**مجله کنترل**
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۵، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۰، صفحه ۵۴-۴۷

# ارایه روشی نوین برای افزایش دقت ارضای قیود نهایی مساله کنترل پیش‌بین

مهران مهدی آبادی[۱]، نعمت‌الله قهرمانی[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، mahdiabadi@mut.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ghahremani@mut.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۱۲ ویرایش اول: ۱۳۹۹/۰۳/۰۳ ویرایش دوم: ۱۳۹۹/۰۷/۲۶ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۰۲

**چکیده**: در این مقاله، الگوریتم نوینی برای افزایش دقت قیود نهایی مسئله کنترل پیش‌بین ارایه شده است. در این الگوریتم، با استخراج روابط ریاضی، قیود نهایی از لحظه نهایی به لحظات جاری انتقال یافته و در هر تکرار این انتقال در مسئله بهینه‌سازی صورت می‌گیرد. در هر لحظه از بهینه‌سازی، یک عبارت جدید بر حسب ورودی‌های کنترل در هر یک از افق‌های محدود کنترل پیش‌بین بدست می‌آید. معادله این قید انتقالی، بر اساس معادلات گسسته متغیر با زمان فرایند تحت کنترل استخراج شده و اجرای آن در هر لحظه، قیود نهایی مسئله را محقق می‌کند. این الگوریتم جدید پس از استخراج روابط ریاضی آن برای ردیابی مسیر یک ربات با قیود نهایی بکار رفته و کارایی آن با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک ربات نشان داده شده است. همچنین تحلیل پایداری کنترل کننده پیشنهادی با نوشتن یک تابع هزینه مناسب و بکارگیری قضیه لیاپانف صورت گرفته است.

**کلمات کلیدی:** کنترل پیش‌بین، قیود نهایی، قید انتقالی، محاسبات زمان واقعی، تحلیل پایداری.

# New Approach for Accuracy Enhancement of Terminal Constraints Satisfaction in Model Predictive Control Problem

**Mehran Mahdi Abadi, Nematollah Ghahremani**

**Abstract:** In this paper, a new algorithm in order to increase the satisfaction of terminal constraints in the predictive control problem is presented. In this algorithm, by extracting mathematical relations, the terminal constraints are transferred from the final moment to the current moments. In each iteration, this transformation takes place in the optimization problem. At each moment of optimization, a new expression is obtained in terms of control inputs in each of the finite prediction control horizons. The equation of this transfer constraint is derived based on the variable discrete equations with the time of the controlled process and its execution at any moment fulfills the final constraints of the problem. This new algorithm, after extracting its mathematical relationships, is used to track the path of a robot with terminal constraints, and its performance is demonstrated using robot dynamics simulations. Also, the stability analysis of the proposed controller is performed by writing an appropriate cost function and applying Lyapunov theorem.

**Keywords:** Model Predictive Control, Terminal Constraints, Transformed Constraint, Real Time Computation, Stability Analysis.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.3.1.0 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.3.47 ]

## ۱- مقدمه

مسئله کنترل بهینه با قیود نهایی همواره یکی از مسائل مهم و چالشی سیستم‌های کنترل بوده است. این گونه مسائل، به طور کلی، به دلیل پیچیدگی فراوان، به صورت عددی قابل حل بوده و روش تحلیلی برای آنها وجود ندارد. حل این گونه مسائل به دو روش عمده مستقیم و غیرمستقیم قابل انجام است [۱]. رویکرد حل مساله در روش غیرمستقیم، استفاده از ضرایب کمکی برای دست‌یابی به پاسخ بهینه است. اما در روش مستقیم، مساله کنترل بهینه مقید به یک مساله بهینه‌سازی غیرخطی تبدیل می‌شود [۲]. روش‌های مختلفی برای حل بهینه‌سازی غیرخطی ارایه شده است که می‌توان به روش‌های پرتابی [۳, ۴]، روش‌های هم‌نشانی[۵, ۶] و روش‌های شبه طیفی[۷, ۸] اشاره کرد. تمامی این روش‌های به صورت غیر برخط عمل کرده و امکان استفاده از آنها در محاسبات زمان واقعی و برخط وجود ندارد. علاوه بر اینها، روش جدیدی مبتنی بر برنامه‌ریزی پویا و بهینه‌سازی غیرخطی برای حل مساله کنترل بهینه غیرخطی مقید پیشنهاد شده است [۹]. نتایج استفاده از این روش در حل یک مساله کنترل بهینه مقید بیانگر این است که ورودی بهینه حاصل شده، در لحظات انتهایی مسیر، نوسانی شده و امکان به اشباع رفتن کنترل وجود دارد [۱۰].

