

## تحلیل مدل SQEIAR و طراحی کنترل کننده فازی مد لغزشی به منظور تعیین

### نرخ قرنطینه سازی برای پاندمی کووید-۱۹

امیرحسین امیری مهرا<sup>۱</sup>، محسن شفیعی راد<sup>۲</sup>، زهره عباسی<sup>۳</sup>، ایمان زمانی<sup>۴</sup>، زهره اعرابی<sup>۵</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه کاشان a.amirimehra@grad.kashanu.ac.ir

<sup>۲</sup>استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه کاشان m.shafieirad@kashanu.ac.ir

<sup>۳</sup>دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه کاشان abbasi.z@grad.kashanu.ac.ir

<sup>۴</sup>استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، دانشگاه شاهد zamaniiman@shahed.ac.ir

<sup>۵</sup>دانشکده پزشکی، دانشگاه علوم پزشکی کاشان، کاشان، ایران aarabizohreh.academic@gmail.com

تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۹/۱۰/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۹/۱۱/۲۵

**چکیده:** با توجه به شیوع گسترده پاندمی ویروس کرونا (کووید-۱۹) در سراسر جهان، مدل‌های ریاضی می‌توانند به پیش‌بینی و کنترل این پاندمی کمک کنند. از این رو، در این مقاله ابتدا یک مدل جامع برای بررسی روند بیماری کووید-۱۹ مبتنی بر افراد مستعد، در معرض، عفونی (باعلامت و بدون علامت) و بهبود یافته در نظر گرفته می‌شود. سپس با توجه به فقدان هرگونه واکسیناسیون عمومی یا درمان موثر، گروه افراد «در قرنطینه» به مدل مذکور اضافه می‌شود. پس از بررسی مثبت بودن حالات و محاسبه معیار آستانه ( $R_0$ ) به محاسبه نقاط تعادل (تعادل بدون بیماری و اندمیک) پرداخته و پایداری آن‌ها با استفاده از ماتریس ژاکوبین بررسی می‌شود. در ادامه، توسط یک کنترل کننده فازی مد لغزشی، نرخ قرنطینه سازی به عنوان تنها ورودی کنترلی بیماری تعیین و تنظیم می‌گردد. میزان کارایی کنترل کننده نیز در حضور عدم قطعیت پارامترهای مدل بررسی می‌شود که نتایج حاصل، مؤید عملکرد مطلوب آن است. همچنین، تأثیر جامعه آلوده بر سایر جوامع در حضور کنترل کننده بررسی خواهد شد. در نهایت، عملکرد و کارایی کنترل کننده توسط شبیه سازی، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

**کلمات کلیدی:** کووید-۱۹، مدل سازی ریاضی، تحلیل پایداری، قرنطینه، فازی مد لغزشی.

## Fuzzy Sliding Mode Controller Design and Analysis of an SQEIAR Epidemic Model for COVID-19 to Determine the Quarantine Rate

Amir Hossein Amiri Mehra, Mohsen Shafieirad, Zohreh Abbasi, Iman

Zamani, Zohreh Aarabi

**Abstract:** According to the global prevalence of coronavirus (COVID-19) pandemic, mathematical models can predict and control the dynamic behavior of the pandemic. Therefore, in this study, a comprehensive model is considered to examine the trend of COVID-19 based on Susceptible, Exposed, Infected (Symptomatic and Asymptomatic), and Recovered individuals. In the absence of a curative treatment or vaccination campaign, the group of "quarantined people" is added to the model. Then, a positivity analysis of states is examined, and the threshold criterion ( $R_0$ ) is determined. The equilibrium points (disease-free and endemic) are also calculated, and their stability is investigated using the Jacobin matrix. The quarantine rate is regulated as the only control input using the fuzzy sliding mode controller. The efficiency of the controller is also investigated in the presence of uncertainty in model parameters. Also, the impact of the infected community on other communities, considering the controller, will be examined. Finally, the performance and efficiency of the proposed controller are evaluated.

