مجله کنترل
جلد ۵، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۰، صفحه ۶۸-۵۷

طراحی مسیر بهینه برای یک شناور تندروی پروازی با هدف کمینه‌سازی زمان

محمد تقی قربانی[۱]، حسن سالاریه[۲]، نیما اسدیان[۳]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، mt_ghorbani@mehr.sharif.ir

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، salarieh@sharif.ir

[۳] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، assadian@sharif.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۸/۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۹/۲۸)

چکیده: در این مقاله، مسئله طراحی مسیر بهینه برای یک شناور تندروی پروازی مطرح می‌گردد. بدین منظور در ابتدا یک مدل ریاضی برای دینامیک غیر خطی این شناور ارائه می‌شود. سپس سناریوی مسیر بهینه با کمترین زمان مانور با در نظر گرفتن قیودی روی سیستم هدایت، قیود مربوط به سرعت‌های خطی و زاویه‌ای شناور و قیود غیر هولونومیک ناشی از دینامیک معرفی و مورد بررسی قرار گرفته است. برای حل این مساله کنترل بهینه مقید به روش غیر-مستقیم، مجموعه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی مستخرج از هامیلتونی سیستم تشکیل گردیده و برای حل عددی این معادلات از روش گسسته‌سازی ورودی‌های کنترلی، تکنیک عددی سریع‌ترین شیب[۱]، و همچنین تکنیک تابع جریمه توسعه‌یافته خطی[۲] برای اعمال قیود تساوی و نامساوی، استفاده شده است. در نهایت با مقایسه حل تحلیلی مسئله مانور مینیمم زمان و روش مورد استفاده و ذکر چند مثال در قالب تعریف سناریوهای مختلف به بررسی روش ارائه شده پرداخته شده است. نتایج حاصل از این سناریوها، نشان‌دهنده قابلیت بالای این روش در طراحی مسیر بهینه، برای شناور تندرو پروازی مورد بررسی است.

کلمات کلیدی: شناور پروازی، طراحی مسیر بهینه، معادلات شرط مرزی هامیلتونی، روش سریع‌ترین شیب، تابع جریمه توسعه‌یافته خطی.

Time Optimal Trajectory Planning For a High Speed Planing Boat

M.T. Ghorbani, H. Salarieh, N. Assadian

Abstract: In this paper, the problem of trajectory planning for a high speed planing boat with the aim of time optimization under nonlinear equality and inequality constraints is addressed. First, a nonlinear mathematical model of the craft dynamic and then the Hamiltonian boundary value problem (HBVP) equations are derived. The problem is solved using nolinear programming by discretizing the control time history and adjoining the constraints to the cost function via Linear Extended Penalty Function (LEPF) method. The Steepest Descent (SD) approach is used to solve this nonlinear programming. Some examples of boat minimum time maneuver are presented to demonstrate the effectiveness of the approach for designing optimal maneuvers.

Keywords: High Speed Planing Boat, Trajectory Optimization, Hamiltonian Boundary Value Problem, Steepest Descent Approach, Linear Extended Penalty Function Method.

[1] Steepest Descent
[2] Linear Extended Penalty Function Method

۱- مقدمه

در طول سالیان متمادی پیشرفت‌های زیادی در ساخت و راه‌اندازی سیستم های ناوبری در عرصه دریایی حاصل شده است. با این وجود سوانح دریایی نیز بخشی از این توسعه بوده است. آمارها نشان‌دهنده این است که اکثر این سوانح به دلیل خطای انسانی رخ داده است. از طرفی با توجه به کاربردهای مختلف شناورهای تندرو در حوزه نظامی به خصوص در ماموریت‌های گشت‌زنی و شناسایی محیط‌هایی که حضور محسوس ناخدا مخاطره‌آمیزتر است، مساله هدایت خودکار شناورهای تندرو اهمیت دوچندان می یابد. به طور معمول طراحی سیستم هدایت شناورهای تندرو به دو بخش تقسیم می‌شود ([۱] و [۲] و [۳]). بخش اول طراحی مسیر بهینه به صورت آفلاین[۱] و بخش دیگر به صورت آنلاین[۲] می‌باشد. در بخش اول بیشتر هدف طراحی مسیر[۳]، و در بخش دوم کنترل مسیر[۴] می‌باشد. مساله طراحی مسیر، به پروسه ایجاد یک مسیر مطلوب با هدف انجام یک مانور مشخص به صورت مینیمم زمان یا مینیمم مصرف سوخت و با در نظر گرفتن دینامیک غیر خطی شناور و اشباع عملگرها[۵] اطلاق می‌گردد [۴]. از طرف دیگر مساله کنترل مسیر، به پروسه حفظ موقعیت و جهت‌گیری شناور و سرعت آن در یک مقدار مورد نظر گفته می‌شود. در این مقاله به بعد اول مساله، یعنی طراحی مسیر بهینه پرداخته می‌شود.

اکثر طراحان مسیر برای طراحی مسیر، با وصل کردن نقاط مسیر[۶] به کمک توابع خاصی مثل اسپلاین و ... اقدام به طراحی مسیر نموده اند [۱]. عیب این‌کار نادیده گرفتن دینامیک غیر خطی شناور و هم‌چنین به وجود آمدن فرامین کنترلی غیرممکن در فرایند طراحی مسیر می‌باشد. در ادامه مروری بر کارهای انجام شده در زمینه طراحی مسیر بهینه می‌شود.

در زمینه طراحی مسیر بهینه برای کشتی‌ها، دجوانی و همکاران[۵] یک مدل ریاضی برای دینامیک غیرخطی شناور مطرح کردند و سپس مسیری را بر مبنای مساله زمان- انرژی بهینه و با در نظر گرفتن معادلات فضای حالت غیر محدب[۷]، قیود روی سیستم هدایت و قیود محیطی طراحی کردند. آنها روش لاگرانژی الحاقی گسسته[۸] را برای حل کنترل مقید بهینه استفاده کردند. این روش برای مانور و پهلوگیری اتوماتیک شناور بکار می‌رود. ایراد روش بکار رفته در کار آن‌ها در این است که آنها سعی کردند که با تقریب مکان و جهت‌گیری شناور در دستگاه مختصات جهانی، بر مبنای منحنی‌های بزیر[۹] و سپس استفاده از دینامیک معکوس برای یافتن مقدار پارامترهای کنترلی، مسیر بهینه را طراحی کنند. اما این‌کار منجر به ایجاد فرامین کنترلی غیرهموار گردیده است.

اوگولیاس [۶] به طراحی مسیر بهینه از لحاظ مصرف سوخت برای کشتی‌های بزرگ، با درنظر گرفتن اغتشاشات محیطی و نیروهای هیدرودینامیک و لحاظ کردن قیود ایمنی پرداخته است. این قیود، احتمال وقوع پدیده‌های اسلمینگ[۱۰] و خیس‌شدن عرشه کشتی[۱۱] را در نظر گرفته، مسیر طراحی را به گونه‌ای رقم می زند که این پدیده‌ها اتفاق نیافتند. روش بکاررفته در کار وی روش معروف برنامه ریزی دینامیکی[۱۲] بود.

اوتسو و همکاران [۷]، مساله مانور مینیمم زمان را برای یک کشتی که در معرض اغتشاشات حاصل از باد می‌باشد، را بررسی نمودند. بدین منظور ابتدا مدل دینامیک کشتی مورد نظر استخراج شده و توسط روش حساب تغییرات، یک مساله مقدار مرزی تعریف شده و توسط روش گرادیان مزدوج[۱۳] حل گردید. با این حال این روش طراحی مسیر از لحاظ زمان اجرا نامناسب می‌باشد [۸].

