌ای که در شرایط قضیه زیر صدق کند مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم حل می‌شود.

**قضیه ۲ :** فرض کنید که سیاست کنترلی (۲۴) به سیستم (۱) اعمال شود. آنگاه $(A_i + B_{1i} K_i)$ پایدار است و خطای محلی $e_i = y_i - y_0$ با گذشت زمان به صفر میل می کند، اگر حد بالای ضریب تقلیل به صورت زیر بیان شود.

[1] Stationarity Conditions



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

$$\alpha_i \le 2\left\|\left(G_i\, Q_{i-new}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|$$

$$Q_{i-new} = \left(Q_{\zeta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i}\right) \qquad (۲۶)$$

$$G_i = \left(B_{1i}\, R_{\zeta_i}^{-1}\, B_{1i}^T + 2\,\zeta_i\, H_i\, H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i}\, B_{2i}^T\right)$$

اثبات: ماتریس $P_i$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر بخش بندی شده است:

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$

با محاسبات ریاضی نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$A_i'^T P_i = \begin{bmatrix} A_i^T & 0 \\ 0 & S^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P_{11}^i & A^T P_{12}^i \\ * & * \end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

$$P_i A_i' = \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^i A_i & * \\ P_{21}^i A_i & * \end{bmatrix}$$

$$P_i\left(\zeta_i\, H_i' H_i'^T + \gamma_i^{-2} B_{2i}' B_{2i}'^T\right) P_i = P_i \begin{pmatrix} \zeta_i \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_i^{-2}\begin{bmatrix} B_{2i} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{2i}^T & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} P = \begin{bmatrix} P_{11}^i\left(2\zeta_i\, H_i\, H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i}\, B_{2i}^T\right) & * \\ * & * \end{bmatrix}, \qquad (۲۹)$$

$$Q_{\zeta_i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\zeta_i} E_{1i}^T E_{1i} + C_i^T C_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta_i} E_{1i}^T E_{1i} \end{bmatrix}$$

$$E_{1i}'^T E_{2i}' = \begin{bmatrix} E_{1i}^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{2i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1i}^T E_{2i} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_i B_{1i}' = \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^i B_{1i} \\ P_{21}^i B_{1i} \end{bmatrix}$$

$$E_{1i}'^T E_{2i}' + P_i B_{1i}' = \begin{bmatrix} \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} + P_i B_{1i}' \\ P_{21}^i B_{1i} \end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

$$\left(E_{1i}'^T E_{2i}' + P_i B_{1i}'\right) R_{\zeta_i}^{-1}\left(\frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} + P_i B_{1i}'\right)^T = \begin{bmatrix} \left(\frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} + P_{11}^i B_{1i}\right) & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

با توجه به روابط (۲۵)، (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) می‌توان نوشت:

$$A_i^T P_{11}^i + P_{11}^i A_i + Q_{\zeta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i} + P_{11}^i\left(B_{1i}\, R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T + 2\zeta_{ii} H_i\, H_i^T + \gamma^{-2} B_{2i}\, B_{2i}^T\right) P_{11}^i - \alpha_i P_{11}^i = 0 \qquad (۳۱)$$

سیستم حلقه بسته برای $\tilde{d}_i(t) = 0$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{X}_i = \left(A_i' - R_{\zeta_i}^{-1}\left(B_{1i}'^T P_i + \frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i}\right)\right) X_i \qquad (۳۲)$$

آنگاه با توجه به روابط (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) می‌توان از رابطه (۳۲) نتیجه گرفت:

$$\dot{x}_i = \left(A_i - R_{\zeta_i}^{-1}\left(B_{1i}^T P_{11}^i + \frac{E_{2i}^T E_{2i}}{\zeta_i}\right)\right) x_i = A_{ci}\, x_i \qquad (۳۳)$$

از روابط (۳۱) و (۳۳) می‌توان نتیجه گرفت:

$$A_{ci}^T P_{11}^i + P_{11}^i A_{ci} + Q_{\zeta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i} + P_{11}^i\left(B_{1i}\, R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T + 2\zeta_i\, H_i\, H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i}\, B_{2i}^T\right) P_{11}^i - \alpha_i P_{11}^i = 0 \qquad (۳۴)$$

برای یافتن حد بالای $\alpha_i$ جهت تضمین پایداری دینامیک حلقه بسته، فرض کنید $\lambda_i$ مقدار ویژه ماتریس $A_{ci}$ باشد. از جبرخطی به یاد داریم $A_{ci}\, r_i = \lambda_{ci}\, r_i$ که $r_i$ بردار ویژه متناظر $\lambda_i$ است. آنگاه با ضرب $r_i, r_i^T$ از چپ و راست در رابطهٔ (۳۴) می‌توان نتیجه گرفت:

$$r_i^T (A_{ci}^T P_{11}^i + P_{11}^i A_{ci} + Q_{\beta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i} + P_{11}^i\left(B_{1i}\, R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T + 2\zeta_i\, H_i\, H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i}\, B_{2i}^T\right) P_{11}^i - \alpha_i P_{11}^i) r_i = 0 \qquad (۳۵)$$

