مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۶، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۱، صفحه ۳۹- ۲۵

کنترل تطبیقی شبکه عصبی مقاوم قند خون بیماران دیابتی نوع یک در حضور وعده‌های غذایی

زهرا کوچکی نافچی[۱]، محمدرضا یوسفی نجف آبادی[۲و۴]، خوشنام شجاعی[۳و۴]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران،
zahrakouchaki532@yahoo.com

[۲] استادیار، دانشکده مهندسی برق، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران، mr-yousefi@iaun.ac.ir

[۳] دانشیار، دانشکده مهندسی برق، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران، shojaei@pel.iaun.ac.ir

[۴] مرکز تحقیقات پردازش دیجیتال و بینایی ماشین، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

دریافت: ۱۳۹۹/۰۶/۱۲ ویرایش: ۱۳۹۹/۱۱/۲۲ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۰۲

چکیده: در این مقاله کنترل قند خون بیماران دیابتی نوع یک در حضور نامعینی و وعده‌های غذایی مورد توجه قرار گرفته است. به منظور ارائه رویکرد کنترلی کارآمد، فرض شده است که تمام دینامیک‌های توصیف‌کننده مکانیزم تنظیم قند خون بیماران دیابتی نوع یک کاملاً نامعین می‌باشند. براساس توابع تقریب‌زن عمومی شبکه عصبی شعاعی مجهز شده به الگوریتم تطبیق و همچنین استفاده از رویکرد کاهش تعداد پارامترهای آموزشی شبکه عصبی، دینامیک‌های نامعین مدل برگمن تقریب زده شده است. در ادامه براساس رویکرد کنترلی خطی‌ساز فیدبک و جبران‌ساز تطبیقی مقاوم، طراحی کنترل‌کننده خطی‌ساز فیدبک شبکه عصبی به منظور تنظیم قند خون بیماران دیابتی نوع اول در حضور وعده غذایی برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفته است. با تحلیل مبتنی بر تئوری لیاپانوف نشان داده شده است که تمام سیگنال‌های سیستم حلقه بسته کنترل قند خون به صورت کران‌دار نهایی یکنواخت ، پایدار می‌باشند و همچنین قند خون بیماران دیابتی به کرانی از مقدار مطلوب همگرا شده است. در انتها، نتایج شبیه‌سازی به منظور نشان دادن کارآمدی کنترل‌کننده طراحی شده به تصویر کشیده شده است.

کلمات کلیدی: دیابت، کنترل خطی ساز فیدبک، شبکه‌های عصبی، جبران ساز مقاوم، دیدگاه حداقل پارامترهای آموزش شبکه عصبی.

Robust Adaptive Neural Control of the Blood Glucose for Type 1 Diabetic Patients in Presence of Meals

Zahra Kouchaki Nafchi, Mohammad Reza Yousefi, Khoshnam Shojaei

Abstract: In this paper, the blood glucose control for type 1 diabetic patients in the presence of model uncertainties and uncertain meals is considered. In order to present an efficient control approach, it is assumed that the dynamics describe the mechanism of the blood glucose regulation in type 1 diabetic patients are completely unknown. Hence, based on the universal approximation property of the radial basis neural network equipped with an adaptive algorithm, as well as using the minimal learning parameter approach, unknown model dynamics are approximated. Then, based on the feedback-linearization approach and robust adaptive

نویسنده عهده دار مکاتبات: محمدرضا یوسفی نجف آبادی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

compensation scheme, an appropriate control method is designed to regulate blood glucose in type 1 diabetic patients in the presence of a meal. By a Lyapunov based analysis, it is shown that the closed-loop system of blood glucose control is uniformly ultimately bounded and that the blood glucose of diabetic patients converges to a desired level. Finally, simulation results are shown to demonstrate the efficiency of the designed controller.

Keywords: Diabetes, Feedback-linearization control, Neural network, Robust compensator, Minimal learning parameter approach.

۱- مقدمه

بیماری دیابت یکی از شایع‌ترین بیماری‌های غدد در جهان می‌باشد که کنترل آن نیازمند تنظیم سطح غلظت گلوکز خون[1] است [۱]. چنانچه بدن فرد نتواند سطح قند خون را در محدوده مجاز (۱۲۰-۷۰ میلی‌گرم در دسی‌لیتر) نگه دارد، این فرد به عنوان بیمار دیابتی شناخته می‌شود. در بیماری دیابت توانایی بدن در استفاده و سوخت و ساز کامل گلوکز کاهش یافته است و در نهایت سطح گلوکز خون افزایش می‌یابد که این افزایش می‌تواند باعث ایجاد عوارضی برای اعضای مختلف بدن مانند چشم، اعصاب و کلیه شود [۲]. این بیماری به دو نوع بیماری دیابت نوع یک[2] و دیابت دو[3] تقسیم‌بندی می‌شود. در اثر تخریب سلول‌های بتا میزان ترشح هورمون انسولین (هورمون تنظیم‌کننده غلظت قند خون در بدن افراد سالم) کاهش یافته و انسولین موجود نمی‌تواند سطح قند خون را کنترل کند، به این نوع دیابت، دیابت نوع یک گفته می‌شود [۲]. دیابت نوع دو زمانی رخ می‌دهد که لوزالمعده قادر به ترشح انسولین می‌باشد، ولی انسولین ترشح شده قادر به جذب گلوکز توسط سلول‌ها نمی‌باشد. در واقع، گیرنده‌های سلول‌های بدن بیمار نسبت به انسولین ترشح شده از خود مقاومت نشان می‌دهند و اجازه ورود انسولین به سلول‌ها را نمی‌دهند[۲]. در بیماران دیابتی نوع یک از طریق تزریق انسولین به صورت تناوبی می‌توان سطح قند خون را در محدوده مجاز تنظیم نمود، این تزریق به وسیله سرنگ و یا پمپ تزریق توسط فرد بیمار یا پرسنل پزشکی انجام می‌شود. مشکل این روش، نیاز آن به دخالت مستقیم انسان است [۳]. در رویکردهای مبتنی بر کنترل‌کننده نیازی به دخالت بیمار نیست و با استفاده از پمپ تزریق، به صورت خودکار تنظیم قند خون بیماران دیابتی در محدوده مطلوب صورت می‌گیرد. از این رو، طراحی کنترل‌کننده مناسب به منظور تنظیم قند خون بیماران دیابتی نوع یک امری مهم است. کنترل قند خون براساس تنظیم انسولین تزریقی به صورت خودکار یکی از چالش برانگیزترین مسائل در مهندسی کنترل می‌باشد، چرا که بدن بیماران دیابتی دارای ساختارهای دینامیکی بسیار متفاوتی هستند (نامعینی‌های ساختاری[4] و بی‌ساختار[5]). علاوه براین، ویژگی‌های فیزیولوژیکی بدن هر فرد می‌تواند با تغییر سن، شرایط محیطی و عوامل دیگر دستخوش تغییر شود. مدل‌های دینامیکی متنوعی به منظور کنترل قند خون بیماران دیابتی نوع یک مانند مدل گلوکز-انسولین سورنسون، مدل گلوکز- انسولین دالامن، مدل حداقل برگمن [۴] و غیره پیشنهاد شده است. مدل حداقل برگمن به دلیل سادگی و انطباق بیشتر با رفتار فیزیولوژیکی بدن بیماران دیابتی مورد توجه محققان در حوزه‌های مهندسی پزشکی و کنترل قرار گرفته است. تاکنون رویکردهای کنترلی متنوعی براساس این مدل در راستای تنظیم خودکار قند خون بیماران دیابتی نوع یک پیشنهاد شده است که در ادامه به بررسی مختصر برخی از دستاوردهای پژوهشی در این زمینه پرداخته شده است. در [۵]، طراحی کنترل‌کننده مقاوم مدلغزشی انتگرالی[6] برای تنظیم قند خون بیماران دیابتی نوع یک صورت گرفته است. رویکرد کنترل مقاوم، به خوبی براثرات نامطلوب نامعینی‌ها غلبه می‌کند، مشکل این روش در نظر گرفتن بدترین حالت نامعینی سیستم کنترلی می‌باشد. از این رو، سیگنال کنترل مقاوم طراحی شده به شدت ناهموار بوده و در عمل ممکن است به پمپ تزریق آسیب برساند. در [۶]، طراحی کنترل‌کننده مدلغزشی براساس دیدگاه مدل داخلی بیمار[7] ارائه شده است. در این مقاله نیز مانند مقاله [۵] ساختار دینامیکی توصیف‌کننده سیستم گلوکز-انسولین مورد بررسی، مدل خطی برگمن در نظرگرفته شده است. برخلاف [۵]، سیستم مورد بررسی از درجه دو و دارای تأخیر زمانی می‌باشد. ساختار دینامیکی بررسی شده در [۵] و [۶] برای کاربردهای واقعی قابل اتکا نبوده، به دلیل آنکه رفتار مدل گلوکز- انسولین در واقعیت دارای ویژگی‌های کاملاً غیرخطی در حضور انواع نامعینی‌ها می‌باشد. در [۷]، طراحی کنترل‌کننده مقاوم براساس

[1] Blood Glucose Concentration Level
[2] Type 1 Diabetes Mellitus (T1DM)
[3] Type 2 Diabetes Mellitus (T1DM)
[4] Structured uncertainties
[5] Unstructured uncertainties
[6] Integral sliding mode
[7] Internal model