چنگ و همکاران [۹] با استفاده از الگوریتم ژنتیک، به طراحی مسیر بهینه برای یک کشتی پرداختند. آن‌ها با تعریف یک تابع برازندگی[۱۴] متشکل از فاصله تا مقصد و مینیمم فاصله هر نقطه از مسیر تا مانع بعدی و تعریف یک سری وزن برای برآورده کردن دو هدف مینیمم فاصله تا مقصد و عدم برخورد به موانع محیطی بر حسب اهمیت آن در طول مسیر، توانستند مسیرهای بهینه تولید کنند.

اسکاریو و همکاران [۱۰] بر مبنای نوع جدیدی از الگوریتم‌های هوش ازدحامی[۱۵] به نام الگوریتم توسعه‌یافته مورچگان[۱۶]، توانستند سناریو های مختلف مانور شناور را بهینه کنند. آنها از اتوماتای سلولی[۱۷] به عنوان یک تابع ابتکاری[۱۸] استفاده کردند. حسن کار آن‌ها اینست که بر خلاف روش‌های کلاسیک که در آن دو مساله طراحی مسیر و تعقیب مسیر[۱۹] به صورت مجزا حل می‌شود، در این روش این دو بخش در یک بخش قابل انجام است.

با مرور کارهای پیشین در زمینه طراحی مسیر بهینه، این نکته جلب توجه می‌کند که تا به حال اکثر کارهای انجام شده در مورد کشتی‌های بزرگ بوده است که معمولاً در محدوده سرعت‌های پایین کار می‌کنند. با توجه به اینکه به شناور مورد بررسی در این مقاله، شناوری با بدنه هارد چاین[۲۰] است و دارای این ویژگی است که با افزایش سرعت شناور قسمتی از بدنه از سطح آب جدا می‌گردد و در نتیجه با کاهش نیروی مقاومت اصطکاکی سرعت شناور افزایش می‌یابد، لذا دینامیک شناور وابسته به سرعت آن می‌باشد و اهمیت مدل‌سازی دینامیکی و بحث تولید

[1] Offline
[2] Online
[3] Path planning
[4] Path control
[5] Actuator Saturation
[6] Waypoint
[7] Nonconvex
[8] Discrete augmented Lagrangian approach
[9] Bezier curve
[10] Slamming
[11] Deck wetness
[12] Dynamic programming
[13] Conjugate gradient restoration method
[14] fitness function
[15] Swarm Intelligence
[16] Ant Colony Extended
[17] Cellular Automata
[18] heuristic function
[19] Path following
[20] Hard chine

مسیرهای بهینه به عنوان بخشی از سیستم هدایت شناور، حس می‌شود. علاوه بر این، چون الگوریتم‌های طراحی مسیر بر مبنای روش‌های تقریبی و یا روش‌های ابتکاری و یا برنامه‌ریزی دینامیک می‌باشند، دارای ضعف-هایی هم‌چون بوجود آمدن فرامین کنترلی غیرممکن، ماهیت تصادفی در رسیدن به جواب بهینه و هزینه محاسباتی بالا می باشند.

در این مقاله، ابتدا معادلات دینامیک چهار درجه آزادی سرج[1]،اسوی[2]، رول[3] و یاو[4] شناور تندرو استخراج می‌شود. سپس معادلات شرط مرزی به دست آمده از تغییرات انتگرال هامیلتونی (بر اساس روش حساب تغییرات) برای مساله کنترل بهینه مربوط به شناور ارائه می‌گردد. در ادامه روش عددی حل این معادلات مطرح می‌گردد. در نهایت نتایج مربوط به سناریوی مانور شناور با کمترین زمان ممکن مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتیجه حاصل از این سناریو، نشان‌دهنده توانمندی روش مورد استفاده در یافتن جواب بهینه ضمن در نظر گرفتن دینامیک غیر خطی شناور، اشباع عملگرها و قیود مربوط به سرعت‌های خطی و زاویه‌ای شناور می‌باشد.

۲- مدل‌سازی شناور تندرو پروازی

شناور مورد بررسی در این مقاله، شناوری است تندرو، با حداکثر سرعت پیشروی ۴۳ نات به همراه دو موتور ۲۰۰ اسب بخار که قابلیت گردش به چپ و راست دارند. لازم به ذکر است که مشخصات سرعت و توان پیش رانش شناور بر اساس یکی از شناورهای تندرو بسیار پرکاربرد در ناوگان پلیس دریایی جمهوری اسلامی ایران است. در شکل ۰۱ دو دستگاه مختصات جهانی (x-y-z) و دستگاه متصل به بدنه (x_b-y_b-z_b) که برای توصیف حرکات شناور به‌کار می‌روند، به همراه درجات آزادی این شناور در دستگاه بدنی مشخص شده است [۱۱] و [۱۲]. هم‌چنین موقعیت نیروی پیشران نسبت به دستگاه بدنی شناور مشخص شده است. در ادامه پارامترهای موجود در این شکل بیش‌تر توضیح داده می‌شوند.

با فرض اینکه درجات آزادی قائم شناور در مساله مانور شناور مقدار کمی باشد [۱۳]، لذا چهار درجه آزادی سرج، اسوی، رول و یاو مورد بررسی قرار می‌گیرد.

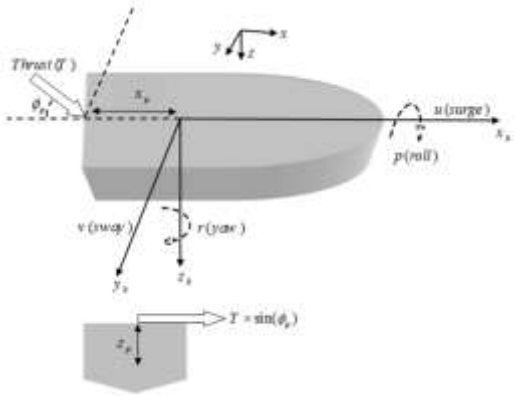
مدل غیر خطی ۴ درجه آزادی (۱) جهت شبیه سازی رفتار شناور در حالت مانور مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲]. در این مدل m جرم شناور، I_b ماتریس ممان اینرسی شناور در دستگاه متصل به بدنه شناور و واقع در مرکز جرم شناور، بردار [u v] بردار سرعت خطی شناور در دستگاه متصل به بدنه، بردار [p r] بردار سرعت زاویه‌ای رول و یاو شناور در دستگاه متصل به بدنه، می‌باشد. در سمت راست معادله، نیروها و گشتاورهای هر یک از درجات آزادی شناور به صورت زیر می‌باشد:

$\tau_{\text{Resistance}}$ نیروهای مقاوم در مقابل حرکت شناور.

$\tau_{Control}$ ورودی‌های کنترلی اعمالی به شناور.

τ_{H} نیروها و ممان‌های هیدرودینامیکی وارد شده به بدنه شناور.

$$\begin{Bmatrix} m[\dot{u}-vr] \\ m[\dot{v}+ur] \\ I_{xx}^{b}\dot{p} \\ I_{zz}^{b}\dot{r} \end{Bmatrix} = \tau_{\text{Resistance}} + \tau_{\text{Control}} + \tau_{\text{H}} \qquad (۱)$$

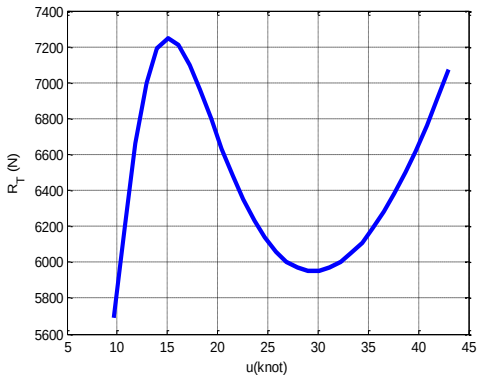


شکل ۱: انواع درجات آزادی در دستگاه بدنی شناور

مقدار $\tau_{\text{Resistance}}$ در درجات مختلف آزادی به شکل زیر تعریف می گردد.

$$\tau_{\text{Resistance}} = \begin{Bmatrix} -\text{R}_\text{T} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

در این رابطه مقدار R_T، مقاومت کل وارده بر شناور تندرو در حال حرکت می باشد. برای محاسبه مقدار مقاومت وارد بر شناور معمولاً از هندسه و اصطلاحاً خطوط بدنه شناور استفاده می‌شود. به طور مثال با انتقال خطوط بدنه شناور به نرم افزار تجاری Maxsurf می‌توان حدود مقدار مقاومت شناور بر حسب سرعت سرج آن را محاسبه نمود. در شکل ۲ این مقدار در نرم افزار مذکور بر مبنای تئوری ساویتسکی محاسبه شده است.