رابطه (۳۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$2\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_{ci}\right) - 0.5\alpha_i\right) r_i^T P_{11}^i r_i = -r_i^T\left(Q_{\zeta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i}\right) r_i - r_i^T\left(P_{11}^i\left(B_{1i} R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T + 2\zeta_i H_i\, H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i}\, B_{2i}^T\right) P_{11}^i\right) r_i \qquad (۳۶)$$

با توجه به رابطهٔ $a^2 + b^2 \ge 2ab$ و همچنین $P_{11}^i > 0$ از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right) - 0.5\alpha_i\right) \le -\left\|\left(Q_{new}\,(P_{11}^i)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\| \left\|\left(G_i\,(P_{11}^i)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\| \qquad (۳۷)$$

با استفاده از نامساوی $\|MN\| \le \|M\|\|N\|$ ، آنگاه رابطهٔ (۳۷) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathrm{Re}\left(\lambda_i - 0.5\alpha_i\right) \le -\left\|\left(G_i\, Q_{i-new}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|$$
$$\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right) \le .05\alpha_i - \left\|\left(G_i\, Q_{i-new}\right)^{\frac{1}{2}}\right\| \qquad (۳۸)$$



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

با توجه به این محاسبات، دینامیک حلقه بسته در صورتی پایدار است (ماتریس $\left(A_i + B_{1i}K_i\right)$ هرویتز باشد) که شرط (۲۶) برقرار باشد.

می توان نتیجه گرفت اگر رابطه (۲۶) برقرار باشد آنگاه $\left(A_i + B_{1i}K_{1i}\right)$ هرویتز است. معادله ریکاتی (۳۱) نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} &X_i^T(A_i'^T P_i + P_i A' + Q_{\zeta_i} \\ &-\left(\frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} + P_i B_{1i}'\right) R_{\zeta_i}^{-1}\left(\frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} + P_i B_{1i}'\right)^T \\ &+P_i\left(\zeta_i H_i' H_i'^T + \gamma^{-2} B_{2i}' B_{2i}'^T\right) P_i - \alpha P_i) X_i = 0 \end{aligned} \tag{۳۹}$$

می‌توان دید که اگر $P_i X_i = 0$ باشد، آنگاه $\left(X_i^T(Q_{\zeta_i} - \frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}'^T E_{1i}'}{\zeta_i}) X_i = 0\right)$ . $\tilde{Z}_i^T \tilde{Z}_i$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\tilde{Z}_i^T \tilde{Z}_i = X_i^T Q_{\zeta_i} X_i \\ &+X_i^T\left(\frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} + P_i B_{1i}\right) R_{\zeta_i}^{-1}\left(\frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} + P_i B_{1i}\right)^T \\ &+2X_i^T \frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i}\left[R_{\zeta_i}^{-1}\left(-\frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} + P_i B_{1i}'\right)\right] X_i = 0 \end{aligned} \tag{۴۰}$$

حال با فرض $P_i X_i = 0$ آنگاه رابطه (۴۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} &\tilde{Z}_i^T \tilde{Z}_i = X_i^T Q_{\zeta_i} X_i + X_i^T \frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}'^T E_{1i}'}{\zeta_i} X_i \\ &-2X_i^T \frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}'^T E_{1i}'}{\zeta_i} X_i \\ &= X_i^T Q_{\zeta_i} X_i - X_i^T \frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}'^T E_{1i}'}{\zeta_i} X_i \end{aligned} \tag{۴۱}$$

با توجه به (۳۹) می‌دانیم که رابطه (۴۰) برابر صفر است. پس می‌توان نتیجه گرفت: $\tilde{Z}_i^T \tilde{Z}_i = 0$ . $\tilde{Z}_i$ را می‌توان به صورت زیر بخش بندی نمود:

$$\tilde{Z}_i = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_i^1 \\ \tilde{Z}_i \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} Z_i^1 = 0 \\ Z_i = 0 \rightarrow z_i = e_i, \mathrm{y}_i - y_0 = 0 \end{cases} \tag{۴۲}$$

به عبارت دیگر فضای پوچی $P_i$ $\left(P_i X_i = 0\right)$ زیر مجموعه‌ای از فضایی است که خطای ردیابی صفر است. حال تابع لیاپانف زیر را در نظر بگیرید:

$$V_i\left(X_i\right) = X_i^T P_i X_i \geq 0 \tag{۴۳}$$

برای اثبات پایداری باید نشان دهیم $\dot{V}_i\left(x_i\right) < 0$ اگر $X_i^T P_i X_i = 0$ و رابطهٔ (۲۶) برقرار باشد.

$$\begin{aligned} &\dot{V}_i = X_i^T\left(P_i A_{cl_i} + A_{cl_i}^T P_i\right) X_i \\ &A_{cl_i} = \begin{bmatrix} A_i' + B_{1i}' K_{1i} & B_{1i}' K_{2i} \\ 0 & S \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۴۴}$$