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

مشاهده‌گر حالت[1] برای کنترل قند خون بیماران دیابتی نوع یک به کار گرفته شده است. مدل ارائه شده در این مقاله یک مدل غیرخطی مرتبه سه می‌باشد که با مدل غیرخطی برگمن همخوانی دارد. در این مقاله به دلیل عدم قابلیت دسترسی مستقیم به حالات سیستم، طراحی مشاهده‌گرحالت به منظور تخمین حالات غیرقابل اندازه‌گیری صورت گرفته است. به دلیل عدم برقراری اصل جداپذیری[2] در سیستم‌های غیرخطی، طراحی کنترل‌کننده و مشاهده‌گر حالت بصورت همزمان توسط تئوری لیاپانوف مورد ارزیابی قرار گرفته است. در [۸]، کنترل غیرخطی مدلغزشی برای کنترل قند خون بیماران دیابتی نوع یک براساس تزریق انسولین مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله وعده‌های غذایی به عنوان اغتشاش معین در نظر گرفته شده‌اند، علاوه براین، طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر مدل[3] می‌باشد. براساس دیدگاه فراپیچشی کنترل مدلغزشی[4] همگرایی سریع‌تر و پایداری بهتر سیستم کنترلی نتیجه شده است. به دلیل استفاده از دیدگاه فراپیچشی مدلغزشی، مشکل نوسانات بالا در سیگنال کنترل برطرف شده است. در [۹]، طراحی کنترل‌کننده فازی برای تنظیم قند خون بیماران دیابتی نوع یک مبتنی بر مدل غیرخطی برگمن صورت گرفته است. کنترل‌کننده‌های فازی دارای تحلیل پایداری به صورت قاعده‌مند نمی‌باشند، از سوی دیگر این کنترل‌کننده‌ها زمان حقیقی نیز نبوده‌اند. در مجامع کنترلی برای برطرف شدن این مشکلات، کنترل‌کننده‌های فازی را با سیستم‌های کنترل تطبیقی ترکیب می‌کنند. در [۱۰]، طراحی کنترل‌کننده فازی تطبیقی به منظور تنظیم گلوکز خون بیمار دیابتی نوع یک ارائه شده است. دینامیک‌های مورد بررسی در این مقاله مدل غیرخطی برگمن درحضور نامعینی ساختاری غیرخطی پارامتری می‌باشد که در مقایسه با سایر مقالات مرور شده حالت کلی‌تری دارد. به منظور بهبود دقت تقریب زنی عمومی در تقریب توابع نامعین سیستم، از سیستم های فازی نوع دو[5] به جای سیستم‌های فازی نوع یک در ترکیب با قوانین تطبیق استفاده شده است. در [۱۱]، طراحی کنترل‌کننده تطبیقی مدل مرجع[6] برای تنظیم قند خون بیمار دیابتی نوع یک ارائه شده است. مدل مورد بررسی در این مقاله، یک سیستم خطی درجه دو و دارای نامعینی می‌باشد. با استفاده از تعیین بردار رگرسور[7] تطبیقی و همچنین الگوریتم حداقل مربعات خطای وزن‌دار[8]، پارامترهای نامعین سیستم تخمین زده شده‌اند. بر این اساس طراحی کنترل‌کننده تطبیقی بدون اطلاع از پارامترهای سیستم صورت گرفته است. به دلیل استفاده از مدل خطی در توصیف مسئله تنظیم قند خون بیمار دیابتی، دیدگاه ارائه شده در این مقاله چندان کاربردی نمی‌باشد.

به دلیل ساختار فیدبک اکید[9] در دینامیک‌های مدل غیرخطی برگمن، در سالیان اخیر استفاده از رویکرد کنترل غیرخطی پسگام بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است [۱۵-۱۲]. در [۱۲]، طراحی کنترل‌کننده پسگام برای تنظیم قند خون بیماران دیابتی نوع یک ارائه شده است. در این مقاله مدل برگمن فاقد هرگونه نامعینی در نظر گرفته شده است و حول نقطه تعادل خطی‌سازی شده است. این دیدگاه کنترلی کارایی چندانی در واقعیت ندارد چون مدل برگمن برای هر بیمار دیابتی بسته به مشخصات فرد بیمار دارای نامعینی‌های متنوعی است. در این مقاله طراحی کنترل کننده براساس فیدبک حالت بوده است. در [۱۳]، طراحی کنترل‌کننده مدلغزشی پسگام در حضور اغتشاش خارجی (وعده غذایی بیمار) و اثرات پمپ تزریق ارائه شده است. به دلیل استفاده از روش کنترلی مدلغزشی در ترکیب با پسگام، دیدگاه ارائه شده در این مقاله داری عملکرد مقاوم[10] می‌باشد. علاوه بر آن، همگرایی زمان محدود[11] سیستم کنترلی ارائه شده اثبات شده است، که سبب افزایش دقت (کاهش خطای ردیابی) و سرعت تنظیم قند خون بیمار دیابتی می‌شود. در این مقاله مدل برگمن فاقد نامعینی‌های ساختاری است. در [۱۴]، طراحی کنترل‌کننده پسگام با استفاده از روش کنترلی غیرخطی مدلغزشی ارائه شده است. در این مقاله از سطوح خطای مرتبه کسری[12] در هر گام از طراحی به منظور دستیابی به عملکرد کنترلی بهتر استفاده شده است. وعده‌های غذایی مصرفی بیمار به عنوان اغتشاش خارجی که دارای اثرات نامطلوب می‌باشند در نظر گرفته شده‌اند. برای کاهش اثرات نامطلوب نوسانات در کنترل‌کننده مدلغزشی، از توابع اشباع یا تانژانت هایپربولیک به جای تابع علامت در سیگنال کنترل استفاده شده است. در انتها عملکرد کنترل‌کننده ارائه شده با کنترل‌کننده پسگام مقایسه شده که نشان از تنظیم بهتر قند خون در مقاله [۱۳] در مقایسه با مقاله [۱۴] دارد. در [۱۵]، طراحی کنترل‌کننده فازی تطبیقی نوع دو برای کنترل گلوکز خون بیماران دیابتی صورت گرفته است. در این مقاله پارامترهای نامعین سیستم فازی (قوانین اگر-آنگاه فازی) براساس قانون‌های تطبیق به صورت برخط تخمین زده شده‌اند. دیدگاه کنترل غیرخطی در این مقاله پسگام فرض شده است. مدل برگمن در این طراحی در حضور پمپ تزریق ارائه شده است. به منظور بهبود سرعت و افزایش

[1] State Observer
[2] Separation Principle
[3] Model Based Control
[4] Super Twisting Sliding Mode Control
[5] Type 2 Fuzzy Logic System
[6] Model Reference Adaptive Control
[7] Regressor
[8] Weighted Least Square Error
[9] Strict-Feedback
[10] Robust Performance
[11] Finite-Time
[12] Fractional-Order Error Surface

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

دقت همگرایی از روش سطوح خطای مرتبه کسری استفاده شده که این مسئله سبب پیچیده‌تر شدن طراحی کنترل‌کننده و بررسی پایداری آن شده است. دیدگاه کنترل غیرخطی پسگام دارای ویژگی‌های بسیار جذاب مانند همگرایی مجانبی، پایداری سراسری و همچنین عملکرد حالت گذرای مطلوب است [۱۶]. این دیدگاه به دلیل مشتقات متوالی از کنترل‌کننده‌های مجازی[1] در طراحی کنترل‌کننده پسگام با مشکل رشد انفجاری[2] مواجه است. برخلاف دستاوردهای پژوهشی بسیار جذاب در طراحی کنترل‌کننده پسگام در مقالات [۱۵-۱۲] برای کنترل قند خون بیماران دیابتی نوع یک، رویکرد پسگام چندان مفید نبوده است. در استفاده از سیستم‌های فازی یا شبکه‌های عصبی تطبیقی، نه تنها تعیین تعداد نرون‌های لایه‌های مخفی یا قوانین اگر-آنگاه فازی برای تقریب توابع نامعین بسیار پیچیده و مشکل است بلکه افزایش تعداد نرون‌های لایه‌های مخفی یا قوانین اگر-آنگاه فازی به منظور بهبود دقت تقریب توابع نامعین سبب افزایش پیچیدگی کنترل‌کننده پیشنهادی در مقاله [۱۵] می‌شود.

با توجه به مباحث ارائه شده قبل، در این مقاله برای اولین بار طراحی کنترل‌کننده تطبیقی شبکه عصبی براساس کنترل غیرخطی خطی‌سازفیدبک مبتنی بر رویکرد کاهش تعداد پارامترهای آموزشی شبکه عصبی ارائه شده است. به دلیل استفاده از کنترل غیرخطی خطی‌سازفیدبک مشکل رشد انفجاری در رویکرد پسگام حل شده است. علاوه براین، به دلیل استفاده از رویکرد کاهش تعداد پارامترهای آموزشی شبکه عصبی، قوانین تطبیق اسکالر بدون اطلاع از توابع تحریک شبکه عصبی به منظور تقریب توابع نامعین براساس دیدگاه حداقل پارامترهای آموزش شبکه عصبی [۱۹-۱۷] ارائه شده است. در انتها براساس رویکرد لیاپانوفی پایداری سیستم کنترلی حلقه بسته به صورت کران‌دار نهایی یکنواخت به اثبات رسیده است. نوآوری‌های طرح کنترلی پیشنهادی شامل این موارد است:

الف) به دلیل ساختار فیدبک اکید مدل برگمن در اغلب مقالات از رویکرد کنترلی پسگام استفاده شده که منجر به مشکل رشد انفجاری و پیچیدگی کنترل‌کننده شده است. در این مقاله برای اولین بار با استفاده از رویکرد کنترل خطی‌ساز فیدبک به همراه مشتقات لی بستری مناسب و ساده در راستای طراحی کنترل‌کننده غیرخطی ارائه شده است.

ب) در اغلب رویکردهای کنترلی موجود فرض شده است که دینامیک‌های مدل حداقل برگمن معین می‌باشند که فرضی بسیار محدودکننده است. از این رو، برای اولین بار با استفاده از رویکرد شبکه‌های عصبی تطبیقی به همراه دیدگاه حداقل پارامترهای آموزشی شبکه عصبی، جبران‌سازی اثرات نامعینی‌های مدل حداقل برگمن صورت گرفته است به گونه‌ای که به جای تقریب بردار وزن شبکه عصبی شعاعی فقط یک پارامتر اسکالر بدون اطلاع از بردار رگرسور شبکه عصبی به‌روزرسانی شده است.

ج) با استفاده از جبران‌ساز تطبیقی مقاوم اثرات وعده‌های غذایی و خطای مدل‌سازی به عنوان نامعینی‌های بی‌ساختار بر عملکرد کنترلی کاهش یافته است.

شیوه ارائه مطالب در این مقاله به این شرح است: در بخش دوم مدل برگمن معرفی شده است. در بخش سوم طراحی کنترل‌کننده تطبیقی شبکه عصبی به منظور کنترل قند خون و اثبات پایداری آن به صورت کامل تشریح گردیده است. شبیه‌سازی و جمع‌بندی مقاله به ترتیب در بخش‌های چهارم و پنجم ارائه شده است. در پیوست لم‌ها و قضایای مورد استفاده در مقاله ارائه شده است.