شکل ۲: منحنی نیروی کل مقاوم وارده بر شناور بر حسب سرعت پیشروی

[1] surge
[2] sway
[3] roll
[4] yaw

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش سرعت، مقاومت کل وارد بر شناور به دلیل جدا شدن بدنه از سطح آب و کاهش سطح خیس‌شده، کاهش می‌یابد، اما مجدداً به دلیل افزایش مولفه‌های دیگر مقاومت، مقاومت کل وارد بر شناور در سرعت‌های بالاتر افزایش می‌یابد.

$\tau_{Control}$ حاصل از المان‌های نیروی پیشران تولید شده توسط سکان و یا پروانه‌های شناور است. در اینجا بر اساس مدل ویژه شناور هدف، کنترل توسط تغییرات زاویه دو عدد پروانه موجود در انتهای شناور تامین می‌گردد. به عبارت دیگر فرض شده است که شناور دارای دو پروانه با قابلیت تغییر زاویه و تغییر دور است. تغییر زاویه، جهت بردار نیروی پیش‌ران و تغییر دور، مقدار نیروی پیش‌ران را تغییر می‌دهد. بنابراین:

$$\tau_{Control} = \begin{Bmatrix} T\cos\phi_p \\ T\sin\phi_p \\ T\,z_p\sin\phi_p \\ -T\,x_p\sin\phi_p \end{Bmatrix} \qquad (۳)$$

که در این رابطه T مجموع نیروی پیش‌ران دو پروانه، $[x_p\ z_p]$ مختصات پروانه ها در دستگاه متصل به بدنه و ϕ_p زاویه چرخش پروانه‌ها نسبت به حالت عمودی می‌باشد.

τ_H نیروها و ممان‌های هیدرودینامیکی وارد شده به بدنه شناور می‌باشند که با استفاده از بسط تیلور به صورت زیر بر حسب سرعت‌ها و شتاب‌ها تقریب زده می‌شوند:

$$\tau_H = \begin{Bmatrix} \left[X_{\dot u}\dot u\right] \\ \begin{bmatrix} Y_{\dot v}\dot v + Y_v v + Y_{\dot p}\dot p + Y_p p \\ + Y_\phi\phi + Y_r r + Y_{\dot r}\dot r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{\dot v}\dot v + K_v v + K_{\dot p}\dot p \\ + K_p p + K_\phi\phi + K_r r + K_{\dot r}\dot r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} N_{\dot v}\dot v + N_v v + N_{\dot p}\dot p \\ + N_p p + N_\phi\phi + N_r r + N_{\dot r}\dot r \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \qquad (۴)$$

که ضرایب هیدرودینامیکی موجود در این رابطه با استفاده از مقادیر موجود در مرجع [۱۳] و [۱۴] برای شناورهای تندرو پروازی بدست می آیند.

علاوه بر معرفی پارامترهای فضای حالت معرفی شده، ۴ پارامتر فضای حالت زیر که مربوط به سینماتیک شناور می‌باشد، معرفی می‌شود [۱۵].

$$\begin{aligned} \dot\phi &= p \\ \dot\psi &= r\cos\phi \\ \dot x &= \mathrm{u}\cos\psi - \mathrm{v}\sin\psi\cos\phi \\ \dot y &= \mathrm{u}\sin\psi + \mathrm{v}\cos\psi\cos\phi \end{aligned} \qquad (۵)$$

در این رابطه ψ, ϕ به ترتیب مربوط به مقادیر زاویه رول و زاویه یاو شناور می‌باشد.

۳- تعریف مساله کنترل بهینه

کرک [۱۶]، هدف از یک مساله کنترل بهینه را تعیین سیگنال‌های کنترلی لازم برای یک سیستم، در ضمن ارضای قیود طراحی، هندسی و فیزیکی آن سیستم و با هدف مینیمم و یا ماکزیمم کردن یک تابع هزینه معرفی می‌کند. مساله کنترل بهینه زیر را در نظر بگیرید. هدف تعیین ورودی کنترلی $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ که تابع هزینه بولزا را مینیمم کند.

$$J = \Phi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\,dt \qquad (۶)$$

در این رابطه $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیرهای فضای حالت، t_0 زمان ابتدا و t_f زمان نهایی (ثابت یا آزاد) می‌باشد. قیود دینامیکی سیستم مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad t \in [t_0, t_f] \qquad (۷)$$

شرایط مرزی به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0} \qquad (۸)$$

قیود نامساوی به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \le \mathbf{0}, \quad t \in [t_0, t_f] \qquad (۹)$$

در مجموعه روابط فوق $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^h$ و $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^c$ می‌باشد. معادلات (۶) تا (۹) به مساله پیوسته بولزا معروف هست. محدوده زمانی این مساله $[t_0, t_f]$ می‌باشد. روش غیر مستقیم حل مساله تبدیل یافته بولزا، استفاده از تکنیک حساب تغییرات است. این روش بر مبنای اصل بنیادین حساب تغییرات استوار است [۱۶]. مطابق این اصل اگر $\mathbf{x}^*$ یک جواب اکسترمال باشد، تغییرات تابع هزینه J بر روی $\mathbf{x}^*$ بایستی صفر باشد:

$$\delta J(\mathbf{x}^*, \delta\mathbf{x}) = 0, \quad \forall\,\text{admisible}\,\delta\mathbf{x} \qquad (۱۰)$$

برای حل مساله مقید، تابع هزینه الحاقی که از اضافه کردن قیود (۸) و (۹) به تابع هزینه، با روش تابع جریمه خطی توسعه یافته [۱۷] به دست می‌آید، به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$J_a = \Phi(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f) + H'(r_k')\sum_{j=1}^{h} H(\mathrm{h}_j(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f)) + \int_{t_0}^{t_f}\left[\begin{array}{l} g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t);t_0,t_f) \\ -\boldsymbol{\lambda}^T(t)\left(\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}-\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t;t_0,t_f)\right) \\ +r_k\sum_{i=1}^{c} C_i(\mathrm{c}_i)\end{array}\right]dt \quad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱) h_j برابر با تک تک جملات بردار $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f)$ و c_i برابر با تک تک جملات بردار $\mathbf{c}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)$ می‌باشد. سایر مجهولات رابطه (۱۱) به صورت زیر می‌باشد [۱۷].