امکان پیاده‌سازی کنترل‌کننده‌های بهینه بر اساس مفاهیم کنترل پیش‌بین به صورت عملیاتی و در زمان‌های واقعی[۱۱] و با در نظر گرفتن قیود مختلف مسیر[۱۲] حاصل شده است. کنترل پیش‌بین یک روش کنترل مدرن است که در سه دهه گذشته توسعه یافته و برای حل زمان واقعی مسایل کنترل بهینه و ارضای قیود مسیر، روش بسیار کارآمدی است. یکی دیگر از قابلیت‌های مهم این روش، عملکرد مناسب آن در نزدیکی مرز قیود مساله، برای دست‌یابی به عملکرد بهتر در مقایسه با سایر روش‌های مرسوم کنترل است [۱۳]. ایده اصلی این روش کنترل، بهره‌گیری از یک مدل مرجع برای پیش‌بینی رفتار آتی سیستم و تولید ورودی‌های بهینه کنترل برای بهینه‌سازی معیار عملکردی به همراه قیود مسیر است[۱۴]. مهم‌ترین ویژگی کنترل‌کننده‌های پیش‌بین، توانایی آن‌ها در تحقق قیود و جبران عدم قطعیت‌ها [۱۵] و تاخیرها می‌باشد. علاوه بر این، قابلیت بکارگیری آن‌ها در سیستم‌های چندمتغیره[۱۶] و سیستم‌های غیرخطی مقید[۱۷] است. مهم‌ترین محدودیت‌هایی که در سیستم‌های عملی خودنمایی می‌کنند، قیودی هستند که بر روی ورودی کنترل وجود داشته [۱۸] و می‌توانند سبب ناپایداری سیستم شوند [۱۹]. علاوه بر این، در اکثر سیستم‌های واقعی، محدودیت‌هایی بر روی متغیرهای حالت وجود دارد که در مسیر عملکردی آن‌ها رخ می‌دهد [۲۰]. این محدودیت‌ها در مسیر عملکرد سیستم‌های کنترل رخ می‌دهد و در هر لحظه از استخراج قانون کنترل پیش‌بین، تنها در افق‌های محدود پیش‌بینی و کنترل لحاظ می‌شود. بنابراین برای بهبود عملکرد الگوریتم‌های کنترل پیش‌بین در هر مساله با شرایط خاص، بایستی الگوریتم نوینی توسعه یابد [۲۱]. یکی از الگوریتم‌های توسعه یافته برای مسایل دارای قیود نهایی، برنامه‌ریزی پیش‌بین استاتیک است [۲۲]. این روش با استفاده از تئوری کنترل بهینه و برنامه‌ریزی پویا بنا نهاده شده و برای مسایل کنترل بهینه غیرخطی با قیود نهایی توسعه یافته است [۹]. عملکرد این الگوریتم در هر لحظه از زمان، مبتنی بر محاسبه ضرایب حساسیت به صورت تکرارشونده است و در هر مرحله از محاسبه ضرایب حساسیت، قوانین کنترلی با هدف دست‌یابی به قیود نهایی اصلاح می‌شود [۲۳]. تمامی این محاسبات در هر لحظه از زمان گسسته بایستی صورت گیرد. زمان‌بر بودن این عملیات در کل بازه کنترل یک سیستم، بر خلاف الگوریتم‌های کنترل پیش‌بین، امکان پیاده‌سازی زمان واقعی این روش را غیرممکن می‌سازد.

در تمامی این روش‌ها، قیود نهایی اثر جدی بر کنترل لحظه جاری ندارند. به همین علت، معمولاً خطای سیستم کنترل در لحظات نهایی افزایش یافته و حتی ممکن است عملگرها به اشباع بروند. در این مقاله، روش نوینی برای حل مسئله کنترل پیش‌بین با هدف تحقق قیود نهایی با در نظر گرفتن اثر آن در هر یک از لحظات جاری ارایه شده است. در این روش، مشکل فوق، یعنی انباشتگی خطا در لحظات نهایی تا حد خیلی زیادی حل شده است. زیرا اثر قیود نهایی به صورت یک قید انتقالی پویا در تمامی لحظات بهینه‌سازی کنترل لحاظ می‌شود. در روش پیشنهادی، روابط ریاضی به گونه‌ای استخراج شده است که قیود لحظه آخر مسئله در هر یک از لحظات جاری بهینه‌سازی، لحاظ می‌کند. یعنی در الگوریتم پیشنهادی، بهینه‌سازی تابع معیار در هر گام از محاسبه قانون کنترل با در نظر گرفتن قیود نهایی صورت می‌گیرد. در واقع، قیود نهایی بر اساس توسعه روابط ریاضی حاکم بر مسئله، به یک عبارت قیدی بر اساس ورودی‌های کنترل در افق محدود کنترل تبدیل شده و قانون کنترل بهینه در هر گام بر اساس این عبارت قیدی، استخراج می‌شود.

به همین خاطر است که خطاهای سیستم کنترل در مواردی که قیود نهایی وجود دارند به نقطه آخر منتقل نشده و در طول مسیر قبل از رسیدن به نقطه نهایی جبران می‌شود. این رویکرد جدید باعث می‌شود که عملگرها در نقاط نهایی به اشباع نروند. شبیه‌سازی‌های صورت گرفته کارایی عملکرد این الگوریتم در افزایش دقت ارضای قیود نهایی را نشان می‌دهد.

ساختار مقاله به صورت زیر در نظر گرفته شده است: در بخش ۲، الگوریتم جدید تحقق قیود نهایی کنترل پیش‌بین در لحظات جاری بر اساس استخراج یک قید انتقالی توصیف شده است. شبیه‌سازی عددی الگوریتم و تحلیل نتایج آن برای مسئله نمونه ردیابی مسیر یک ربات متحرک دارای قیود نهایی در بخش ۳ارایه شده است. در بخش ۴، پایداری روش ارایه شده، تحلیل و اثبات آن ارایه شده است. در بخش پایانی ۵، نتیجه‌گیری مقاله بیان شده است.