اگر شرط (۲۶) برقرار باشد آنگاه $A_i' + B_{1i}' K_{1i}$ هرویتز است. با توجه به اینکه مقادیر ویژه $S$ بر روی محور حقیقی قرار دارند و $A_{ci}$ پایدار مرزی است. بنابراین یک $Q_i > 0$ وجود دارد که $\dot{V}_i\left(X_i\right) = -X_i^T Q_i X \leq 0$. حال از قضیه مجموعه نامتغیر [1] نتیجه گرفت $X_i$ به سمت بزرگترین مجموعه نامتغییر همگرا می‌شود ( $\dot{V}_i\left(X_i\right) = 0$ ) و می‌دانیم $\dot{V}_i\left(X_i\right) = 0$ است اگر $P_i X_i = 0$. در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

پاسخ معادلات تنظیم خروجی (۱۱) را می‌توان برحسب پاسخ معادله ریکاتی (۳۱) بیان نمود. فرض کنید فضای پوچی $P_i$ به صورت زیر تعریف شود

$$M_i = \left\{X_i \neq 0 : P_i X_i = 0\right\} \tag{۴۵}$$

در مرجع [۲۲] روابط بین $x_i(t)$ و $\varepsilon_0(t)$ برای حالت گسسته بیان شده است. به روشی مشابه می‌توان نشان داد که

$$x_i(t) = -(P_i^{11})^{-1} P_i^{12} \varepsilon_0(t) \tag{۴۶}$$

با توجه به این رابطه، در لم ۱ رابطه بین پاسخ‌های معادلات تنظیم (۱۱) و پاسخ معادله ریکاتی مربوط به مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم به دست می‌آید.

**تذکر۲:** در مسأله اجماع خروجی مشارکتی بر اساس پاسخ‌های معادلات تنظیم خروجی $(\Pi_{iw}, \Gamma_{iw})$، کنترل کننده‌ای به شکل زیر پیشنهاد می‌شود [۲۳]

$$u_i(t) = \bar{K}_i(x_i(t) - \Pi_{iw}\varepsilon_i(t)) + \Gamma_{iw}\varepsilon_i(t) \tag{۴۷}$$

که در این رابطه $\bar{K}_i$ بهره فیدبک حالتی است که $A_{iw} + B_i \bar{K}_i$ را پایدار می‌سازد. همچنین $\varepsilon_i$ تخمین حالت دینامیک رهبر برای عامل $i$ ام است که به صورت زیر به دست می‌آید، که $c$ بهره اتصال[2] است.

$$\dot{\varepsilon}_i = S\varepsilon_i + c\left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\varepsilon_j - \varepsilon_i) + g_i(\varepsilon_0 - \varepsilon_i)\right] \tag{۴۸}$$

**لم ۱** : فرض کنید $P_i$ پاسخ معادله جبری ریکاتی (۲۵) باشد و $K_i^* = [K_{1i}^* \;\; K_{2i}^*]$ باشند، آنگاه معادلات تنظیم خروجی (۱۱) با در نظر گرفتن مقادیر زیر برآورده می‌شوند

$$\begin{aligned} &\Pi_i = -(P_i^{11})^{-1} P_i^{12} \\ &\Gamma_i = K_{2i}^* - K_{1i}^*(P_i^{11})^{-1} P_i^{12} \end{aligned} \tag{۴۹}$$

اثبات : با توجه به رابطه (۲۶) می‌توان نوشت

[1] Invariant Set Theorem

[2] Coupling Gain



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

$$\dot{x}_i(t) = -(P_i^{11})^{-1} P_i^{12}\, \dot{\varepsilon}_0(t) \qquad (۵۰)$$

با جایگذاری (۱)، (۴) (با فرض $d_i(t)=0$ ) و (۱۲) در (۵۰) داریم

$$\begin{aligned} A_{iw}\, x_i(t) + B_{1iw}\, K_{1i} x_i(t) + B_{1iw}\, K_{2i}\, \varepsilon_0(t) \\ = -(P_i^{11})^{-1} P_i^{12}\, S\, \varepsilon_0(t) \end{aligned} \qquad (۵۱)$$

با توجه به ورودی کنترل $u_i(t) = K_{1i}\, x_i(t) + K_{2i}\, \varepsilon_0(t)$ و (۴۷) ، داریم

$$\bar{K}_i = K_{1i}\ ,\quad K_{2i} = \Gamma_{iw} - \bar{K}_i\, \Pi_{iw} \qquad (۵۲)$$

با جایگزینی (۵۲) در (۵۱) رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} A_{iw}\,(P_i^{11})^{-1} P_i^{12} + B_{1iw}\, \bar{K}_i((P_i^{11})^{-1} P_i^{12} + \Pi_{iw}) \\ + B_{1iw}\, \Gamma_{iw} = (P_i^{11})^{-1} P_i^{12}\, S \end{aligned} \qquad (۵۳)$$

با فرض اینکه $\Pi_{iw} = -(P_i^{11})^{-1} P_i^{12}$ رابطه فوق به صورت $\Pi_{iw}\, S = A_{iw}\, \Pi_{iw} + B_{iw}\, \Gamma_{iw}$ تبدیل می‌شود. به عبارت دیگر رابطه اول معادلات تنظیم خروجی (۱۱) را برآورده می‌سازد. با توجه به قضیه ۲ می‌دانیم اگر $P_i\, X_i = 0$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} y_i - y_0 = 0 \\ (C_i'\, x_i - R\, \varepsilon_0)^T (C_i'\, x_i - R\, \varepsilon_0) = 0 \end{aligned} \qquad (۵۴)$$

