مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۵، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۰، صفحه ۴۹-۳۳

ردیابی هدف زمان-محدود برای یک زیر دریایی خودگردان در فضای سه بعدی با کنترل سطح دینامیکی

الهام رمضانی[۱]، خوشنام شجاعی[۳،۲]

[۱] کارشناس ارشد برق، دانشکده مهندسی برق، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران، ramezanielham@sel.iaun.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی برق، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران، shojaei@pel.iaun.ac.ir

[۳] مرکز تحقیقات پردازش دیجیتال و بینایی ماشین، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۲۴ ویرایش: ۱۳۹۹/۰۴/۱۵ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۲۸

چکیده: در این مقاله، مسئله کنترل ردیابی هدف زمان-محدود برای یک زیردریایی تحریک ناقص خودگردان در فضای سه بعدی در حضور نامعینی‌ها و اغتشاشات نامعلوم ناشی از امواج و جریانات اقیانوسی با کنترل سطح دینامیکی مورد توجه قرار می‌گیرد. در گام اول، با در نظر گرفتن کنترل سطح دینامیکی، پیچیدگی‌های محاسباتی روش پس‌گام تا حد زیادی جبران می‌گردد. در گام دوم، با طراحی کنترل‌کننده زمان-محدود می‌توان ثابت کرد که خطاهای سیستم در زمان محدودی به ناحیه کوچکی حول مبدأ همگرا می‌شوند. برای جبران پارامترهای نامعلوم شناور و نامعینی‌های غیر خطی از کنترل‌کننده تطبیقی مقاوم استفاده شده است. پایداری کنترل‌کننده پیشنهادی به صورت تحلیلی و براساس تئوری لیاپانوف ثابت می‌شود. در پایان، عملکرد ردیابی طرح کنترل پیشنهادی با استفاده از نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی و اعتبار آن نشان داده خواهد شد.

کلمات کلیدی: شناور زیرسطح خودگردان، کنترل‌کننده زمان محدود، کنترل‌کننده سطح دینامیکی

Finite-time Target Tracking for an Autonomous Submarine in Three-Dimensional Space by Using Dynamic Surface Control

Elham Ramezani, Khoshnam Shojaei

Abstract: In this paper, the control problem of a finite-time target tracking for an underactuated autonomous submarine is considered in three-dimensional space in the presence of unknown disturbances caused by waves and ocean currents via Dynamic Surface Control (DSC) method. At first, computational complexities of the backstepping method are greatly reduced by employing the DSC technique. Next, by designing a finite-time controller, it can be demonstrated that system errors converge to a small region containing the origin in a finite time. An adaptive robust controller is employed to compensate for unknown vehicle parameters and uncertain nonlinearities. The stability of the proposed controller is demonstrated by an analysis based on Lyapunov theory. Finally, the tracking performance of the proposed control scheme is simulated by MATLAB software and its effectiveness is shown as well.

Keywords: Autonomous Underwater Vehicles, Dynamic Surface Control, Finite-Time Control

نویسنده عهده دار مکاتبات: خوشنام شجاعی

[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.10.7]

[DOI: 10.52547/joc.15.2.33]

۱- مقدمه

صنایع دریایی نقش بسیار مهمی در زندگی انسان‌ها از گذشته تا به امروز دارند. با توجه به نیاز انسان‌ها به منابع دریاها و نیز غیرقابل دسترس بودن اعماق وسیع اقیانوس‌ها برای غواصان، مهندسان همواره به دنبال بهبود و پیشرفت ربات‌های زیرآبی هستند. این ربات‌ها به انسان در بخش‌های مختلف علمی، نظامی و تجاری کمک شایانی کرده است. زیر دریایی‌های خودکار تحریک ناقص تحت تأثیر نیروهای جانب مرکز، نیروهای کوریولیس و نیروی جاذبه هستند. عموماً مسئله کنترل یک ربات شامل سه مرحله مهم است: طراحی مسیر، تولید مسیر و ردیابی مسیر [۱] که هدف این مقاله ردیابی مسیر زیردریایی تحریک ناقص می‌باشد. بررسی‌های انجام شده بر روی این سیستم‌ها نشان می‌دهند که اغلب تعداد ورودی‌های کنترل از خروجی‌ها کمتر است و به همین جهت به این سیستم‌ها تحریک ناقص گفته می‌شود. ردیابی مسیر زیردریایی‌های خودگردان تحریک ناقص (AUV)[1] به دلیل ماهیت غیرخطی و کاربردهای بسیار بالای عملی در صنعت دریایی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. معادلات دینامیکی موجود در زیردریایی‌ها، غیرخطی متغیر با زمان است و این خود یکی از پیچیدگی‌های طراحی کنترل‌کننده برای آنها می‌باشد. استخراج این معادلات به دلیل وجود جریانات آب و تأثیرات میرایی هیدرودینامیکی و نامعینی‌های بسیار زیاد موجود در محیط دریا کاری بسیار دشوار است. در نتیجه، کنترل‌کننده‌های کلاسیک نمی‌توانند به آسانی پاسخگوی کنترل آنها باشند. در بسیاری از صنایع مختلف، استفاده از تجهیزاتی که بتوان آنها را بدون حضور مستقیم نیروی انسانی و از راه دور هدایت و کنترل کرد، کاربردهای فراوانی یافته‌اند و در بسیاری از موارد جزء جدا نشدنی کاربردهای تجاری و صنعتی بدل گشته‌اند، به گونه‌ای که انجام بسیاری از پروژه‌های مهندسی و تحقیقاتی بدون آنها امکان پذیر نیست.

در مرجع [۲]، یک کنترل کننده ردیاب برای هدایت زیردریایی‌های خودگردان با تأخیر ورودی ثابت پیشنهاد شده است. در این مقاله، یک عبارت مبتنی بر پیش بین برای حذف تأخیر ورودی در دینامیک‌های حلقه باز در نظر گرفته شده است. در مرجع [۳] و [۴]، برای چندین AUV تجزیه و تحلیل همگرایی با آرایش رهبر-پیرو انجام شده است. متأسفانه، در بیشتر منابع مورد بحث، تمرکز بر روی طراحی کنترل حرکت دو بعدی در سطح است [۵] و [۶]. در [۷]، ردیابی مسیر شناور زیرسطح در فضای سه بعدی با استفاده از کنترل‌کننده عصبی- تطبیقی انجام شده است. در [۸]، پژوهشگر تلاش برای رفع پیچیدگی محاسباتی در روش کنترل گام به عقب را دارد. در مرجع [۹] هم روش گام به عقب مبتنی بر PID[2] برای کنترل زیردریایی مورد استفاده قرار گرفته است و در این مقاله سیستم به دو زیر سیستم چرخشی و انتقالی تقسیم شده است. در مرجع [۱۰]، یک روش کاربردی برای کنترل مستقل چند زیردریایی مستقل خودگردان (AUV) ارائه شده است. در مرجع [۱۱]، از کنترل‌کننده PID به منظور ساده‌سازی مسیر در فضای سه بعدی استفاده شده است. در مرجع [۱۲]، از کنترل‌کننده عصبی مقاوم مد لغزشی برای جبران پیچیدگی‌های سیستم نظیر دینامیک‌های مدل‌سازی نشده استفاده شده است. در این مقاله، مدل جریان‌های اقیانوسی نیز به عنوان اغتشاش در نظر گرفته شده و اهداف کنترل مطلوب در برابر اغتشاش ذکر شده به دست آمده است. در مرجع [۱۳]، از کنترل‌کننده مقاوم تناسبی- مشتق‌گیر و در [۱۴]، از یک کنترل‌کننده تطبیقی فازی مدلغزشی برای کنترل عمق یک وسیله نقلیه زیرآبی استفاده شده است. در [۱۵]، برای آرایش رهبر- پیرو AUV از کنترل‌کننده مقاوم تطبیقی همراه با کنترل سطح دینامیکی بهره برده است. در [۱۶]، الگوریتم کنترل مقاوم برای پایدارسازی محلی AUV به کار گرفته شده است. در [۱۷]، ردیابی مسیر شناور زیرسطحی با استفاده از یک کنترل‌کننده مقاوم بر پایه کنترل تناسبی- مشتق‌گیر مرتبه کسری انجام گرفته است. در مرجع [۱۸] نیز یک روش کنترل مقاوم برای کنترل شناور زیرآبی شش درجه آزادی با استفاده از تخمین‌گرهای حالت غیرخطی پیشنهاد شده است. در مرجع [۱۹]، از کنترل فیدبک حالت جزئی برای ردیابی مسیر شناور زیرسطح شش درجه آزادی با استفاده از کنترل سطح دینامیکی تطبیقی- عصبی استفاده شده است. در مرجع [۲۰]، از کنترل عصبی- تطبیقی و در [۲۱] از کنترل‌کننده تطبیقی برای ردیابی مسیر شناور زیرسطح در فضای سه بعدی استفاده شده است. به منظور ردیابی مسیر هماهنگ چندین ربات زیرآبی مستقل، از کنترل‌کننده‌های تطبیقی- مقاوم و کنترل سطح دینامیکی در مرجع [۲۲] استفاده شده است. در پایداری مجانبی مسیر سیستم در زمان بی‌نهایت به تعادل می‌رسد، در حالی که پایداری زمان محدود می‌تواند منجر به عملکرد سریع سیستم در حالت گذرا در یک زمان متناهی همراه با دقت بالای ردیابی و همگرایی به سمت مسیر مطلوب شود. بنابراین، امروزه با توجه به اهمیت سرعت پاسخ در عملکرد سریع و بهنگام سیستم های رباتیکی نظیر شناور در عملیات زیرآبی، کنترل زمان‌محدود در بسیاری از کاربردهای کنترل مورد توجه محققان قرار گرفته است [۲۳]- [۲۵]. از جمله کاربردهای پایداری زمان محدود می‌توان به عملکرد ایمن در عملیات نظامی اشاره کرد. به طور مثال، زمانی که ربات در حال عملیات نجات و مین یابی است، سرعت در انجام فرآیند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اندکی تأخیر در انجام عملیات می‌تواند منجر به تلفات و انفجار گردد. به عنوان نمونه،

[1] Autonomous Underwater Vehicles
[2] Proportional Integral Derivative

پژوهشگران در مرجع [۲۶] از کنترل زمان‌محدود برای همگرایی سریع هلکوپتر سه درجه آزادی استفاده کرده‌اند.

متأسفانه، کارهای قبلی هنوز متحمل ضعف‌هایی هستند که تحقیقات روی طراحی کنترل‌کننده‌های ردیاب را چالش برانگیز و فعال نگه داشته است. مجموعه انتشارات موجود گواه آن است که مقالات کمی روی طراحی کنترل ردیاب در فضای سه بعدی برای شناورهای تحریک ناقص انجام شده است. در کنترل‌کننده‌های سه‌بعدی موجود نیز همگرایی خطای ردیابی سیستم‌کنترل به صورت مجانبی با عملکرد گذرای طولانی-مدت محقق شده است. برای افزایش مقاومت کنترل‌کننده و همگرایی خطای ردیابی در زمان محدود، یک روش کنترل مقاوم تطبیقی زمان-محدود در فضای سه بعدی برای شناور تحریک ناقص بر اساس فاصله و زاویه‌های نسبی در این مقاله برای اولین بار با تحلیل‌های پایداری قوی پیشنهاد می‌گردد. مزیت‌های روش کنترلی پیشنهادی به شرح زیر است:

۱) با تبدیل خطای موقعیت به فاصله و زاویه‌های نسبی امکان کنترل شناور تحریک ناقص در فضای سه‌بعدی با موفقیت فراهم می‌گردد و کنترل‌کننده زمان-محدود پیشنهادی وادار می‌کند که سیگنال خطای ردیابی هم در سطح سینماتیک و هم در سطح دینامیک در زمان محدودی به صفر میل کنند و در ناحیه کوچکی حول مبدأ کراندار باقی بمانند.

۲) در مراجع قبلی نظیر [۲۷]-[۲۸]، از کنترل کننده پسگام برای کنترل یک زیردریایی خودگردان استفاده شده است. استفاده از کنترل‌کننده پسگام در طراحی مشکل انفجار ذاتی پیچیده به دلیل تکرار مشتقات از کنترل‌کننده مجازی در هر مرحله را به همراه دارد. جهت کاستن از محاسبات طولانی در طراحی با روش‌های مرسوم مانند پسگام از فیلتر پایین‌گذر مرتبه اول استفاده می‌شود که از طراحی کنترل‌کننده می‌کاهد.

۳) کنترل‌کننده پیشنهادی با ترکیب بهترین ویژگی‌های روش‌های کنترل مقاوم تطبیقی و تکنیک زمان محدود پارامترهای ناشناخته شناور، دینامیک‌های مدل نشده و اغتشاشات محیطی ناشی از امواج و جریانات اقیانوسی را به خوبی جبران کرده است.

در ادامه، در بخش دوم مدل شناور زیر سطحی مرور می‌گردد. سپس، یک کنترل‌کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم زمان-محدود در حضور نامعینی‌ها در بخش سوم طراحی می‌شود. دینامیک خطای حلقه بسته و تحلیل پایداری آن در بخش‌های چهارم و پنجم ارائه خواهند شد. بخش ششم شبیه‌سازی‌های عددی را ارائه خواهد کرد و نهایتاً بخش هفتم از این مقاله نتیجه‌گیری می‌کند.

۲- مدل شناور زیرسطح

معادلات سینماتیک و دینامیک شناور با پنج درجه آزادی(DOF)[1] به صورت زیر قابل بیان است [۲۹]:

$$\begin{cases}\dot{x} = ucos(\psi)\cos(\theta) - vsin(\psi) + wsin(\theta)\cos(\psi),\\ \dot{y} = usin(\psi)\cos(\theta) + vcos(\psi) + wsin(\theta)\sin(\psi),\\ \dot{z} = -usin(\theta) + wcos(\theta),\\ \dot{\theta} = q,\\ \dot{\psi} = r/\cos(\theta),\end{cases} \qquad (۱)$$

$$\begin{cases}\dot{u} = \frac{m_{22}}{m_{11}}vr - \frac{m_{33}}{m_{11}}wq - f_u(u) + \frac{\tau_u}{m_{11}} - \frac{\tau_{eu}(t)}{m_{11}},\\ \dot{v} = \frac{m_{11}}{m_{22}}ur - f_v(v) - \frac{\tau_{ev}(t)}{m_{22}},\\ \dot{w} = \frac{m_{11}}{m_{33}}uq - f_w(w) - \frac{\tau_{ew}(t)}{m_{33}},\\ \dot{q} = \frac{m_{33}-m_{11}}{m_{55}}uw - f_q(q) - \frac{\rho g\nabla GM_L\sin(\theta)}{m_{55}} + \frac{\tau_q}{m_{55}} - \frac{\tau_{eq}(t)}{m_{55}},\\ \dot{r} = \frac{m_{11}-m_{22}}{m_{66}}uv - f_r(r) + \frac{\tau_r}{m_{66}} - \frac{\tau_{er}(t)}{m_{66}}.\end{cases} \qquad (۲)$$

در معادلات (۱) و (۲)، از علامت‌گذاری استاندارد جامعه مهندسین دریا ($SNAME$[2]) به صورت جدول (۱) استفاده شده است.

جدول ۱: متغیرهای توصیف رفتار یک زیر دریایی شش درجه آزادی [۳۰]

درجات آزادی	متغیرهای حالت	سرعت-های شناور	نیروها و گشتاورها
طولی (حرکت در جهت محور x)	x	u	τ_u
عرضی (حرکت در جهت محور y)	y	v	τ_v
عمقی (حرکت در جهت محور z)	z	w	τ_w
غلتش (چرخش حول محور x)	φ	p	τ_p
خمش (چرخش حول محور y)	θ	q	τ_q
گردش (چرخش حول محور z)	ψ	r	τ_r

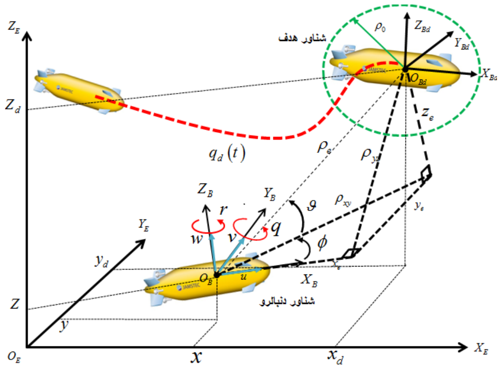
متغیرهای موقعیت و زوایای اویلر در چارچوب زمین ثابت نشان داده شده اند. سیگنال‌های τ_q, τ_u و τ_r بیانگر نیرو و گشتاورها هستند که توسط پروانه‌ها و پیشرانه‌ها تولید شده است. $\tau_{eq}(t), \tau_{ew}(t), \tau_{ev}(t), \tau_{eu}(t)$ و $\tau_{er}(t)$ نشان‌دهنده اختلالات محیطی متغیر با زمان شامل جریان‌های اقیانوسی، باد و امواج می‌باشند. پارامترهای $m_{ii}, i = 1,2,\cdots,5$، جرم و ممان اینرسی شناور زیرسطح را نشان می‌دهد

[1]Degree-of-freedom
[2]Society of Naval Architects and Marine Engineers

. $f_k(k), k = u,v,w,q,r$، دینامیک‌های غیرخطی نامعلوم وسیله نقلیه شامل عبارت‌های اصطکاک و میرایی می‌باشد. با توجه به این امر که ورودی‌های کنترلی عرضی τ_v و عمقی τ_w در دسترس نیستند، ربات زیرسطحی تحریک ناقص می‌باشد. پارامترهای GM_L, ∇, g, ρ به ترتیب چگالی آب، شتاب گرانشی، حجم جابجا شده از آب و ارتفاع میان مرکزی طولی هستند. استخراج این معادلات به همراه توصیف دقیق آنها در مراجع [۳۱] و [۳۲] به طور مفصل بیان شده است و از مجال این مقاله خارج است.