نمادهای به کارگرفته شده در این مقاله به این شرح می‌باشند: $\mathcal{R}$ نشان‌دهنده مجموعه اعداد حقیقی غیربرداری، $\mathcal{R}^n$ بیانگر مجموعه بردارهای حقیقی با nعضو می‌باشد. عملگر $|x|$ نشان‌دهنده اندازه عدد حقیقی x و $\|\boldsymbol{x}\|$ نشان‌دهنده نرم اقلیدسی بردار $\boldsymbol{x}$ است. عملگر $\lambda_{\min}(\cdot)$ ($\lambda_{\max}(\cdot)$) نشان‌دهنده کوچکترین مقدار ویژه (بزرگترین مقدار ویژه) برای ماتریس حقیقی بوده است. نماد ترانهاده برای هر بردار حقیقی به صورت T نمایش داده شده است.

۲- مدل برگمن

اولین فعالیت‌های جدی برای یافتن مدل سیستم گلوکز-انسولین به تحقیقات برگمن و کوبِلی در اوایل دهه ۱۹۸۰ میلادی باز می‌گردد که موجب ارائه مدلی ریاضی به نام مدل برگمن شد. این مدل به مدل مینیمال شهرت دارد [۴]. بخشی از این مدل نشان‌دهنده میزان قندخون بیمار دیابتی و بخش دیگر مدل نشان‌دهنده میزان انسولین تزریقی به بیمار بوده است.

در مدل‌های خطی مطرح شده در مقالات از بدن بیمار دیابتی بسیاری از پارامترهای تأثیرگذار بر روی بیمار دیابتی به دلیل خطی‌سازی در نظر گرفته نشده است. ازسوی دیگر، برخی از مدل‌های غیرخطی نظیر سورنسن و دالامن به دلیل پیچیدگی زیاد در طراحی کنترل‌کننده‌ها چندان کاربردی نمی‌باشند. مدل مینیمال برگمن، مدل ریاضی غیرخطی است که به اندازه مدل‌های خطی بیمار دیابتی ساده نمی‌باشد و همچنین بسیاری از پارامترهای تأثیرگذار در آن حذف نشده‌اند. از سوی دیگر مدل غیرخطی برگمن در مقایسه با مدل‌های مطرح شده غیرخطی دارای پیچیدگی بالایی نمی‌باشد. معادلات فضای حالت مدل برگمن به صورت زیر ارائه شده است [۷]:

[1] Virtual Control

[2] Explosion of Complexity

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

$$\begin{cases}\dot{G}(t) = -p_1(G(t) - G_b) - G(t)X(t) + d(t),\\ \dot{X}(t) = -p_2X(t) + p_3(I(t) - I_b),\\ \dot{I}(t) = -p_4(I(t) - I_b) + u(t),\end{cases} \quad (۱)$$

در رابطه فوق، معادله دیفرانسیل اول بیانگر میزان غلظت قند خون و معادله دوم بیانگر تأثیر میزان انسولین تزریقی بر غلظت قند خون می‌باشد. به منظور بهره‌گیری از مدل دینامیکی مینیمال برگمن، تعیین ورودی‌های آن امری ضروری است.

$d(t)$ نرخ جذب قند خون از معده بر حسب (dl/min) است، که این ورودی به عنوان اغتشاش با رابطه زیر تعریف شده است [۷]:

$$d(t) = a\exp(-bt), \quad (۲)$$

در رابطه فوق پارامترهای a و b دارای مقادیر مثبت و پارامتر t بیانگر زمان بر حسب دقیقه (min) است. با تعریف متغیر $X(t) = x_2(t),\ G(t) = x_1$ و $I(t) = x_3(t)$ رابطه (۱) به صورت زیر بازنویسی شده است:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = -p_1(x_1(t) - G_b) - x_1(t)x_2(t) + d(t),\\ \dot{x}_2(t) = -p_2x_2(t) + p_3(x_3(t) - I_b),\\ \dot{x}_3(t) = -p_4(x_3(t) - I_b) + u(t),\end{cases} \quad (۳)$$

ورودی دیگر سیستم، انسولین تزریقی (سیگنال $u(t)$) می‌باشد که به عنوان ورودی کنترلی وظیفه تنظیم انسولین خون بدن بیمار دیابتی که قادر به ترشح هورمون انسولین نیست را به عهده دارد. انتظار می‌رود با مقدار مناسب $u(t)$ اثر اغتشاش ناشی از وعده غذایی جبران شود و قند خون در سطح مجاز تنظیم شود [۴]. با توجه به مدل برگمن ، مقدار پارامتر G_b (قند باسال) که همان قند پایه خون است باید در محدوده مجاز (mg/dl) ۷۰ تا۱۲۰ قرار گیرد که اگر مدل برگمن در تنظیم قند خون دارای خطای ماندگار شد، بیمار در وضعیت نامطلوب هیپوگلیسمی و هایپرگلیسمی قرار نگیرد و یا اینکه نوع پایداری سیستم از نوع پایداری مرزی نباشد. پس بهترین مقدار برای غلظت مطلوب قند خون (mg/dl) ۹۰ است. مقدار پارامترهای رابطه (۳)، براساس مرجع [۷] در جدول (۱) آورده شده‌اند.

جدول (۱): پارامترهای مدل برگمن بر اساس نمونه‌برداری از بیمار [۷].

پارامتر	مقدار عددی	واحد	تعریف
x_1	-	mg/dl	مقدار قند خون
x_2	-	$\mu U/ml$	میزان اثر گذاری انسولین بر قند بدن
x_3	-	$\mu U/ml$	مقدار انسولین خون
p_1	0	$1/min$	نرخ جذب قند مستقل از اثر انسولین
p_2	0.15	$1/min$	نرخ کاهش انسولین تزریقی از محفظه انسولین
p_3	0.000028	$mL/\mu U.min^2$	نرخ ترشح انسولین از محفظه انسولین
p_4	0.2	$1/ml$	نرخ تزریق انسولین
G_b	90	mg/dl	سطح طبیعی و پایه قند خون
I_b	15	$\mu U/ml$	غلظت طبیعی و پایه انسولین پلاسمای خون
G_0	300	mg/dl	مقدار اولیه قند خون
I_0	20	$\mu U/ml$	مقدار اولیه غلظت انسولین موجود در پلاسمای خون
$u(t)$	$0 \le u(t) \le 30$	$\mu U/ml/min$	ورودی کنترلی (انسولین تزریقی)

۳- نتایج اصلی

۳-۱- طراحی و تحلیل پایداری کنترل‌کننده

به منظور طراحی و تحلیل ساده‌تر کنترل‌کننده، متغیرهای حالت مدل حداقل برگمن در قالب فضای حالت به صورت بردار $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ در نظر گرفته شده‌اند. فضای حالت سیستم مطابق با معادلات (۳)، به صورت زیر بازنویسی شده است:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u + \boldsymbol{w}(t),\\ y = h(\boldsymbol{x}),\end{cases} \quad (۴)$$

که $h(\boldsymbol{x}) = x_1$ خروجی سیستم، $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = [0,0,1]^T$ بردار بهره کنترلی نامعین، $\boldsymbol{w}(t) = [d(t), 0, 0]^T$ بردار اغتشاش خارجی نامعین و

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [-p_1x_1 - x_1x_2 + p_1G_b,\quad -p_2x_2 + p_3x_3 - p_3I_b,\quad -p_4x_3 + p_4I_b]^T$$

بردار توابع غیرخطی نامعین سیستم است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

فرض ۱: وعده غذایی در رابطه (۴) از طریق معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی $\dot{d}(t) = -b\, d(t)$ با شرط $d(t_0) = a$ مدل‌سازی شده است که b و a پارامترهای مثبت نامعین هستند.

تبصره ۱: واضح است که مدل وعده غذایی به عنوان اغتشاش($\boldsymbol{w}(t)$)، مشتق زمانی مرتبه اول($\dot{\boldsymbol{w}}(t)$) و مشتق زمانی مرتبه دوم ($\ddot{\boldsymbol{w}}(t)$) کران‌دار و نامعین می‌باشند.

فرض ۲: مقدار قند خون(x_1)، تغییرات قند خون ($\dot{x}_1$) و شتاب تغییرات آن ($\ddot{x}_1$) با استفاده از حسگرهای مناسب به صورت زمان حقیقی قابل اندازه‌گیری هستند.

هدف کنترلی: طراحی کنترل‌کننده تطبیقی شبکه عصبی مقاوم برای بیماران دیابتی نوع یک توصیف شده توسط مدل کاملاً نامعین برگمن (۴) در حضور وعده غذایی می‌باشد به گونه‌ای که:

الف) قند خون بیمار در محدوده‌ای از مقدار مطلوب تنظیم شود.
ب) تمام سیگنال‌های حلقه بسته کران‌دار باشند.

۳-۲- طراحی کنترل‌کننده خطی‌ساز فیدبک تطبیقی شبکه عصبی

به منظور طراحی کنترل‌کننده براساس روش خطی‌ساز فیدبک، مشتق لی (تعریف یک در پیوست (الف)) از خروجی سیستم تا زمانی که ورودی کنترلی ظاهر شود ادامه می‌یابد. بر مبنای مشتق لی، مشتق مرتبه rاُم خروجی سیستم کاملاً نامعین (۴) با وجود اغتشاش خارجی به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{cases} y^{(r)} = L_f^{(r)} h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f^{(r-1)} h(\boldsymbol{x}) u + L_w h(\boldsymbol{x}), & r = 1, \\ y^{(r)} = L_f^{(r)} h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f^{(r-1)} h(\boldsymbol{x}) u + L_w^{(r)} h(\boldsymbol{x}) + \frac{d^{(r-1)}}{dt^{(r-1)}} L_w h(\boldsymbol{x}), & r > 1. \end{cases} \quad (۵)$$

تبصره ۲: در مرجع [۲۰]، مشتق مرتبه rاُم خروجی سیستم غیرخطی (۴) بدون در نظر گرفتن اغتشاش خارجی به صورت $y^{(r)} = L_f^{(r)} h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f^{(r-1)} h(\boldsymbol{x}) u$ بیان شده است.