همچنین $x_i(t) = \Pi_{iw}\, \varepsilon_0(t)$ ، پس نتیجه می‌گیریم

$$C_i\, \Pi_{iw} = R \qquad (۵۵)$$

رابطه (۵۰) نشان می‌دهد که معادله دوم از معادلات تنظیم خروجی نیز برآورده شده است. در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

در ادامه با استفاده از یک الگوریتم یادگیری تقویتی انتگرالی پاسخ معادله جبری ریکاتی (۲۵) را با استفاده از داده های اندازه گیری شده بر خط بدست می‌آوریم.

## ٤- حل مسأله اجماع خروجی مقاوم $H_\infty$ با رویکرد بدون مدل

به منظور به دست آوردن بهره فیدبک در مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم بدون نیاز به دینامیک سیستم، از یک الگوریتم IRL [۲۱]، [۲۸, ۲۹] استفاده می‌کنیم. فرض کنید سیستم (۱۸) به صورت زیر بازنویسی شود

$$\dot{X}_i = M_i\, X_i + B_{1i}^{'}(u_i - K_i^k\, X_i) + B_{2i}^{'}(\tilde{d}_i - K_{\tilde{d}_i}^k\, X_i) \qquad (۵۶)$$

که $M_i = A_i^{'} + B_{i1}^{'} K_i^k + B_{i2}^{'}\, K_{\tilde{d}_i}^k$. در نظر بگیرید که $V_i(X_i) = X_i^T P_i\, X_i$ با مشتق گیری از $V_i$ داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = \alpha_i\, V_i - X_i^T Q_{\zeta_i}\, X_i - u_i^{k\ T}(\frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i}) u_i^k \\ + 2X_i^T(\frac{E_{2i}'^T E_{1i}'}{\zeta_i}) u_i^k - (\tilde{d}_i^k)^T \tilde{d}_i^k \\ + 2(u_i^{k+1\ T} R_{\zeta_i} + X_i^T\, \frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i})(K_i^k X_i - u_i) \\ + 2\tilde{d}_i^{k+1}(\tilde{d}_i - K_{\tilde{d}_i}^k X_i) \end{aligned} \qquad (۵۷)$$

با توجه به رابطه (۲۴) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} u_i^{k+1} = K_i^{k+1} X_i,\ \tilde{d}_i^k = K_{\tilde{d}_i}^k X_i \\ u_i^k = -R_{\zeta_i}^{-1}(B_{1i}^T\, P_i^k + \frac{E_2'^T E_2'}{\zeta_i}) X_i \\ = -R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T\, P_i^k\, X_i - R_{\zeta_i}^{-1}\, \frac{E_2'^T E_2'}{\zeta_i}\, X_i \\ u_i^k + R_{\zeta_i}^{-1}\, \frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i}\, X_i = -R_{\zeta_i}^{-1}\, B_{1i}^T \times \frac{1}{2}(V_i)_{Xk} \\ (V_i)_{Xk}^T\, B_{1i}^T = -((u_i^{k+1})^T\, R_{\zeta_i} + X_i^T\, \frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i}) \\ \tilde{d}_i^k(t) = B_{2i}'^T P_i^k\, X_i\ \ ,\ 2(\tilde{d}_i^k(t))^T = (V_i)_{Xk}\, B_{2i}'^T \end{aligned} \qquad (۵۸)$$

با محاسبات ریاضی و با توجه به [۲۱]، [۳۰] می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_i T} V_i(X_i(t+T)) - V_i(X_i(t)) = \\ \int_t^{t+T} e^{-\alpha(\tau-t)}(-X_i^T Q_{\zeta_i}\, X_i - u_i^{k\ T}(\frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i}) u_i^k \\ +2X_i^T(\frac{E_{2i}'^T E_{1i}'}{\zeta_i}) u_i^k - (\tilde{d}_i^k)^T\, \tilde{d}_i^k) d\tau \\ +2\int_t^{t+T} e^{-\alpha(\tau-t)}(u_i^{k+1T}\, R_{\zeta_i} + X_i^T\, \frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i})(K_i^k\, X_i - u_i) \\ +2\tilde{d}_i^{k+1}(\tilde{d}_i - K_{\tilde{d}_i}^k X_i)\, d\tau \end{aligned} \qquad (۵۹)$$

با توجه به رابطه (۵۹) الگوریتم زیر پیشنهاد می‌گردد.

**الگوریتم حل مسأله اجماع خروجی مقاوم بدون مدل:**

۱.سیاست کنترلی $u_i^0 = K_i^0\, X_i + e$ را چنان انتخاب کنید که $K_i^0$ یک کنترل کننده پایدار ساز باشد . همچنین $e$ نویز جستجو[1] است.