## ۲- روش پیشنهادی برای افزایش دقت تحقق قیود نهایی کنترل پیش‌بین

در این بخش، الگوریتم پیشنهادی برای افزایش دقت تحقق قیود نهایی مسئله کنترل پیش‌بین ارایه شده است. در این الگوریتم، راهکار نوینی برای



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.3.1.0 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.3.47 ]

تحقق قیود نهایی با استفاده از ورودی کنترل در لحظات جاری تدوین شده است. یک سیستم خطی متغیر با زمان با معادلات دینامیک گسسته به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k) \\ y(k) &= C(k)\,x(k) \end{aligned} \qquad (۱)$$

که $x(k) \in R^n$، $u(k) \in R^m$ و $y(k) \in R^p$ به ترتیب، بردارهای حالت، ورودی و خروجی سیستم دینامیک فوق بوده و زوج $(A,B)$ پایدارپذیر است. پارامترهای مسیر نامی سیستم دینامیکی فوق، به صورت $\left(x^*, u^*, y^*\right)$می‌باشد که بر اساس سیستم دینامیکی نامی زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_m(k)\; x_m(k) + B_m(k)\; u_m(k) \\ y_m(k) &= C_m(k)\; x_m(k) \end{aligned} \qquad (۲)$$

تابع هزینه کنترل پیش‌بین بر اساس مدل نامی فوق به صورت زیر باز تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min\; J = \\ &\sum_{k=1}^{N_P^u} \left[ y(k) - y^*(k) \right]^T Q \left[ y(k) - y^*(k) \right] + \\ &\sum_{k=1}^{N_C} \Delta u^T(k)\, R\, \Delta u(k) \end{aligned} \qquad (۳)$$

که $N_C$ ، $N_P$ به ترتیب، افق‌های پیش‌بینی و کنترل بوده و $Q, R$ نیز ماتریس‌های وزنی کنترل و حالت هستند. در هر گام از فرایند بهینه‌سازی تابع هزینه، تولید رشته کنترل در افق‌های محدود کنترل و پیش‌بینی صورت می‌گیرد و این کار تا نقطه پایان شبیه‌سازی ادامه خواهد داشت. اما در مواردی که کنترل پیش‌بین دارای قیود نهایی باشد، می‌توان در هر گام از شبیه‌سازی، قیود نهایی خروجی یا حالت را در فرایند بهینه‌سازی افق محدود دخیل کرد. برای این منظور، مساله کنترل پیش‌بین سیستم گسسته متغیر با زمان با شرایط نهایی مقید را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\min\; J = \\ &\sum_{k=1}^{N_P^u} \left[ y(k) - y^*(k) \right]^T Q \left[ y(k) - y^*(k) \right] \\ &+ \sum_{k=1}^{N_C} \Delta u^T(k)\, R\, \Delta u(k) \\ &s.t:\; x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k) \\ &\qquad y(k) = C(k)\,x(k) \\ &\qquad y(N) = y^*(N) \end{aligned} \qquad (۴)$$

پاسخ سیستم دینامیکی (۱) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} x(k) &= \Phi(k,0)\,x_0 + \\ &\sum_{j=1}^{k} \Phi(k,j)\,B\left(j-1\right)u\left(j-1\right) \end{aligned} \qquad (۵)$$

که ماتریس انتقال حالت گسسته $\Phi(k,j)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\Phi(k,j) = \begin{cases} A\left(k-1\right)A\left(k-2\right)\cdots A\left(j\right) & k > j \geq 0 \\ I & k = j \end{cases} \qquad (۶)$$

بنابراین رابطه (۵) به فرم بسته زیر قابل توصیف است:

$$\begin{aligned} x(k) &= \Phi(k,0)\,x_0 + \\ &\sum_{j=1}^{k} \Phi(k,j)\,B(j-1)\,u(j-1) \\ &= \Phi(k,0)\,x_0 + \Gamma(k,0)\,U(k,0) \end{aligned} \qquad (۷)$$

که پارامترهای $\Gamma$ و $U$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\Gamma(k,0) = \\ &\left[ \Phi(k,1)\,B(0) \middle| \Phi(k,2)\,B(1) \middle| \cdots \middle| B(k-1) \right] \\ &U(k,0) = \\ &\left[ u(0) \quad u(1) \quad \cdots \quad u(k-1) \right]^T \end{aligned} \qquad (۸)$$

بر اساس رابطه (۷)، مقدار خروجی در هر گام به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} y(k) &= C\,x(k) = \\ &C\Phi(k,0)\,x_0 + \\ &C\sum_{j=1}^{k} \Phi(k,j)\,B(j-1)\,u(j-1) \\ &= C\,\Phi(k,0)\,x_0 + C\,\Gamma(k,0)\,U(k,0) \end{aligned} \qquad (۹)$$

با فرض اینکه که کل بازه زمانی شبیه‌سازی $[0 \;\; NT_s]$ به $N$ افق محدود پیش‌بینی تقسیم‌بندی شده باشد، در این صورت، مقدار خروجی در نقطه انتهایی مسیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} y(N) &= C\,\Phi(N,0)\,x_0 + \\ &C\sum_{j=1}^{N} \Phi(N,j)\,B(j-1)\,u(j-1) \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

وجود قیود شرایط نهایی بر روی خروجی سیستم، شرط زیر را تحمیل می‌کند:



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.3.1.0 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.3.47 ]

$$y(N) = y^*(N) \quad (۱۱)$$

بنابراین طبق رابطه (۱۰) می‌توان نوشت:

$$y(N) = C\,\Phi(N,0)\,x_0 + C\sum_{j=1}^{N}\Phi(N,j)\,B(j-1)\,u(j-1) \equiv y^*(N) \quad (۱۲)$$

که $y^*(N)$ و $C\,\Phi(N,0)\,x_0$ مقادیری ثابت هستند. بنابراین رابطه (۱۲) به صورت زیر قابل بیان است:

$$C\sum_{j=1}^{N}\Phi(N,j)\,B(j-1)\,u(j-1) \equiv y^*(N) - C\,\Phi(N,0)\,x_0 \quad (۱۳)$$

رابطه (۱۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$C\sum_{j=1}^{N_C}\Phi(N_C,j)\,B(j-1)\,u(j-1) + C\sum_{j=N_C+1}^{N}\Phi(N,j)\,B(j-1)\,u(j-1) = y^*(N) - C\,\Phi(N,0)\,x_0 \quad (۱۴)$$

در هر افق محدودی از شبیه‌سازی، عبارت دوم رابطه (۱۴) خارج از افق کنترل بوده و بنابراین مقادیر رشته کنترل در این بازه، معادل مقادیر نامی کنترل در نظر گرفته می‌شوند. گرچه به نظر می‌رسد که این فرض ممکن سبب خطا شود. اما با جلو رفتن گام‌های بهینه‌سازی، این خطا به مراتب کوچک و قابل اغماض خواهد بود. بنابراین رابطه (۱۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$C\sum_{j=1}^{N_C}\Phi(N_C,j)\,B(j-1)\,u(j-1) = y^*(N) - C\,\Phi(N,0)\,x_0 - C\sum_{j=N_C+1}^{N}\Phi(N,j)\,B(j-1)\,u^*(j-1) \quad (۱۵)$$

بر اساس رابطه (۱۵)، در هر گام از بهینه‌سازی افق محدود، قیود شرایط نهایی $y^*(N)$ به یک عبارت قیدی در بازه افق کنترل تبدیل می‌شوند. بنابراین الگوریتم استخراج قانون کنترل پیش‌بین در هر افق محدود بر اساس این رابطه قیدی، ارضای قیود شرایط نهایی را الزام‌آور می‌کند. با پیش رفتن گام‌های بهینه‌سازی تا مرحله $k$ ام، رابطه کلی عبارت قیود شرایط نهایی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$C\sum_{j=k}^{k+N_C}\Phi(k+N_C,j)\,B(j-1)\,u(j-1) = y^*(N) - C\,\Phi(N,0)\,x_0 - C\sum_{j=k+N_C}^{N}\Phi(N,j)\,B(j-1)\,u^*(j-1) - C\sum_{j=1}^{k-1}\Phi(k,j)\,B(j-1)\,u(j-1) \quad (۱۶)$$

عبارت قیدی فوق، چگونگی نگاشت قید نهایی مساله کنترل پیش بین را به یک عبارت قیدی در لحظات جاری نشان می‌دهد. اهمیت این نگاشت در آن است که کنترل کننده همواره اثر قیود نهایی را در لحظه جاری در نظر می‌گیرد و به همین علت، این نگاشت از انباشتگی خطا و نیروی کنترل می‌کاهد. در نهایت، مساله الگوریتم کنترل پیش‌بین با قیود شرایط نهایی خروجی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\min J = \sum_{k=1}^{N_P}\left[y(k) - y^*(k)\right]^T Q\left[y(k) - y^*(k)\right] + \sum_{k=1}^{N_C}\Delta u^T(k)\,R\,\Delta u(k) \quad (۱۷)$$

$$s.t: x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$
$$y(k) = C(k)x(k)$$
$$C\sum_{j=k}^{k+N_C}\Phi(k+N_C,j)\,B(j-1)\,u(j-1) = y^*(N) - C\,\Phi(N,0)\,x_0 - C\sum_{j=k+N_C}^{N}\Phi(N,j)\,B(j-1)\,u^*(j-1) - C\sum_{j=1}^{k-1}\Phi(k,j)\,B(j-1)\,u(j-1)$$

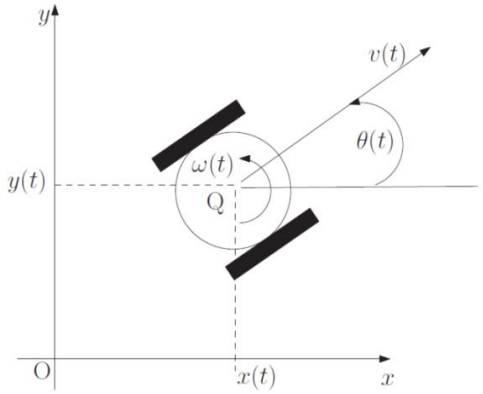
معادلات فوق برای قیود نهایی خروجی بدست آمده است. با استفاده از روابط فوق، می‌توان این الگوریتم را برای متغیرهای حالت سیستم نیز نوشت.