مشتق مرتبه اول لی از خروجی سیستم (۴) به صورت رابطه زیر است:

$$\dot{y} = L_f h(\boldsymbol{x}) + L_g h(\boldsymbol{x}) u + L_w h(\boldsymbol{x}) \quad (۶)$$

که در رابطه (۶)، تابع $L_f h(\boldsymbol{x})$ بر اساس مشتق لی به فرم زیر بازنویسی شده است:

(۷)

$$L_f h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_1 x_1 - x_1 x_2 + p_1 G_b \\ -p_2 x_2 + p_3 x_3 - p_3 I_b \\ -p_4 x_3 + p_4 I_b \end{bmatrix}, \\ = 1(-p_1 x_1 - x_1 x_2 + p_1 G_b).$$

علاوه براین، $L_g h(\boldsymbol{x})$ براساس رابطه زیر:

$$L_g h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (۸)$$

و $L_w h(\boldsymbol{x})$ با ساختار:

$$L_w h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = d(t), \quad (۹)$$

به دست آمده است. به دلیل صفر شدن $L_g h(\boldsymbol{x})$ در رابطه (۶)، مشتق مرتبه دوم لی از خروجی سیستم (۴) با رابطه زیر حاصل شده است:

$$\ddot{y} = L_f^2 h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f h(\boldsymbol{x}) u + L_w^2 h(\boldsymbol{x}) + \frac{d}{dt}(L_w h(\boldsymbol{x})) \quad (۱۰)$$

که $L_f^2 h(\boldsymbol{x})$ به صورت زیر محاسبه شده است:

(۱۱)

$$L_f^2 h(x) = L_f\left(L_f h(\boldsymbol{x})\right), \\ = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_f\, h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial L_f\, h(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial L_f\, h(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p_1 x_1 - x_1 x_2 + p_1 G_b \\ -p_2 x_2 + p_3 x_3 - p_3 I_b \\ -p_4 x_3 + p_4 I_b \end{bmatrix}, \\ = p_1^2 x_1 + 2 p_1 x_1 x_2 - p_1^2 G_b + x_1 x_2^2 - p_1\, G_b x_2 + p_2 x_1 x_2 - p_3 x_1 x_3 + p_3 I_b x_1 \quad (۱۱)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

و $L_g L_f h(\boldsymbol{x})$ به صورت رابطه:

(۱۲)

$$L_g L_f h(x) = L_g\left(L_f h(\boldsymbol{x})\right), = \begin{bmatrix}\frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 0$$

و $L_w^2 h(\boldsymbol{x})$ با بیان:

(۱۳)

$$L_w^2 h(\boldsymbol{x}) = L_w\left(L_w h(\boldsymbol{x})\right), = \begin{bmatrix}\frac{\partial L_w h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial L_w h(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial L_w h(x)}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d(t)\\0\\0\end{bmatrix} = 0$$

ارائه شده است. علاوه بر این، $\frac{d}{dt}(L_w h(\boldsymbol{x}))$ با ساختار زیر به دست آمده است:

$$\frac{d}{dt}(L_w h(\boldsymbol{x})) = \dot{d}(t). \quad (۱۴)$$

به دلیل صفر شدن $L_g L_f h(\boldsymbol{x})$ در رابطه (۱۰)، مشتق سوم لی از خروجی به صورت زیر نتیجه شده است:

$$\dddot{y} = L_f^3 h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f^2 h(\boldsymbol{x}) u + L_w^3 h(\boldsymbol{x}) + \frac{d^2}{dt^2}\left(L_w h(\boldsymbol{x})\right). \quad (۱۵)$$

(۱۵)

در رابطه فوق $L_f^3 h(x)$ به صورت:

(۱۶)

$$\begin{aligned}
L_f^3 h(\boldsymbol{x}) &= L_f\left(L_f^2 h(\boldsymbol{x})\right),\\
&= \begin{bmatrix}\frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-p_1x_1 - x_1x_2 + p_1G_b\\ -p_2x_2 + p_3x_3 - p_3I_b\\ -p_4x_3 + p_4I_b\end{bmatrix},\\
&= -p_1^3x_1 - 3p_1^2x_1x_2 + p_1^3G_b - 2p_1x_1x_2^2 + 2p_1^2G_bx_2 - p_1x_1x_2^2 - x_1x_2^3\\
&\quad + p_1x_2^2G_b + p_1p_3I_bG_b - 3p_1p_2x_1x_2 - p_2x_1x_2^2 + p_1p_2x_2G_b + p_1p_3x_1x_3\\
&\quad + p_3x_1x_2x_3 - p_1p_3x_3G_b - p_1p_3I_bx_1 - p_3I_bx_1x_2 + p_1p_3G_bI_b + 2p_1p_3x_1x_3\\
&\quad - 2p_1p_3I_bx_1 - 2p_2x_1x_2^2 + 2p_3x_3x_1x_2 - 2p_3I_bx_1x_2 - p_2^2x_1x_2 + p_2p_3x_1x_3\\
&\quad - p_2p_3I_bx_1 + p_3p_4x_1x_3 - p_4I_bp_3x_1 + p_1p_2x_2G_b - p_1p_3G_bx_3
\end{aligned}$$

و همچنین $L_g L_f^2 h(x)$ به صورت رابطه زیر محاسبه شده است:

(۱۷)

$$L_g L_f^2 h(x) = \begin{bmatrix}\frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = -x_1p_3$$

علاوه براین، $L_w^3 h(\boldsymbol{x})$ به فرم زیر:

(۱۸)

$$L_w^3 h(\boldsymbol{x}) = L_w(L_w^2 h(\boldsymbol{x})) = \begin{bmatrix}\frac{\partial L_w^2 h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial L_w^2 h(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial L_w^2 h(x)}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d(t)\\0\\0\end{bmatrix} = 0$$

و $\frac{d^2}{dt^2}(L_w h(\boldsymbol{x}))$ با ساختار زیر:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}L_w h(\boldsymbol{x})\right) = ab^2\exp(-bt) \quad (۱۹)$$

محاسبه شده است. سطح لغزش به صورت:

$$s = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e \quad (۲۰)$$

طراحی شده که $e = y - y_d$ می‌باشد و y_d مقدار مطلوب قند خون است.

تبصره ۳: لازم به ذکر است که انتخاب λ در سطح لغزش مسئله بسیار مهم و حیاتی در طراحی کنترل‌کننده بوده است، به گونه‌ای که انتخاب λ مناسب سبب همگرایی بهتر قند خون به کرانی از مقدار مطلوب می‌گردد.

با مشتق‌گیری از رابطه (۲۰)، می‌توان رابطه زیر را نتیجه گرفت:

$$\dot{s} = \dddot{y} + 2\lambda\ddot{y} + \lambda^2\dot{y}. \quad (۲۱)$$

با جایگذاری رابطه (۱۵) در (۲۱)، و همچنین اضافه و کم کردن u رابطه زیر به دست آمده است:

$$\dot{s} = L_f^3 h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f^2 h(\boldsymbol{x}) u + u - u - 2\lambda\ddot{y} + \lambda^2\dot{y} + L_w^3 h(x) + \frac{d^2}{dt^2}(L_w h(x)) \quad (۲۲)$$

به منظور ارزیابی سطح لغزش، تابع کاندید لیاپانوفی به صورت زیر:

$$V_1 = \frac{1}{2}s^2, \quad (۲۳)$$

طراحی شده است. با استفاده از رابطه (۲۲)، مشتق تابع لیاپانوفی به صورت زیر ارائه شده است:

(۲۴)

$$\dot{V}_1 = s\left(m(\boldsymbol{z}) - u + L_w^3 h(\boldsymbol{x}) + \frac{d^2}{dt^2}(L_w h(\boldsymbol{x}))\right),$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

که $m(\boldsymbol{z}) = L_f^3 h(\boldsymbol{x}) + 2\lambda\ddot{y} + \lambda^2\dot{y} + L_g L_f^2 h(x)u + u$ تابع نامعین و $\boldsymbol{z} = [x_1, x_2, x_3, u]^T$ می‌باشد.

تابع نامعین $m(\boldsymbol{z})$ را می‌توان با استفاده از خواص تقریب‌زنی عمومی شبکه عصبی شعاعی (لم ۳ در پیوست (الف)) تخمین زد:

$$m(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\theta}^{*T}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z}) + \varepsilon \tag{۲۵}$$

در رابطه (۲۵)، $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta_1^*, \ldots, \theta_p^*]^T$ بردار وزن‌های ثابت شبکه عصبی، $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z}) = [\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{z}), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_p(\boldsymbol{z})]^T$ بردار توابع پایه شبکه عصبی و ε خطای مدل‌سازی شبکه عصبی و کران‌دار به صورت $|\varepsilon| \le \varepsilon^*$ است [۲۱].

با ترکیب روابط (۲۵) و (۲۴)، رابطه زیر برقرار است:

$$\dot{V}_1 = s\left(\boldsymbol{\theta}^{*T}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z}) + \varepsilon - u + L_{\boldsymbol{w}}^3 h(\boldsymbol{x}) + \frac{d^2}{dt^2}(L_{\boldsymbol{w}} h(\boldsymbol{x}))\right). \tag{۲۶}$$

با توجه به آنکه خطای مدل‌سازی شبکه عصبی و اثرات وعده غذایی کران‌دار هستند، نامساوی زیر ارائه شده است:

$$\left|L_{\boldsymbol{w}}^3 h(\boldsymbol{x}) + \frac{d^2}{dt^2}(L_{\boldsymbol{w}} h(\boldsymbol{x})) + \varepsilon\right| \le k^*, \tag{۲۷}$$

که k^* پارامتر نامعین و مثبت می‌باشد. با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز (لم ۱ در پیوست (الف))، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} s\left(\varepsilon + L_{\boldsymbol{w}}^3 h(\boldsymbol{x}) + \frac{d^2}{dt^2}\left(L_{\boldsymbol{w}} h(\boldsymbol{x})\right)\right) &\le \\ \left|s\left(\varepsilon + L_{\boldsymbol{w}}^3 h(\boldsymbol{x}) + \frac{d^2}{dt^2}(L_{\boldsymbol{w}} h(\boldsymbol{x}))\right)\right|, \\ \le |s|k^*. \end{aligned} \tag{۲۸}$$

با جایگذاری روابط (۲۸) در (۲۶)، نامعادله دیفرانسیل زیر برقرار است:

$$\dot{V}_1 \le s\boldsymbol{\theta}^{*T}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z}) + |s|k^* - su. \tag{۲۹}$$