۲.معادله بلمن زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_i T} X_i^T(t+\delta t)\, P_i^k\, X_i(t+\delta t) - X_i^T(t)\, P_i^k\, X_i(t) = \\ \int_t^{t+T} e^{-\alpha(\tau-t)}(-X_i^T Q_{\zeta_i}\, X_i - u_i^{kT}(\frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i}) u_i^k \\ +2X_i^T(\frac{E_{2i}'^T E_{1i}'}{\zeta_i}) u_i^k - (\tilde{d}_i^k)^T\, \tilde{d}_i^k) d\tau \\ +2\int_t^{t+T} e^{-\alpha(\tau-t)}(u_i^{k+1^T} R_{\zeta_i} + X_i^T\, \frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i})(K_i^k\, X_i - u_i) \\ +2\tilde{d}_i^{k+1}(\tilde{d}_i - K_{\tilde{d}_i}^k\, X_i)\, d\tau \end{aligned} \qquad (۶۰)$$

۳.الگوریتم را تا زمانی اجرا کنید که همگرایی حاصل شود. در غیر اینصورت $k = k+1$ و به گام ۲ بروید.

[1] Probing Noise



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

**تذکر۳:** در الگوریتم ارائه شده فرض بر این است که مقادیر $E_{1i}$ ، $E_{2i}$ و $H_i$ که مربوط به ساختار نامعینی در معادلات (۲) می‌باشند، معلوم هستند. همچنین اغتشاش وارد شده به سیستم کراندار است.

**تذکر٤** : در الگوریتم فوق سیاست کنترلی $u_i$ که به عوامل اعمال می‌شود را می‌توان به صورت یک سیاست کنترلی پایدار ساز ثابت در نظر گرفت. اطلاعات گردآوری شده توسط این سیاست ثابت، برای به دست آوردن ماتریس $P_i^k$ و سیاست بهبود کنترل $u_i^{k+1} = K_i^{k+1} X_i$ به کار برده می‌شود. همچنین ورودی اغتشاش $d_i$ ورودی اغتشاش واقعی است، اما $d_i^{k+1} = K_{d_i}^{k+1} X_i$ ورودی اغتشاشی است که ارزیابی و بروز می‌شود.

**تذکر ۵:** می‌توان گفت الگوریتم شامل دو مرحله اساسی است. در مرحله اول، یک سیاست کنترلی اولیه ثابت $u_i$ به سیستم اعمال می‌گردد و اطلاعات به دست آمده از عوامل در بازه زمانی $T$ ذخیره می‌گردد. سپس بدون نیاز به دینامیک‌های عوامل، اطلاعات گردآوری شده در مرحله اول برای به دست آوردن $u_i^{k+1}, d_i^{k+1}$ استفاده می‌شوند این کار تا زمانی ادامه می‌یابد که این مقادیر به مقادیر $u_i^*$ و $d_i^*$ همگرا شوند.

**تذکر٦ :** همگرایی الگوریتم به روشی مشابه آنچه در [۲۱] آورده شده است، اثبات می‌شود.

**تذکر۷ :** در روش ارائه شده برای بدست آوردن پاسخ مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم فرض بر این است که دینامیک عامل رهبر مشخص است. در [۲۳] یک رویتگر توزیع شده تطبیقی برای تخمین حالات عامل رهبر پیشنهاد شده است. دینامیک این رویتگر به صورت زیر است

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_i = \hat{S}_i\,\hat{\varepsilon}_i + c\left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\hat{\varepsilon}_j - \hat{\varepsilon}_i) + g_i(\varepsilon_0 - \hat{\varepsilon}_i)\right] \qquad (۶۱)$$
$$\hat{y}_{0i} = \hat{R}_i\,\varepsilon_i$$

که $\hat{S}_i \in R^{p\times p}$ و $\hat{R}_i \in R^{q\times p}$ به ترتیب تخمین دینامیک $S$ و $R$ هستند. $\hat{\varepsilon}_i$ و $\hat{y}_{0i}$ بردار حالت و خروجی رویتگر تطبیقی گره $i$ ام است. خطای مشاهده شده توسط همسایگان در این حالت به صورت زیر تعریف می‌شود

$$e_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\hat{\varepsilon}_j - \hat{\varepsilon}_i) + g_i(\varepsilon_0 - \hat{\varepsilon}_i) \qquad (۶۲)$$

همچنین قانون تطبیق برای $\hat{S}_i$ به صورت زیر می‌باشد

$$\dot{\hat{S}}_{veci} = \Gamma_{si}(I_p \otimes \hat{\varepsilon}_i)\, p_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\hat{\varepsilon}_j - \hat{\varepsilon}_i) + g_i(\varepsilon_0 - \hat{\varepsilon}_i) \qquad (۶۳)$$

که در این رابطه $\hat{S}_{veci}$ نمایش ستونی $\hat{S}_i$ است (با توجه به تعریف ۱ به دست می‌آید). همچنین $\Gamma_{si} > 0$ .

$$p_i = diag(q_i)$$
$$q = [q_1\ q_2 \dots q_N]^T = ((L+G)\otimes I_p)^{-T} 1_{Np} \qquad (۶۴)$$

$q \in R^{Np}$ بردار ویژه چپ ماتریس لاپلاسین گراف است. $1_{Np}$ برداری با عناصر یک است. $(q_i \in R^p)$. قانون تطبیق $\hat{R}_i$ نیز به صورت زیر طراحی می‌شود.