$$H'(r_k') = \frac{1}{\sqrt{r_k'}} \quad (۱۲)$$

$$Where\ r_k' = \gamma r_{k-1}', \gamma > 1, r_k' > 0$$

$$H(\mathrm{h}_j) = r_k'\mathrm{h}_j^2 \quad (۱۳)$$

$$C_i(\mathrm{c}_i) = \begin{cases} \dfrac{-1}{\mathrm{c}_i} & \mathrm{c}_i \le \varepsilon \\ \dfrac{\mathrm{c}_i - 2\varepsilon}{\varepsilon^2} & \mathrm{c}_i > \varepsilon \end{cases} \quad (۱۴)$$

$$Where\ \varepsilon = -(r_k)^{0.5}$$

$$r_{k+1} = c' r_k$$

$$and\ \ 0.1 \le c' \le 0.5$$

اندیس k، بیانگر مرحله اجرای برنامه بهینه سازی می‌باشد. در واقع در روش تابع هزینه، روند حل در طی مراحل تکرار برنامه بگونه‌ای پیش می‌رود که قیود مساوی و نامساوی ارضا شود. حال با محاسبه تغییرات J_a نسبت به هر یک از متغیرهای آزاد مطابق رابطه (۱۰) و برابر صفر قرار دادن حاصل، شرایط مرتبه اول بهینگی[1] حاصل می‌شود. با حل مجموعه شرایط مذکور، جواب مساله کنترل بهینه بدست می‌آید. این روش به روش حل غیرمستقیم مسائل کنترل بهینه معروف است. شروط مذکور با تعریف هامیلتونی به فرم رابطه (۱۵):

$$\mathrm{H}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\mathbf{u},t;t_0,t_f) = g(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\mathbf{u},t;t_0,t_f) + \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t;t_0,t_f) + r_k\sum_{i=1}^{c} C_i(\mathrm{c}_i) \quad (۱۵)$$

ساده‌تر شده و به شکل رابطه (۱۶) می‌باشند [۱۸].

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t;t_0,t_f) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}(t_0)\ free \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0)^T = -\frac{\partial\left[\begin{array}{l}\Phi(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f) \\ +H'(r_k')\sum_{j=1}^{h} H(\mathrm{h}_j(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f))\end{array}\right]}{\partial \mathbf{x}(t_0)}$$

$$\mathbf{x}(t_f)\ free \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f)^T = \frac{\partial\left[\begin{array}{l}\Phi(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f) \\ +H'(r_k')\sum_{j=1}^{h} H(\mathrm{h}_j(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f))\end{array}\right]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \quad (۱۶)$$

$$t_0\ free \Rightarrow$$

$$\mathrm{H}(t_0) = \frac{\partial\left[\begin{array}{l}\Phi(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f) \\ +H'(r_k')\sum_{j=1}^{h} H(\mathrm{h}_j(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f))\end{array}\right]}{\partial t_0}$$

$$t_f\ free \Rightarrow$$

$$\mathrm{H}(t_f) = -\frac{\partial\left[\begin{array}{l}\Phi(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f) \\ +H'(r_k')\sum_{j=1}^{h} H(\mathrm{h}_j(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f))\end{array}\right]}{\partial t_f}$$

این مجموعه معادلات به مساله شرط مرزی هامیلتونی معروف است. معمولاً شرایط اولیه در مسائل کنترل بهینه مشخص و ثابت و $\Phi(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f)$ به شکل $\Phi(\mathbf{x}(t_f),t_f)$ است. لذا معادلات (۱۶) به شکل (۱۷) ساده می گردد.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t;t_0,t_f) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

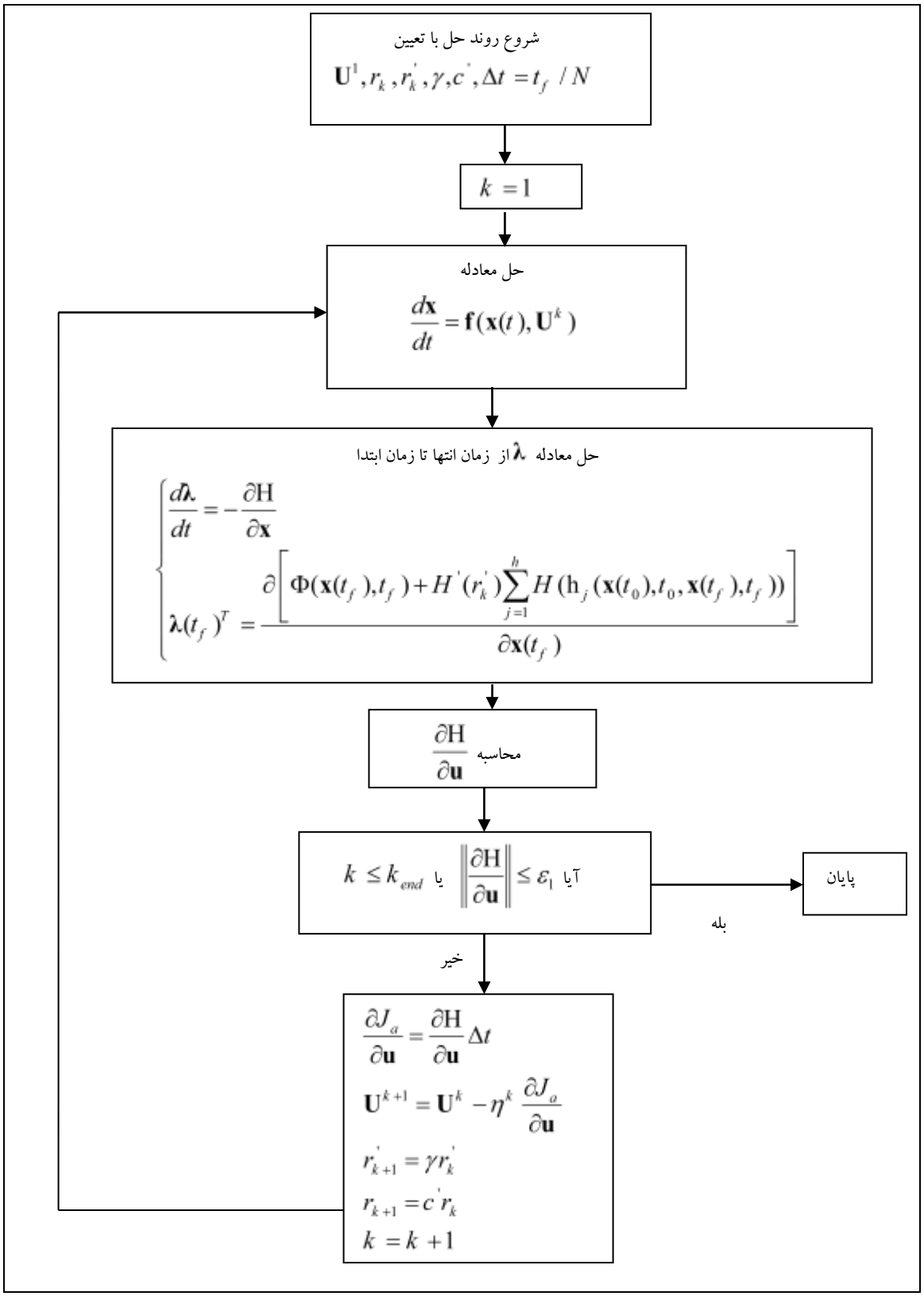
$$\mathbf{x}(t_f)\ free \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f)^T = \frac{\partial\left[\begin{array}{l}\Phi(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f) \\ +H'(r_k')\sum_{j=1}^{h} H(\mathrm{h}_j(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f))\end{array}\right]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \quad (۱۷)$$

$$t_f\ free \Rightarrow$$

$$\mathrm{H}(t_f) = -\frac{\partial\left[\begin{array}{l}\Phi(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f) \\ +H'(r_k')\sum_{j=1}^{h} H(\mathrm{h}_j(\mathbf{x}(t_0),t_0,\mathbf{x}(t_f),t_f))\end{array}\right]}{\partial t_f}$$

[1] First-order optimality conditions



شکل ۳: فلوچارت حل مساله کنترل بهینه به روش عددی

تکنیک عددی حل مجموعه معادلات (۱۷) برای مسائل زمان نهایی ثابت بدین صورت است که ابتدا با تقسیم زمان و به تبع آن مقدار ورودی کنترلی به $N+1$ قسمت و حدس اولیه برای مقدار کنترل مرحله اول $\mathbf{U}^1$ به شکل (۱۸):

$$\mathbf{U}^1 = [\mathbf{u}^1_0 \ldots\ldots \mathbf{u}^1_N] \qquad (۱۸)$$

از فلوچارت شکل ۳ استفاده می‌شود. در این فلوچارت برای بروز رسانی مقدار کنترل‌ها از روش سریع‌ترین شیب استفاده می‌گردد.