۲-۱ اهدف کنترلی

در این مقاله، فرض بر این است که شناور زیرسطح مورد نظر مجهز به سنسور برای اندازه‌گیری فاصله بین مراکز جرم شناور واقعی و شناور هدف می‌باشد که با پارامتر ρ نشان داده شده است. به علاوه، شناور مجهز به سنسورهای اندازه‌گیری زاویه‌های ϕ و ϑ در شکل ۱ می‌باشد. بنابراین، با در نظرگرفتن معادلات (۱) و (۲)، هدف کلی کنترلی در ادامه به این صورت دنبال می‌گردد که خطاهای ردیابی ρ، ϑ و ϕ در زمان محدودی به صفر همگرا شوند. در این صورت، شناور واقعی به وسیله ردیابی شناور هدف، مسیر مرجع ایجاد شده توسط آن را با وجود نامعینی‌های پارامتری و اغتشاشات خارجی مانند امواج و جریان‌های اقیانوسی، با دقت و سرعت بسیار خوبی در زمان محدود دنبال می‌نماید. شکل ۱ هدف کنترلی یک زیر دریایی را به همراه تمام متغیرها در فضای سه بعدی نشان می‌دهد.



شکل ۱: ردیابی هدف زیردریایی در فضای سه بعدی [۲۹]

جهت سادگی طراحی کنترل‌کننده، از جملات میرایی هیدرودینامیک و معادله دینامیک غلتش صرف‌نظر می‌گردد. این فرض هنگامی برقرار است که شناور علاوه بر مجهز بودن به عملگر غلتش، با سرعت کمی در حال حرکت باشد. در ادامه، برخی از فرض‌ها و نکات مورد توجه در مقاله حاضر به‌طور اجمالی مرور خواهند شد.

تذکر ۱: در طراحی شناورهای زیرسطح طیف وسیعی از سنسورها مانند دوربین، ژیرسکوپ، شتاب‌سنج، سنسور عمق، سونار، GPS و غیره برای اندازه‌گیری متغیرهای حالت شناور به کار گرفته می‌شود. با ترکیب اطلاعات سنسوری این حسگرها نظیر واحد اندازه گیری اینرسی و سیستم موقعیت یابی جهانی موقعیت ها و زوایای تعریف شده در شکل ۱ اندازه گیری می شود.

فرض ۱ [۲۹]: سیگنال‌های x_d، y_d، z_d، $\dot{x}_d$، $\dot{y}_d$، $\dot{z}_d$ و $\ddot{x}_d$، $\ddot{y}_d$، $\ddot{z}_d$ که به ترتیب بیانگر موقعیت، سرعت وشتاب شناور هدف یا مرجع در جهات مختلف هستند، سیگنال‌هایی کران‌دار می‌باشند.

فرض ۲: تمامی پارامترهای هندسی ربات مانند پارامترهای سینماتیکی و بردار مختصات تعمیم‌یافته $\eta = (x,y,z,\theta,\psi)^T$ و سرعت‌های تعمیم‌یافته $\dot{\eta} = (u,v,w,q,r)^T$، از طریق سنسورها قابل اندازه‌گیری می‌باشد و معلوم فرض می‌شود. به عبارتی، تمامی حالات $x = (q,v)^T$ معلوم در نظر گرفته می‌شوند.

فرض ۳: جملات اغتشاش $\bar{\tau}_{wu}$، $\bar{\tau}_{wv}$ و $\bar{\tau}_{wr}$ کران‌دار می‌باشد، به این معنا که با در نظر گرفتن ثابت‌های مثبت ℓ_{wr}، ℓ_{wu} و ℓ_{wv}، می‌توان نوشت:

$$\sup_{t\ge0}\|\tau_{wv}\| < \ell_{wv},\ \sup_{t\ge0}\|\tau_{wu}\| < \ell_{wu} \text{ و } \sup_{t\ge0}\|\tau_{wr}\| < \ell_{wr}.$$

فرض ٤ [۲۹]: سرعت‌های عرضی و عمقی شناور، سیگنال‌های کران‌دار منفعل می‌باشند. یعنی $\sup_{t\ge0}\|v\| < \varepsilon_v$ و $\sup_{t\ge0}\|w\| < \varepsilon_w$ که در آنها ε_w و ε_vبیانگر ثابت‌های مثبت نامعلوم می‌باشند.

فرض ۵: جهت جلوگیری از تکینه‌شدن و ایجاد ناپایداری، زاویه پیچش زیردریایی به صورت $|\theta| < \theta_{max} < \pi/2$ محدود می‌گردد.

تذکر ۲: جهت سادگی طراحی کنترل‌کننده، از جملات میرایی هیدرودینامیک و معادله غلتش صرف‌نظر می‌گردد. این فرض هنگامی برقرار است که شناور زیر سطح علاوه بر مجهز بودن به عملگر غلتش، با سرعت کمی در حال حرکت باشد [۲۹].

تعریف ۱ [۳۳]–[۳۴]: پاسخ‌های معادله $x = \dot{f}(x,t)$ در نهایت به طور یکنواخت کران‌دار هستند، اگر ثابت‌های $C_1 > 0$ و $C_2 > 0$ مستقل از $t_0 \in R^+$ وجود داشته باشند به‌طوریکه برای هر C_2، یک ثابت $T = T(C_2) > 0$ مستقل از $t_0 \in R^+$ وجود داشته باشد که به ازای آن برای همه زمان‌های $t > t_0 + T$، هر شرط اولیه کران‌دار $C_2 < \|x(t_0)\|$ نتیجه دهد $C_1 > \|x(t_0)\|$.

تعریف ۲: پاسخ‌های سیستم غیرخطی $x = \dot{f}(x,t)$ پایدار زمان-محدود است، اگر تابع لیاپانوف مثبت معین $V(x)$ و ثابت‌های مثبت به شکل $0 < \gamma < 1$ و $\beta_1,\beta_2 > 0$ موجود باشند که مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر حاصل شود [۳۵]:

$$\dot{V}(x) \le -\beta_1 V(x) - \beta_2 V^{\gamma}(x) \qquad (۳)$$

و در این صورت، می‌توان ثابت نمود که زمان نشست به صورت زیر نتیجه می‌گردد:

$$T_S \le \frac{1}{\beta_1(1-\gamma)} ln \frac{\beta_1 V\big(x(0)\big)^{1-\gamma} + \beta_2}{\beta_2}\rho. \qquad (۴)$$

۲-۲ تعیین خطا در فضای دکارتی و مختصات کروی

در این بخش، متغیرهای ρ_e، ϑ و ϕ به صورت توابعی از خطاهای حالات به شکل زیر تعریف می‌گردند:

$$\rho_e^2 = x_e^2 + y_e^2 + z_e^2, \phi = \arctan\left(\frac{y_e}{x_e}\right), \vartheta = \arctan\left(z_e/\sqrt{x_e^2 + y_e^2}\right) \qquad x_e = \rho_e \cos(\vartheta)\cos(\phi)\,.\, y_e = \rho_e \cos(\vartheta)\sin(\phi)\,.\, z_e = \rho_e \sin(\vartheta) \tag{۵}$$

جهت محاسبه دینامیک خطا در دستگاه مختصات کروی، قبل از هر اقدامی ابتدا لازم است که تمامی بردارها از دستگاه متصل به زمین به دستگاه متصل به بدنه انتقال یابند. بنابراین، خطاهای حالات و پارامترهای هندسی بین شناور و شناور هدف توسط تبدیل زیر از دستگاه $\{O_E, X_E, Y_E, Z_E\}$ به دستگاه $\{O_B, X_B, Y_B, Z_B\}$ انتقال می‌یابند [۲۹]:

$$\begin{aligned} x_e &= \cos(\theta)\cos(\psi)\,(x - x_d) + \cos(\theta)\sin(\psi)\,(y - y_d) - \sin(\theta)\,(z - z_d), \\ y_e &= -\sin(\psi)\,(x - x_d) + \cos(\psi)\,(y - y_d), \\ z_e &= \sin(\theta)\cos(\psi)\,(x - x_d) + \sin(\theta)\sin(\psi)\,(y - y_d) + \cos(\theta)\,(z - z_d), \end{aligned} \tag{۶}$$

با مشتق گرفتن از رابطه بالا، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \mathrm{u} - \mathrm{q}z_e + \mathrm{r}y_e - \dot{x}_e\cos(\theta)\cos(\psi) - \dot{y}_e\cos(\theta)\sin(\psi) + \dot{z}_e\sin(\theta), \\ \dot{y}_e &= \mathrm{v} - \mathrm{r}x_e - \mathrm{r}z_e\tan(\theta) + \dot{x}_d\sin(\psi) - \dot{y}_e\cos(\psi), \\ \dot{z}_e &= \mathrm{w} + \mathrm{q}x_e + \mathrm{r}y_e\tan(\theta) - \dot{x}_e sin(\theta)\cos(\psi) - \dot{y}_e\sin(\theta)\sin(\psi) - \dot{z}_e\cos(\theta), \end{aligned} \tag{۷}$$

۳- طراحی کنترل‌کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم زمان محدود در حضور نامعینی

روند کلی طراحی کنترل‌کننده سطح دینامیکی به این صورت است که در گام اول، ابتدا با در نظر گرفتن دینامیک خطای به‌دست آمده در سطح سینماتیک یک قانون کنترل مجازی طراحی می‌گردد. سپس، این قانون کنترل مجازی جهت کاستن از پیچیدگی‌هایی که در روش‌هایی مانند پس‌گام رخ می‌دهد، از یک فیلتر مرتبه اول عبور داده می‌شود. در گام بعدی، طراحی قانون کنترل در سطح دینامیک و با هدف تولید گشتاور مطلوب عملگرها انجام می‌گیرد. بنابراین، جهت ترکیب الگوریتم کنترلی سطح دینامیکی با کنترل زمان-محدود لازم است که جملات زمان- محدود در هر دو گام طراحی، لحاظ گردند. با انجام این کار، می‌توان ثابت کرد که خطاها چه در سطح دینامیک و چه در مختصات کروی در زمان محدودی به ناحیه کوچکی حول مبدأ همگرا خواهد شد. به عبارتی، می‌توان گفت که کنترل‌کننده توانسته است گشتاور لازم جهت همگرایی سریع و دقیق شناور مورد نظر به شناور هدف را به صورت مقاوم در برابر نامعینی‌ها فراهم نماید.

کنترل هریک از فاکتورهای انتقال طولی[1]، پیچش و چرخش، توسط کنترل گشتاور عملگرهای مربوط به آنها صورت می‌گیرد که این امر به ترتیب میل نمودن خطاهای ρ_e، ϑ و ϕ را به دنبال خواهد داشت. بنابراین، در ادامه دو گام طراحی کنترل‌کننده برای هر سه عامل به صورت مجزا انجام می‌گیرد. در گام اول، قانون کنترل مجازی جهت کنترل حرکت انتقال طولی، کنترل زاویه پیچش و چرخش به ترتیب به صورت زیر طراحی می‌گردد:

۳-۱ طراحی کنترل‌کننده جهت حرکت انتقال طولی

با توجه به شکل ۱، خطاهای حالات به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$x_e = \rho_e\cos(\vartheta)\cos(\phi)\,, y_e = \rho_e\cos(\vartheta)\sin(\phi), \; z_e = \rho_e\sin(\vartheta) \tag{۸}$$

با مشتق گرفتن از $\rho_e\dot{\rho}_e = x_e\dot{x}_e + y_e\dot{y}_e + z_e\dot{z}_e$ و جایگذاری (۷) در آن، دینامیک خطا در مختصات کروی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\rho}_e = ucos(\phi)\cos(\vartheta) + vcos(\vartheta)\sin(\phi) + wsin(\vartheta) + \cos(\vartheta)\cos(\phi)\,\xi_{1d} + \cos(\vartheta)\sin(\phi)\,\xi_{2d} + \sin(\vartheta)\,\xi_{3d}, \tag{۹}$$

که $\xi_{id},\ i = 1,2,3$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \xi_{1d} &= -\dot{x}_d\cos(\theta)\cos(\psi) - \dot{y}_d\cos(\theta)\sin(\psi) + \dot{z}_d\sin(\theta), \\ \xi_{2d} &= \dot{x}_d\sin(\psi) - \dot{y}_d\cos(\psi), \\ \xi_{1d} &= -\dot{x}_d\sin(\theta)\cos(\psi) - \dot{y}_d\sin(\theta)\sin(\psi) - \dot{z}_d\cos(\theta), \end{aligned} \tag{۱۰}$$

با در نظر گرفتن رابطه (۹)، قانون کنترل مجازی در جهت کنترل حرکت انتقال طولی به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_c = {} & (\cos(\phi)\cos(\vartheta))^{-1}(-vcos(\vartheta)\sin(\phi) - wsin(\vartheta) - \cos(\vartheta)\cos(\phi)\,\xi_{1d} - \cos(\vartheta)\sin(\phi)\,\xi_{2d} - \sin(\vartheta)\,\xi_{3d} \\ & - K_{1u_e}(\rho_e - \rho_0) - K_{2u_e} sig(\rho_e - \rho_0)^{\gamma_{u_c}}) \end{aligned} \tag{۱۱}$$

که در این رابطه، $sig(\rho_e)^{\gamma_{u_c}} = |\rho_e|^{\gamma_{u_c}} sig(\rho_e)$ و ρ_0 یک مقدار آستانه است که جهت جلوگیری از برخورد شناور با شناور هدف در طول مسیر، تعریف می‌گردد. همچنین، $k_{1u_c}, k_{2u_e} > 0$ و $1 < \gamma_{u_c} < 0$ پارامترهای قابل تنظیم کنترل‌کننده می‌باشند. جهت کاستن از پیچیدگی‌هایی که در طراحی با روش‌های مرسوم مانند پسگام ایجاد می‌گردد، قانون کنترل مجازی (۱۱)، از یک فیلتر مرتبه اول مطابق معادله زیر عبور داده می‌شود:

$$\lambda_u\dot{u}_{cf} + u_{cf} = u_c\,, u_{cf}(o) = u_c(o) \quad u_e = u - u_{cf}, \tag{۱۲}$$

که در (۱۲)، λ_u ضریب مثبت قابل تنظیم است که توسط طراح تعیین می‌شود. با توجه به رابطه فوق، خطای خروجی فیلتر برابر $\varepsilon_u = u_{cf} - u_c$ می‌باشد. در گام دوم، پس از طراحی کنترل‌کننده مجازی، با در نظر گرفتن معادلات (۲)، قانون کنترل واقعی جهت کنترل گشتاور عملگر مربوط به انتقال طولی طراحی می‌گردد. به همین جهت، ابتدا با در نظرگرفتن روابط (۱۲) خطا به صورت زیر تعریف می‌شود:

[1] Surge

$$u_e = u - u_{cf} + \beta_{1u_c} sig(\rho_e - \rho_0)^{\Upsilon_{u_c}} \qquad (۱۳)$$

که در رابطه (۱۳)، ثابت‌های مثبت $1 > \Upsilon_{u_c} > 0$ و $\beta_{1u_c} > 0$ ضرایب مثبت قابل تنظیم می‌باشند. با یک بار مشتق‌گیری از روابط (۱۳) و جایگذاری معادلات (۲)، خواهیم داشت:

$$\dot{u}_e = \frac{m_{22}}{m_{11}} vr - \frac{m_{33}}{m_{11}} wq - f_u(u) + \frac{\tau_u}{m_{11}} - \frac{\tau_{eu}(t)}{m_{11}} - \dot{u}_{cf} + \beta_{1u_c}\Upsilon_{u_c}|(\rho_e - \rho_0)|^{\Upsilon_{u_c}-1}\dot{\rho}_e \qquad (۱۴)$$

در رابطه (۱۴)، $f_u(u) = \sigma_{u1}u + \sigma_{u2}u|u| + \sigma_{u3}u^3$، با اندکی ساده‌سازی می‌توان رابطه (۱۴) را به صورت زیر خلاصه‌نویسی کرد:

$$m_{11}\dot{u}_e = -\Re_u + \tau_u - \tau_{eu}(t) \qquad (۱۵)$$

تخمین پارامترها در کنترل‌کننده تطبیقی به صورت $\Re_u = \Omega_u\Phi_u$ انجام می‌شود. در رابطه بالا، Ω_u ماتریس رگرسور شناور می‌باشد. همچنین، Φ_u یک بردار شامل کلیه پارامترهای نامعین موجود در دینامیک شناور است. به منظور دست‌یابی به هدف کنترل زمان-محدود، معادله دینامیک خطای حلقه‌باز بیان شده در (۱۵) به صورت معادله زیر بازنویسی می‌شود:

$$m_{11}\dot{u}_e = -\Omega_u\Phi_u + \tau_u - \tau_{eu}(t) + m_{11}\beta_{1u_c}\Upsilon_{u_c}|(\rho_e - \rho_0)|^{\Upsilon_{u_c}-1}\dot{\rho}_e, \qquad (۱۶)$$

در نتیجه، با در نظرگرفتن مشتق خطای به‌دست آمده در رابطه (۱۶)، ورودی کنترلی به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد. این ورودی کنترلی، پایداری زمان-محدود سیستم و همگرایی سریع خطای سرعت طولی در سطح دینامیک به ناحیه کوچکی اطراف مبدأ را تضمین می‌نماید.

$$\tau_u = \Omega_u\hat{\Phi}_u - v_{Ru} - (\rho_e - \rho_0)\cos(\phi)\cos(\vartheta) - m_{11}\beta_{1u_c}\Upsilon_{u_c}|\rho_e - \rho_0|^{\Upsilon_{u_c}-1}\dot{\rho}_e - k_{11}u_e - k_{12}sig(u_e)^{\Upsilon_{u_e}} \qquad (۱۷)$$

که در این رابطه، ثابت مثبت $1 > \gamma_{u_e} > 0$، ضرایب قابل تنظیم و $k_{11}, k_{12} > 0$ بهره‌های کنترل‌کننده می‌باشند. همچنین، $\hat{\Phi}_u$ بیانگر تخمین پارامترهای نامعین است. از طرفی، جمله v_{Ru}، قانون کنترل مقاوم جهت جبران کران بالای جملات حاوی اغتشاشات خارجی موجود در جمله $\tau_{eu}(t)$، می‌باشد که به صورت $v_{Ru} = \hat{\alpha}_u sat(s_{u_e})$ پیشنهاد می‌گردد. کران بالای آن به صورت یک کمیت اسکالر به فرم $|\tau_{eu}(t)| \le \alpha_u$ در نظر گرفته می‌شود.