**Keywords:** COVID-19, Mathematical Modeling, Stability Analysis, Quarantine, Fuzzy Sliding Mode.

## ۱- مقدمه

کروناویروس‌ها<sup>۱</sup> خانواده بزرگی از ویروس‌ها هستند که می‌توانند عامل ایجاد بیماری‌هایی مانند سرماخوردگی معمولی تا بیماری‌های شدیدتری همچون سارس<sup>۲</sup>، مرس<sup>۳</sup> شوند [۱]. آخرین نوع از این ویروس، کروناویروس سندروم<sup>۴</sup> حاد تنفسی (SARS-CoV-2) است که عامل ابتلا به بیماری کووید-۱۹<sup>۵</sup> می‌باشد. علائم بیماری کووید-۱۹ می‌تواند شامل علائم سرماخوردگی عادی تا تب و لرز، سرفه، تنگی نفس، مشکلات حاد تنفسی و مشکلات گوارشی باشد. کروناویروس علاوه بر دستگاه تنفسی می‌تواند ارگان‌های حیاتی دیگر بدن مانند کلیه، قلب و مغز را نیز درگیر کند. همچنین در سالمندان و افراد دارای بیماری‌های زمینه‌ای مانند فشار خون بالا، بیماری‌های قلبی و دیابتی، شدت بیماری بیشتر بوده است [۲ و ۳].

بیماری کووید-۱۹ در دسامبر ۲۰۱۹ در شهر ووهان چین با همه‌گیری در انسان آغاز شد و در مدتی کوتاه به شکل پاندمی درآمد. همچنین در تاریخ یکم اسفند ۱۳۹۸، دو مورد ابتلا به بیماری کرونا به طور رسمی در کشور ایران گزارش شد [۴]. برای جلوگیری از شیوع ویروس کرونا، دولت ایران محدودیت‌هایی مانند فاصله‌گذاری اجتماعی، لغو تجمعات، محدود کردن سفرها، تعطیلی مدارس، دانشگاه‌ها و مراکز خرید و... را وضع نمود. قرنطینه خانگی افراد نیز به عنوان موثرترین و مهم‌ترین روش جلوگیری از شیوع پاندمی در بسیاری از شهرهای کشور انجام گردید. اما از اردیبهشت ۱۳۹۹ و زمانی که محدودیت‌های دولت به تدریج کاهش یافت، تعداد موارد مبتلایان که روندی کاهشی به خود گرفته بود مجدداً افزایش یافت و قله‌ای جدید در تعداد مرگ و میر و ابتلای بیماران ایجاد شد [۴]. پس از آن در پاییز ۱۳۹۹، ایران شاهد سومین قله در شیوع پاندمی ویروس کرونا بود. در نتیجه، با توجه به روند افزایشی ویروس کرونا، شناخت نحوه عملکرد آن، به منظور اعمال کنترل‌کننده مناسب برای کاهش شیوع، امری ضروری می‌باشد.

از آنجاییکه پیش‌بینی مراحل و روند رشد بیماری با روش‌های معمول به‌سادگی امکان‌پذیر نیست، در نتیجه از طریق مدل‌سازی و با در نظر گرفتن عوامل موثر در تغییر این روند، می‌توان مراحل رشد پاندمی را پیش‌بینی کرده و به تصمیم‌گیری در مورد مدیریت پاندمی، تخصیص بودجه مناسب، اجرای اقدامات فاصله‌گذاری اجتماعی و... پرداخت تا بتوان شیوع بیماری را تا زمانیکه واکنس در دسترس عموم قرار گیرد کنترل نمود. با توجه به اهمیت تشخیص روند بیماری کووید-۱۹ در سراسر جهان، استفاده از مدل‌سازی ریاضی در تحلیل عملکرد این بیماری در تحقیقات اخیر بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. نویسندگان در [۷-۵] به ساده‌ترین نوع مدل‌سازی همه‌گیری، شامل افراد مستعد<sup>۶</sup>، بیمار<sup>۷</sup> و بهبود یافته<sup>۸</sup> برای این بیماری پرداخته‌اند که با توجه به ماهیت و طبیعت متفاوت این ویروس، لزوم افزودن گروه‌های جدید برای بررسی دقیق‌تر بیماری احساس