## ۳- شبیه‌سازی عددی الگوریتم و تحلیل نتایج آن

برای ارزیابی صحت عملکرد الگوریتم ارایه شده و بررسی کارایی آن، روش پیشنهادی در مسئله ردیابی مسیر یک ربات متحرک دارای قیود نهایی مورد استفاده قرار گرفته است. در شکل ۱ ساختار کلی یک ربات متحرک در سیستم مختصات دو بعدی نشان داده شده است.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.3.1.0 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.3.47 ]




شکل ۱: ساختار کلی ربات متحرک در دستگاه مختصات دو بعدی

با توجه به شکل ۱، مدل سینماتیک ربات متحرک را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۲۴]:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \qquad (۱۸)$$

که $x$ ، $y$ و $\theta$ متغیرهای حالت سیستم بوده و به ترتیب، موقعیت طولی، موقعیت عرضی و زاویه جهت‌گیری ربات می‌باشند. همچنین $v$ و $\omega$ متغیرهای ورودی سیستم بوده و به ترتیب، سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای ربات هستند. با در نظر گرفتن زمان نمونه‌برداری $T$ و بهره‌گیری از تقریب اویلر، معادله (۱۸) را می‌توان به فرم گسسته زیر بیان کرد [۲۵]:

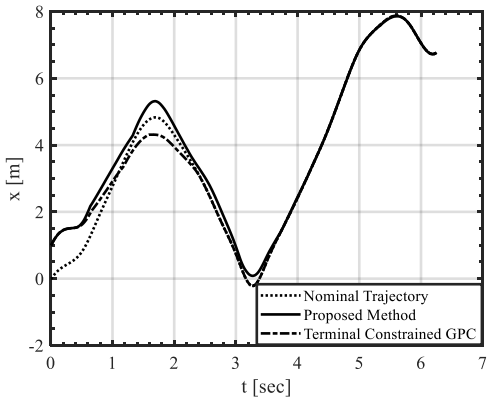
$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + T\,v(k)\cos(\theta(k)) \\ y(k+1) = y(k) + T\,v(k)\sin(\theta(k)) \\ \theta(k+1) = \theta(k) + T\,\omega(k) \end{cases} \qquad (۱۹)$$

بنابراین مدل خطی ربات متحرک حول مسیر نامی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۲۵]:

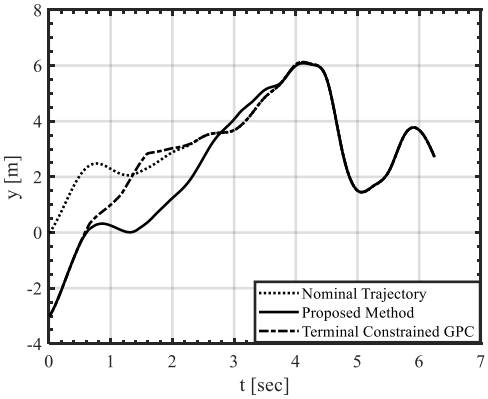
$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}(k+1) &= A(k)\,\Delta\mathbf{x}(k) + B(k)\,\Delta\mathbf{u}(k) \\ A(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -T\,v_r(k)\sin(\theta_r(k)) \\ 0 & 1 & T\,v_r(k)\cos(\theta_r(k)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B(k) &= \begin{bmatrix} T\cos(\theta_r(k)) & 0 \\ T\sin(\theta_r(k)) & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

که $\Delta\mathbf{x}$ بردار خطای حالت مدل دینامیکی ربات نسبت به مدل مسیر نامی بوده و $\Delta\mathbf{u}$ بردار خطای قانون کنترل آن است. همچنین پارامترهای $v_r(k)$ و $\theta_r(k)$ ، پارامترهای مسیر نامی ربات در هر لحظه از زمان گسسته است. این پارامترها، مقادیر متغیر با زمان بوده و بنابراین ماتریس‌های $A$ و $B$ ، ماتریس‌های متغیر با زمان خواهند بود.

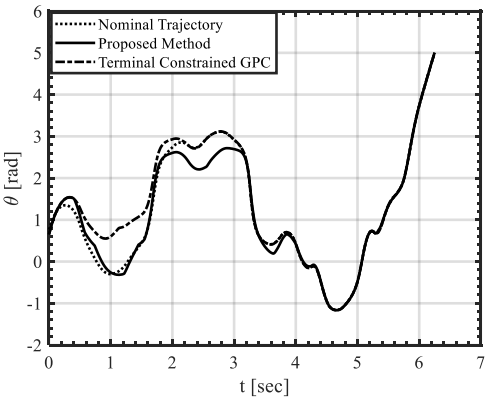
مسیر مرجع در نظر گرفته شده برای ربات با در نظر گرفتن قیود مسیر با استفاده از توابع اسپیلاین استخراج شده است. در شبیه‌سازی‌های انجام شده، مقایسه‌ای بین الگوریتم ارایه شده و کنترل پیش‌بین تعمیم‌یافته[1] دارای قید نهایی به ازای تغییرات شرایط اولیه مختلف صورت گرفته است. نتایج شبیه‌سازی به ازای شرایط اولیه $\mathbf{x}_0 = [\,1 \quad -3 \quad 0.65]^T$ در اشکال ۲ تا ۹ ارایه شده است.