۲-۳ طراحی کنترل‌کننده جهت کنترل زاویه خمش

با در نظر گرفتن (۸)، و با مشتق گرفتن از $\vartheta = \arctan(z_e/\sqrt{x_e^2 + y_e^2})$ و جایگذاری (۷) در آن، دینامیک خطا در مختصات کروی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\vartheta} = cos(\vartheta)(w + \xi_{3d})/\rho_e + rtan(\theta)sin(\phi) + qcos(\phi) - ucos(\phi)sin(\vartheta)/\rho_e - \xi_{1d}cos(\phi)sin(\vartheta)/\rho_e - sin(\phi)sin(\vartheta)(v + \xi_{2d})/\rho_e, \qquad (۱۸)$$

که $\xi_{id},\ i = 1,2,3$ به صورت رابطه (۱۰) تعریف شده است. با در نظر گرفتن رابطه (۱۸)، قانون کنترل مجازی در جهت کنترل زاویه خمش[1] به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$q_c = cos(\phi)^{-1}(-cos(\vartheta)(w + \xi_{3d})/P_e - r\ tan(\vartheta)sin(\phi) + u\,cos(\phi)sin(\vartheta)/P_e + \xi_{1d}cos(\phi)sin(\vartheta)/P_e + sin(\phi)sin(\vartheta)(v + \xi_{2d})/P_e) - K_{1q_c}\vartheta - K_{2q_c}sig(\vartheta)^{\gamma_{q_c}} \qquad (۱۹)$$

که در این رابطه، $sig(\vartheta)^{\gamma_{q_c}} = |\vartheta|^{\gamma_{q_c}}sig(\vartheta)$ تعریف می‌گردد. همچنین، $k_{1q_c}, k_{2q_c} > 0$ و $1 > \gamma_{q_c} > 0$ پارامترهای قابل تنظیم کنترل‌کننده می‌باشند. قانون کنترل مجازی (۱۹)، از یک فیلتر مرتبه اول مطابق زیر عبور داده می‌شود:

$$\lambda_q\dot{q}_{cf} + q_{cf} = q_c\ , q_{cf}(o) = q_c(o) \qquad (۲۰)$$
$$q_e = q - q_{cf},$$

که در این رابطه، λ_q ضریب مثبت قابل تنظیم است که توسط طراح تعیین می‌شود. با توجه به رابطه فوق، خطای خروجی فیلتر برابر $\varepsilon_q = q_{cf} - q_c$ می‌باشد. در گام دوم، پس از طراحی کنترل‌کننده مجازی، با در نظر گرفتن معادلات (۲)، قانون کنترل واقعی جهت کنترل گشتاور عملگر مربوط به زاویه خمش طراحی می‌گردد. به همین جهت، ابتدا با در نظرگرفتن روابط (۲۰) خطا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q_e = q - q_{cf} + \beta_{1q_c}sig(\vartheta)^{\Upsilon_{q_c}} \qquad (۲۱)$$

که در رابطه (۲۱)، ثابت‌های مثبت $1 > \Upsilon_{q_c} > 0$ و $\beta_{1q_c} > 0$ ضرایب مثبت قابل تنظیم می‌باشند. با مشتق‌گیری از رابطه (۲۱) و جایگذاری معادلات (۲)، خواهیم داشت:

$$\dot{q}_e = \frac{m_{33} - m_{11}}{m_{55}}uw - f_q(q) - \frac{\rho g \nabla GM_L \sin(\emptyset)}{m_{55}} + \frac{\tau_q}{m_{55}} - \frac{\tau_{eq}(t)}{m_{55}} - \dot{q}_{cf} + \beta_{1q_c}\Upsilon_{q_c}|\vartheta|^{\Upsilon_{q_c}-1}\dot{\vartheta} \qquad (۲۲)$$

در رابطه (۱۴)، $f_q(q) = \sigma_{q1}q + \sigma_{q2}q|q| + \sigma_{q3}q^3$، با اندکی ساده‌سازی می‌توان رابطه (۲۲) را به صورت زیر خلاصه‌نویسی کرد:

$$m_{55}\dot{q}_e = -\Re_q + \tau_q - \tau_{eq}(t) \qquad (۲۳)$$

مدل پارامتری برای کنترل‌کننده تطبیقی به صورت $\Re_q = \Omega_q\Phi_q$ در نظر گرفته می‌شود که در آن Φ_q بردار پارامترها و Ω_q ماتریس رگرسور شناور در دینامیک خمش می‌باشد. برای طراحی کنترل کننده زمان-محدود، معادله خطای حلقه‌باز بیان شده در (۲۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$m_{55}\dot{q}_e = -\Omega_q\Phi_q + \tau_q - \tau_{eq}(t) + m_{55}\beta_{1q_c}\Upsilon_{q_c}|\vartheta|^{\Upsilon_{q_c}-1}\dot{\vartheta} \qquad (۲۴)$$

در نتیجه، با در نظرگرفتن مشتق خطای به‌دست آمده در رابطه (۲۴)، ورودی کنترلی برای زاویه خمش به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد. این ورودی کنترلی پایداری زمان-محدود سیستم و همگرایی سریع خطای سرعت خمش در سطح دینامیک، به ناحیه کوچکی اطراف مبدأ را تضمین می‌نماید.

$$\tau_q = \Omega_q\hat{\Phi}_q - v_{Rq} - m_{55}\beta_{1q_c}\Upsilon_{q_c}|\vartheta|^{\Upsilon_{q_c}-1}\dot{\vartheta} - k_{21}q_e - k_{21}q_e - k_{22}sig(q_e)^{\Upsilon_{q_e}} - \vartheta\cos(\phi) \qquad (۲۵)$$

[1] Pitch

که در این معادله، ثابت مثبت $1 > \gamma_{q_e} > 0$ ، ضرایب قابل تنظیم و $k_{21}, k_{22} > 0$ بهره‌های کنترل‌کننده می‌باشند. همچنین، $\widehat{\Phi}_q$ بیانگر تخمین پارامترهای نامعین است. از طرفی، عبارت v_{Rq} قانون کنترل مقاوم جهت جبران کران بالای جملات شامل اغتشاشات خارجی موجود در جمله $\tau_{eq}(t)$ می‌باشد که به صورت $v_{Rq} = \hat{\alpha}_q sat(s_{q_e})$ پیشنهاد می‌شود و کران بالای آن به صورت یک کمیت اسکالر به فرم $|\tau_{eq}(t)| \leq \alpha_q$ در نظر گرفته می‌شود.

۳-۳ طراحی کنترل‌کننده جهت کنترل گردش

با مشتق گرفتن از $\phi = \arctan\left(\frac{y_e}{x_e}\right)$ در (۵) و جایگذاری (۷) در آن، دینامیک خطا در مختصات کروی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\phi} = -r(1 + cos(\phi)\, tan(\vartheta)\, tan(\theta)) + qsin\,(\phi) tan\,(\vartheta) - usin(\phi) /\ (\rho_e\, cos(\vartheta)) - \xi_{1d}\, sin(\phi)\, /(\rho_e\, cos(\vartheta)) + \frac{(v+\xi_{2d}) cos(\phi)}{\rho_e\, cos(\vartheta)} \quad (۲۶)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۹)، قانون کنترل مجازی در جهت کنترل زاویه گردش[1] به صورت زیر انتخاب می گردد:

$$r_c = (1 + cos(\phi)\, tan(\vartheta)\, tan(\theta))^{-1}\, (-q\, sin(\phi)\, tan(\vartheta) + u\, sin(\phi)/\,(\rho_e\, cos(\vartheta)) + \xi_{1d}\, sin(\phi)/(\rho_e\, cos(\vartheta)) - (v + \xi_{2d})\, cos(\phi)\, /\, (\rho_e\, cos(\vartheta)) + K_{1r_c}\phi + K_{2rc} sig(\phi)^{\gamma_{rc}} \quad (۲۷)$$

که در آن $sig(\vartheta)^{\gamma_{rc}} = |\vartheta|^{\gamma_{rc}} sig(\vartheta)$ تعریف می‌شود. همچنین، $k_{1r_c}, k_{2r_e} > 0$ و $1 > \gamma_{r_c} > 0$ پارامترهای قابل تنظیم کنترل‌کننده می‌باشند. قانون کنترل مجازی (۲۷) از یک فیلتر مرتبه اول به صورت زیر عبور داده می‌شود:

$$\lambda_u \dot{r}_{cf} + r_{cf} = r_c\, , r_{cf}(0) = r_c(0) \\ r_e = r - r_{cf}, \quad (۲۸)$$

که λ_r ضریب مثبت قابل تنظیم است که توسط طراح مشخص می‌شود. همچنین، خطای خروجی فیلتر برابر $\varepsilon_r = r_{cf} - r_c$ می‌باشد. در گام دوم، قانون کنترل واقعی جهت کنترل گشتاور عملگر مربوط به زاویه گردش طراحی می گردد. به همین جهت، خطا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_e = r - r_{cf} + \beta_{1r_c} sig(\phi)^{\Upsilon_{rc}} \quad (۲۹)$$

که ثابت‌های مثبت $1 > \Upsilon_{r_c} > 0$ و $\beta_{1r_c} > 0$ ضرایب مثبت قابل تنظیم می‌باشند. سپس، با یک بار مشتق گیری از معادله (۲۹) و جایگذاری معادله (۲)، خواهیم داشت:

$$\dot{r}_e = \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{66}} uv - f_r(r) + \frac{\tau_r}{m_{66}} - \frac{\tau_{er}(t)}{m_{66}} - \dot{r}_{cf} + \beta_{1r_c}\gamma_{r_c} |\phi|^{\Upsilon_{r_c}-1} \dot{\phi} \quad (۳۰)$$

با در نظر گرفتن $f_r(r) = \sigma_{r1} r + \sigma_{r2} r|r| + \sigma_{r3} r^3$، رابطه (۳۰) را به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m_{66}\dot{r}_e = -\Re_r + \tau_r - \tau_{er}(t) \quad (۳۱)$$

مدل پارامتری در کنترل‌کننده تطبیقی به صورت $\Re_r = \Omega_r \Phi_r$ انتخاب می‌شود و Ω_r ماتریس رگرسور شناور و Φ_r یک بردار شامل کلیه پارامترهای نامعین موجود در دینامیک گردش شناور است. برای محقق کردن هدف کنترل زمان-محدود، معادله دینامیک خطای حلقه‌باز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$m_{66}\dot{r}_e = -\Omega_r \Phi_r + \tau_r - \tau_{er}(t) + m_{66}\beta_{1\, r\, c} \Upsilon_{r_c} |\phi|^{\Upsilon_{r_c}-1} \dot{\phi} \quad (۳۲)$$

در نتیجه، با در نظر گرفتن رابطه فوق، ورودی کنترلی برای زاویه گردش به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد تا پایداری زمان-محدود سیستم و همگرایی سریع خطای سرعت گردش به ناحیه کوچکی اطراف مبدأ تضمین شود:

$$\tau_r = \Omega_r \widehat{\Phi}_r - v_{Rr} - m_{66}\beta_{1r_c} \Upsilon_{r_c} |\phi|^{\Upsilon_{r_c}-1} \dot{\phi} - k_{31} r_e - k_{32} sig(r_e)^{\Upsilon_{r_e}} - \phi(1 + \cos(\phi)\tan(\vartheta)\tan(\theta)) \quad (۳۳)$$

که در آن ثابت مثبت $1 > \gamma_{r_e} > 0$ یک ضریب قابل تنظیم، $k_{31}, k_{32} > 0$ بهره‌های کنترل‌کننده، و $\widehat{\Phi}_r$ تخمین پارامترهای نامعین می‌باشند. مشابه قبل، جمله $v_{Rr} = \hat{\alpha}_r sat(s_{r_e})$ جهت جبران کران بالای اغتشاشات خارجی موجود در جمله $\tau_{er}(t)$ پیشنهاد می‌گردد که کران بالای آنها به صورت یک کمیت اسکالر به فرم $|\tau_{er}(t)| \leq \alpha_r$ در نظر گرفته شده است. مشکل اساسی در استفاده از روش کنترل زمان-محدود، نوسانات فرکانس بالای ورودی‌های کنترلی است. این نوسانات به دلیل وجود تابع ناپیوسته $sign(s_k)$ در قانون کنترل ایجاد می گردد. بنابراین، جهت رفع این مشکل و مشتق پذیر شدن آن از تابع $sat\ (s_k)$ به صورت یک تابع اشباع به فرم زیر استفاده خواهد شد:

$$sat(s_k) = \begin{cases} \frac{s_k}{|s_k|} & if\ \left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|}\right) \tan h\left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|}\right) \geq 1.5 \\ \left[\left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|}\right) \tan h\left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|}\right)\right] \frac{s_k}{|s_k|} & if\ \left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|}\right) \tan h\left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|}\right) < 1.5 \end{cases} \quad (۳۴)$$

این تابع به ازای $s_k = u_e, q_e, r_e$ تکرار می‌شود و $\varepsilon_{\alpha k}$ بیانگر ضخامت لایه مرزی[2] است. از طرفی، با توجه به اینکه میزان اغتشاشات خارجی مانند باد و امواج اقیانوسی تحت تأثیر عوامل مختلفی قرار دارد، در هر لحظه از زمان مقادیر متفاوتی خواهد داشت و مقدار دقیقی از آن در دسترس نمی‌باشد. بنابراین، استفاده از کنترل تطبیقی جهت به‌روز رسانی تخمین کران بالای این نامعینی‌ها که با $\hat{\alpha}_u$، $\hat{\alpha}_q$ و $\hat{\alpha}_r$ نشان داده شده‌اند، راه حلی قابل توجه است. بر این اساس، در ادامه قوانین تطبیق زیر جهت به روز رسانی کران بالای نامعینی و تخمین پارامترهای نامعین تعریف می‌گردند:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\alpha}}_u = \eta_u |u_e| - \eta_u \sigma_u (\alpha_u - \alpha_o), \\ \dot{\hat{\alpha}}_q = \eta_q |q_e| - \eta_q \sigma_q \left(\alpha_q - \alpha_{q_o}\right), \\ \dot{\hat{\alpha}}_r = \eta_r |r_e| - \eta_r \sigma_r \left(\alpha_r - \alpha_{r_o}\right). \end{cases} \quad (۳۵)$$

$$\dot{\widehat{\Phi}} = -\Gamma \Omega^T \upsilon - \Gamma \delta_\Phi \widehat{\Phi} \quad (۳۶)$$

[1] Yaw

[2] Boundary layer thickness

[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.10.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.33]

که در این روابط، $\upsilon = (u_e, q_e, r_e)^T$، $\Omega = \left(\Omega_u^T, \Omega_q^T, \Omega_r^T\right)^T$ و $\Phi = \left(\Phi_u, \Phi_q, \Phi_r\right)^T$ می‌باشند. همچنین، ضرایب مثبت ثابت η_u، η_q و η_r و ماتریس مثبت $\Gamma = diag\left(\Gamma_{\Phi u}, \Gamma_{\Phi q}, \Gamma_{\Phi r}\right)$ معرف بهره‌های تطبیق می‌باشند. به‌علاوه، ضرایب کوچک مثبت ثابت σ_u، σ_q و σ_r و ماتریس مثبت $\delta_\Phi = diag(s_{\Phi u}, s_{\Phi q}, s_{\Phi r})$، ضرایب اصلاح سیگما می‌باشند.