می‌شود. از اینرو، دریس کادا و همکاران در [۸] به مطالعه یک مدل ریاضی برای بررسی بیماری کووید-۱۹ در مراکش پرداخته‌اند که در آن، گروه افراد آلوده به سه دسته «عفونی بدون علائم، عفونی با علائم و عفونی دارای عوارض» تقسیم شده است. مدل مذکور شامل دو استراتژی کنترلی «درمان بیماران آلوده با قرنطینه‌سازی در بیمارستان‌ها» و «استفاده از ماسک برای پوشاندن اعضای حساس بدن» است.

مطالعات دیگری نیز در زمینه مدل‌سازی و بیماری کووید-۱۹ با محوریت بررسی پایداری نقاط تعادل و محاسبه تعداد بازتولید اساسی صورت گرفته است [۹] و [۱۰]. پیو سامویی و همکاران در [۹] مدلی ریاضی برای پیش‌بینی و کنترل دینامیک پاندمی کووید-۱۹ در کشور هند معرفی کرده‌اند که شامل افراد «مستعد، بیمار بدون علامت، بیمار با علامت گزارش شده و بیمار با علامت گزارش نشده» است. در نهایت با محاسبه عدد بازتولید اساسی ( $R_0$ ) به تجزیه و تحلیل پایداری برای نقطه تعادل بدون بیماری و همچنین نقطه تعادل اندمیک<sup>۹</sup> پرداخته‌اند. فاجال ناندرو و همکاران [۱۰] نیز مدل ریاضی دیگری با تمرکز ویژه بر انتقال ویروس توسط افراد فوق‌العاده پخش‌کننده در شهر ووهان چین در نظر گرفته و به پایداری نقطه تعادل بدون بیماری از دیدگاه عدد بازتولید اساسی را بررسی نموده‌اند. نویسندگان در [۱۱] به مدل‌سازی بیماری آنفلوآنزا پرداخته‌اند، اما از آنجاییکه مدل‌سازی بیماری‌های عفونی غالباً مختص یک بیماری خاص نیست، می‌توان اینگونه مدل‌سازی‌ها را با تغییر در پارامترها و گاه‌آضافه و یا کم کردن برخی حالت‌ها به سایر بیماری‌ها از جمله ویروس کرونا نیز گسترش داد. از اینرو، در این مقاله، مدل جامع ذکر شده در [۱۱] که شامل افراد مستعد، در معرض، عفونی (با علامت و بدون علامت) و بهبود یافته است، در نظر گرفته می‌شود. سپس با توجه به سرعت شیوع پاندمی در ایران که همچنان دارای نرخ صعودی است بر لزوم قرنطینه‌سازی به عنوان ابزار کنترل بیماری، تاکید شده و گروه جدیدی به نام افراد قرنطینه شده همانند [۱۲] و [۱۳] که افراد قرنطینه شده را به عنوان یک گروه مجزا در دینامیک در نظر گرفتند، اضافه می‌شود. مدل مذکور، در عین سادگی، گروه‌های درگیر پاندمی و ارتباط آن‌ها با یکدیگر در جامعه را به‌خوبی نمایش می‌دهد.