همچنین در این مقاله مقدار η^k عددی ثابت که دینامیک سیستم را تحریک کند، انتخاب می‌گردد. نکته قابل ذکر این است که حتی در صورتی که مقدار $\mathbf{x}(t_f)$ مشخص بود، باز فرض می‌شود که مقدار آن آزاد هست و معادله $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ به عنوان یک قید تساوی به شکل معادله (۸) مدل می‌شود.

برای مسائل زمان نهایی آزاد، روند حل مشابه شکل ۳ می‌باشد، با این تفاوت که چون زمان نهایی مشخص نیست، ابتدا زمان با استفاده از زمان انتها نرمال می‌شود و سپس گرادیان تغییرات تابع هزینه نسبت به زمان انتها محاسبه و با استفاده از آن، در هر مرحله مقدار زمان نهایی به روز می‌شود. معادلات زیر این روند را نمایش می‌دهد.

$$p = t_f \Rightarrow 0 \le t \le p \Rightarrow \tau = \frac{t}{p} \Rightarrow 0 \le \tau \le 1 \qquad (۱۹)$$

$$\frac{\partial J_a}{\partial p} = \frac{\partial \begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) \\ + H'(r_k') \sum_{j=1}^{h} H(\mathrm{h}_j(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f)) \end{bmatrix}}{\partial p} + \int_0^1 \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p} d\tau \qquad (۲۰)$$

$$Where \ \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p} = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}, t; t_0, t_f) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t; t_0, t_f) + r_k \sum_{i=1}^{c} C_i(\mathrm{c}_i)$$

در این صورت مقدار گرادیان بردار $\mathbf{U}$ که شامل کنترل (در زمان صفر تا زمان نهایی) و زمان نهایی است به شکل زیر می باشد.

$$\mathbf{U}^1 = [\mathbf{u}^1_0 \ldots\ldots \mathbf{u}^1_N, p]^T$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J_a}{\partial \mathbf{u}} \\ \dfrac{\partial J_a}{\partial p} \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

برای به‌روز کردن مقدار کنترل و زمان نهایی به کمک روش سریع ترین شیب ، از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k - \eta^k \nabla f \qquad (۲۲)$$

ویژگی روش گرادیانی سریع‌ترین شیب در یافتن جواب بهینه در عین سادگی پیاده‌سازی، رسیدن به جواب در تعداد مناسبی از مرحله تکرار برنامه می‌باشد. در عین حال روش‌های گرادیانی پیشرفته‌تری هم‌چون روش BFGS نیز جایگزن بهتری برای روش سریع‌ترین شیب می‌باشد [۱۷].

۴- شبیه‌سازی عددی

در این بخش سناریوی مانور با مینیمم زمان ممکن برای شناور تندرو پروازی، طراحی و با روش مورد بحث در قسمت قبل اجرا می‌گردد. مشخصات شناور تندرو در جدول ۱ معرفی شده است.

جدول ۱: پارامترهای فیزیکی مورد استفاده در تحلیل دینامیکی شناور هدف

پارامتر مورد نظر	Value	Units
جرم	3600	kg
I_{xx}	1435	$kg.m^2$
I_{yy}	9865	$kg.m^2$
I_{zz}	11320	$kg.m^2$
I_{xy}	0	$kg.m^2$
I_{yz}	0	$kg.m^2$
I_{xz}	0	$kg.m^2$
عرض شناور	2.018	m
طول شناور	7.95	m
فاصله طولی عقب کشتی تا مرکز جرم	2.518	m
زاویه گوه مانند زیر شناور با سطح افق	20	deg
چگالی آب	1025	kg/m^3

در ادامه سناریوهای مختلف طراحی مسیر بهینه ارائه می‌گردد.

۴-۱ رسیدن به مکانی در راستای خط دید شناور در کمینه زمان ممکن

در این سناریو، شناور با سرعت اولیه صفر و زاویه یاو صفر درجه در مبدأ مختصات قرار دارد. سناریو بدین گونه تعریف می‌گردد که شناور می‌بایست در سریع‌ترین زمان ممکن به نقطه $x = 300$ m برسد، و در این نقطه سرعت شناور صفر باشد. در این سناریو زمان نهایی را آزاد فرض می‌کنیم تا مطمئن باشیم سرعت شناور در انتهای مسیر به صفر

برسد. در ابتدا مساله مینیمم زمان به صورت تحلیلی حل می‌گردد و سپس با روش عددی بخش گذشته مقایسه می‌شود.

از آن‌جا که در این سناریو مسیر انتهای شناور در راستای خط دید شناور می‌باشد، لذا مسیر شناور مستقیم الخط می‌باشد و لذا فقط معادلات سرعت پیشروی u و مکان x شناور مورد بررسی قرار می‌گیرد. بنابراین معادلات دینامیک شناور به شکل زیر در می‌آید:

$$\dot{u} = \frac{(-R_T + T)}{m - X_{\dot{u}}} \qquad (۲۳)$$
$$\dot{x} = \mathrm{u}$$

مجموعه معادلات زیر قیود مربوط به زمان، کنترل‌ها را مشخص می کند.

$$\begin{aligned} &\mathrm{t_f}\ \text{free} \\ &0 \le T(t) \le 7.5KN \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

تابع هزینه به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = t_f \qquad (۲۵)$$

حال برای حل تحلیلی مسئله مینیمم زمان با تشکیل هامیلتونی سیستم به شکل زیر داریم:

$$\mathrm{H} = t_f + \lambda_u \frac{(-R_T + T)}{m - X_{\dot{u}}} + \lambda_x u \qquad (۲۶)$$

معادلات شبه‌حالت سیستم به شکل زیر تعریف می‌گردند.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_u &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u} = \lambda_u \frac{\left(\frac{\partial R_T}{\partial u}\right)}{m - X_{\dot{u}}} - \lambda_x \\ \dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

با توجه به اینکه پارامتر کنترلی در این حالت تنها نیروی تراست می باشد و مقدار تراست مقید است. لذا با استفاده از اصل مینیمم‌سازی پونتریگین[1] به شکل معادله (۲۸) قابل حصول است.

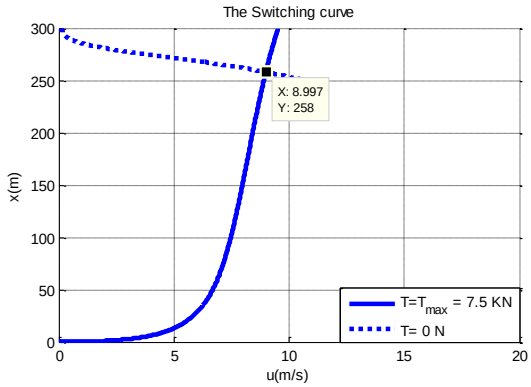
$$T = \begin{cases} T_{\max} & if\ \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial T} < 0 \\ T_{\sin g} & if\ \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial T} = 0 \\ 0 & if\ \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial T} > 0 \end{cases} \qquad (۲۸)$$

در این رابطه $T_{\sin g}$ معرف فرمان کنترلی در حالتی است که شرایط تکین رخ می دهد. با توجه به توضیحات مرجع [۱۶] شرایط تکین برای مساله مینیمم زمان هنگامی رخ می‌دهد که سیستم دینامیکی کنترل‌پذیر نباشد. اما می‌توان نشان داد که سیستم مورد بررسی دارای دینامیکی کنترل پذیر است [۱۹].