تذکر ۳: افزودن بخش اصلاح سیگما به قوانین تطبیق، آنها را به گونه‌ای اصلاح می‌نماید که خطای تخمین پارامترها حتی در حضور نامعینی غیرپارامتری کران‌دار باقی بماند.

تذکر ٤: جمله‌های موجود در قوانین کنترل (۱۱)، (۱۹) و (۲۷)، متضمن پایداری سریع در زمان-محدود هستند. به‌طوری که جملات $k_{1q_c}\vartheta$، $k_{1u_c}(\rho_e - \rho_0)$ و $k_{1r_c}\phi$ هنگامی که حالت‌های سیستم دور از مبدأ قرار داشته باشند و جملات $k_{2u_c}sig(\rho_e - \rho_0)^{\Upsilon uc}$، $k_{2q_c}sig\,\vartheta^{\Upsilon qc}$ و $k_{2q_c}sig\,(\phi)^{\Upsilon qc}$ زمانی که حالات در نزدیکی مبدأ قرار دارند، همگرایی سریع آنها به ناحیه کوچکی حول مبدأ را تضمین می‌نمایند.

٤- محاسبه دینامیک خطای حلقه بسته

در این بخش، با استفاده از طراحی کنترل‌کننده ارائه شده در بخش‌های قبل، روابط خطای حلقه‌بسته در سطح دینامیک و سینماتیک محاسبه می‌گردد. برای این منظور، ابتدا معادلات u، q و r بر حسب قانون کنترل مجازی، خطا و خطای خروجی فیلترها، از معادله‌های (۱۱)، (۱۹) و (۲۷) ورابطه $d = u, r, q$ ، $\varepsilon_d = d_{cf} - d_c$ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} u &= u_e + \varepsilon_u + u_c - \beta_{1u_c} sig(\rho_e - \rho_0)^{\Upsilon_{uc}} \\ q &= q_e + \varepsilon_q + q_c - \beta_{1q_c} sig(\vartheta)^{\Upsilon_{qc}} \\ r &= r_e + \varepsilon_r + r_c - \beta_{1r_c} sig(\phi)^{\Upsilon_{rc}} \end{aligned} \tag{۳۷}$$

سپس، از جایگذاری (۳۷) در روابط (۹)، (۱۸) و (۲۶)، معادلات خطا به صورت زیر حاصل می‌شوند:

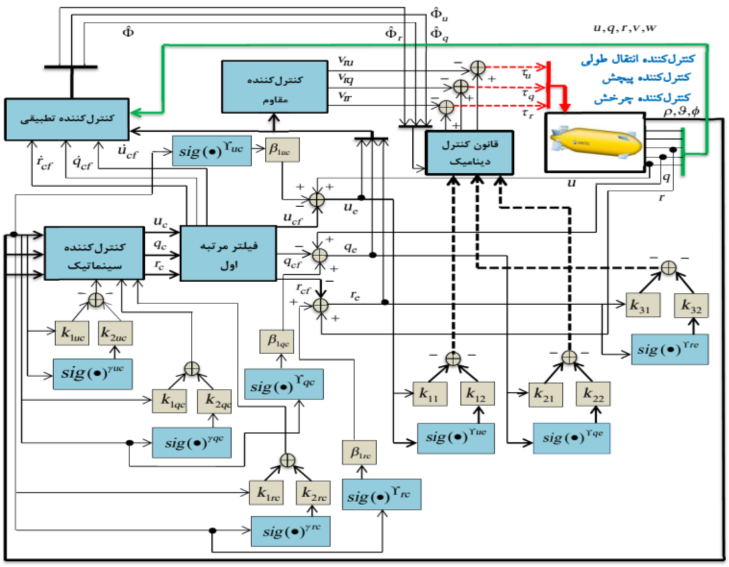
$$\begin{aligned} \dot{\rho}_e = {} & w\sin(\vartheta) + \cos(\vartheta)\cos(\phi)\,\xi_1 + \cos(\vartheta)\sin(\phi)\xi_2 + \\ & \sin(\vartheta)\xi_3 + v\cos(\vartheta)\sin(\phi) + \big(u_e + \varepsilon_u + u_c - \\ & \beta_{1u_c} sig(\rho_e - \rho_0)^{\Upsilon_{uc}}\big)\cos(\phi)\cos(\vartheta) \\ \dot{\vartheta} = {} & \cos(\vartheta)\,(w + \xi_3)/\rho_e + r\tan(\theta)\sin(\phi) - \\ & \xi_1\cos(\phi)\sin(\vartheta)/\rho_e - u\cos(\phi)\sin(\vartheta)/\rho_e - \\ & \sin(\phi)\sin(\vartheta)(v + \xi_2)/\rho_e + \big(q_e + \varepsilon_q + q_c - \\ & \beta_{1q_c} sig(\vartheta)^{\Upsilon_{qc}}\big)\cos(\phi) \\ \dot{\phi} = {} & -\big(r_e + \varepsilon_r + r_c - \beta_{1r_c} sig(\phi)^{\Upsilon_{rc}}\big) \\ & (1 + \cos(\phi)\tan(\vartheta)\tan(\theta)) \\ & + (v + \xi_2)\cos(\phi)/(\rho_e\cos(\vartheta)) + q\sin(\phi)\tan(\vartheta) - \\ & u\sin(\phi)/(\rho_e\cos(\vartheta)) - \xi_1\sin(\phi)/(\rho_e\cos(\vartheta)) \end{aligned} \tag{۳۸}$$

در نهایت، با جایگذاری (۹)، (۱۸) و (۲۶)، در (۳۸) و اندکی ساده‌سازی، معادلات خطای حلقه‌بسته در سطح سینماتیک به فرم زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_e = {} & -k_{1u_c}(\rho_e - \rho_o) - k_{u_c} sig(\rho_e - \rho_o)^{\Upsilon uc} + \\ & \big(u_e + \varepsilon_u - \beta_{1u_c} sig(\rho_e - \rho_o)^{\Upsilon_{uc}}\big)\cos(\phi)\cos(\vartheta), \\ \dot{\vartheta} = {} & \big(q_e + \varepsilon_q - \beta_{1q_c} sig(\vartheta)^{\Upsilon_{qc}}\big)\cos(\phi) - k_{1q_c}\vartheta - \\ & k_{2q_c} sig(\vartheta)^{\Upsilon qc}, \\ \dot{\phi} = {} & -\big(r_e + \varepsilon_r - \beta_{1r_c} sig(\phi)^{\Upsilon_{rc}}\big)(1 + \cos(\phi)\tan(\vartheta)\tan(\theta)) - \\ & k_{1r_c}\phi - k_{2r_c} sig(\phi)^{\Upsilon uc} \end{aligned} \tag{۳۹}$$

به همین ترتیب، معادلات دینامیک خطاهای حلقه‌بسته از جایگذاری قوانین کنترل دینامیکی (۱۷)، (۲۵) و (۳۳) در معادلات (۱۶)، (۲۴) و (۳۲)، به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} m_{11}\dot{u}_e = {} & -\Omega_u\widetilde{\Phi}_u - \tau_{eu}(t) - \hat{\alpha}_u sat(u_e) - k_{11}u_e - \\ & k_{12} sig(u_e)^{\Upsilon ue} - (\rho_e - \rho_0)\cos(\phi)\cos(\vartheta), \\ m_{55}\dot{q}_e = {} & -\Omega_q\widetilde{\Phi}_q - \tau_{eq}(t) - \hat{\alpha}_q sat(q_e) - \\ & k_{21}q_e - k_{22} sig(q_e)^{\Upsilon qe} - \vartheta\cos(\phi), \\ m_{66}\dot{r}_e = {} & -\Omega_r\widetilde{\Phi}_r - \tau_{er}(t) - \hat{\alpha}_r sat(r_e) - k_{31}r_e - \\ & k_{32} sig(r_e)^{\Upsilon re} - \phi(1 + \cos(\phi)\tan(\vartheta)\tan(\theta)). \end{aligned} \tag{۴۰}$$



شکل ۲: دیاگرام بلوکی روش پیشنهادی

۵- تحلیل پایداری سیستم حلقه‌بسته تحت الگوریتم کنترلی سطح دینامیکی مقاوم تطبیقی زمان-محدود

در این بخش، ابتدا چند لم مفید در روند اثبات پایداری معرفی می‌گردد. سپس، پایداری سیستم توسط تئوری لیاپانوف به اثبات می‌رسد.

لم ۱ [۳۵]: برای هر عدد مثبت $1 > \beta = \frac{p}{q} > 0$ و هر بردار $x_i \in R$، رابطه زیر برقرار است:

$$\left\|a^{-\beta}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{L}(a_i^2)^{\beta} \geq \|\bar{a}\|^{2\beta} = \left(\sum_{i=1}^{L} a_i^2\right)^{\beta} \qquad (۴۱)$$

که در آن، $\bar{a}^{\beta} = \left(a_1^{\beta}, \dots, a_L^{\beta}\right)^T$ می‌باشد.

لم ۲ [۳٦] : برای هر $x_i \in R$ و $1 > \beta > 0$، نامساوی زیر قابل بیان است:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|\right)^{\beta} \leq \sum_{i=1}^{m}|x_i|^{\beta} \leq m^{1-\beta}\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|\right)^{\beta} \qquad (۴۲)$$

لم ۳ [۳٤]: برای بردارهای $x\,,y \in \Re^n$ و هر ماتریس مثبت معین P، نامساوی ریلی-ریتز[1] به صورت زیر برقرار است:

$$\lambda_{min}\{P\}\|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{max}\{P\}\|x\|^2 \qquad (۴۳)$$

که در این رابطه، λ_{min} و λ_{max} به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس P هستند.

لم ٤ [۳٤]: برای هر ماتریس مثبت معین P، عدد ثابت k و بردارهای $x\,,y \in \Re^n$ نامساوی زیر برقرار است:

$$x^T P y \leq \frac{1}{2k^2}\lambda_{max}\{P\}\|x\|^2 + \frac{k^2}{2}\lambda_{max}\{P\}\|y\|^2 \qquad (۴۴)$$

لم ۵ [۳٤]: اگر a،b،P و q اعداد حقیقی مثبت باشند، به‌گونه‌ای که $(1/P) + (1/q) = 1$، آنگاه نامساوی یانگ[2] به صورت زیر قابل بیان است:

$$ab \leq (a^P/P) + (b^q/q) \qquad (۴۵)$$

لم ٦ [۳۷]: برای اعداد مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $o < p < 1$، نامساوی $(a_1^2, \dots, a_n^2)^p \leq (a_1^p, \dots, a_n^p)^2$ برقرار است.

قضیه ۱: با در نظر گرفتن معادلات سینماتیک و دینامیک ربات متحرک شناور زیر سطح به فرم (۱) و (۲) و با در نظر گرفتن فرض‌های ۱ تا ۵، قانون کنترل سطح دینامیکی مقاوم تطبیقی زمان محدود سینماتیکی ارائه شده در روابط (۱۱)، (۱۹) و (۲۷) و قوانین کنترلی (۱۷)، (۲۵) و (۳۳) در صورتی که بهره‌های کنترلی به شکل $K_{12}, K_{11}, K_{21}, K_{22} > 1$، $K_{1r_c}, K_{2r_c} > 0.5a$، $K_{31}, K_{32} > a$، $K_{1q_c}, K_{2q_c}, K_{1u_c}, K_{2u_c} > 0.5$، $\lambda_r < 1/(1+0.5a)$ و $a = max(1+\tan(\theta)\tan(\vartheta)\cos(\phi))$ باشند، قادر هستند اهداف زیر را تضمین نماید:

۱) کران‌داری تمامی سیگنال‌های سیستم حلقه‌بسته؛

۲) همگرایی خطای ردیابی در سطح دینامیک و سینماتیک به ناحیه کوچک $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ حول مبدأ را در زمان-محدود، که در این صورت، $\|v\| \leq min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ خواهد بود و در آن

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{\left\|\omega\Phi - \omega\widehat{\Phi}\right\| + \|\tilde{\alpha}\|}{\lambda_{\bar{k}_{21}}}, \\
\delta_2 &= \frac{\|\varrho\|}{\lambda_{\bar{\breve{k}}_{21}}}, \\
\delta_3 &= \left(\frac{\left\|\omega\Phi - \omega\widehat{\Phi}\right\| + \|\tilde{\alpha}\|}{\lambda_{\bar{k}_{22}}}\right)^{1/\Upsilon}, \\
\delta_4 &= \frac{\|\varrho\|}{\lambda_{\bar{\breve{k}}_{21}}}.
\end{aligned} \qquad (۴۶)$$

اثبات: با توجه به اینکه براساس قضیه ۱ لازم است که خطاها چه در سطح دینامیک و چه در سطح سینماتیک در زمان محدودی به صفر میل نمایند، لازم است که تابع لیاپانوف به صورت تابعی از خطاها در مختصات کروی، خطاها در سطح دینامیک، خطای خروجی فیلترها و خطاهای تخمین پارامترها، انتخاب گردد. لذا، تابع لیاپانوف $V(t)$ به‌-صورت زیر پیشنهاد می گردد:

$$\begin{aligned}
V(t) = {} & \tfrac{1}{2}(\rho-\rho_0)^2 + \tfrac{1}{2}\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}\phi^2 + \\
& \tfrac{1}{2}m_{11}{u_e}^2 + \tfrac{1}{2}m_{55}{q_e}^2 + \tfrac{1}{2}m_{66}{r_e}^2 + \\
& \tfrac{1}{2}{\varepsilon_u}^2 + \tfrac{1}{2}{\varepsilon_q}^2 + \ + \tfrac{1}{2}{\varepsilon_r}^2 + \tfrac{\widetilde{\Phi}^T\Gamma_{\Phi}^{-1}\widetilde{\Phi}}{2} + \tfrac{\widetilde{\alpha}_u^2}{2\eta_u} + \\
& \tfrac{\widetilde{\alpha}_q^2}{2\eta_q} + \tfrac{\widetilde{\alpha}_r^2}{2\eta_r}
\end{aligned} \qquad (۴۷)$$

سپس، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) = {} & (\rho-\rho_0)\dot{\rho} + \vartheta\dot{\vartheta} + \phi\dot{\phi} + m_{11}u_e\dot{u}_e + \\
& m_{55}q_e\dot{q}_e + m_{66}r_e\dot{r}_e + \varepsilon_u\dot{\varepsilon}_u + \varepsilon_q\dot{\varepsilon}_q + \\
& \varepsilon_r\dot{\varepsilon}_r + \widetilde{\Phi}^T\Gamma_{\Phi}^{-1}\dot{\widetilde{\Phi}} + \tfrac{\widetilde{\alpha}_u\dot{\widetilde{\alpha}}_u}{\eta_u} + \tfrac{\widetilde{\alpha}_q\dot{\widetilde{\alpha}}_q}{\eta_q} + \tfrac{\widetilde{\alpha}_r\dot{\widetilde{\alpha}}_r}{\eta_r}
\end{aligned} \qquad (۴۸)$$

با جایگذاری معادلات خطای حلقه‌بسته در سطح دینامیکی و سینماتیکی از روابط (۳۹) و (۴۰) در مشتق تابع لیاپانوف، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) = {} & -k_{1u_c}(\rho_e-\rho_o)^2 - (\rho_e-\rho_o)k_{2u_c}sig(\rho_e-\rho_o)^{\gamma_{u_c}} + \\
& (\rho_e-\rho_o)\left(u_e + \varepsilon_u - \beta_{1u_c}sig(\rho_e-\rho_0)^{\Upsilon_{u_c}}\right)\cos(\phi)\cos(\vartheta) \\
& -k_{1q_c}\vartheta^2 - \vartheta k_{2q_c}sig(\vartheta)^{\gamma_{q_c}} - k_{1r_c}\phi^2 - k_{11}{u_e}^2 + \\
& \vartheta\left(q_e + \varepsilon_q - \beta_{1q_c}sig(\vartheta)^{\Upsilon_{q_c}}\right)\cos(\phi) - \phi k_{2r_c}sig(\phi)^{\gamma_{r_c}} + \\
& \phi\left(r_e + \varepsilon_r - \beta_{1r_c}sig(\emptyset)^{\Upsilon_{r_c}}\right)(1+\tan(\theta)\tan(\vartheta)\cos(\phi)) - \\
& u_e k_{12}sig(u_e)^{\Upsilon_{ue}} - u_e\Omega_u\widetilde{\Phi}_u - u_e\hat{\alpha}_u sat(u_e) - u_e\tau_{eu}(t) - \\
& u_e(\rho_e-\rho_o)\cos(\phi)\cos(\vartheta) - k_{21}{q_e}^2 - q_e k_{22}sig(q_e)^{\Upsilon_{qe}} - \\
& q_e\Omega_q\widetilde{\Phi}_q - q_e\hat{\alpha}_q sat(q_e) - q_e\tau_{eq}(t) - q_e\vartheta\cos(\phi) - \\
& k_{31}{r_e}^2 - r_e k_{32}sig(r_e)^{\Upsilon_{re}}
\end{aligned} \qquad (۴۹)$$