شکل ۲: جابجایی طولی ربات متحرک




شکل ۳: جابجایی عرضی ربات متحرک

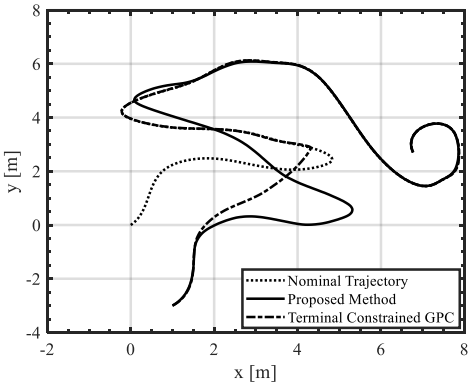



شکل ۴: زاویه جهت‌گیری ربات متحرک

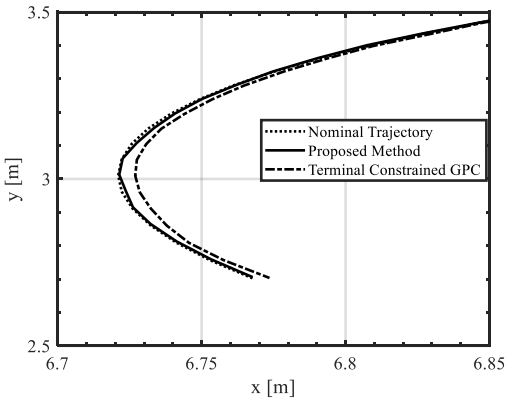
[1] Generalized Model Predictive Control



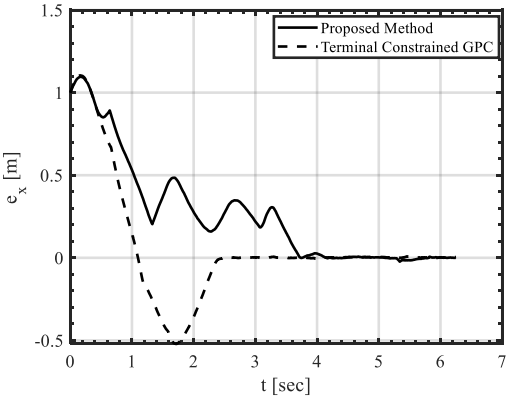
[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.3.1.0 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.3.47 ]




شکل ۵: منحنی مسیر ربات متحرک

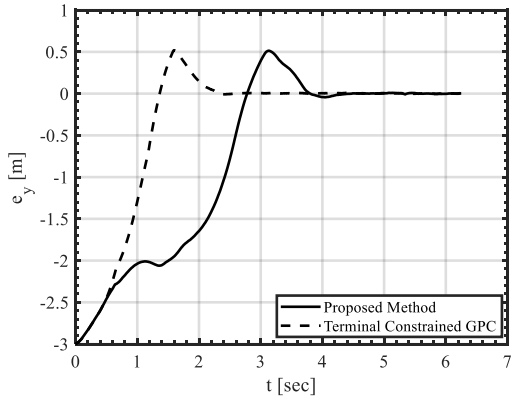



شکل ۶: مقایسه تحقق قیود نهایی مسیر ربات متحرک

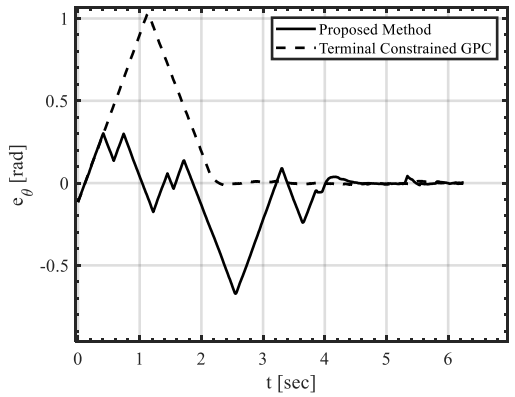



شکل ۷: منحنی خطای متغیر حالت جابجایی طولی ربات متحرک

همانطور که در شکل ۶، مشهود است، دقت الگوریتم پیشنهادی در تحقق قیود نهایی از الگوریتم کنترل پیش‌بین مقید بیشتر است. فلسفه الگوریتم جدید ارایه شده را می‌توان چنین بیان کرد که برای رسیدن به مقصد نهایی، بایستی از ابتدا، در راستا و مسیر مشخصی گام برداشت.




شکل ۸: منحنی خطای متغیر حالت جابجایی عرضی ربات متحرک




شکل ۹: منحنی خطای متغیر حالت زاویه جهت‌گیری ربات

شرایط قیود نهایی مسیر ربات بر اساس مسیر نامی در نظر گرفته شده برای آن، $\mathbf{x}_N^*$ در نظر گرفته شده است. پارامترهای طراحی روش ارایه شده به صورت زیر تنظیم شده‌اند:

$$Q=\begin{bmatrix}8 & 8 & 0.4\end{bmatrix}\times 10^3 \ , \ R=800\,I_{2\times 2} \qquad (۲۱)$$
$$N_p=15 \ , \ N_c=5$$
$$\mathbf{x}_N^* \simeq \begin{bmatrix}6.768 & 2.7 & 5\end{bmatrix}^T$$

علاوه بر این، قیود زیر بر روی ورودی‌های کنترل ربات در نظر گرفته شده است:

$$-1\ m/s \le \Delta v \le 1\ m/s \qquad (۲۲)$$
$$-\frac{\pi}{5}\ rad/s \le \Delta\omega \le \frac{\pi}{5}\ rad/s$$

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.3.1.0 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.3.47 ]