برای تعیین تعداد سوییچ‌های کنترلی، با توجه به اینکه سیستم از مرتبه ۲ می‌باشد، لذا تعداد سوییچ‌های لذا تعداد سوییچ‌های کنترلی برابر ۱ می‌باشد [۱۶]. لذا برای اینکه در مینیمم زمان به مقصد برسیم بایستی فرمان کنترلی از مقدار $T_{\max}$ به مقدار صفر سوییچ کند و بقیه حالات سوییچ کردن غیر منطقی می‌باشد.

برای تعیین زمان مینیمم و زمان سوییچ کردن مقدار تراست از مقدار ماکزیمم به صفر، پارامترهای فضای حالت u و x بر حسب هم رسم می گردد. بدین گونه که ابتدا سیستم (۲۳) از شرایط اولیه صفر با مقدار تراست ورودی ماکزیمم حل شده و در حالت دیگر دینامیک مذکور از شرایط نهایی در مقصد با مقدار تراست صفر به صورت عقب‌گرد[2] رسم شده، محل تقاطع نمودارهای مذکور محل سوییچ کنترلی را نشان می دهد.

در شکل زیر منحنی سوییچ پارامترهای کنترلی با توجه به توضیحات رسم شده است. مطابق این شکل برای اینکه با مینیمم زمان به مقصد برسیم، لازم است که شناور با ماکزیمم تراست تا مکان ۲۵۸ متر و سرعت ۹ متر بر ثانیه پیش رفته و برای اینکه به مقصد $x = 300$ m و سرعت صفر برسد، بایستی روی منحنی تراست صفر حرکت کند تا به مقصد برسد.

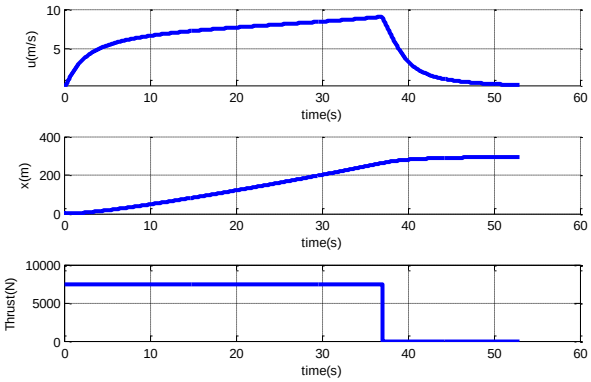


شکل ۴: منحنی فاز سیستم برای تعیین سوییچ کنترلی

برای تعیین مقدار زمان سوییچ کافی است زمانی که شناور با ماکزیمم تراست به مکان ۲۵۸ متر و سرعت ۹ متر بر ثانیه را یافت. این زمان $t = 37$ s می‌باشد. برای تعیین زمانی که شناور از مکان و سرعت مزبور به مقصد رسیده و در آن متوقف شود از داده‌های منحنی تراست صفر شکل فوق استفاده و زمان بعد از سوییچ تا انتها حدود ۱۶ ثانیه می باشد. لذا نمودار مقدار مکان و سرعت و تراست در این حالت رسم شده است.

[1] Pontryagin

[2] Backward



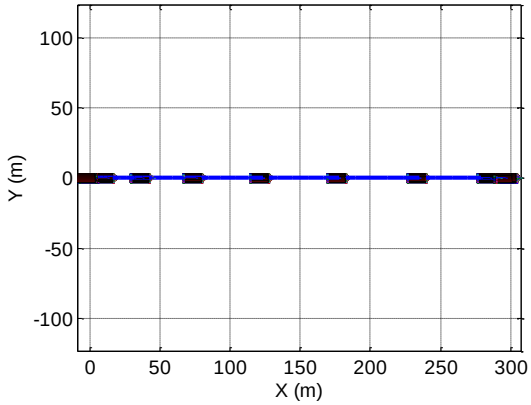
شکل ۵: نمودارهای مکان و سرعت و تراست شناور با حل تحلیلی

برای حل عددی با استفاده از فلوچارت شکل ۳، ابتدا با تشکیل تابع هزینه الحاقی به صورت معادله زیر داریم:

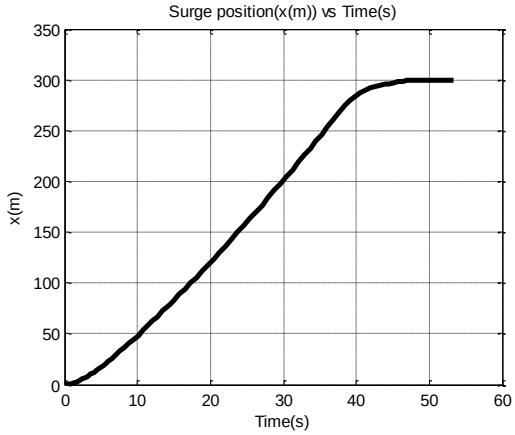
$$J_a(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)) = H'(r_k')\sum_j H(h_j) + t_f + \int_0^{t_f}\left(r_k\sum_i C_i(c_i)\right)dt \qquad (۲۹)$$

در شکل ۶ منحنی مسیر مستقیم الخط شناور آورده شده است. در شکل ۷ نمودار مکان-زمان حرکت شناور رسم شده است. همان طور که مشاهده می‌شود شناور توانسته است، مبدأ مختصات تا نقطه انتهایی را در مدت زمان ۵۳ ثانیه طی کند. در شکل ۸ سرعت پیشروی شناور رسم گردیده است. مشاهده می‌شود که شناور از حالت سکون شروع به حرکت کرده و سرعت خود را تا حدود ۹ متر بر ثانیه افزایش داده است. برای این‌که شناور در مکان مقصد توقف داشته باشد، سرعت خود را کاهش داده و در مقصد متوقف گردیده است. در شکل ۹ مقدار نیروی تراست کلی برای این سناریو رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می شود، شناور برای اینکه خود را در کمترین زمان ممکن به مقصد برساند، با بیش‌ترین مقدار تراست ممکن یعنی ۷۵۰۰ نیوتن شروع به شتاب گیری کرده است و برای اینکه در مقصد متوقف شود، از حدود ثانیه ۳۸ ام تراست صفر شده است و شناور با تنها عامل کاهش سرعت یعنی نیروی مقاومت آب توانسته سرعت خود را در انتها به صفر برساند. این شکل بیانی از اصل بنگ-بنگ[1] می‌باشد. بدین معنی که برای رسیدن در کمترین زمان ممکن، بایستی فرمان کنترلی وارد به سیستم در مدت زمان اعمال، ماکزیمم فرمان کنترلی بوده باشد. در این سناریو ماکزیمم فرمان کنترلی یعنی نیروی تراست اعمال شده و بعد از آن چون عملاً نیروی ترمزی مستقلی برای سیستم نداریم، نیروی تراست صفر شده است تا به مقصد یعنی x = 300 m برسیم.

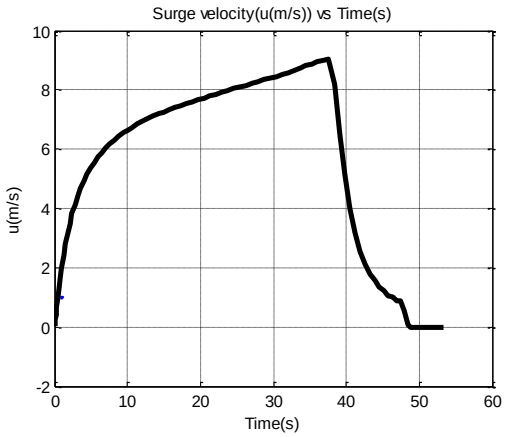
همان‌گونه که مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از روش عددی حل مساله کنترل بهینه به روش تحلیلی بسیار نزدیک است.