[1] Rayleigh-Ritz Inequality

[2] Young Inequality

از طرفی، با توجه به قوانین تطبیق (۳۵) و (۳۶) و تعریف خطاهای تخمین به صورت‌های $\tilde{\alpha}_c = \alpha_c - \hat{\alpha}_c$ و $\tilde{\Phi} = \Phi - \hat{\Phi}$، به ازای $c = u, q, r$، روابط زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\alpha}_u = \alpha_u - \hat{\alpha}_u \\
&\rightarrow \dot{\tilde{\alpha}}_u = -\dot{\hat{\alpha}}_u = -\eta_u|u_e| + \eta_u\sigma_u(\alpha_u - \alpha_o), \\
&\tilde{\alpha}_q = \alpha_q - \hat{\alpha}_q \\
&\rightarrow \dot{\tilde{\alpha}}_q = -\dot{\hat{\alpha}}_q = -\eta_q|q_e| + \eta_q\sigma_q(\alpha_q - \alpha_{qo}), \\
&\tilde{\alpha}_r = \alpha_r - \hat{\alpha}_r \\
&\rightarrow \dot{\tilde{\alpha}}_r = -\dot{\hat{\alpha}}_u = -\eta_r|r_e| + \eta_r\sigma_r(\alpha_r - \alpha_{ro}), \\
&\dot{\tilde{\Phi}} = -\dot{\hat{\Phi}} = +\Gamma\Omega^T S + \Gamma\delta_\Phi\hat{\Phi}.
\end{aligned} \tag{۵۰}$$

بنابراین، با جایگذاری روابط (۵۰) در معادله (۴۹) و همچنین، با در نظر گرفتن رابطه اول از توابع اشباع دو وضعیتی (۳۴) به صورت‌های $sat(u_e) = u_e/|u_e|$، $sat(q_e) = q_e/|q_e|$ و $sat(r_e) = r_e/|r_e|$، و برابر بودن جملات اسکالر $\tilde{\Phi}_u^T\Omega_u u_e = u_e\Omega_u\tilde{\Phi}_u$، $\tilde{\Phi}_q^T\Omega_q q_e = q_e\Omega_q\tilde{\Phi}_q$ و $\tilde{\Phi}_r^T\Omega_r r_e = r_e\Omega_r\tilde{\Phi}_r$ مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \le &-k_{1u_c}(\rho_e - \rho_o)^2 - (\rho_e - \rho_o)k_{2u_c}sig(\rho_e - \rho_o)^{\gamma_{u_c}} \\
&+(\rho_e - \rho_o)\left(\varepsilon_u - \beta_{1u_c}sig(\rho_e - \rho_0)^{\Upsilon_{u_c}}\right)\cos(\phi)\cos(\vartheta) - \\
&k_{1q_c}\vartheta^2 - k_{1r_c}\phi^2 - \phi k_{2r_c}sig(\phi)^{\gamma_{rc}} - \vartheta k_{2q_c}sig(\vartheta)^{\gamma_{qc}} + \\
&\vartheta\left(\varepsilon_q - \beta_{1q_c}sig(\vartheta)^{\Upsilon_{qc}}\right)\cos(\phi)k_{21}{q_e}^2 - q_e k_{22}sig(q_e)^{\Upsilon_{qe}} \\
&-k_{31}{r_e}^2 - r_e k_{32}sig(r_e)^{\Upsilon_{re}} + \varepsilon_u\dot{\varepsilon}_u + \varepsilon_q\dot{\varepsilon}_q + \varepsilon_r\dot{\varepsilon}_r \\
&+\tilde{\Phi}_u^T\delta_{\Phi u}\hat{\Phi}_u + \tilde{\Phi}_q^T\delta_{\Phi q}\hat{\Phi}_q + \tilde{\Phi}_r^T\delta_{\Phi r}\hat{\Phi}_r + \tilde{\alpha}_u\sigma_u(\hat{\alpha}_u - \alpha_{uo}) \\
&+\tilde{\alpha}_q\sigma_q(\hat{\alpha}_q - \alpha_{qo}) + \tilde{\alpha}_r\sigma_r(\hat{\alpha}_r - \alpha_{ro})
\end{aligned} \tag{۵۱}$$

از طرفی، با توجه به روابط (۱۱)، (۱۹) و (۲۷)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_u &= -\varepsilon_u/\lambda_u + du_c/dt \\
\dot{\varepsilon}_q &= -\varepsilon_q/\lambda_q + dq_c/dt \\
\dot{\varepsilon}_r &= -\varepsilon_r/\lambda_r + dr/dt
\end{aligned} \tag{۵۲}$$

$$|df_c/dt| \le \varsigma_d, \quad f = u, q, r \tag{۵۳}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_f\dot{\varepsilon}_f = -\varepsilon_f^2/\lambda_f + \varepsilon_f(df_c/dt) \\
&\rightarrow \varepsilon_f\dot{\varepsilon}_f \le -\varepsilon_f^2/\lambda_f + |\varepsilon_f|\varsigma_f \qquad f = u, q, r
\end{aligned}$$

$$ab \le a^2 + b^2/4 \rightarrow \varepsilon_f\dot{\varepsilon}_f \le -\varepsilon_f^2/\lambda_f + \varepsilon_f^2 + 0.25\varsigma_f^2$$

که ς_d تابعی پیوسته از سیگنال‌های حلقه‌بسته می‌باشد. از طرفی، عبارت $xsig(x)^a$ به ازای $x = (\rho_e - \rho_o), \phi, \vartheta, u_e, q_e, r_e$ و $a = \gamma_{u_e}, \gamma_{q_e}, \gamma_{r_e}, r_{uc}, r_{qc}, r_{rc}$ به صورت زیر قابل ساده‌سازی است:

$$\begin{aligned}
xsig(x)^a &= x|x|^a sign(x) = |x|^a\left(x\frac{x}{|x|}\right) \\
&= |x||x|^a = |x|^{a+1}
\end{aligned} \tag{۵۴}$$

در نتیجه، می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t) \le -k_{1u_c}(\rho_e - \rho_o)^2 - k_{1q_c}\vartheta^2 - k_{1r_c}\phi^2 - \\
&k_{2u_c}|\rho_e - \rho_o|^{\gamma_{uc+1}} - k_{2q_c}|\vartheta|^{\gamma_{qc+1}} \\
&-k_{2r_c}|\phi|^{\gamma_{rc+1}} - k_{31}{r_e}^2 - k_{11}{u_e}^2 - k_{21}{q_e}^2 - \\
&k_{32}|r_e|^{\Upsilon_{re+1}} - k_{12}|u_e|^{\Upsilon_{ue+1}} - k_{22}|q_e|^{\Upsilon_{qe+1}} + \\
&(\rho_e - \rho_o)\big(\varepsilon_u - \beta_{1u_c}sig(\rho_e - \\
&\rho_0)^{\Upsilon_{uc}}\big)\cos(\phi)\cos(\vartheta) + \vartheta\big(\varepsilon_q - \\
&\beta_{1q_c}sig(\vartheta)^{\Upsilon_{qc}}\big)\cos(\phi) + \phi\big(\varepsilon_r - \\
&\beta_{1r_c}sig(\phi)^{\Upsilon_{rc}}\big)(1 + \tan(\theta)\tan(\vartheta)\cos(\phi)) - \\
&\varepsilon_u^2/\lambda_u - \varepsilon_q^2/\lambda_q - \varepsilon_r^2/\lambda_r + \varepsilon_u^2 + \varepsilon_q^2 + \varepsilon_r^2 + \\
&0.25\varsigma_r^2 + 0.25\varsigma_q^2 + 0.25\varsigma_u^2 + \tilde{\Phi}_u^T\delta_{\Phi u}\hat{\Phi}_u + \\
&\tilde{\Phi}_q^T\delta_{\Phi q}\hat{\Phi}_q + \tilde{\Phi}_r^T\delta_{\Phi r}\hat{\Phi}_r + \tilde{\alpha}_u\sigma_u\hat{\alpha}_u - \tilde{\alpha}_u\sigma_u\alpha_{uo} + \\
&\tilde{\alpha}_q\sigma_q\hat{\alpha}_q - \tilde{\alpha}_q\sigma_q\alpha_{qo} + \tilde{\alpha}_r\sigma_r\hat{\alpha}_r - \tilde{\alpha}_r\sigma_r\alpha_{ro}
\end{aligned} \tag{۵۵}$$

با در نظر گرفتن $\max\{\cos(\phi)\cos(\vartheta)\} = b_1$، $\max\{\cos(\phi)\} = b_3$ و $\max\{(1 + \tan(\theta)\tan(\vartheta)\cos(\phi))\} = b_2$ و استفاده از نامساوی یانگ می‌توان مشتق لیاپانوف را به صورت زیر درنظر گرفت:

$$\begin{aligned}
\dot{v}(t) \le &-k_{1u_c}(\rho_e - \rho_o)^2 - k_{1q_c}\vartheta^2 - k_{1r_c}\phi^2 - \\
&k_{2u_c}|\rho_e - \rho_o|^{\gamma_{uc+1}} - k_{2q_c}|\vartheta|^{\gamma_{qc+1}} - \\
&k_{2r_c}|\phi|^{\gamma_{rc+1}} - k_{31}{r_e}^2 - k_{11}{u_e}^2 - k_{21}{q_e}^2 - \\
&k_{32}|r_e|^{\Upsilon_{re+1}} - k_{12}|u_e|^{\Upsilon_{ue+1}} - k_{22}|q_e|^{\Upsilon_{qe+1}} + \\
&b_1(\rho_e - \rho_o)^2 + \varepsilon^2{}_u/4 - \beta_{1u_c}b_1|\rho_e - \rho_0|^{\Upsilon_{uc+1}} \\
&+b_2\vartheta^2 + \varepsilon^2{}_q/4 - \beta_{1q_c}b_2|\vartheta|^{\Upsilon_{qc+1}} + b_3\phi^2 + \\
&\varepsilon^2{}_r/4 - \beta_{1r_c}b_3|\phi|^{\Upsilon_{rc+1}} - \varepsilon_u^2/\lambda_u - \varepsilon_q^2/\lambda_q - \\
&\varepsilon_r^2/\lambda_r + \varepsilon_u^2 + \varepsilon_q^2 + \varepsilon_r^2 + 0.25\varsigma_r^2 + 0.25\varsigma_q^2 + \\
&0.25\varsigma_u^2 + \tilde{\Phi}_u^T\delta_{\Phi u}\hat{\Phi}_u + \tilde{\Phi}_q^T\delta_{\Phi q}\hat{\Phi}_q + \tilde{\Phi}_r^T\delta_{\Phi r}\hat{\Phi}_r + \\
&\tilde{\alpha}_u\sigma_u\hat{\alpha}_u - \tilde{\alpha}_u\sigma_u\alpha_{uo} + \tilde{\alpha}_q\sigma_q\hat{\alpha}_q - \tilde{\alpha}_q\sigma_q\alpha_{qo} + \\
&\tilde{\alpha}_r\sigma_r\hat{\alpha}_r - \tilde{\alpha}_r\sigma_r\alpha_{ro}
\end{aligned} \tag{۵۶}$$

با فرض اینکه $\Upsilon_{re} = \gamma_{r_c}$, $\Upsilon_{q_e} = \gamma_{q_c}$ و $\Upsilon_{uc} = \gamma_{u_c}$ هستند، و در نظر گرفتن تعریف خطای تخمین پارامترها، جملات $\tilde{\alpha}_d\sigma_d\hat{\alpha}_d$ و $\tilde{\Phi}^T\delta_d\hat{\Phi}$ به ازای $d = u, q, r$ را می‌توان به صورت‌های $\tilde{\alpha}_d\sigma_d\hat{\alpha}_d = \tilde{\alpha}_d\sigma_d\alpha_d - \tilde{\alpha}_d\sigma_d\tilde{\alpha}_d$ و $\tilde{\Phi}_d^T\delta_{\Phi d}\hat{\Phi}_d = \tilde{\Phi}_d^T\delta_{\Phi d}\Phi_d - \tilde{\Phi}_d^T\delta_{\Phi d}\tilde{\Phi}_d$ نوشت. از طرفی، با توجه به لم‌های ۳، ۴ و ۵، روابط زیر برای این جملات قابل بیان است:

$$\begin{aligned}
&-\tilde{\Phi}_d^T\delta_{\Phi d}\tilde{\Phi}_d \le -\lambda_{\min(\delta_{\Phi d})}\|\tilde{\Phi}_d\|^2 \\
&\tilde{\Phi}_d^T\delta_{\Phi d}\Phi_d \le \frac{1}{2k^2}\lambda_{\max\{\delta_{\Phi d}\}}\|\tilde{\Phi}_d\|^2 + \frac{k^2}{2}\lambda_{max}\{\delta_{\Phi d}\}\|\Phi_d\|^2,
\end{aligned} \tag{۵۷}$$

$$\begin{aligned}
&-\tilde{\alpha}_d\sigma_d\tilde{\alpha}_d \le -\sigma_d|\tilde{\alpha}_d|^2 \\
&\tilde{\alpha}_d\sigma_d\alpha_d \le \frac{1}{2k^2}\sigma_d|\tilde{\alpha}_d|^2 + \frac{k^2}{2}\sigma_d|\alpha_d|^2,
\end{aligned} \tag{۵۸}$$

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\alpha}_d\sigma_d\hat{\alpha}_d \le -(1 - 0.5/k^2)\sigma_d|\tilde{\alpha}_d|^2 + 0.5k^2\sigma_d|\alpha_d|^2 \\
&\tilde{\Phi}_d^T\delta_{\Phi d}\hat{\Phi}_d \le -(1 - 0.5/k^2)\lambda_{max}\{\delta_{\Phi d}\}\|\tilde{\Phi}_d\|^2 + \\
&\qquad 0.5k^2\lambda_{max}\{\delta_{\Phi d}\}\|\Phi_d\|^2
\end{aligned} \tag{۵۹}$$

با توجه به شرایط در نظرگرفته شده جهت تنظیم بهره‌ها در قضیه ۱، مشتق لیاپانوف با اندکی ساده‌سازی به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \le &-\left(k_{1u_c} - 1 - b_1\right)(\rho_e - \rho_o)^2 - \\
&\left(k_{1q_c} - 1 - b_2\right)\vartheta^2 - \left(k_{1r_c} - a - b_3\right)\phi^2 - \\
&\left(\left(k_{2u_c} - 1 + \beta_{1u_c}b_1\right)|\rho_e - \rho_o|^{\Upsilon_{uc+1}}\right) - \\
&\left(k_{2q_c} - 1 + \beta_{1q_c}b_2\right)|\vartheta|^{\Upsilon_{qc+1}} - \\
&\left(k_{2r_c} - 1 + \beta_{1r_c}b_3\right)|\phi|^{\Upsilon_{rc+1}} - (k_{31} - 0.5a){r_e}^2 \\
&-(k_{11} - 0.5){u_e}^2 - (k_{21} - 0.5){q_e}^2 - \\
&(k_{32} - 0.5a)|r_e|^{\Upsilon_{r_e}+1} - (k_{12} - 0.5)|u_e|^{\Upsilon_{u_e}+1} - \\
&(k_{22} - 0.5)|q_e|^{\Upsilon_q+1} - \left(1/\lambda_q - 1.5 - 1/4\right)\varepsilon_u^2 - \\
&\left(1/\lambda_q - 1.5 - 1/4\right)\varepsilon_q^2 + 0.25\varsigma_q^2 - \\
&(1/\lambda_r - 1 - 1.5a - 1/4)\varepsilon_r^2 + 0.25\varsigma_r^2 + \\
&0.25\varsigma_u^2 - (1 - 0.5/k^2)\sigma_u|\tilde{\alpha}_u|^2 +
\end{aligned} \tag{۶۰}$$

$$0.5k^2\sigma_u|\alpha_u|^2-(1-0.5/k^2)\lambda_{max}\{\delta_u\}\left\|\widetilde{\Phi}_u\right\|^2+$$
$$0.5k^2\lambda_{max}\{\delta_u\}\|\Phi_u\|^2-(1-0.5/k^2)\sigma_r|\tilde{\alpha}_r|^2+$$
$$0.5k^2\sigma_r|\alpha_r|^2-(1-0.5/k^2)\lambda_{max}\{\delta_r\}\left\|\widetilde{\Phi}_r\right\|^2+$$
$$0.5k^2\lambda_{max}\{\delta_r\}\|\Phi_r\|^2-(1-0.5/k^2)\sigma_q\left|\tilde{\alpha}_q\right|^2+$$
$$0.5k^2\sigma_q\left|\alpha_q\right|^2-(1-0.5/k^2)\lambda_{max}\{\delta_q\}\left\|\widetilde{\Phi}_q\right\|^2+$$
$$0.5k^2\lambda_{max}\{\delta_q\}\left\|\Phi_q\right\|^2$$

تذکر ۵: از لم ۱ و ۲ به ازای $i=1$، برای $s_b=u_e\ ,q_e\ ,r_e$ می‌توان اثبات نمود که

$$\left|s_b^{\hat{\rho}_b}\right|^2=(s_i^2)^{\hat{\rho}_i}\leq\left(1^{1-\hat{\rho}_b}\right)^2(s_b^2)^{\hat{\rho}_b}$$
$$\rightarrow-\left(1/\left(1^{1-\hat{\rho}_p}\right)^2\right)\left|s_b^{\hat{\rho}_b}\right|^2\geq-(s_b^2)^{\hat{\rho}_b} \quad (۶۱)$$