## ٤- تحلیل و اثبات پایداری مجانبی

اثبات پایداری کنترل پیش‌بین مقید در حالت کلی بسیار پیچیده بوده ولی با در نظر گرفتن فرضیات ساده‌کننده‌ای و بر اساس خواص یکنواختی تابع معیار در مراجع ارایه شده است. علاوه بر این در مراجع [۲۶, ۲۷] نیز تحلیل‌های مفیدی از اثبات پایداری این گونه مسایل پیشنهاد شده است. برای سادگی و با فرض $N_p = N_C = N$، تابع معیار کنترل پیش بین مقید (۱۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(۲۳)

$$\begin{aligned} &J(N_p, N_C) = J_N = e(N)^T P_0\ e(N) + \\ &\sum_{k=1}^{N} e(k)^T Q\ e(k) + \sum_{k=1}^{N} \Delta u^T(k) R\, \Delta u(k) \\ &s.t: x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ &\quad y(k) = C(k)x(k) \\ &\quad e(k) = y(k) - y^*(k) \end{aligned}$$

که عبارت $e(N)^T P_0\ e(N)$ متناظر با قید نهایی بوده و مقداری مثبت معین است.

ایده اصلی اثبات پایداری سیستم فوق، استفاده از تابع معیار محدود و بهینه $J_N^*$ به عنوان یک تابع لیاپانف است. برقراری رابطه زیر، پایداری لیاپانف سیستم فوق را تضمین خواهد کرد:

(۲۴)

$$J_N^*(x_k) - J_N^*(x_{k+1}) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

با بازنویسی مجدد رابطه فوق داریم:

(۲۵)

$$\begin{aligned} &J_N^*(x_k) - J_N^*(x_{k+1}) = \\ &\left[ e(k)^T Q\ e(k) + \Delta u^{*T}(k) R\, \Delta u^*(k) \right] + \\ &\left[ J_{N-1}^*(x_{k+1}) - J_N^*(x_{k+1}) \right] \end{aligned}$$

اگر عبارت سمت راست عبارت فوق، مثبت معین باشد، در این صورت پایداری مساله اثبات شده است. با توجه به اینکه ماتریس‌های $Q$ و $R$، مثبت معین هستند، بنابراین دو عبارت اول سمت راست مثبت معین است. اما در حالت کلی نمی‌توان ادعا کرد که عبارت $J_{N-1}^*(x_{k+1}) - J_N^*(x_{k+1})$ مثبت است [۲۸]. روش‌های مختلفی برای تضمین مثبت بودن عبارت سمت راست رابطه (۳۰) ارایه شده است:

هنگامی که قید $e(k+N) = 0$ به عنوان قید نهایی است، می‌توان ادعا کرد که $J_N$ به عنوان تابعی از $N$ افزایش نمی‌یابد. این بدین معنی است که عبارت $J_{N-1}^*(x_{k+1}) - J_N^*(x_{k+1})$ مثبت بوده و به طور پیش فرض تضمینی بر پایداری لیاپانف است [۲۹].

هنگامی که سیستم حلقه باز پایدار بوده و $P_0$ به عنوان پاسخ معادله لیاپانف $A^T P_0 A + Q = P_0$ بدست آمده باشد، در این صورت، $J_N$ کاهشی بوده و در نتیجه عبارت $J_{N-1}^*(x_{k+1}) - J_N^*(x_{k+1})$ غیرمنفی است و پایداری لیاپانف تضمین می‌شود [۳۰].

علاوه بر این، در صورتی که $N \to \infty$ عبارت $J_{N-1}^*(x_{k+1}) - J_N^*(x_{k+1})$ به سمت صفر میل می‌کند و $N^* < N$ وجود دارد به طوری که عبارت اول رابطه (۳۰) بزرگتر از عبارت دوم آن خواهد بود [۲۷].

## ۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، الگوریتم جدیدی برای تحقق قیود نهایی مسئله کنترل پیش‌بین در لحظات جاری ارایه شد. در الگوریتم پیشنهادی، قیود حالت/خروجی نهایی مسئله از لحظه نهایی به لحظات جاری انتقال یافته است. نکته حائز اهمیت این است که این انتقال در هر بار تکرار مسئله بهینه‌سازی کنترل پیش‌بین صورت می‌گیرد. الگوریتم ارایه شده بر اساس توسعه روابط ریاضی کنترل پیش‌بین متغیر با زمان گسسته حاصل شده است. در این الگوریتم، در هر لحظه از زمان، یک عبارت قیدی بر حسب بردار ورودی کنترل در افق محدود کنترل به مساله کنترل پیش‌بین افزوده شده است که اثر قیود نهایی مسئله در لحظات جاری بوده و تضمینی بر ارضای قیود نهایی است. مزیت این روش نسبت به کنترل پیش‌بین مقید، افزایش دقت، کاهش انرژی کنترل و جلوگیری از انباشتگی خطا برای لحظه آخر است. نتایج شبیه‌سازی‌های مختلف، بهبود رفتار سیستم در مقابل قیود نهایی را با استفاده از روش جدید نشان می‌دهد. الگوریتم پیشنهادی هیچ گونه محدودیتی بر روی سایر قیود مسیر نداشته و امکان بهره‌گیری از این روش در سایر مسایل کنترل پیش‌بین با شرایط نهایی مقید وجود دارد. فلسفه روش پیشنهادی جدید بدین معنی است که می‌توان اثر قیود نهایی را در ورودی‌های کنترل لحظات جاری لحاظ کرد.