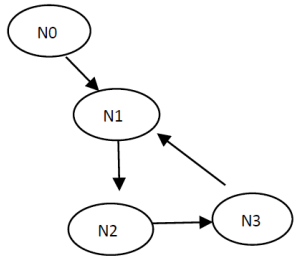
$$\dot{\hat{R}}_i = \alpha\left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\hat{R}_j\hat{\varepsilon}_j - \hat{R}_i\hat{\varepsilon}_i) + g_i(y_0 - \hat{R}_i\hat{\varepsilon}_i)\right]\hat{\varepsilon}_i^T \qquad (۶۵)$$

که $\alpha > 0$ یک عدد است.

**تذکر ۸**: روشهای موجود برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی [۱۵]، [۱۴, ۲۷] از $p$ - کپی مدل داخلی استفاده می‌کنند. استفاده از این ساختار سبب پیچیده شدن کنترل کننده می‌گردد. همچنین در کلیه این روشها داشتن اطلاعات کامل عوامل و عامل رهبر امری ضروری است که در بسیاری از کاربردهای عملی ممکن نیست. با توجه به این موضوع می‌توان از روشهایی که بر پایه روشهای یادگیری تقویتی هستند، استفاده نمود [۲۲, ۲۳]. در روشهای ارائه شده تاثیر وجود اغتشاش و عدم قطعیت در نظر گرفته نشده است. به علت وجود اغتشاش و عدم قطعیت این روشها کارایی خود را از دست می‌دهند. با توجه به این موارد در این مقاله با استفاده از روش IRL کنترل کننده بدون مدل با وجود نامعینی طراحی شد که بدون استفاده از $p$ - کپی مدل داخلی برآورده شدن هدف تنظیم خروجی مشارکتی مقاوم را تضمین می کند. به علت استفاده از ساختار سیستم کمکی، طراحی کنترل کننده مقاوم با محدودیت $H_\infty$ به سادگی قابل حل می‌باشد. همچنین ساختار جدید شرایط لازم برای استفاده از روش IRL را فراهم ساخت.

## ۵ - نتایج شبیه سازی

در این بخش با استفاده از یک مثال عددی کارآیی روش پیشنهاد شده برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم را بررسی می کنیم. سیستم چند عاملی پیوسته ناهمگن زیر را در نظر بگیرید. این سیستم دارای ۳ عامل می‌باشد، که گراف ارتباطی آنها به صورت زیر نمایش داده می‌شود.




شکل ۱ (گراف ارتباطی عوامل)

دینامیک عامل رهبر به صورت زیر است

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

$$\dot{\zeta}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \zeta_0 \qquad (۶۶)$$
$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \zeta_0$$

دینامیک عوامل دیگر نیز به صورت زیر تعریف هستند

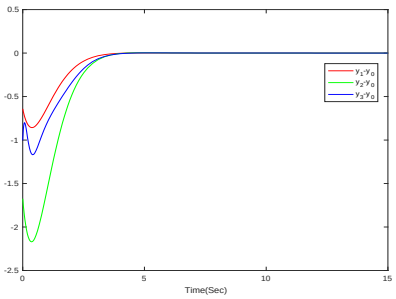
$$A_1 = 0 \,,\; B_{11} = 10, \quad B_{12} = 1, \quad C_1 = 1 \qquad (۶۷)$$
$$E_{11} = E_{21} = H_1 = 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;,\quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \;,\quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۶۸)$$
$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \;,\; H = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix}^T$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ,B_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \;,\quad B_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۶۹)$$
$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$E_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\; E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \;,\; H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix}^T$$

حال با استفاده از الگوریتم ارائه شده، کنترل کننده‌های مناسب برای رسیدن به هدف اجماع خروجی مشارکتی مقاوم را به دست می‌آوریم. شکل ۲ خروجی عامل رهبر و همچنین خروجی عوامل دیگر را نشان می‌دهد. با توجه به دینامیک عامل رهبر مشخص است که یک سیگنال سینوسی توسط این دینامیک تولید می‌شود. از این شکل می‌توان نتیجه گرفت که هدف مورد نظر به خوبی برآورده می‌شود. اغتشاش در این سیستم چند عاملی برای هر یک از عوامل به صورت $d_i(t) = \sin(t) \quad i = 1,2,3$ در نظر گرفته شده است. همچنین ماتریس مجاورت و ماتریس درون درجه مربوط به گراف ارتباطی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$A_{ad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_{in} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۷۰)$$

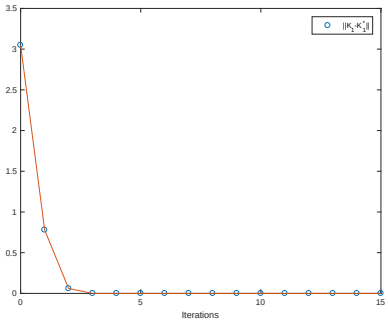



شکل۲ (خطای تنظیم خروجی $y_i - y_0$)