بخش دوم تابع کاندید لیاپانوفی به صورت رابطه (۳۰) طراحی شده است:

$$V_2 = \frac{1}{2r_1}\tilde{k}^2 + \frac{1}{2r_2}\tilde{\varpi}^2, \tag{۳۰}$$

که $\tilde{k} = k^* - \hat{k}$، $\tilde{\varpi} = \varpi^* - \hat{\varpi}$ خطاهای پارامتر تطبیق، $\tilde{\varpi} = \varpi^* - \hat{\varpi}$، $\varpi^* = p\|\boldsymbol{\theta}^*\|^2$، $p\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2$ پارامتر نامعین، r_1 و r_2 پارامترهای مثبت طراحی (بهره‌های تطبیق) می‌باشند. با مشتق‌گیری از رابطه (۳۰) و با توجه به حقیقت $\dot{\varpi}^* = 0$ (به دلیل ثابت بودن بردار وزن‌های ایده آل شبکه عصبی براساس فرض ۳ در پیوست الف)، رابطه زیر نتیجه شده است:

$$\dot{V}_2 = -\frac{1}{r_1}\tilde{k}\dot{\hat{k}} - \frac{1}{r_2}\tilde{\varpi}\dot{\hat{\varpi}}. \tag{۳۱}$$

تابع کاندید لیاپانوفی برای سیستم (۴) در حالت کلی با ساختار:

$$V = V_1 + V_2, \tag{۳۲}$$

تعریف شده است. با مشتق‌گیری از رابطه (۳۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\dot{V} \le s\boldsymbol{\theta}^{*T}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z}) + |s|k^* - su - \frac{1}{r_1}\tilde{k}\dot{\hat{k}} - \frac{1}{r_2}\tilde{\varpi}\dot{\hat{\varpi}}. \tag{۳۳}$$

براساس نامساوی یانگ و لم ۱ (لم ۲ در پیوست (الف)) رابطه (۳۴) برقرار است:

$$\begin{aligned} s\boldsymbol{\theta}^{*T}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z}) &\le \frac{1}{2n}\left(s\boldsymbol{\theta}^{*T}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z})\right)^2 + \frac{1}{2}n, \\ &\le \frac{1}{2n}s^2\varpi^* + \frac{1}{2}n, \end{aligned} \tag{۳۴}$$

که $\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{z})\|^2 \le p$، پارامتر نامعین $\varpi^* = p\|\boldsymbol{\theta}^*\|^2$ و n پارامتر مثبت طراحی می‌باشد، (لم ۴ در پیوست الف). با جایگذاری (۳۴) در (۳۳) رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{V} \le \frac{1}{2n}s^2\varpi^* + \frac{1}{2}n + |s|k^* - su - \frac{1}{r_1}\tilde{k}\dot{\hat{k}} - \frac{1}{r_2}\tilde{\varpi}\dot{\hat{\varpi}}. \tag{۳۵}$$

سیگنال کنترل با ساختار زیر طراحی شده است:

$$u = \frac{1}{2n}s\hat{\varpi} + \hat{k}sign(s) + c_1 s, \tag{۳۶}$$

در رابطه فوق $\hat{k}$ تخمین پارامتر نامعین k^* و $\hat{\varpi}$ پارامتر نامعین ϖ^*، c_1 پارامتر مثبت طراحی (بهره کنترلی) و $sign(\cdot)$ تابع استاندارد علامت می‌باشد.

با جایگذاری (۳۶) در (۳۵) رابطه زیر برقرار است:

$$\dot{V} \le -c_1 s^2 + \frac{1}{2n}s^2\tilde{\varpi} + |s|\tilde{k} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{r_1}\tilde{k}\dot{\hat{k}} - \frac{1}{r_2}\tilde{\varpi}\dot{\hat{\varpi}}. \tag{۳۷}$$

قوانین تطبیق به صورت زیر طراحی شده است:

$$\dot{\hat{\varpi}} = \frac{r_2}{2n}s^2 - r_2\delta_2\hat{\varpi}, \tag{۳۸}$$

$$\dot{\hat{k}} = r_1|s| - r_1\delta_1\hat{k}, \tag{۳۹}$$

که δ_1 و δ_2 پارامترهای مثبت طراحی مربوط به اصلاح سیگما (مقاوم سازی قوانین تطبیق) هستند. با جایگذاری روابط (۳۸) و (۳۹) در رابطه (۳۷) نامساوی زیر محاسبه شده است:

$$\dot{V} \le -c_1 s^2 + \frac{1}{2}n + \delta_1\tilde{k}\hat{k} + \delta_2\tilde{\varpi}\hat{\varpi}. \tag{۴۰}$$

براساس اصل یانگ (پیوست (الف))، نامساوی‌های بیان‌شده (۴۱) برقرار است:

$$\begin{cases} \delta_1\tilde{k}\hat{k} \le -\frac{\delta_1}{2}\tilde{k}^2 + \frac{\delta_1}{2}k^{*2}, \\ \delta_2\tilde{\varpi}\hat{\varpi} \le -\frac{\delta_2}{2}\tilde{\varpi}^2 + \frac{\delta_2}{2}\varpi^{*2}. \end{cases} \tag{۴۱}$$

با جایگذاری رابطه (۴۱) در (۴۰) می‌توان نتیجه گرفت:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

$$\dot{V} \leq -\min\{2c_1, r_1\delta_1, r_2\delta_2\}\left(\underbrace{\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2r_1}\tilde{k}^2 + \frac{1}{2r_2}\tilde{\varpi}^2}_{V}\right) + \frac{\delta_1}{2}k^{*2} + \frac{\delta_2}{2}\varpi^{*2} + \frac{1}{2}n. \quad (۴۲)$$

اکنون با تعریف پارامترهای ثابت به فرم:

$$\begin{cases} a_1 = \min\{2c_1, r_1\delta_1, r_2\delta_2\}, \\ a_2 = \frac{\delta_1}{2}k^{*2} + \frac{\delta_2}{2}\varpi^{*2} + \frac{1}{2}n, \end{cases} \quad (۴۳)$$

رابطه لیاپانوفی (۴۴) حاصل شده است:

$$\dot{V} \leq -a_1 V + a_2. \quad (۴۴)$$

قضیه ۱: ساختار کنترل تطبیقی شبکه عصبی خطی‌ساز فیدبک ارائه شده مبتنی بر قانون کنترل (۳۶)، قانون به‌روزرسان جبران‌ساز مقاوم (۳۹) و تقریب‌زن نرم وزن‌های شبکه‌های عصبی (۳۸)، می‌تواند سبب کران‌داری تمام سیگنال‌های حلقه بسته سیستم کنترلی بیمار دیابتی نوع یک توصیف شده توسط مدل کاملاً نامعین برگمن (۴) شود. علاوه بر این، همگرایی قند خون بیماران به محدوده‌ای از مقدار مطلوب ($y_d = 90$) نیز به اثبات رسیده است.

اثبات: با حل نامعادله دیفرانسیل (۴۴) می‌توان نتیجه گرفت:

$$V(t) \leq V(t_0)\exp(-a_1(t-t_0)) + \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}\exp(-a_1(t-t_0)). \quad (۴۵)$$

با میل دادن زمان به سمت بی‌نهایت برای نامساوی (۴۵)، می‌توان نتیجه گرفت:

$$Lim_{t\to\infty}V(t) \leq \frac{a_2}{a_1}, \quad (۴۶)$$

از این رو، سیستم کنترلی حلقه بسته پایدار (تمام سیگنال‌ها کران‌دار) و براساس تئوری لیاپانوفی سیستم کران‌دار نهایی یکنواخت (تعریف ۲ در پیوست (الف)) می‌باشد. براساس رابطه (۴۶)، نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} &Lim_{t\to\infty}|s(t)| \leq \sqrt{2\frac{a_2}{a_1}}, \\ &\to \quad Lim_{t\to\infty}|\ddot{e}(t) + 2\lambda\dot{e}(t) + \lambda^2 e(t)| \leq \sqrt{2\frac{a_2}{a_1}}, \\ &Lim_{t\to\infty}|y(t) - y_d| \leq \frac{1}{\lambda^2}\sqrt{2\frac{a_2}{a_1}}, \\ &\to \quad Lim_{t\to\infty}(|y(t)| - |y_d|) \leq \frac{1}{\lambda^2}\sqrt{2\frac{a_2}{a_1}}, \\ &\to \quad Lim_{t\to\infty}y(t) \leq \frac{1}{\lambda^2}\sqrt{2\frac{a_2}{a_1}} + y_d, \end{aligned} \quad (۴۷)$$

براساس رابطه (۴۷)، در این رویکرد کنترلی با افزایش مقادیر λ، r_1، r_2، c و کاهش δ_1 و δ_2 می‌توان سبب همگرایی بهتر $y(t)$ به y_d (کاهش باند نهایی) در زمان‌های بزرگ شد.

تبصره ٤: در رویکرد کنترلی ارائه شده به دلیل استفاده از مقاوم‌سازی اصلاح سیگما در قوانین تطبیق (۳۸) و (۳۹) پایداری سیستم کنترلی حلقه بسته کران‌دار نهایی یکنواخت بوده است. در صورت صفر نمودن ضرایب اصلاح سیگما در قوانین تطبیق ارائه شده (عدم استفاده از رویکرد مقاوم سازی اصلاح سیگما) می‌توان براساس لم باربالات ثابت کرد که قند خون به صورت مجانبی به مقدار مطلوب همگرا شده است و تمام سیگنال‌های حلقه بسته کران‌دار هستند.

تبصره ٥: در مشتق مرتبه سوم لی از خروجی سیستم مدل حداقل برگمن، سیگنال کنترل در معادلات دینامیکی خطای حلقه بسته ظاهر شده است. به دلیل آنکه مدل حداقل برگمن مورد بررسی یک سیستم با سه متغیر حالت می‌باشد، پدیده دینامیک‌های داخلی در حل این مسئله کنترلی ظاهر نشده است.