## مراجع

[1] B. A. Conway, *Spacecraft trajectory optimization*. Cambridge University Press, 2010.

[2] A. V. Rao, "Trajectory optimization: a survey," in *Optimization and optimal control in automotive systems*: Springer, 2014, pp. 3-21.

[3] S. N. Ha, "A nonlinear shooting method for two-point boundary value problems," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 42, no. 10-11, pp. 1411-1420, 2001.

[4] R. W. Holsapple, "A modified simple shooting method for solving two-point boundary value problems", Texas Tech University, 2003.

[5] M. A. Patterson and A. V. Rao, "GPOPS-II: A MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using hp-adaptive Gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming," *ACM*



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.3.1.0 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.3.47 ]

[18] V. T. Minh and N. Afzulpurkar, "Robust model predictive control for input saturated and softened state constraints," *Asian Journal of Control*, vol. 7, no. 3, pp. 319-325, 2005.

[19] Y. I. Lee and B. Kouvaritakis, "Robust receding horizon predictive control for systems with uncertain dynamics and input saturation," *Automatica*, vol. 36, no. 10, pp. 1497-1504, 2000.

[20] W. H. Kwon and S. H. Han, *Receding horizon control: model predictive control for state models*. Springer Science & Business Media, 2006.

[21] N. O. Ghahramani and F. Towhidkhah, "Constrained incremental predictive controller design for a flexible joint robot," *ISA transactions*, vol. 48, no. 3, pp. 321-326, 2009.

[22] R. Padhi, "Model predictive static programming: A promising technique for optimal missile guidance," *To appear in Annals of Indian National Academy of Engineering (INAE)*, 2008.

[23] P. Kumar and R. Padhi, "Extension of model predictive static programming for reference command tracking," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 47, no. 1, pp. 855-861, 2014.

[24] S. Blažič, "A novel trajectory-tracking control law for wheeled mobile robots," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 59, no. 11, pp. 1001-1007, 2011.

[25] F. Künhe, J. Gomes, and W. Fetter, "Mobile robot trajectory tracking using model predictive control," in *II IEEE Latin-American robotics symposium*, 2005, vol. 51: Citeseer.

[26] V. Nevistić and J. A. Primbs, "Finite receding horizon linear quadratic control: A unifying theory for stability and performance analysis," 1997.

[27] J. A. Primbs and V. Nevistić, "Constrained finite receding horizon linear quadratic control," in "Technical Report CIT-CDS," California Institute of Technology, 1997.

[28] M. Morari and J. H. Lee, "Model predictive control: past, present and future," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 23, no. 4-5, pp. 667-682, 1999.

[29] W. Kwon and A. Pearson, "A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 5, pp. 838-842, 1977.

[30] J. B. Rawlings and K. R. Muske, "The stability of constrained receding horizon control," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 38, no. 10, pp. 1512-1516, 1993.

*Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 41, no. 1, pp. 1-37, 2014, doi: 10.1145/2558904.

[6] W. Roh and Y. Kim, "Trajectory optimization for a multi-stage launch vehicle using time finite element and direct collocation methods," *Engineering optimization*, vol. 34, no. 1, pp. 15-32, 2002.

[7] F. Liu, T. Chao, S. Wang, and M. Yang, "Trajectory optimization for launch vehicle boost phase based on Gauss Pseudospectral Method," in *2016 35th Chinese Control Conference (CCC)*, 2016: IEEE, pp. 10910-10914.

[8] Z. Wang and Z. Wu, "Six-DOF trajectory optimization for reusable launch vehicles via Gauss Pseudospectral method", *Journal of Systems Engineering and Electronics*, vol. 27, no. 2, pp. 434-441, 2016.

[9] R. Padhi and M. Kothari, "Model predictive static programming: a computationally efficient technique for suboptimal control design," *International journal of innovative computing, information and control*, vol. 5, no. 2, pp. 399-411, 2009.

[10] f. Tavakkoli and A. Novinzadeh, "closed loop suboptimal guidance design for satellite launch vehicle(in Persian)," *Journal of Modarres Mechanical Engineering*, vol. 17, no. 9, pp. 97-106, 1396.

[11] G. Klančar and I. Škrjanc, "Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time," *Robotics and autonomous systems*, vol. 55, no. 6, pp. 460-469, 2007.

[12] H. Yang, M. Guo, Y. Xia, and L. Cheng, "Trajectory tracking for wheeled mobile robots via model predictive control with softening constraints," *IET Control Theory & Applications*, vol. 12, no. 2, pp. 206-214, 2017.

[13] J. A. Primbs, "The analysis of optimization based controllers," *Automatica*, vol. 37, no. 6, pp. 933-938, 2001.

[14] L. Grüne, "Economic receding horizon control without terminal constraints," *Automatica*, vol. 49, no. 3, pp. 725-734, 2013.

[15] H. Michalska and D. Q. Mayne, "Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 38, no. 11, pp. 1623-1633, 1993.

[16] M. Tanaskovic, L. Fagiano, R. Smith, and M. Morari, "Adaptive receding horizon control for constrained MIMO systems," *Automatica*, vol. 50, no. 12, pp. 3019-3029, 2014.

[17] T. A. Johansen, "Approximate explicit receding horizon control of constrained nonlinear systems," *Automatica*, vol. 40, no. 2, pp. 293-300, 2004.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-01 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.3.1.0 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.3.47 ]