که در این رابطه، به ازای $b=u_e\ ,q_e\ ,r_e$ $\hat{\rho}_i=\gamma_b+1/2$ می‌باشد. از طرفی، از رابطه معرفی شده در لم ۱ به ازای $i=1$، نتیجه می‌شود که عبارت $-(s_b^2)^{\hat{\rho}_i}\leq-\left|s_p\right|^{\hat{\rho}_i\times 2}\leq-|s_b|^{r_b+1}$ برقرار است. بنابراین،

$$-|s_b|^{r_b+1}\leq-\left(1/\left(1^{1-\hat{\rho}_b}\right)^2\right)\left|s_b^{\hat{\rho}_b}\right|^2 \quad (۶۲)$$

در نهایت، با در نظر گرفتن تذکر ۵ در ساده‌سازی رابطه (۶۲)، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{V}(t)\leq-C_{min}\|X(t)\|^2+\mu \quad (۶۳)$$

که در این رابطه، C_{min} به صورت $C_{min}=min\{C_1,\dots,C_{21}\}$ بیان می‌شود. این پارامتر ایجاد کننده بیشترین مقدار منفی در مشتق تابع لیاپانوف است. با توجه به رابطه (۶۰)، هریک از ثابت‌های $C_1,\dots,C_{21}$ به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$C_1=\left(k_{1\,u_c}-1-b_1\right)\ ,\qquad C_{10}=(k_{12}-0.5)d_{ue},$$
$$C_2=\left(k_{1\,q_c}-1-b_2\right)\ ,\qquad C_{11}=(k_{22}-0.5)d_{qe},$$
$$C_3=\left(k_{1\,r_c}-a-b_3\right)\ ,\qquad C_{12}=(k_{32}-0.5\,a)d_{re},$$
$$C_4=\left(k_{2\,u_c}-1+\beta_{1u_c}b_1\right)d_{uc}\qquad C_{13}=(1-0.5/k^2)\sigma_q,$$
$$C_{14}=(1-0.5/k^2)\sigma_u,$$
$$C_6=\left(k_{2\,r_c}-a+\beta_{1r_c}b_3\right)d_{rc}\ .\qquad C_{15}=(1-0.5/k^2)\sigma_r,$$
$$C_7=(k_{11}-0.5),\qquad C_{16}=({}^{1}/_{\lambda_u}-1.5-1/4),$$
$$C_8=(k_{21}-0.5),\qquad C_{17}=\left({}^{1}/_{\lambda_q}-1.5-1/4\right),$$
$$C_9=(k_{31}-0.5a),\qquad C_{18}=\left({}^{1}/_{\lambda_r}-0.75-0.5\,a\right),$$
$$C_{19}=(1-0.5/k^2)\lambda_{max}\{\delta_u\}.\qquad C_{20}=(1-0.5/k^2)\lambda_{max}\{\delta_q\}.$$
$$C_{21}=(1-0.5/k^2)\lambda_{max}\{\delta_r\}.\qquad d_{kc}=\left(1/\left(1^{1-(\gamma_{kc}+1/2)}\right)^2\right)$$
$$d_{ke}=\left(1/\left(1^{1-(\gamma_{ke}+1/2)}\right)^2\right)\qquad ,k=u,q,r$$

(۶۴)

همچنین، بردار X و پارامتر μ، به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$X(t)=[\rho,\vartheta,\phi,\rho^{\hat{\rho}_1},\vartheta^{\hat{\rho}_2},\phi^{\hat{\rho}_3},u_e,q_e,r_e,{u_e}^{\hat{\rho}_4},$$
$$,{q_e}^{\hat{\rho}_5},{r_e}^{\hat{\rho}_6},\tilde{\alpha}_u,\tilde{\alpha}_q,\tilde{\alpha}_r,\varepsilon_u,\varepsilon_q,\varepsilon_r,\widetilde{\Phi}_1\dots\widetilde{\Phi}_{15}]$$
$$\mu=0.25\varsigma_r^2+0.25\varsigma_q^2+0.25\varsigma_u^2+0.5k^2\sigma_u|\alpha_u|^2+$$
$$0.5k^2\sigma_r|\alpha_r|^2\mu_u 0.5k^2\sigma_q\left|\alpha_q\right|^2+0.5k^2\lambda_{max}\{\delta_q\}\left\|\Phi_q\right\|^2$$
$$0.5k^2\lambda_{max}\{\delta_u\}\|\Phi_u\|^2+0.5k^2\lambda_{max}\{\delta_r\}\|\Phi_r\|^2$$

(۶۵)

با توجه به اینکه پارامتر μ دارای مقدار مثبت می‌باشد، مشتق تابع لیاپانوف تنها در صورتی منفی خواهد بود که رابطه $\|X(t)\|\leq\sqrt{\mu/c_{min}}$ برقرار باشد. در این صورت، منفی شدن مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی، در خارج از ناحیه کوچک $\Omega_0=\left\{X(t)|0<\|X(t)\|\leq\sqrt{\mu/c_{min}}\right\}$ تضمین خواهد شد. همچنین، از منفی شدن مشتق تابع لیاپانوف می‌توان نتیجه گرفت که $V(t)$ در خارج از ناحیه فشرده Ω_0 نزولی است و با گذشت زمان به صفر میل می‌نماید. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که سیستم پایدار یکنواخت است و $\|X(t)\|$ به طور یکنواخت نهایتاً کران‌دار می‌باشد، تمامی حالات سیستم کران‌دار هستند و خطاهای تخمین پارامترها، خطاها در مختصات کروی و خطاهای ردیابی در سطح دینامیک در نهایت، به ناحیه کوچکی اطراف صفر همگرا خواهند شد.

در ادامه، همگرایی خطاها در مختصات کروی و همگرایی خطاهای ردیابی دینامیکی در زمان-محدود، به ناحیه کوچکی حول مبدأ و پایداری زمان-محدود سیستم حلقه‌بسته در حضور نامعینی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. بنابراین، با حذف جملات مربوط به خطای تخمین پارامترها و خطای خروجی فیلترها از تابع لیاپانوف ارائه شده در رابطه (۴۸)، تابع به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود. سپس، با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف و جایگذاری خطاهای حلقه‌بسته ارائه شده در رابطه (۳۹) و (۴۰)، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$V(t)=\frac{1}{2}(\rho_e-\rho_o)^2+\frac{1}{2}\vartheta^2+\frac{1}{2}\phi^2+\frac{1}{2}m_{11}{u_e}^2+\frac{1}{2}m_{55}{q_e}^2+\frac{1}{2}m_{66}{r_e}^2 \quad (۶۶)$$

$$\dot{V}(t)=(\rho_e-\rho_o)\dot{\rho}+\vartheta\dot{\vartheta}+\phi\dot{\phi}+m_{11}u_e\dot{u}_e+m_{55}q_e\dot{q}_e+m_{66}r_e\dot{r}_e \quad (۶۷)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&-k_{1u_c}(\rho_e-\rho_o)^2-(\rho_e-\rho_o)k_{2u_c}sig(\rho_e-\rho_o)^{\gamma_{u_c}}\\&(\rho_e-\rho_o)\left(u_e+\ \varepsilon_u-\beta_{1u_c}sig(\rho_e-\rho_0)^{\Upsilon_{u_c}}\right)cos\phi\ cos\vartheta\\&-k_{1q_c}\vartheta^2-\vartheta k_{2q_c}sig(\vartheta)^{\gamma_{q_c}}-k_{1r_c}\phi^2+\\&\vartheta\left(q_e+\varepsilon_q-\beta_{1q_c}sig(\vartheta)^{\Upsilon_{q_c}}\right)\cos(\phi)-\phi k_{2r_c}sig(\phi)^{\gamma_{r_c}}\\&+\phi\left(r_e+\varepsilon_r-\beta_{1r_c}sig(\phi)^{\Upsilon_{r_c}}\right)(1+\tan(\theta)\tan(\vartheta)\cos(\phi))\\&-k_{11}{u_e}^2-u_ek_{12}sig(u_e)^{\Upsilon_{ue}}-u_e\Omega_u\widetilde{\Phi}_u-u_e\hat{\alpha}_usat(u_e)\\&-u_e\tau_{eu}(t)-u_e(\rho_e-\rho_o)\cos(\phi)\cos(\vartheta)-k_{21}{q_e}^2-\\&q_ek_{22}sig(q_e)^{\Upsilon_{qe}}-q_e\Omega_q\widetilde{\Phi}_q-q_e\hat{\alpha}_qsat(q_e)-q_e\tau_{eq}(t)-\\&q_e\vartheta\cos(\phi)-k_{31}{r_e}^2-r_ek_{32}sig(r_e)^{\Upsilon_{re}}-r_e\Omega_r\widetilde{\Phi}_r-\\&r_e\hat{\alpha}_rsat(r_e)-r_e\tau_{er}(t)-r_e\phi(1+\tan(\theta)\tan(\vartheta)\cos(\phi))\end{aligned}$$

(۶۸)

با در نظر گرفتن توابع اشباع به صورت‌های $sat(u_e)=u_e/|u_e|$، $sat(q_e)=q_e/|q_e|$ و $sat(r_e)=r_e/|r_e|$، و با توجه به کران بالای اغتشاشات خارجی، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)\leq\ &-(\rho_e-\rho_0)k_{2u_c}sig(\rho_e-\rho_0)^{\gamma_{u_c}}+\\&(\rho_e-\rho_0)\varepsilon_ub_1-k_{1u_c}(\rho_e-\rho_0)^2-k_{1q_c}\vartheta^2-\\&(\rho_e-\ \rho_0)b_1\beta_{1u_c}sig(\rho_e-\rho_0)^{\Upsilon_{u_c}}-\\&\vartheta k_{2q_c}sig(\vartheta)^{\gamma_{q_c}}+\vartheta\varepsilon_qb_2-k_{1r_c}\phi^2+\phi\varepsilon_rb_3\\&-\vartheta\beta_{1q_c}b_2sig(\vartheta)^{\Upsilon_{q_c}}-\phi k_{2\,r_c}sig(\phi)^{\gamma_{rc}}\\&-\phi b_3\beta_{1r_c}sig(\phi)^{\Upsilon_{rc}}-k_{11}{u_e}^2-u_ek_{12}sig(u_e)^{\Upsilon_{ue}}\\&+\tilde{\alpha}_u|u_e|-u_e\Omega_u\widetilde{\Phi}_u-k_{21}{q_e}^2-q_ek_{22}sig(q_e)^{\Upsilon_{qe}}\\&+\tilde{\alpha}_q|q_e|-q_e\Omega_q\widetilde{\Phi}_q-k_{31}{r_e}^2-r_ek_{32}sig(r_e)^{\Upsilon_{re}}\\&+\tilde{\alpha}_r|r_e|-r_e\Omega_r\widetilde{\Phi}_r\end{aligned} \quad (۶۹)$$

تذکر ٦: در قسمت قبل اثبات شد که تمامی سیگنال‌های سیستم، خطای حالات و خطای خروجی فیلترها کراندار هستند. بنابراین می‌توان گفت که شرط $|\varepsilon_u b_1| < \varrho_1$، $|\varepsilon_q b_2| < \varrho_2$ و $|\varepsilon_r b_3| < \varrho_3$ برقرار است.

$$\begin{aligned}\dot V(t) \le\ & -(\rho_e-\rho_0)\underbrace{\left(k_{2u_c}+\beta_{1u_c}b_1\right)}_{\breve k_{2u_c}} sig(\rho_e-\rho_0)^{\gamma_{u_c}} - \\ & \vartheta\underbrace{\left(k_{2q_c}+\beta_{1q_c}b_2\right)}_{\breve k_{2q_c}} sig(\vartheta)^{\gamma_{q_c}} - \\ & \phi\underbrace{\left(k_{2r_c}+\beta_{1r_c}b_2\right)}_{\breve k_{2r_c}} sig(\phi)^{\gamma_{q_c}} - k_{1u_c}(\rho_e-\rho_0)^2 - k_{1q_c}\vartheta^2 - \\ & k_{1r_c}\phi^2 - k_{11}u_e{}^2 - u_e k_{12} sig(u_e)^{\Upsilon_{ue}} + |u_e|\tilde\alpha_u - \\ & u_e\Omega_u\tilde\Phi_u - k_{21}q_e{}^2 - q_e k_{22} sig(q_e)^{\Upsilon} + |q_e|\tilde\alpha_q - \\ & q_e\Omega_q\tilde\Phi_q - k_{31}r_e{}^2 - r_e k_{32} sig(r_e)^{\Upsilon_{re}} + |r_e|\tilde\alpha_r - r_e\Omega_r\tilde\Phi_r\end{aligned} \tag{۷۰}$$

با توجه به روابط بالا و $\Upsilon_{uc}=\gamma_{u_c}$ و $\Upsilon_{q_e}=\gamma_{q_c}$, $\Upsilon_{re}=\gamma_{r_c}$ رابطه (۶۹) را می‌توا`ن به فرم مختصر زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}\dot V(t) \le & -S^T\bar K_{21}S - S^T\bar K_{22} sig(S)^{\gamma} - \\ & E^T\bar K_{11}E - E^T\bar K_{12} sig(E)^{\gamma} + S^T\omega\tilde\Phi - \\ & S^T\tilde\alpha\frac{S}{\|S\|} + E^T\varrho\end{aligned} \tag{۷۱}$$

که در این رابطه،

$$\begin{aligned} & \bar K_{11} = diag\left(k_{1u_c},k_{1q_c},k_{1r_c}\right), \\ & \bar K_{21} = diag(k_{11},k_{21},k_{31}) \\ & \bar K_{12} = diag\left(\breve k_{2u_c},\breve k_{2q_c},\breve k_{2r_c}\right), \\ & \bar K_{22} = diag(k_{12},k_{22},k_{32})\end{aligned} \tag{۷۲}$$

$$\begin{aligned} & \tilde\alpha = \left(\tilde\alpha_u,\tilde\alpha_q,\tilde\alpha_r\right), \\ & \omega = \left(\Omega_u,\Omega_q,\Omega_r\right), E = \left((\rho_e-\rho_0)^2,\vartheta^2,\phi^2\right)^T \\ & \Upsilon = \left(\Upsilon_{ue},\Upsilon_{qe},\Upsilon_{re}\right),\ \ \gamma = \left(\gamma_{ue},\gamma_{qe},\gamma_{re}\right), \\ & S = (u_e,q_e,r_e)^T \\ & sig(S)^{\gamma} = \\ & \left[|u_e|^{\gamma_{ue}}sign(u_e), |q_e|^{\gamma_{qe}}sign(q_e), |r_e|^{\gamma_{re}}sign(r_e)\right]^T \\ & sig(E)^{\gamma} = \left[|(\rho_e-\rho_0)|^{\gamma_{ue}}sign\left((\rho_e - \right.\right. \\ & \left.\left.\rho_0)\right), |\vartheta|^{\gamma_{qe}}sign(\vartheta), |\phi|^{\gamma_{re}}sign(\phi)\right]^T \\ & \varrho = [\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3]\end{aligned} \tag{۷۳}$$

نامساوی (۷۳) را می‌توان به یکی از دو صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} & \dot V_1 \le -S^T\left(\underbrace{\bar K_{21} - diag\left(\left(\omega\Phi-\omega\hat\Phi-\frac{\tilde\alpha S}{\|S\|}\right)\right)\times diag^{-1}(S)}_{\bar{\bar k}_{21}}\right)S - \\ & S^T\bar K_{22}sig(S)^{\gamma} - E^T(\underbrace{\bar K_{11} - dig(\varrho)\,dig^{-1}(E)}_{\bar{\bar k}_{11}})E - E^T\bar K_{12}sig(E)^{\gamma} \\ & \dot V \\ & \le -S^T\bar K_{21}S \\ & -S^T\left(\underbrace{\bar K_{22} - diag\left(\left(\omega\Phi-\omega\hat\Phi-\frac{\tilde\alpha S}{\|S\|}\right)\times diag^{-1}(sig(S)^{\gamma}\right)}_{\bar{\bar k}_{22}}\right)sig(S)^{\gamma} \\ & -E^T\bar K_{11}E - E^T(\underbrace{\bar K_{12} - dig(\varrho)\,dig^{-1}(sigE)^{\gamma}}_{\bar{\bar k}_{12}})sig(E)^{\gamma}\end{aligned} \tag{۷۴}$$

با این وجود، اگر $F=(f_1+f_2+f_3)^T$، $\tilde F=(\tilde f_1+\tilde f_2+\tilde f_3)^T$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & (\omega\Phi-\omega\hat\Phi-\frac{\tilde\alpha S}{\|S\|}) = \tilde F = (\tilde f_1,\tilde f_2,\tilde f_3)^T \\ & \varrho = F = (f_1,f_2,f_3)\end{aligned} \tag{۷۵}$$