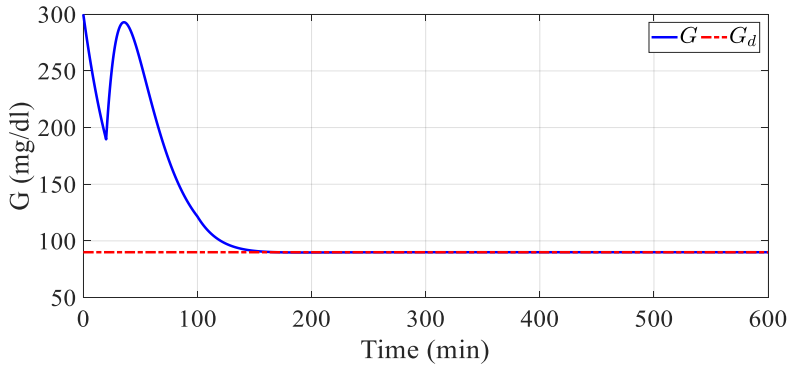
تبصره ٦: این نکته لازم به ذکر است که شبکه‌های عصبی متداول در مقالات به دلیل عدم تحریک بردار رگرسور به صورت پایا توسط سیگنال کنترل در سیستم کنترلی حلقه بسته قابلیت تخمین تابع نامعین $m(\boldsymbol{z})$ را به صورت دقیق ندارند. از سوی دیگر، در دیدگاه‌های متداول به دلیل تقریب تک تک عناصر بردار وزن‌های شبکه عصبی، پیچیدگی کنترل‌کننده طراحی شده افزایش خواهد یافت. از این رو، برای اولین بار با استفاده از رویکرد شبکه‌های عصبی تطبیقی به همراه دیدگاه حداقل پارامترهای آموزشی شبکه عصبی، جبران‌سازی اثرات نامعینی‌های مدل حداقل برگمن صورت گرفته است به گونه‌ای که به جای تقریب بردار وزن شبکه عصبی فقط یک پارامتر اسکالر بدون اطلاع از بردار رگرسور در قانون تطبیق به‌روزرسانی شده است. در ادامه، با طراحی جبران‌ساز تطبیقی مقاوم اثرات نامطلوب خطای تقریب تابع نامعین بر عملکرد کنترلی کاهش یافته است.

۴- شبیه‌سازی

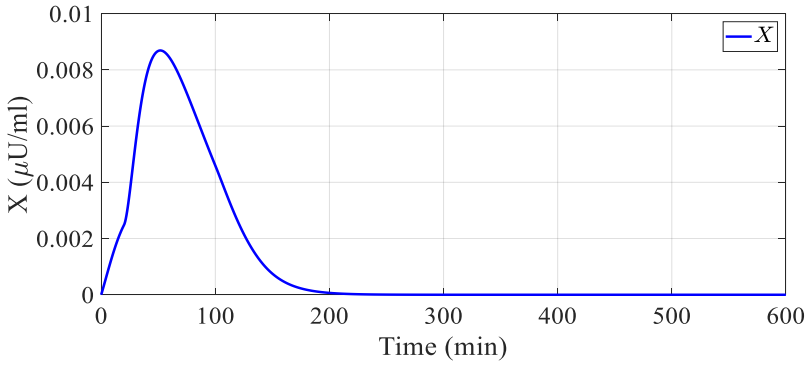
٤-۱- شبیه سازی عددی

شکل‌های (۱) تا (۷) نشان دهنده تنظیم قند خون بیمار دیابتی مبتنی بر کنترل‌کننده شبکه عصبی تطبیقی مقاوم در حضور مصرف وعده غذایی به عنوان اغتشاش خارجی می‌باشند.

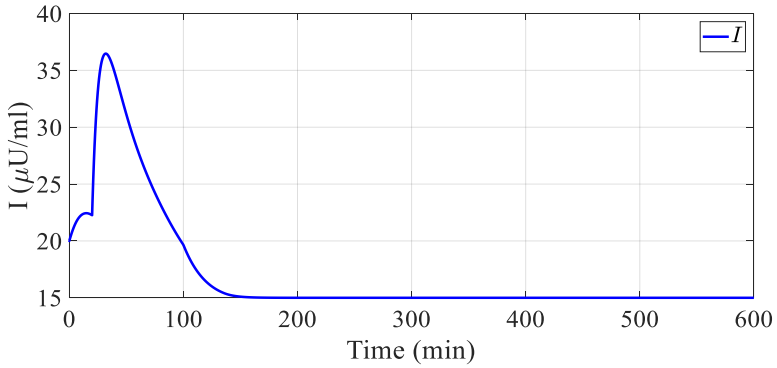
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]



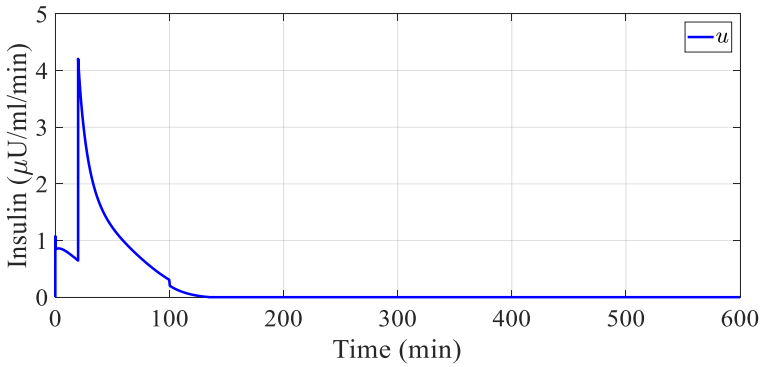
شکل (۱): متغیر حالت $G(t)$ در حضور کنترل‌کننده عصبی تطبیقی با مصرف وعده غذایی.



شکل (۲): متغیر حالت $X(t)$ در حضور کنترل‌کننده عصبی تطبیقی با مصرف وعده غذایی.



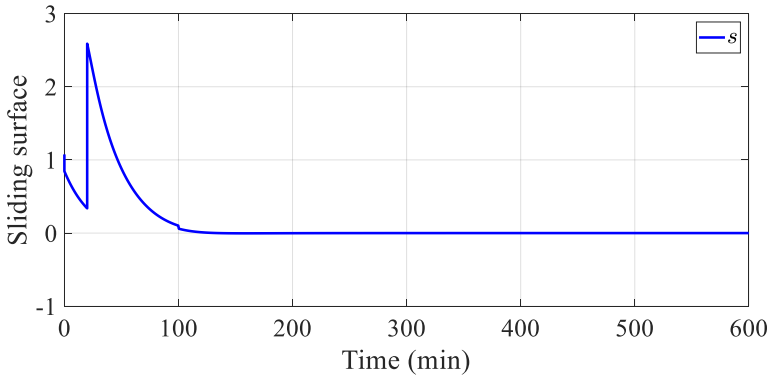
شکل (۳): متغیر حالت $I(t)$ در حضور کنترل‌کننده عصبی تطبیقی با مصرف وعده غذایی.



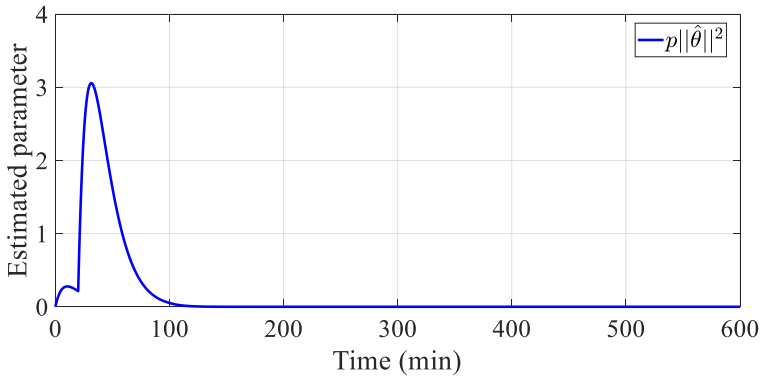
شکل (۴): انسولین تزریقی در حضور کنترل‌کننده عصبی تطبیقی با مصرف وعده غذایی.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

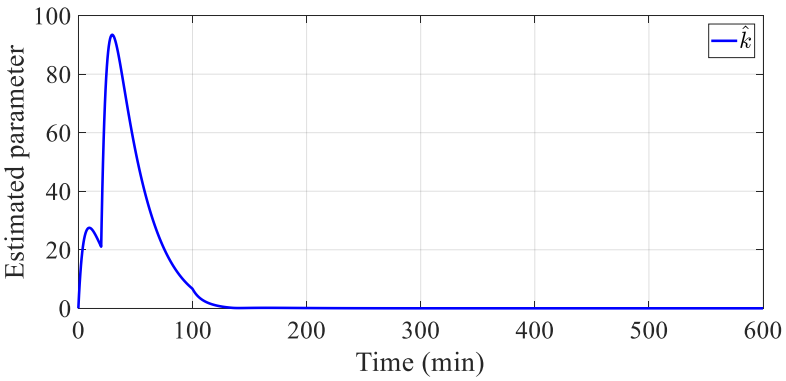
متغیرهای حالت مدل برگمن در شکل‌های (۱)-(۳) به تصویر درآمده که گویای تنظیم مطلوب قند خون بیمار دیابتی با توجه به مصرف وعده غذایی در بازه زمانی ۲۰ الی ۱۰۰ دقیقه بوده است. در شکل (۱) قند خون و مقدار مطلوبش نشان داده شده است، در بازه صفر الی ۲۰ دقیقه به دلیل عملکرد کنترل‌کننده، قند خون شروع به کاهش می‌کند و در بازه ۲۰ الی ۱۰۰ دقیقه به دلیل مصرف وعده غذایی، قند خون افزایش یافته است که کنترل‌کننده و قانون تطبیق مقاوم طراحی شده برای جبران‌سازی اثرات نامطلوب وعده غذایی سعی در کاهش قند خون دارند. پس از ۱۰۰ دقیقه به دلیل قطع مصرف غذا و عملکرد مطلوب کنترل‌کننده، همگرایی قند خون به کرانی از مقدار مطلوبش روی داده است. در شکل‌های (۲) و (۳) دیگر متغیرهای حالت مدل برگمن به صورت کران‌دار به تصویر کشیده شده‌اند. در شکل (۴) میزان انسولین تزریقی با کران منطقی (مقدار انسولین تزریقی به بیمار همواره باید بین $0 \le u(t) \le 30$ $(\mu U/ml/\min)$ باشد) به بیمار دیابتی نشان داده شده است. سطح لغزش در شکل (۵) نمایش داده شده است که بیانگر همگرایی خطای لیاپانوفی به کرانی از اطراف صفر است.



شکل (۵): سطح لغزش در حضور کنترل‌کننده عصبی تطبیقی با مصرف وعده غذایی.



شکل (۶): پارامتر تقریب زده شده کنترل‌کننده عصبی تطبیقی برای جبران سازی اثرات نامعینی.



شکل (۷): پارامتر تطبیق تقریب زده شده شبکه عصبی برای جبران‌سازی اثرات وعده غذایی.