شکل ۶: منحنی مسیر شناور

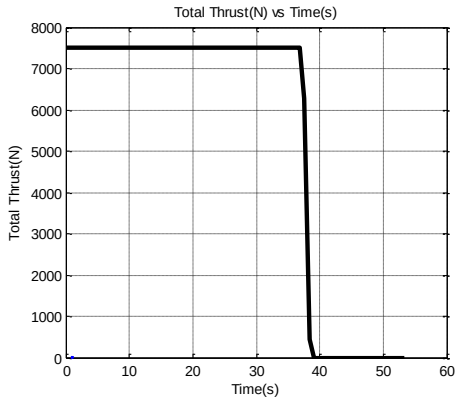


شکل ۷: منحنی مکان شناور برای رسیدن به مقصد



شکل ۸: منحنی سرعت سرج شناور بر حسب زمان

[1] Bang-bang principle



شکل ۹: منحنی سرعت سرج شناور بر حسب زمان

۴-۲ رسیدن به مقصد در کمینه زمان ممکن با جهت گیری اولیه ۹۰ درجه

در سناریوی قبل شناور مسیری مستقیم را برای رسیدن به نقطه نهایی طی کرد. در این قسمت برآنیم که نقطه پایانی به گونه ای تنظیم شود که قیود غیر هولونومیک سیستم تحریک شود. یعنی شناور در مسیر طراحی به صورت نقطه ای دیده نشود. بدین منظور همان سناریوی قبلی را تعریف می کنیم، با این تفاوت که زاویه جهت گیری یاو اولیه شناور به جای صفر درجه، ۹۰ درجه باشد. قیود زمان و کنترل (۲۴) به همراه تابع هزینه (۲۹) برقرار است، ضمن اینکه قیودی را برای سرعت سرج و سرعت‌های زاویه‌ای رول و یاو و زاویه رول شناور و زاویه چرخش پروانه‌ها نسبت به حالت عمودی به شکل معادلات (۳۰) تا (۳۴) تعریف می‌کنیم. این قیود برای حفظ ایمنی شناور و خدمه، ایجاد پایداری و حرکتی هموار برای شناور و بر اساس نتایج تست شناور در آب‌های آرام وضع شده است.

$$u(t) \le 20\frac{m}{s} \qquad (۳۰)$$

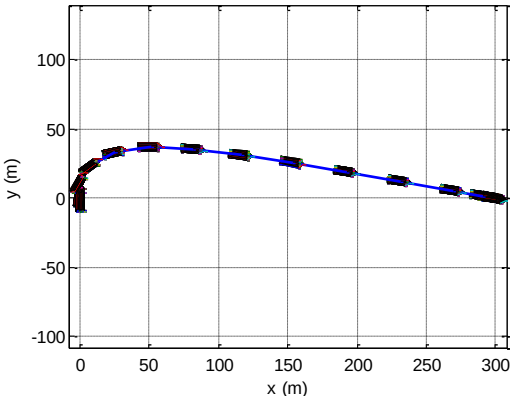
$$|p(t)| \le \frac{10\pi}{180}\frac{rad}{s} \qquad (۳۱)$$

$$|r(t)| \le \frac{15\pi}{180}\frac{rad}{s} \qquad (۳۲)$$

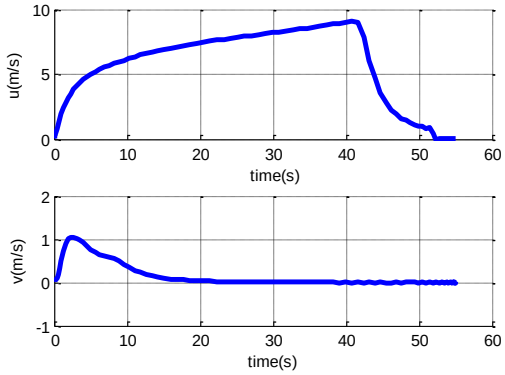
$$|\phi(t)| \le \frac{20\pi}{180} rad \qquad (۳۳)$$

$$|\phi_p(t)| \le 45^\circ \qquad (۳۴)$$

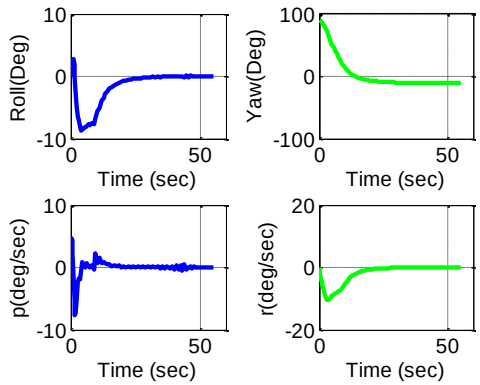
در نمودار شکل ۱۰ مسیر شناور و در شکل ۱۱ سرعت سرج و اسوی شناور رسم شده است. مشاهده می‌گرددکه الگوریتم کنترلی، مسیر شناور را به گونه‌ای رقم زده است که شناور بعد از مدتی با مسیر مستقیم الخط به مقصد رسیده و در آنجا متوقف شده است. در شکل ۱۲ مقادیر زوایای رول و یاو به همراه سرعت‌های زاویه‌ای متناظر با آن رسم شده است. مقدار زوایا و سرعت‌های متناظر آن از مقدار مجاز تجاوز نکرده‌اند . در نهایت ورودی‌های کنترلی لازم برای این سناریو در شکل ۱۳ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، شناور برای اینکه خود را در کمترین زمان ممکن به مقصد برساند، با بیش‌ترین مقدار پیش‌رانش ممکن یعنی ۷۵۰۰ نیوتن شروع به شتاب گیری کرده است و برای اینکه در مقصد متوقف شود، از حدود ثانیه ۴۰ ام پیش‌رانش صفر شده است و شناور با تنها عامل کاهش سرعت یعنی نیروی مقاومت آب توانسته سرعت خود را در انتها به صفر برساند. در این حالت نیز اصل بنگ-بنگ برقرار می‌باشد.



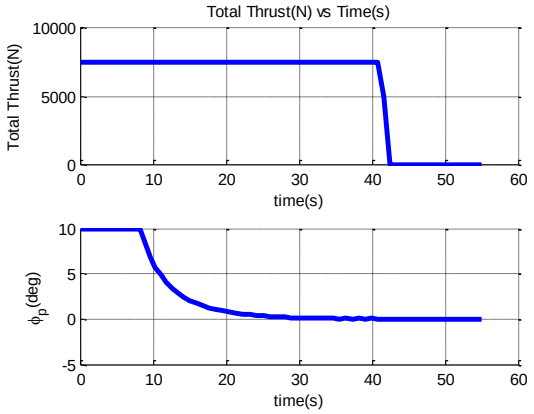
شکل ۱۰: نمودار مسیر حرکت شناور تا رسیدن به نقطه مقصد در کمترین زمان ممکن



شکل ۱۱: نمودار سرعت های خطی شناور بر حسب زمان



شکل ۱۲: نمودار زوایای رول و یاو به همراه سرعت‌های زاویه‌ای متناظر با آن



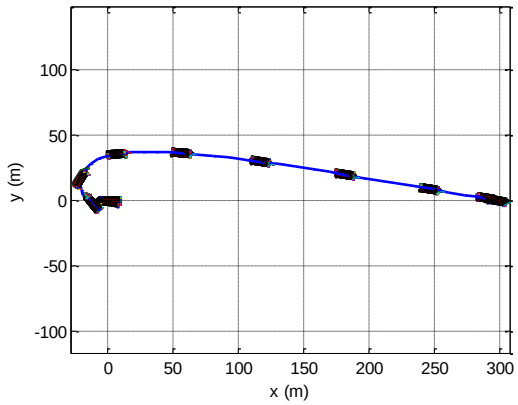
شکل ۱۳: نمودار ورودی های کنترلی شناور بر حسب زمان