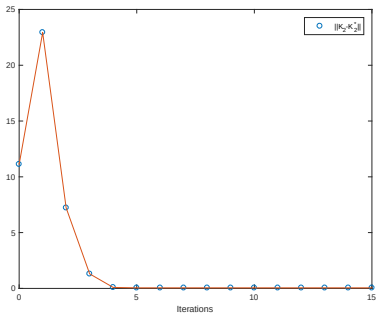
مقادیر ماتریسهای بهره به صورت زیر می‌باشند

$$K_1 = -6 \qquad K_2 = \begin{bmatrix} -6.85 & -7.36 \end{bmatrix} \qquad (۷۱)$$
$$K_3 = \begin{bmatrix} -7.2 & -6.95 \end{bmatrix}$$

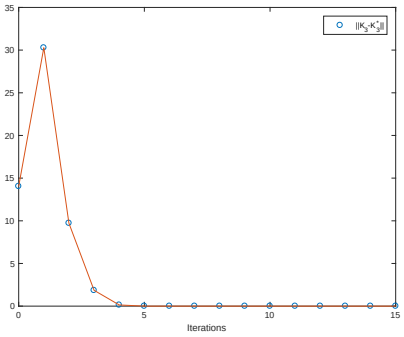
شکل‌های زیر همگرایی مقادیر کنترل کننده ها به مقادیر بهینه را در فرآیند یادگیری نمایش می‌دهد.




شکل ۳ (همگرایی ماتریس بهره $K_1$ به مقدار بهینه)




شکل ۴ (همگرایی ماتریس بهره $K_2$ به مقدار بهینه آن)




شکل ۵ (همگرایی ماتریس $K_3$ به مقدار بهینه)

به وضوح دیده می‌شود که الگوریتم پیشنهاد شده مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم را حل نموده است. همچنین شکل‌های ۳-۵ همگرایی کنترل کننده ها به مقادیر بهینه شان را نشان می‌دهد.

## ٦- نتیجه‌گیری

در این مقاله به حل مسأله کنترل مقاوم با محدودیت $H_\infty$ در سیستم‌های چند عاملی ناهمگن پرداخته شد. این مسأله با استفاده از ایده سیستم کمکی افزوده به یک مسأله کنترل $H_\infty$ تبدیل شد. سپس یک حد پایین بالا برای ضریب تقلیل جهت تضمین پایداری به دست آمد. ثابت شد در صورت برقراری شرط ضریب تقلیل، مسأله اجماع خروجی مقاوم حل می‌شود. ثابت شد که این روش سبب می‌شود که معادلات تنظیم خروجی نیز برآورده شوند. درانتها نیز یک الگوریتم یادگیری تقویتی انتگرالی برای حل مسأله بدون نیاز به مدل عوامل ارائه گردید.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

## مراجع

[1] A. Bidram, F. L. Lewis, and A. Davoudi, "Synchronization of nonlinear heterogeneous cooperative systems using input–output feedback linearization," *Automatica*, vol. 50, no. 10, pp. 2578-2585, 2014.

[2] Y. Chen, J. Lü, F. Han, and X. Yu, "On the cluster consensus of discrete-time multi-agent systems," *Systems Control Letters*, vol. 60, no. 7, pp. 517-523, 2011.

[3] Z. Li, M. Z. Chen, and Z. Ding, "Distributed adaptive controllers for cooperative output regulation of heterogeneous agents over directed graphs," *Automatica*, vol. 68, pp. 179-183, 2016.

[4] Z. Li and Z. Ding, "Distributed adaptive consensus and output tracking of unknown linear systems on directed graphs," *Automatica*, vol. 55, pp. 12-18, 2015.

[5] Z. Li and Z. Duan, "Distributed consensus protocol design for general linear multi-agent systems: a consensus region approach," *IET Control Theory & Applications*, vol. 8, no. 18, pp. 2145-2161, 2014.

[6] Z. Li, Z. Duan, and F. L. Lewis, "Distributed robust consensus control of multi-agent systems with heterogeneous matching uncertainties," *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 883-889, 2014.

[7] K. Hengster-Movric, F. L. Lewis, and M. Sebek, "Distributed static output-feedback control for state synchronization in networks of identical LTI systems," *Automatica*, vol. 53, pp. 282-290, 2015/03/01/ 2015.

[8] Y. Feng, S. Xu, F. L. Lewis, and B. Zhang, "Consensus of heterogeneous first- and second-order multi-agent systems with directed communication topologies," *Internationa Journal of Robust Nonlinear Control*, vol. 25, no. 3, pp. 362-375, 2015.

[9] F. A. Yaghmaie, R. Su, F. L. Lewis, and S. Olaru, "Bipartite and cooperative output synchronizations of linear heterogeneous agents " *Automatica*, vol. 80, no. C, pp. 172-176, 2017.

[10] Y. Dong and J. Huang, "Cooperative global output regulation for a class of nonlinear multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 5, pp. 1348-1354, 2013.