با در نظرگرفتن عبارت اول از رابطه (۷۴)، باید $\lambda_{\bar K_{11}} - |f_k|/|E_k|^{\gamma} > 0$ و $\lambda_{\bar K 21} - \frac{|\tilde f_k|}{|S_k|^{\gamma}} > 0$ باشد که در این صورت ناحیه $|S_k|^{\gamma} \le |\tilde f_k|/\lambda_{\bar K 21}$، $|E_k|^{\gamma} \le |f_k|/\lambda_{\bar K_{11}}$ برای هرکدام از درایه‌های $S=(u_e,q_e,r_e)^T$ و $E=((\rho_e-\rho_0)^2,\vartheta^2,\phi^2)^T$ حاصل خواهد شد. همچنین، برای کل بردار S و E، همگرایی به ناحیه δ_1 و δ_2 در زمان محدود تضمین خواهد شد:

$$\begin{aligned} & \|S\|^2 = (u_e^2+q_e^2+r_e^2) \le \frac{\tilde f_1^2+\tilde f_2^2+\tilde f_3^2}{\lambda^2_{\bar k_{21}}} \\ & = \frac{\left\|\omega\Phi-\omega\hat\Phi-\tilde\alpha S/\|S\|\right\|^2}{\lambda^2_{\bar k_{21}}} \\ & \to \|S\| \le \frac{\left\|\omega\Phi-\omega\hat\Phi\right\| + \|\tilde\alpha\|}{\lambda_{\bar k_{21}}} = \delta_1 \\ & \|E\|^2 = \\ & ((\rho_e-\rho_0)^2+\vartheta^2+\phi^2) \le \frac{f_1^2+f_2^2+f_3^2}{\lambda^2_{\bar K_{11}}} = \frac{\|\varrho\|^2}{\lambda^2_{\bar K_{11}}} \\ & \to \|E\| \le \frac{\|\varrho\|}{\lambda_{\bar K_{11}}} = \delta_2\end{aligned} \tag{۷۶}$$

به همین صورت، در عبارت دوم از رابطه (۷۴)، لازم است $\lambda_{\bar K 22} - |\tilde f_k||S_k|^{\gamma} > 0$ و $\lambda_{\bar K_{12}} - |f_k|/|E_k|^{\gamma} > 0$ باشد که در این صورت ناحیه $|S_k|^{\gamma} \le |\tilde f_k|/|\lambda_{\bar K 22}|$ و $|E_k|^{\gamma} \le |f_k|/\lambda_{\bar K_{12}}$ برای هرکدام از درایه‌های بردار $S=(u_e,q_e,r_e)^T$ و $E=((\rho_e-\rho_0)^2,\vartheta^2,\phi^2)^T$ حاصل خواهد شد. در نتیجه، برای کل بردار S با توجه به لم ۶، همگرایی به ناحیه δ_3 و δ_4 در زمان محدود تضمین می‌شود:

$$\begin{aligned} & \|S\|^{4\gamma} = (u_e{}^2+q_e{}^2+r_e{}^2)^{2\gamma} \le (u_e^{2\gamma}+q_e^{2\gamma}+r_e^{2\gamma})^2 \le \\ & \left(\frac{\tilde f_1^2+\tilde f_2^2+\tilde f_3^2}{\lambda^2_{\bar K_{22}}}\right)^2 = \frac{\left\|\omega\Phi-\omega\hat\Phi-\frac{\tilde\alpha S}{\|S\|}\right\|^4}{\lambda^4_{\bar K_{22}}} \\ & \to \|S\| \le \left(\frac{\left\|\omega\Phi-\omega\hat\Phi-\tilde\alpha S/\|S\|\right\|}{\lambda_{\bar K_{22}}}\right)^{1/\gamma} = \delta_3 \\ & \|E\|^{4\gamma} = ((\rho_e-\rho_0)^2+\vartheta^2+\phi^2)^{2\gamma} \le ((\rho_e-\rho_0)^{2\Upsilon}+\vartheta^{2\Upsilon} + \\ & \phi^{2\Upsilon})^2 \le \left(\frac{f_1^2+f_2^2+f_3^2}{\lambda^2_{\bar K_{12}}}\right)^2 = \frac{\|\varrho\|^4}{\lambda^4_{\bar K_{12}}} \\ & \to \|E\| \le \left(\frac{\|\varrho\|}{\lambda_{\bar K_{12}}}\right)^{1/\gamma} = \delta_4\end{aligned} \tag{۷۷}$$

که در این روابط، $\lambda_{\bar K 11} = \min\{k_{1u_c},k_{1q_c},k_{1r_c}\}$، $\lambda_{\bar K 21} = \min\{\bar k_{11},\bar k_{21},\bar k_{31}\}$ ، $\lambda_{\bar K 12} = \min\{\breve k_{2u_c},\breve k_{2q_c},\breve k_{2r_c}\}$ و $\lambda_{\bar K 22} = \min\{k_{12},k_{22},k_{32}\}$ می‌باشد. در این صورت، هر یک از عبارات رابطه (۷۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\dot V \le -S^T\,\bar{\bar k}_{21}S - S^T\bar K_{22}sig(S)^{\gamma} - E^T\,\bar{\bar k}_{11}E - E^T\bar K_{12}sig(E)^{\gamma}$$

$$\dot V \le -S^T\bar K_{21}S - S^T\,\bar{\bar k}_{22}sig(S)^{\gamma} - E^T\bar K_{11}E - E^T\bar{\bar k}_{12}sig(E)^{\gamma} \tag{۷۸}$$

که می‌توانند با توجه به لم ۳ به فرم زیر نوشته شوند:

$$\begin{aligned} & \dot V \le -\lambda_{\min}\{\bar{\bar k}_{21}\}\|S\|^2 - \lambda_{\min}\{\bar K_{22}\}\|S\|^{\gamma+1} - \\ & \lambda_{\min}\{\bar{\bar k}_{11}\}\|E\|^2 - \lambda_{\min}\{\bar K_{12}\}\|S\|^{\gamma+1}, \\ & \dot V \le -\lambda_{\min}\{\bar K_{21}\}\|S\|^2 - \lambda_{\min}\{\bar{\bar k}_{22}\}\|S\|^{\gamma+1} - \\ & \lambda_{\min}\{\bar K_{11}\}\|E\|^2 - \lambda_{\min}\{\bar{\bar k}_{12}\}\|S\|^{\gamma+1}.\end{aligned} \tag{۷۹}$$

برای عبارت اول از رابطه (۷۹)، می‌توان نوشت:

$$\dot{V} \le C_{m1}(-\|S\|^2 - \|E\|^2) + C_{m2}(-\|S\|^{\wedge+1} - \|E\|^{\wedge+1}) \quad (۸۰)$$

در این رابطه، $C_{m1} = \min\{\lambda_{min}\{\bar{\check{k}}_{21}\}, \lambda_{min}\{\bar{\check{k}}_{11}\}\}$، $C_{m2} = \min\{\lambda_{min}\{\bar{K}_{22}\}, \lambda_{min}\{\bar{K}_{12}\}$ و $A = \min\{\Upsilon, \gamma\}$ می‌باشد. از طرفی، تابع لیاپانوف (۴۷) را نیز می‌توان به فرم برداری زیر بازنویسی نمود:

$$V(t) = \frac{1}{2}\|S\|^2 + \frac{1}{2}\|E\|^2. \quad (۸۱)$$

در نهایت، از مقایسه رابطه (۸۰) و (۸۱) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{V}_1 \le -\psi_1 V - \psi_2 V^{(\wedge+1)/2} \quad (۸۲)$$

که در این رابطه $\psi_2 = 2^{(\wedge+1)/2} C_{m2}$ و $\psi_1 = 2\,C_{m1}$ می‌باشد. بنابراین، طبق تعریف ۲، سیستم تحت اعمال کنترل‌کننده پیشنهادی، در زمان محدود به پایداری رسیده و خطاهای موقعیت و سرعت در زمان محدودی به ناحیه کوچکی اطراف صفر همگرا خواهند شد. در این صورت، زمان نشست به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$T_S \le \frac{1}{2\,C_{m1}(1-(\wedge+1)/2)} ln \frac{2\,C_{m1} V(x(0))^{1-(\wedge+1)/2} + 2^{(\wedge+1)/2} C_{m2}}{2^{(\wedge+1)/2} C_{m2}} \quad (۸۳)$$

تذکر ۷: از آنجایی که اثبات پایداری تنها با در نظر گرفتن رابطه دوم از تابع اشباع دو وضعیتی (۳۴) صورت گرفت، لازم به ذکر است که در عبارت دوم از تابع $sat(S_k)$، شرط $(|S_k|/\varepsilon_{\alpha k} + |S_k|) tanh |S_i|/\varepsilon_{\alpha k} + |S_k|) < 1.5$ برقرار است. بنابراین، اگر عدد ثابت μ طوری در نظر گرفته شود که

$$1.5 \le \mu \le (\frac{|S_k|}{\varepsilon_{\alpha k} + |S_k|} tanh\,(\frac{|S_k|}{\varepsilon_{\alpha k} + |S_k|}). \quad (۸۴)$$

آنگاه، می‌توان گفت که رابطه زیر بر قرار است:

$$S_K^T \alpha_k - |S_k|(\frac{|S_k|}{\varepsilon_{\alpha k}+|S_k|} tanh\,(\frac{|S_k|}{\varepsilon_{\alpha k}+|S_k|})\hat{\alpha}_k \le \\ \mu S_K^T \hat{\alpha}_k - \|S_k\|\mu\alpha_k \le \mu\|S_k\|\tilde{\alpha}_k \quad (۸۵)$$

بنابراین، با اصلاح قوانین تطبیق به صورت زیر، تمامی مراحل اثبات پایداری مطابق روند مذکور قابل انجام است.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}}_u &= \eta_u \mu |u_e| - \eta_u \sigma_u (\alpha_u - \alpha_0), \\ \dot{\hat{\alpha}}_u &= \eta_q \mu |q_e| - \eta_q \sigma_q (\alpha_q - \alpha_{q0}), \\ \dot{\hat{\alpha}}_u &= \eta_r \mu |r_e| - \eta_r \sigma_r (\alpha_r - \alpha_{r0}). \end{aligned} \quad (۸۶)$$

۶- شبیه‌سازی‌های عددی

در این بخش، میزان اثربخشی الگوریتم‌های کنترلی پیشنهاد شده در حل مسئله ردیابی مسیر مرجع و سرعت همگرایی خطای ردیابی با بهره‌گیری از شبیه‌سازی در نرم‌افزار متلب مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور، نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های انجام شده بر اساس پارامترهای یک زیردریایی واقعی، ارائه شده و مورد بررسی قرار می‌گیرند. لازم به ذکر است که مقادیر کلیه پارامترها به دلیل عدم دقت کافی در اندازه‌گیری، در کلیه مراحل طراحی و شبیه‌سازی نامعین در نظر گرفته می‌شوند. پارامترهای مربوط به جرم، لختی و ضرایب میرایی برای یک زیردریایی تحریک ناقص خودگردان عبارتند از:

$$\begin{aligned} &m_{11} = 25kg\,, m_{22} = 17.5kg, m_{33} = 30kg, \\ &m_{55} = 22.5kgm^2, m_{66} = 15kgm^2, d_{11} = 30kgs^{-1}, \\ &d_{22} = 30kgs^{-1}, d_{33} = 30kgs^{-1}, d_{55} = 20kgs^{-1}, \\ &d_{66} = 20kgs^{-1}, \rho g \nabla GM_L = 5. \end{aligned}$$

معادلات دینامیکی مدل نشده $f_k(k)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند $f_k(k) = \sigma_{k1}k + \sigma_{k2}k|k| + \sigma_{k3}k^3, \;\; k = u, v, w, q, r$ که در آن ضرایب به صورت $\sigma_{k1} = 0.5$ و $\sigma_{k2} = 0.25, \sigma_{k3} = 0.15$ انتخاب می‌شوند. همچنین، اغتشاشات خارجی مانند امواج و جریان‌های اقیانوسی به صورت سیگنال $\tau_{ek}(k)$ در شبیه‌سازی انتخاب می‌گردد. $\tau_{ek}(k) = \frac{1}{2}sign(k) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{10}\right), k = u, v, w, q, r$ شرایط اولیه سمت‌گیری و موقعیت ربات شناور واقعی و شناور هدف مجازی به صورت جدول ۲ در نظر گرفته می‌شود. همچنین، ورودی‌های کنترلی حلقه باز $\tau_d = (5N, 0.5Nm, 1Nm)^T$ جهت تولید مسیر مرجع مجازی به یک شناور مجازی اعمال می‌گردد.

جدول ۲: شرایط اولیه

شرایط اولیه ربات واقعی	*شرایط اولیه ربات هدف مجازی*	*یکا*
$x(0) = -5$, $y(0) = 5, z(0) = 0$ $\theta(0) = 0, \Psi(0) = 0,$	$x_d(0) = 0,$ $y_d(0) = 0,$ $z_d(0) = -10$ $\theta_d(0) = {}^{\pi}/_{180},$ $\Psi_d(0) = {}^{\pi}/_{180},$	*متر رادیان*

با در نظر گرفتن سیستم معرفی شده با شرایط مذکور، شبیه‌سازی در دو حالت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

- حالت (۱): شبیه‌سازی با کنترل‌کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم به کار رفته شده در مرجع [۲۹]؛
- حالت (۲): شبیه‌سازی با کنترل‌کننده سطح دینامیکی عصبی تطبیقی مقاوم زمان-محدود.

شبیه‌سازی تحت شرایط یکسان برای الگوریتم کنترل ارائه شده در مرجع [۲۹] و الگوریتم پیشنهادی انجام شده است و نتایج حاصل از آن با هم مقایسه خواهد شد.

بنابر شبیه‌سازی‌های انجام شده، بهره‌های کنترل‌کننده مطابق با مقادیر جدول ۳ قابل تنظیم هستند. همچنین، بهره‌های تطبیق پارامترها و کران بالای اغتشاش در حالت (۲)، مطابق جدول ۴ در نظر گرفته می‌شوند.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.10.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.33]

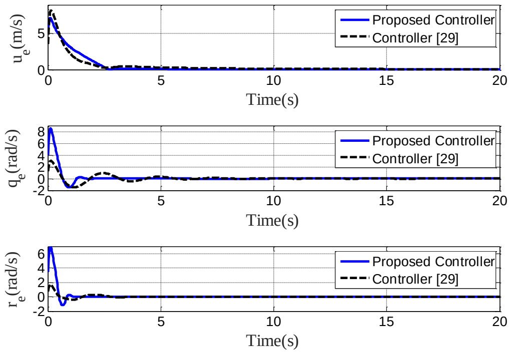
جدول ۳: بهره‌های کنترل‌کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم

پارامتر	توصیف	مقدار
$\bar{K}_{11} = diag(K_{1u_c}, K_{1q_c}, K_{1r_c})$	بهره کنترل‌کننده مجازی	$10diag\{0.1, 0.6, 0.9\}$
$\bar{K}_{12} = diag(K_{2u_c}, K_{2q_c}, K_{2r_c})$	بهره کنترل‌کننده مجازی	$3diag\{0.1, 0.4, 0.4\}$
$\bar{K}_{21} = diag(K_{11}, K_{21}, K_{31})$	بهره کنترل‌کننده واقعی	$diag\{5, 5, 5\}$
$\bar{K}_{22} = diag(K_{12}, K_{22}, K_{32})$	بهره کنترل‌کننده واقعی	$diag\{40, 40, 40\}$
$\beta_{ue}, \beta_{qe}, \beta_{re}$	ضرایب کنترل‌کننده واقعی	$5diag\{0.1, 0.1, 0.1\}$
ε_{ak}	ضخامت لایه مرزی	10

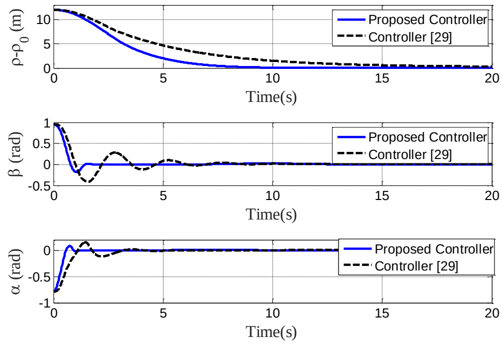
جدول ۴: بهره‌های تطبیق در کنترل‌کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم

پارامتر	توصیف	مقدار
$\Gamma = diag(\Gamma_{\Phi u}, \Gamma_{\Phi q}, \Gamma_{\Phi r})$	بهره تطبیق	$20diag\{1,1,1\}$
$\delta_{\Phi} = diag(\delta_{\Phi u}, \delta_{\Phi q}, \delta_{\Phi r})$	ضرایب اصلاح سیگما	$0.8diag\{1,1,1\}$
$\eta_q, \eta_u, \eta_{rr}$	بهره تطبیق	10,10,10
$\sigma_r, \sigma_q, \sigma_u$	ضرایب اصلاح سیگما	0.1,0.1,0.1

در شکل ۳، خطوط آبی شبیه سازی بدون احتساب کنترل کننده زمان محدود است. با اعمال کنترل‌کننده زمان محدود سیگنال خطای ردیابی با دقت و سرعت بهتری در زمان محدودی به صفر میل نموده است و به ازای تمامی زمان‌های پس از آن، در شعاع بسیار کوچکی حول مبدأ باقی مانده است.