۳-۴ رسیدن به مقصد در کمینه زمان ممکن در خلاف خط دید شناور

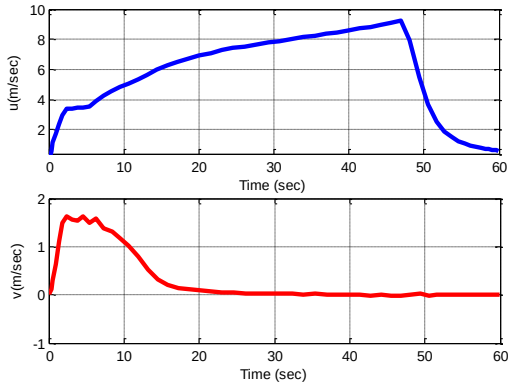
در این قسمت برای بررسی کارایی بیشتر فرض می‌شود که شناور با زاویه یاو ۱۸۰ در مبدأ مختصات قرار دارد و بایستی به مقصد $x=300m, y=0$ رفته و در آنجا متوقف شود. قیود زمان و کنترل (۲۴) به همراه تابع هزینه (۲۹) و معادلات (۳۰) تا (۳۴) همچنان برقرار است.

در شکل ۱۴ مسیر حرکت شناور رسم شده است. ملاحظه می‌گردد که شناور با طی یک مسیر منحنی الشکل سرانجام به صورت مستقیم الخط به نقطه مقصد رسیده است.

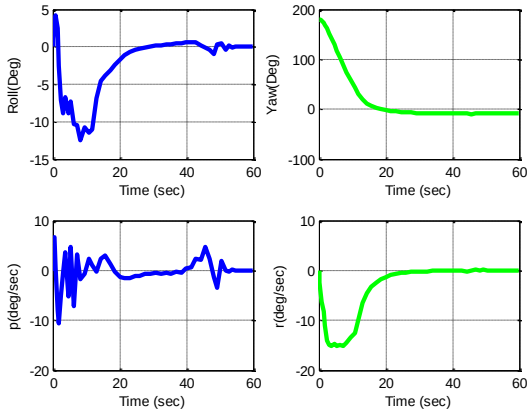
در شکل ۱۵ سرعت‌های خطی شناور و در شکل ۱۶ زوایای رول و یاو به همراه سرعت‌های متناظر با آن رسم شده است. رسم شده است. در شکل ۱۷ نیز مقدار ورودی‌های کنترلی برای رسیدن به مقصد رسم شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که زاویه چرخش پروانه شناور از مقدار ۱۵ درجه شروع شده و به تدریج بعد از اینکه مقصد در راستای خط دید شناور قرار گرفت، این زاویه صفر می‌گردد.



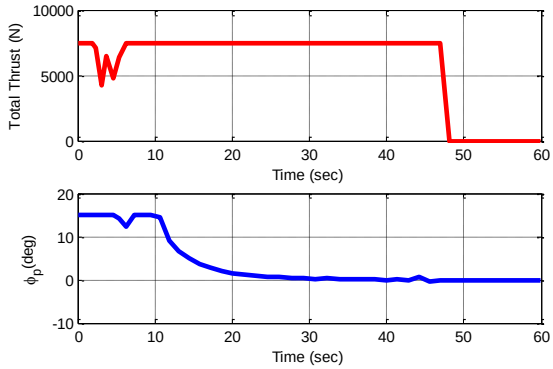
شکل ۱۴: نمودار مسیر حرکت شناور تا رسیدن به نقطه مقصد در کمترین زمان ممکن در شرایط اولیه خلاف خط دید شناور



شکل ۱۵: نمودار سرعت های خطی شناور بر حسب زمان



شکل ۱۶: نمودار زوایای رول و یاو به همراه سرعت‌های زاویه‌ای متناظر با آن



شکل ۱۷: نمودار ورودی های کنترلی شناور بر حسب زمان

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله مساله طراحی مسیر بهینه برای یک شناور تندرو پروازی با استفاده از تکنیک بهینه‌سازی غیرمستقیم، ارائه شد. بدین منظور ابتدا معادلات فضای حالت و معادلات شبه‌حالت بدست آمد و سپس با تعریف تابع هدف مطلوب، و با تعریف قیود لازم برای متغیر-های فضای حالت و کنترل و اعمال آن به تابع هزینه از روش تابع جریمه خطی توسعه یافته، با تکیک گرادیانی سریعترین شیب، جواب بهینه

بدست آمد. در این راستا سناریوی مینیمم زمان مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل نشان‌دهنده توانمندی روش مذکور در طراحی مسیرهای بهینه برای شناورهای تندرو پروازی است.

مراجع

[1] K. Djouani and Y. Hamam, "Optimal constrained multi-criteria trajectory planning for ship maneuvering and control," in Second IEEE Conference on Control Applications, pp. 525-530 vol.2, 1993.

[2] G. N. Roberts, "Trends in marine control systems," Annual Reviews in Control, vol. 32, pp. 263-269, 2008.

[3] C. G. Kallstrom, "Autopilot and track-keeping algorithms for high-speed craft," Control Engineering Practice, vol. 8, pp. 185-190, 2000.

[4] J. T. Betts, "Survey of numerical methods for trajectory optimization," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 21, pp. 193-207, 1998.

[5] K. Djouani and Y. Hamam, "Minimum time-energy trajectory planning for automatic ship berthing," IEEE Journal of Oceanic Engineering, vol. 20, pp. 4-12, 1995.

[6] K. Avgouleas, "Optimal ship routing," MSC Thesis, Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 2008.

[7] K. Ohtsu, et al., "Minimum-time maneuvering of a ship, with wind disturbances," Control Engineering Practice, vol. 4, pp. 385-392, 1996.

[8] N. Mizuno, et al., "Minimum time ship maneuvering method using neural network and nonlinear model predictive compensator," Control Engineering Practice, vol. 15, pp. 757-765, 2007.

[9] X. D. Cheng, et al., "Trajectory Optimization for Ship Collision Avoidance System Using Genetic Algorithm," in OCEANS 2006 - Asia Pacific, pp. 1-5, 2006.

[10] J. B. Escario, et al., "Optimization of autonomous ship maneuvers applying swarm intelligence," in 2010 IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics (SMC), pp. 2603-2610, 2010.

[11] T. I. Fossen, Guidance and control of ocean vehicles, Wiley, 1994.

[12] T. I. Fossen, Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control, John Wiley & Sons, 2011.

[13] E. M. Lewandowski, The dynamics of marine craft: maneuvering and seakeeping, World Scientific, 2004.

[14] O. M. Faltinsen, Hydrodynamics of high-speed marine vehicles, Cambridge University Press, 2005.

[15] T. Perez, et al., Ship Motion Control Course Keeping and Roll stabilisation Using Rudder and Fins, Springer London, pp. 45-58, 2005.

[16] D. E. Kirk, Optimal control theory: an introduction, Dover Publications, 2004.

[17] S. S. Rao, Engineering optimization: theory and practice, John Wiley & Sons, 2009.

[18] G. Huntington, "Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems," Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, United States, Massachusetts, 2007.

[۱۹] محمد تقی قربانی، " طراحی مسیر و الگوریتم هدایت بهینه برای یک شناور تندرو پروازی،" پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۹۰.