[11] Y. Su, Y. Hong, and J. Huang, "A general result on the robust cooperative output regulation for linear uncertain multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 5, pp. 1275-1279, 2012.

[12] X. Wang, Y. Hong, J. Huang, and Z.-P. Jiang, "A distributed control approach to a robust output regulation problem for multi-agent linear systems," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 55, no. 12, pp. 2891-2895, 2010.

[13] Y. Su and J. Huang, "Cooperative global robust output regulation for nonlinear uncertain multi-agent systems in lower triangular form," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 9, pp. 2378-2389, 2015.

[14] W. Liu and J. Huang, "Cooperative global robust output regulation for nonlinear output feedback multiagent systems under directed switching networks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 12, pp. 6339-6352, 2017.

[15] W. Liu and J. Huang, "Global Robust Output Regulation for a Class of Nonlinear Systems via Event-Triggered Control," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 7566-7571, 2017.

[16] Q. Ma, S. Xu, F. L. Lewis, B. Zhang, and Y. Zou, "Cooperative output regulation of singular heterogeneous multiagent systems," *IEEE Transactions on cybernetics*, vol. 46, no. 6, pp. 1471-1475, 2015.

[17] F. A. Yaghmaie, F. L. Lewis, and R. Su, "Output regulation of linear heterogeneous multi-agent systems via output and state feedback," *Automatica*, vol. 67, pp. 157-164, 2016.

[18] A. Al-Tamimi, F. L. Lewis, and M. J. A. Abu-Khalaf, "Model-free Q-learning designs for linear discrete-time zero-sum games with application to H-infinity control," *Automatica*, vol. 43, no. 3, pp. 473-481, 2007.

[19] A. P. Valadbeigi, A. K. Sedigh, and F. L. Lewis, "H∞ Static Output-Feedback Control Design for Discrete-Time Systems Using Reinforcement Learning," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, pp. 1-11, 2019.

[20] H. Modares, F. L. Lewis, and Z. Jiang, "Optimal Output-Feedback Control of Unknown Continuous-Time Linear Systems Using Off-policy Reinforcement Learning," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 46, no. 11, pp. 2401-2410, 2016.

[21] H. Modares, F. L. Lewis, and Z. Jiang, "$ {H}_{ {\infty }}$Tracking Control of Completely Unknown Continuous-Time Systems via Off-Policy Reinforcement Learning," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 26, no. 10, pp. 2550-2562, 2015.

[22] B. Kiumarsi and F. L. Lewis, "Output synchronization of heterogeneous discrete-time systems: A model-free optimal approach," *Automatica*, vol. 84, pp. 86-94, 2017/10/01/ 2017.

[23] H. Modares, S. P. Nageshrao, G. A. D. Lopes, R. Babuška, and F. L. Lewis, "Optimal model-free output synchronization of heterogeneous systems using off-policy reinforcement learning," *Automatica*, vol. 71, pp. 334-341, 2016/09/01/ 2016.

[24] F. L. Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric, and A. Das, *Cooperative control of multi-agent systems:*

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]

*optimal and adaptive design approaches*. Springer Science & Business Media, 2013.

[25] F. Adib Yaghmaie, K. Hengster Movric, F. L. Lewis, R. Su, and M. Sebek, "H∞-output regulation of linear heterogeneous multiagent systems over switching graphs," *International Journal of Robust. Nonlinear Control,* vol. 28, no. 13, pp. 3852-3870, 2018.

[26] Q. Jiao, H. Modares, F. L. Lewis, S. Xu, and L. Xie, "Distributed L2-gain output-feedback control of homogeneous and heterogeneous systems," *Automatica,* vol. 71, pp. 361-368, 2016/09/01/ 2016.

[27] Y. Su and J. Huang, "Cooperative global robust output regulation for nonlinear uncertain multi-agent systems in lower triangular form," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 60, no. 9, pp. 2378-2389, 2015.

[28] C. Chen, H. Modares, K. Xie, F. L. Lewis, Y. Wan, and S. Xie, "Reinforcement Learning-based Adaptive Optimal Exponential Tracking Control of Linear Systems with Unknown Dynamics," *IEEE Transactions on Automatic Control,* pp. 1-1, 2019.

[29] L. M. Zhu, H. Modares, G. O. Peen, F. L. Lewis, and B. Yue, "Adaptive Suboptimal Output-Feedback Control for Linear Systems Using Integral Reinforcement Learning," *IEEE Transactions on Control Systems Technology,* vol. 23, no. 1, pp. 264-273, 2015.

[30] H. Modares, F. L. Lewis, W. Kang, and A. Davoudi, "Optimal Synchronization of Heterogeneous Nonlinear Systems With Unknown Dynamics," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 63, no. 1, pp. 117-131, 2018.

[۳۱] به مقاوم تطبیقی اجماع کنترل ولدبیگی، امیر پرویز، " طراحی دار" جهت ثابت توپولوژی با عاملی چند سیستم‌های برای نامعینی ، رساله دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، ۱۳۹۸.

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-11-03 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.2.6 ]
[ DOI: 10.52547/joc.14.4.81 ]