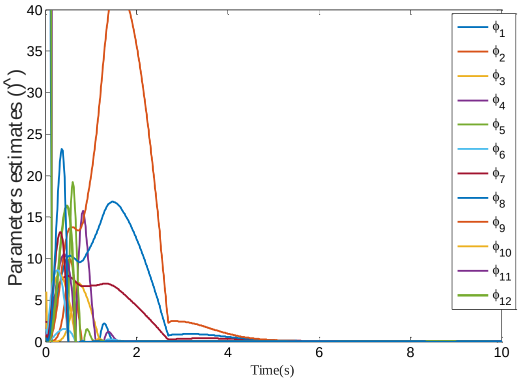


شکل ۳: خطای ردیابی در سطح دینامیک

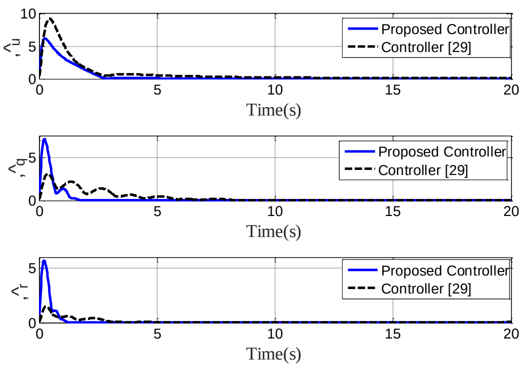


شکل ۴: خطای ردیابی در سطح سینماتیک

شکل ۵ همگرایی تخمین پارامترهای نامعین و شکل ۶ همگرایی تخمین کران بالای اغتشاش به مقداری ثابت را نمایش می‌دهد. لازم به ذکر است که با توجه به عدم برقراری شرط تحریک پایا و غنی نبودن ورودی‌های کنترلی ناشی از فیدبک، عدم همگرایی تخمین پارامترها به مقادیر واقعیشان، امری دور از انتظار نیست.

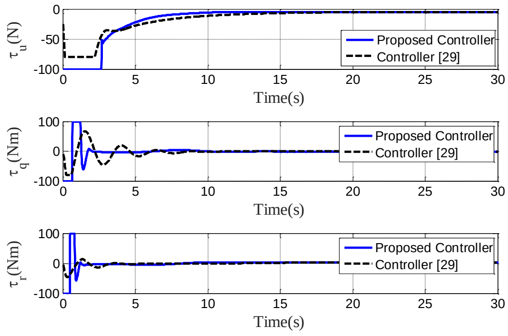


شکل ۵: تخمین پارامترهای نامعین در حالت (۲)



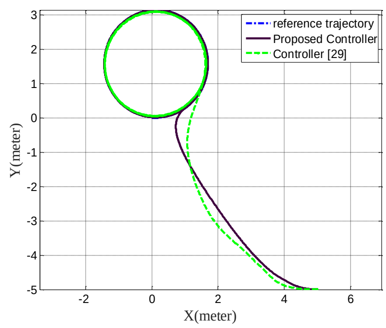
شکل ۶: تخمین کران بالای اغتشاش در حالت (۲)

در شکل ۷، ورودی‌های کنترلی نمایش داده شده است که در آن تأثیرگذاری تابع اشباع پیشنهاد شده در این مقاله در حذف نوسانات فرکانس بالا و هموارسازی سیگنال‌های کنترلی به خوبی مشهود است.

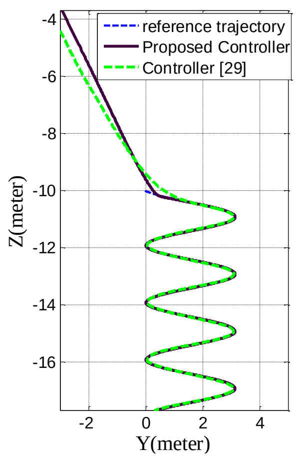


شکل ۷: ورودی‌های کنترلی برای هر دو الگوریتم

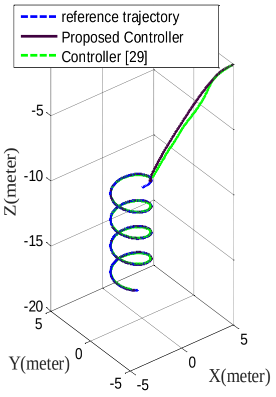
شکل‌های ۸ تا ۱۰ مسیر حرکت زیردریایی را در محیط، در ابعاد مختلف نمایش می‌دهند. با توجه به این شکل‌ها می‌توان دریافت که با وجود اینکه زیردریایی در فاصله دور و پیکربندی متفاوتی نسبت به شناور هدف قرار داشته است، با افزودن عبارت کنترل کننده زمان محدود با دقت و سرعت مطلوب‌تری آن را دنبال می‌نماید. این نشان می‌دهد که هر سه حرکت گردش، خمش و انتقال طولی شناور توسط گشتاورها، به خوبی کنترل می‌شود.



شکل ۸: حرکت دو بعدی شناور در صفحه *x-y*



شکل ۹: حرکت دو بعدی شناوردر صفحه *y-z*



شکل ۱۰: حرکت سه بعدی شناور

از مقایسه نتایج شبیه‌سازی در مرجع [۲۹] و الگوریتم کنترلی پیشنهاد شده، می‌توان دریافت که در روش سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم در مقایسه با روش پیشنهاد شده در مقاله حاضر، خطاهای ردیابی در مدت زمان بیشتری به مبدأ همگرا شده اند. این در حالی است که دامنه ورودی‌های کنترلی در مقایسه با روش کنترل زمان-محدود، در محدوده کمتری قرار گرفته و این امر از آسیب و اشباع عملگرها جلوگیری خواهد کرد. همچنین، مسیر حرکت شناور در محیط نشان می‌دهد که با اضافه شدن کنترل زمان محدود، عملکرد کنترل زمان-محدود در افزایش دقت و سرعت ردیابی سیستم به‌وضوح قابل درک است.

تذکر ۸: با مقایسه نتایج شبیه‌سازی کنترل‌کننده پیشنهاد شده با کارهای گذشته می‌توان به عملکرد سریع و دقیق کنترل زمان محدود رسید. شبیه-سازی انجام شده در مقایسه با مرجع [۱۹] در ردیابی عملکرد سریع‌تری دارد.

۷- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله، با استفاده از یک مدل مطالعاتی پنج درجه آزادی و استفاده از متغیرهای موجود در این مدل یک کنترل‌کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم زمان-محدود برای یک زیردریایی تحریک ناقص خودگردان طراحی شده است. مسئله کنترل ردیابی هدف یک زیردریایی خودگردان تحریک ناقص در حضور نامعینی‌های پارامتری و غیرپارامتری نظیر پارامترهای نامعلوم، دینامیک‌های مدل نشده، امواج و جریان‌های اقیانوسی در فضای سه بعدی با تبدیل خطاهای موقعیت و سمت گیری به فاصله و زاویه نسبی حل گردید. با تئوری پایداری لیاپانوف نشان داده شده که سیستم کنترل حلقه بسته پایدار است و تحت روش کنترل زمان-محدود خطاهای موقعیت و سرعت با مقاومت در برابر نامعینی‌ها در زمان محدودی به ناحیه کوچکی اطراف صفر همگرا شده-اند. به منظور به روز رسانی تخمین کران بالای نامعینی‌ها و کنترل مقاوم جهت جبران کران بالای جملات دارای اغتشاشات خارجی پیشنهاد شده است. در نهایت، با توجه به شبیه‌سازی‌ها و مطالعات مقایسه‌ای عملکرد

مطلوب کنترل‌کننده پیشنهادی نشان داده شد. با مروری بر نتایج حاصل از شبیه‌سازی با اعمال کنترل‌کننده زمان محدود، پیشنهاداتی برای تحقیقات در زمینه کنترل و هدایت زیردریایی‌ها در آینده مطرح می-گردد:

- با توجه به مزیت‌های به کارگیری کنترل‌کننده زمان‌محدود می‌توان با ترکیب روش پیشنهادی طرح حاضر با تکنیک عملکرد از پیش‌تعیین شده در مراجع [۳۸]-[۴۰]، به بهبود پاسخ‌گذرای سیستم دست یافت.
- در این مقاله، ردیابی مسیر تنها برای یک زیردریایی خودگردان مطرح شده است. تعمیم روش پیشنهادی به کنترل هماهنگ چندین شناور همکار به گونه‌ای که عدم برخورد بین آن‌ها تضمین شود، موضوع تحقیقات آینده خواهد بود.
- می‌توان با اضافه کردن رؤیتگر اغتشاش، تأثیرات تمام اغتشاشات خارجی را حذف نمود. به علاوه، استفاده از رؤیتگر در مقایسه با کنترل مقاوم به دلیل نداشتن تابع علامت، نوسانات سیستم را حذف می‌نماید. همچنین، نیاز به تابع اشباع و در نظر گرفتن ضخامت لایه مرزی که باعث کاهش دقت ردیابی نهایی می‌شود، را نیز در بر ندارد.

مراجع

[1] Spong, M. W., Hutchinso. S, Vidyasagar. M, "Robot Modeling and Control", John Wiley and Sons, 2006.

[2] Mukherjee. K., Kar. I. N., Bhatt. R. K. P, "Region tracking based control of an autonomous underwater vehicle with input delay", Ocean Engineering, vol. 99, pp. 107-114, 2015.

[3] Xing. W., Zhao. Y., Karimi. H. R. "Convergence Analysis on Multi-AUV Systems with Leader-Follower Architecture", IEEE Access, vol. 5, pp. 853-868, 2017.

[4] Li, J., Du, J., "Robust adaptive formation control of underactuated autonomous underwater vehicles under input saturation", Chinese Control and Decision Conference (CCDC), Shenyang, China, IEEE, pp. 5798-5803, 2018.

[5] Park. B. S., "Adaptive formation control of underactuated autonomous underwater vehicles", Ocean Engineering, vol. 96, pp. 1-7, 2015.

[6] Yan. Z., Yu. H., Zhang. W., Li. B., Zhou. J., "Globally finite-time stable tracking control of underactuated UUVs", Ocean Engineering, vol. 107, pp. 132-146, 2015.

[7] Wang, J., Wang, C., Wei, Y., Zhang, C., "Command filter based adaptive neural trajectory tracking control of an underactuated underwater vehicle in three-dimensional space", Ocean Engineering, vol. 180, pp. 175-186, 2019.

[8] Sun. B., Zhu. D., Yang. S. X., "A bioinspired filtered backstepping tracking control of 7000-m manned submarine vehicle", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 61, no. 7, pp. 3682-3693, 2014.

[9] Harun N., Zain. Z. Md., "A Backstepping based PID controller for stabilizing an underactuated X4-AUV", ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, vol. 10, no. 21, pp. 9819-9824, 2015.

[10] Qi, X., "Adaptive coordinated tracking control of multiple autonomous underwater vehicles", Ocean Engineering, vol. 91, pp. 84-90, 2014.

[11] Xiang. X., Chen. D., Yu. C., Ma L., "Coordinated 3D Path Following for Autonomous Underwater Vehicles via Classic PID Controller", IFAC Proceedings Volumes, vol. 46, no. 20, pp. 327-332, 2013.

[12] Farhan. M., Bhatti. A. I., Kamal. W. A., Yousafzai. I. K., "Sliding Mode Based MIMO Control of Underwater Vehicle", 11th Asian Control Conference (ASCC), Gold Coast, pp. 2899-2904, 2017.

[13] Suarez. A. E. Z., et. al, "Depth control of an underwater vehicle using robust PD controller: real-time experiments", IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicle Workshop (AUV), Portugal, pp. 1-6, 2018.

[14] Chen, Y., Yan, Y., Wang, K., Liu, S., "An adaptive fuzzy sliding mode controller for the depth control of an underactuated underwater vehicle, International Journal of Advanced Robotic Systems, DOI: 10.1177/1729881419840213, 2019.

[15] Li, J., Du, J., "Robust adaptive formation control of underactuated autonomous underwater vehicles under input saturation", Chinese Control and Decision Conference (CCDC), Shenyang, pp. 5798-5803, 2018.

[16] Wang. C., Zhang. F., Cheng. C., He. Y, "Robust AUV Localization Based on Switchable Constraints", OCEANS-MTS/IEEE Kobe Techno-Oceans (OTO), Kobe, pp. 1-5, 2018.

[17] Li. S., Liu. L., Liu. M., Zhang. S., Yang. Y., Wang. X, "Robust Trajectory Tracking Control for AUV System Based on Fractional-Order PD Controller", OCEANS MTS/IEEE Charleston, Charleston, pp. 1-6, 2018.

[18] Kamal. O, "Robust Heading Stabilization and Control for a class of Autonomous Underwater Vehicles using Nonlinear State Estimators", 16th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology (IBCAST), Pakistan, pp. 830-836, 2019.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.10.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.33]

[۱۹] فقیه. س، شجاعی. خ، " کنترل فیدبک حالت جزئی برای ردیابی مسیر شناور زیرسطح خودگردان تحریک ناقص با استفاده از کنترل سطح دینامیکی تطبیقی- عصبی"، مجله کنترل، جلد ۱۱، شماره ۲، صفحات ۴۳-۵۴، ۱۳۹۶.

[20] Wang. J., Wang. C., Wei. Y., Zhang. C, "Command filter based adaptive neural trajectory tracking control of an underactuated underwater vehicle in three-dimensional space", Ocean Engineering, vol. 180, pp. 175-186, 2019.

[21] Guerrero, J., Torres, J., Creuze, V., Chemori, A., "Trajectory tracking for autonomous underwater vehicle: An adaptive approach", Ocean Engineering, vol. 172, pp. 511-522, 2019.

[22] Wang. H., Wang. D., Peng. Z., Yan, L., Diao. L, "Robust adaptive dynamic surface control for synchronized path following of multiple underactuated autonomous underwater vehicles", Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference, Nanjing, pp. 1949-1954, 2014.

[23] Han, S. I., Ha, H., Lee, J. M., 2016 "Fuzzy finite-time dynamic surface control for nonlinear large-scale systems", International Journal of Fuzzy Systems, vol. 18, pp. 570-584.

[24] Liu, H, Zhang, T. "Adaptive Neural Network Finite-Time Control for Uncertain Robotic Manipulators", Intelligent and Robotic Systems, vol. 75, pp. 363-377, 2014.

[25] Fu, C., Tian, Y., Huang, H., Zhang, L., Peng, C., "Finite-time trajectory tracking control for a 12-rotor unmanned aerial vehicle with input saturation", ISA transactions, vol. 81, pp. 52-62, 2018.

[۲۶] فاضلی. م، مختاری. م، ایمانی. ک، "طراحی کنترل کننده‌ی مد لغزشی زمان محدود به همراه تخمین تأخیر زمانی برای هلیکوپتر سه درجه آزادی"، هجدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، تهران، دانشکده مهندسی هوافضای دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۹۸.

[27] Xu. J., Wang. M., Qiao. L, "Dynamical sliding mode control for the trajectory tracking of underactuated unmanned underwater vehicles", Ocean Engineering, vol. 105, pp. 54-63, 2015.

[28] Zhou. J., Ye. D., Zhao. J., He. D, "Three-dimensional trajectory tracking for underactuated AUVs with bio-inspired velocity regulation", International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering, vol. 10, pp. 282-293, 2018.

[29] Shojaei, K., Dolatshahi. M., "Line-of-sight target tracking control of underactuated autonomous underwater vehicles", Ocean Engineering, vol. 133, pp. 244-252, 2017.

[30] SNAME, "The society of naval architects and marine engineering", Nomenclature for Treating the Motion of a submerged Body through a Fluid in Technical and research Bulletin, vol. 1, 1950.

[31] Do, Khac Duc; Pan, Jie, "Control of ships and underwater vehicles: design for underactuated and nonlinear marine systems", Springer, London, 2009.

[32] Fossen, Thor Inge "Marine control systems: guidance, navigation and control of ships, rigs and underwater vehicles", Marine Cybernetics, Trondheim, 2002.

[33] Polycarpou, M, "Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems", IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 41, no. 3, pp. 447–451, 1996.

[34] Khalil, H., Nonlinear Systems, Englewood Cliffs, Third Edition, Prentice Hall, 2002.

[35] Galicki. M, "Finite-time control of robotic manipulators", Automatica, vol. 51, no. 2, pp. 49–54, 2015.

[36] Cai. M., Xiang. Z., Guo. J., "Adaptive finite-time consensus protocols for multi-agent systems by using neural networks", IET Control Theory & Applications, vol. 10, no. 4, pp. 371-380, 2016.

[37] Zhao. D., Li. S., Gao. F., "A new terminal sliding mode control for robotic manipulators", International Journal of Control, vol. 82, no. 10, pp. 1804–1813, 2009.

[38] Elhaki. O., Shojaei. K., "Neural network-based target tracking control of underactuated autonomous underwater vehicles with a prescribed performance", Ocean Engineering, vol. 167, pp. 239-256, 2018.

[39] Bechlioulis C. P., Rovithakis G. A., "Robust Adaptive Control of Feedback Linearizable MIMO Nonlinear Systems With Prescribed Performance", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 9, pp. 2090-2099, 2008.

[40] Elhaki, O., Shojaei, K., "A robust neural network approximation-based prescribed performance output-feedback controller for autonomous underwater vehicles with actuators saturation", Engineering Applications of Artificial Intelligence, vol. 88, pp. 103382, 2020.