در شکل (۶)، پارامتر تطبیق تقریب زده شده براساس قانون تطبیق رابطه (۳۸) به تصویر کشیده شده است. در شکل (۷)، پارامتر تطبیق به منظور جبران‌سازی اثرات وعده غذایی نشان داده شده است. به دلیل مصرف وعده غذایی در بازه زمانی ۲۰ الی ۱۰۰ دقیقه، پارامتر تقریب زده شده دارای پرش بوده است. به عبارت دیگر، کنترل‌کننده مقاوم طراحی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

شده سعی در جبران‌سازی اثرات نامطلوب وعده غذایی بر مسئله تنظیم قند خون دارد. وعده غذایی مصرفی بیمار به صورت رابطه (۴۸) در نظر گرفته شده است:

$$d(t)=\begin{cases}8\exp\big(-0.05(t-20)\big)\,(A(t-20)-A(t-100)), & 20\le t\le 100,\\ 0, & t<20, t>100,\end{cases} \tag{۴۸}$$

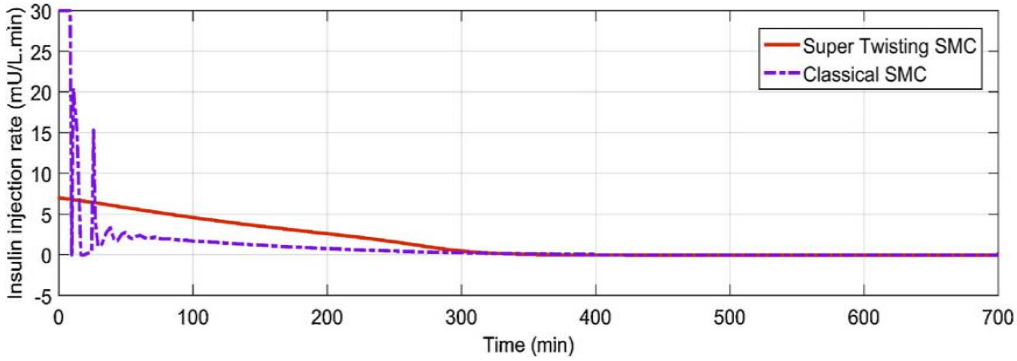
که تابع $A(.)$ نشان‌دهنده تابع پله واحد بوده است. بر اساس نتایج شبیه سازی، عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی در تنظیم قند خون بیماران دیابتی در حضور وعده غذایی به خوبی تأیید می‌گردد.

۲-٤- شبیه‌سازی مقایسه‌ای

به منظور نشان دادن برتری دیدگاه کنترلی ارائه شده در این مقاله در مقایسه با مرجع [۸] شبیه‌سازی مقایسه‌ای به منظور تنظیم قند خون بیمار دیابتی با مصرف وعده غذایی صورت گرفته است. نتایج این شبیه‌سازی در شکل‌های (۸) و (۹) به تصویر کشیده شده است. در این شبیه‌سازی تمام پارامترهای طراحی، مقادیر اولیه کنترل‌کننده‌ها و مدل برگمن براساس مرجع [۸] انتخاب شده است. در مرجع [۸] از دو رویکرد مدلغزشی کلاسیک و مدلغزشی به همراه الگوریتم فراپیچشی به منظور تنظیم قند خون استفاده شده است. همان‌گونه که از شکل‌های (۸) و (۹) واضح است کنترل‌کننده طراحی شده در این مقاله سبب کاهش زمان همگرایی قند خون به مقدار مطلوب شده است. دلیل این امر تطبیقی بودن بهره جبران‌ساز مقاوم ($\hat{k}$) در این مقاله می‌باشد، درحالی که در مرجع [۸] (مدلغزشی کلاسیک و مدلغزشی به همراه الگوریتم فراپیچشی) این بهره به صورت ثابت و تغییرناپذیر با زمان انتخاب شده است. از سوی دیگر، حداکثر مقدار انسولین تزریقی به بیمار در رویکرد ارائه شده همانند دیدگاه مدلغزشی به همراه الگوریتم فراپیچشی در مرجع [۸] در حدود $6\ (\frac{mU}{L.min})$ بوده است، در حالی که تحت تاثیر دیدگاه مدلغزشی کلاسیک مقدار انسولین تزریقی به بیمار بسیار بالا می‌باشد به گونه ای که طراح به ناچار از اشباع میزان انسولین تزریقی در $30\ (\frac{mU}{L.min})$ به دلیل محدودیت‌های فیزیکی بهره برده است. از شکل‌های (۸) و (۹) می‌توان دریافت که دیدگاه ارائه شده در این مقاله در زمان کوتاه‌تر و با تزریق مقدار مناسب انسولین در مقایسه با دیدگاه‌های ارائه شده در[۸] قادر به تنظیم قند خون بیمار دیابتی بوده است.

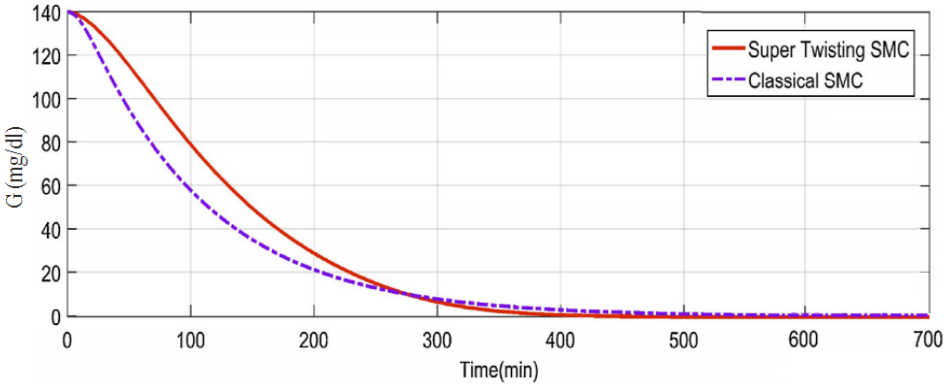
۵- جمع بندی

فرآیندهای بیولوژیکی به خصوص تنظیم قند خون در بیماران دیابتی ماهیتی پیچیده و غیرخطی دارند. کنترل‌کننده‌های کارآمد در این راستا باید رفتار غیرخطی سیستم گلوکز-انسولین و وجود نامعینی در آن را در نظر بگیرند. در این مقاله مدل دینامیکی غیرخطی برگمن در حضور انواع نامعینی بکار گرفته شده است. از این رو، کنترل‌کننده غیرخطی مبتنی بر رویکرد خطی سازی فیدبک برای پانکراس مصنوعی پیشنهاد شده است که سبب سادگی طراحی و تحلیل پایداری در مقایسه با کنترل‌کننده‌های پسگام متداول شده است. با استفاده از دیدگاه عصبی تطبیقی به همراه الگوریتم حداقل پارامترهای آموزش، نامعینی‌های ساختاری تقریب زده شده است. به منظور کاهش اثرات نامعینی‌های بی‌ساختار، جبران‌ساز تطبیقی مقاوم طراحی شده است به گونه‌ای که بتوان براساس دیدگاه لیاپانوفی کرانداری تمام سیگنال‌های حلقه بسته و همچنین تنظیم قند خون در محدوده مطلوب را ضمانت نمود. در انتها کارآمدی رویکرد کنترلی ارائه شده به وسیله نرم افزار متلب و نمایش نتایج شبیه‌سازی به تصویر کشیده شده است.



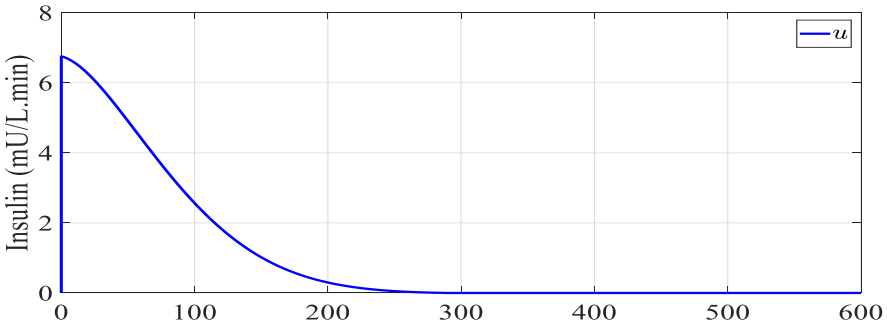
(الف)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

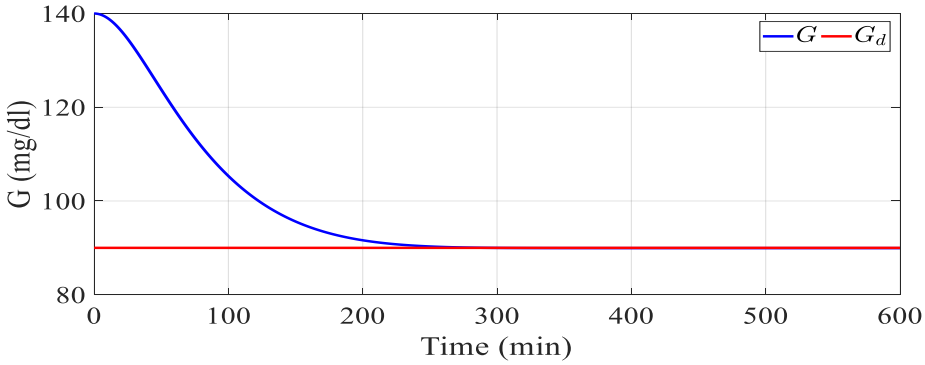


(ب)

شکل (۸): الف) نرخ انسولین تزریقی و ب) متغیر حالت $G(t)$ در رویکردهای کنترلی مرجع [۸].



(الف)



(ب)

شکل (۹): الف) نرخ انسولین تزریقی و ب) متغیر حالت$G(t)$ در رویکرد پیشنهادی.

مراجع

[1] T. Daisuke, Y. Xiao, F. Hu, F. Lewis. "A survey of insulin-dependent diabetes—part I: therapies and devices." International journal of telemedicine and applications, vol. 43, no. 11, pp. 1617-1632, 2008.

[2] A. Ciancio, R. Bosio, S. Bo, M. Pellegrini, M. Sacco. "Significant improvement of glycemic control in diabetic patients with HCV infection responding to direct-acting antiviral agents." Journal of medical virology, vol. 90, no. 2, pp, 320-327, 2018.

[3] N. Revital, E. Dassau, T. Segall. "Adjusting insulin doses in patients with type 1 diabetes who use insulin pump and continuous glucose monitoring: Variations among countries and physicians." Diabetes, obesity and metabolism, vol. 20, no. 10, pp. 2458-2466, 2018.

[4] A. Roy, R. S. Parker. "Dynamic modeling of exercise effects on plasma glucose and insulin levels." IFAC proceedings volumes, vol. 39, no. 2, pp. 509-514, 2006.

[5] A. Abu-Rmileh, G. Winston, D. Zambrano. "Internal model sliding mode control approach for glucose regulation in type 1 diabetes". Biomedical signal processing and control, vol. 5, no. 2, pp. 94-102, 2011.

[6] A. Abu-Rmileh, W. Garcia-Gabin, D. Zambrano. "A robust sliding mode controller with internal model for closed-loop artificial pancreas". Medical &

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

biological engineering & computing. vol. 48, no. 12, pp. 1191-201, 2011.

[7] A. Nath, R. Dey. "Robust observer based control for plasma glucose regulation in type 1 diabetes patient using attractive ellipsoid method". IET systems biology, vol. 13, no. 2, pp. 84-91, 2019.

[8] S. Ahmad, N. Ahmed, M. Iyas, W. Khan. "Supertwisting sliding mode control algorithm for developing artificial pancreas in type 1 diabetes patients". Biomedical signal processing and control, vol .38, pp. 200-211, 2017.

[9] S. T. Dinani, M. Zekri, M. Kamali. "Regulation of blood glucose concentration in type 1 diabetics using single order sliding mode control combined with fuzzy on-line tunable gain, a simulation study". Journal of medical signals and sensors, vol. 5, no. 3, pp.131-140, 2015.

[10]R. Zamani Forooshani, M. Siahi, A. Ramezani. "Adaptive type-2 fuzzy control for regulation of glucose level in type 1 diabetes". IETE journal of research, pp. 1-11, 2019.

[11] E-O. Meriyan, A. Cinar, L. Quinn, D. Smith. "Adaptive control strategy for regulation of blood glucose levels in patients with type 1 diabetes". Journal of process control, vol. 19, no. 8, pp. 1333-1346, 2009.

[12] Sh. Hassan, A. Raja. "Closed loop blood glucose control in diabetics." Biomedical research, vol. 28, no. 16, pp. 7230-7236, 2017.

[13] S. Deirdre, R. K. Munje. "Backstepping SMC for blood glucose control of type-1 diabetes mellitus patients". International journal of engineering technology science and research, vol. 4, no. 5, pp. 1-7 2017.

[14] H. Heydarinejad, H. Delavari. "Fractional order backstepping sliding mode control for blood glucose regulation in type I diabetes patients". Neurocomputing, vol. 12, pp. 187-202, 2017.

[15] H. Heydarinejad, H. Delavari, D. Baleanu. "Fuzzy type-2 fractional backstepping blood glucose control based on sliding mode observer." International journal of dynamics and control, vol. 7, no. 1, pp. 341-354, 2019.

[16] Chen Z, Huang F, Yang C, Yao B. "Adaptive fuzzy backstepping control for stable nonlinear bilateral teleoperation manipulators with enhanced transparency performance". IEEE transactions on industrial electronics. vol. 67, pp. 746-756, 2019.

[17] Wang, Min, Shuzhi Sam Ge, and Keum-Shik Hong. "Approximation-based adaptive tracking control of pure-feedback nonlinear systems with multiple unknown time-varying delays." IEEE transactions on neural networks, vol. 21, no. 11, pp. 1804-1816, 2010.

[18] Zhou, Qi, Peng Shi, Honghai Liu, and Shengyuan Xu. "Neural-network-based decentralized adaptive output-feedback control for large-scale stochastic nonlinear systems." IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, part B (cybernetics), vol. 42, no. 6, pp. 1608-1619, 2012.

[19] Zhou, Qi, Peng Shi, Shengyuan Xu, and Hongyi Li. "Observer-based adaptive neural network control for nonlinear stochastic systems with time delay." IEEE transactions on neural networks and learning systems, vol. 24, no. 1, pp. 71-80, 2012.

[20] Khalil HK, Grizzle JW. Nonlinear systems. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall; 2002 Jan.

[21] Kim YH, Lewis FL. "Neural network output feedback control of robot manipulators". IEEE transactions on robotics and automation. vol. 15, pp. 301-309, 1999.

[22] G. Tao, PV. Kokotovic. "Adaptive control of systems with actuator and sensor nonlinearities". New York, John Wiley & Sons, 1996.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]

پیوست الف (پیش نیازهای طراحی کنترل‌کننده)

لم ۱ (نامساوی کوشی شوارتز[1]) [۲۰]: برای هر دو بردار دلخواه $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{R}^n$ رابطه زیر برقرار است:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \le |\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}| \le ||\boldsymbol{x}||\ ||\boldsymbol{y}||.$$

لم ۲ (نامساوی یانگ[2]) [۲۲]: برای هر دو بردار دلخواه $(x,y) \in \mathcal{R}^n$ رابطه زیر برقرار است:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \le \frac{1}{2}||\boldsymbol{x}||^2 + \frac{1}{2}||\boldsymbol{y}||^2.$$

لم ۳ [۲۱]: تابع حقیقی و پیوسته $f(\boldsymbol{x})$ را بر روی یک مجموعه بسته و کران‌دار[3] مانند $U \subset \mathcal{R}^n$ در نظر بگیرید. با استفاده از شبکه‌های عصبی شعاعی با سه لایه ورودی، مخفی، خروجی و همچنین برای هر ثابت دلخواه $\varepsilon > 0$، $f(\boldsymbol{x}): U \to \mathcal{R}$ به صورت زیر تقریب زده شده است:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}^{*T}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon,$$

که $\boldsymbol{x} \in U$ بردار ورودی شبکه عصبی و $\boldsymbol{\theta}^* \in \mathcal{R}^l$ بردار وزن‌های ایده‌آل شبکه عصبی است. p تعداد نرون‌ها در لایه مخفی و $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = [\varphi_1(\boldsymbol{x}),\dots,\varphi_p(\boldsymbol{x})]^T: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^p$ بردار پایه گوسی شبکه عصبی به صورت

$$\varphi_l(\boldsymbol{x}) = \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_l)^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_l)}{c_l^2}\right], l = 1,..,p,$$

می‌باشد که در آن $\boldsymbol{\mu}_l = [\mu_{l,1},\dots,\mu_{l,n}]^T$ معرف بردار میانگین تابع گوسی، c_p نشان دهنده انحراف معیار تابع گوسی و ε خطای تقریب تابع نامعین است. تقریب تابع نامعین $f(\boldsymbol{x})$ به صورت $\hat{f}(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ بیان شده که $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{R}^p$ تقریب بردار وزن‌های ایده‌آل شبکه عصبی و از طریق قوانین تطبیق محاسبه شده است.

فرض ۳ [۲۱]: به ازای هر $\boldsymbol{x} \in U \subset \mathcal{R}^n$، بردار وزن‌های ایده‌آل ثابت شبکه عصبی شعاعی و خطای تقریب تابع نامعین به صورت $\|\boldsymbol{\theta}^*\| \le m$ و $|\varepsilon| \le \varepsilon^*$ کران‌دار می‌باشند که m و ε^* پارامترهای ثابت نامعین هستند.

لم ٤ [۲۱]: برای شبکه عصبی شعاعی با تابع گوسی، نامساوی زیر:

$$\boldsymbol{\varphi}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \le p$$

همواره برقرار است که p تعداد نرون‌ها در لایه مخفی می‌باشد.

براساس داشتن تابع غیرخطی اسکالر مانند $h(\boldsymbol{x})$ و همچنین میدان برداری $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$، مشتق لی تابع $h(\boldsymbol{x})$ نسبت به $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ که با نماد $L_{\boldsymbol{f}}h(\boldsymbol{x})$ نشان داده می‌شود را می‌توان تعریف کرد.

تعریف ۱ (مشتق لی) [۲۰]: تابع $h(\boldsymbol{x}): \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ یک تابع اسکالر و مشتق‌پذیر فرض شده و $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}): \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ میدان برداری یکنواخت بر روی فضای حالت $\mathcal{R}^n$ می‌باشد. مشتق لی $h(\boldsymbol{x})$ نسبت به میدان برداری $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ تابعی اسکالر به صورت $L_{\boldsymbol{f}}h(\boldsymbol{x}) = \nabla h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (با نماد $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{x}}$) به صورت زیر تعریف شده است:

$$L_{\boldsymbol{f}}^0 h(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}),$$
$$L_{\boldsymbol{f}}^{(i)} h(\boldsymbol{x}) = L_{\boldsymbol{f}}(L_{\boldsymbol{f}}^{(i-1)} h(\boldsymbol{x})),$$
$$L_{\boldsymbol{f}}^{(i)} h(\boldsymbol{x}) = \nabla(L_{\boldsymbol{f}}^{(i-1)} h(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad i = 1,2,..$$

به گونه‌ای مشابه اگر $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ یک میدان برداری باشد، عبارت زیر برقرار است:

$$L_{\boldsymbol{g}}L_{\boldsymbol{f}}h(\boldsymbol{x}) = \nabla\left(L_{\boldsymbol{f}}\, h(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}).$$

تعریف ۲ (کران‌دار نهایی یکنواخت) [۲۰]: فرض کنید $V(\boldsymbol{x}(t)): R^n \to R^+$ تابعی حقیقی و مشتق‌پذیر برای $t > t_0$ و $\boldsymbol{x} \in R^n$ باشد. اگر نامساوی $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \le -a_1 V(\boldsymbol{x}(t)) + a_2$ برقرار باشد، داریم:

$$V(\boldsymbol{x}(t)) \le V(\boldsymbol{x}(t_0))\exp(-a_1(t-t_0)) + \frac{a_2}{a_1}(1-\exp(-a_1(t-t_0)))$$

به بیان دیگر متغییر حالت $\boldsymbol{x}(t)$ کران‌دار نهایی یکنواخت با کران نهایی $\frac{a_2}{a_1}$ است. همچنین a_1 و a_2 پارامترهای مثبت می‌باشند.

[1] Kuchi Schwartz Inequality
[2] Young's Inequality
[3] Compact Set

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2025-12-28]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.2.3.7]
[DOI: 10.52547/joc.16.2.25]