طولانی شدن پاندمی نه تنها باعث بالا رفتن آمار مرگ و میر می‌شود، بلکه هزینه‌های هنگفت درمانی و بهداشتی برای جلوگیری از انتشار ویروس در جامعه را افزایش داده و پیامدهای اقتصادی زیان‌باری خواهد داشت. در این راستا، نویسندگان در [۱۴]، دینامیک پاندمی ویروس کرونا را با استفاده از مدل شامل افراد مستعد، در معرض، عفونی و حذف شده با نرخ تماس غیرخطی مدل کرده‌اند. سپس به منظور کنترل انتقال پاندمی، ضریب تابع تماس غیرخطی را به عنوان ورودی کنترلی اتخاذ کرده و با استراتژی مد لغزشی به کنترل این ضریب پرداخته‌اند. به دلیل ماهیت

<sup>6</sup> Susceptible<sup>7</sup> Infected<sup>8</sup> Recovered<sup>9</sup> Endemic<sup>1</sup> Coronaviruses<sup>2</sup> SARS<sup>3</sup> MERS<sup>4</sup> Syndrome<sup>5</sup> COVID-19

روش دوم استفاده می شود. با توجه به وجود عدم قطعیت در پارامترهای مدل مورد استفاده در مقاله پیش رو، می توان از [۲۴] برای مطالعه بیشتر در رابطه با کنترل فازی سیستم های دارای عدم قطعیت استفاده کرد. همچنین خوانندگان برای مطالعه بیشتر در مورد کنترل فازی مد لغزشی به [۲۵-۲۷] ارجاع داده می شوند.

علاوه بر طراحی کنترل کننده توسط منطق فازی می توان از آن، جهت مدل سازی سیستم نیز استفاده نمود که در [۲۸] و [۲۹] به آن پرداخته شده است. همچنین برای بررسی پایداری کنترل کننده در سیستم فازی می توان از [۳۰-۳۲] استفاده کرد. اگر علاوه بر تأثیر زمان، تأثیر جابجایی در مکان نیز در شیوع بیماری در نظر گرفته شود، یک مدل اپیدمی دو بعدی حاصل خواهد شد که با معادلات دیفرانسیل جزئی قابل توصیف است. برای آشنایی بیشتر با این نوع معادلات به [۳۳-۳۵] مراجعه شود.

این مقاله در ادامه به این صورت سازماندهی می شود: در بخش ۲، بیان مسئله مورد نظر به همراه معرفی مدل سیستم تشریح می گردد. در بخش ۳، نقاط تعادل بدون بیماری و اندمیک مدل پاندمی و عدد باز تولید اساسی محاسبه شده و تحلیل پایداری نقاط تعادل با استفاده از ماتریس ژاکوبین<sup>۴</sup> بیان شده است. تأثیر نرخ قرنطینه سازی در شیوع و کنترل پاندمی و چالش های اعمال این نرخ در بخش ۴ مورد بحث قرار می گیرد. در بخش ۵، کنترل کننده فازی مد لغزشی بر روی مدل دارای عدم قطعیت در پارامتر اعمال می شود. در ادامه، در بخش ۶ تأثیر جامعه آلوده بر جوامع دیگر بحث شده و سپس به منظور بررسی عملکرد کنترل کننده، شبیه سازی عددی در بخش ۷ انجام می شود. در نهایت، نتیجه گیری و جمع بندی در بخش ۸ ارائه خواهد شد.

## ۲- بیان مسئله

مدلی که در این پژوهش مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته، مدل SQEJAR<sup>۵</sup> برگرفته از [۱۲] است. مدل مذکور در نهایت سادگی تمام گروه های درگیر با ویروس کرونا را در بر گرفته و ارتباط آن ها را بخوبی مشخص کرده است. حالت ها (گروه ها) شامل افراد مستعد (S)، قرنطینه شده (Q)، در معرض (E)، بیمار با علامت (I)، بیمار بی علامت (A) و بهبود یافته (R) هستند. که در آن افراد مستعد (گروه S) به کسانی گفته می شود که مستعد ابتلا به پاندمی هستند ولی هنوز آلوده نیستند، افراد قرنطینه شده (گروه Q) نیز شامل گروهی از افراد است که در قرنطینه به سر می برند. با وجود کشف و تزریق واکسن مدت زمان و میزان مصونیت افراد در برابر ویروس کاملاً شناخته شده نیست. بنابراین همچنان لزوم اجرای قرنطینه سازی افراد مستعد امری ضروری است [۱۳]. در این مدل، «افراد در معرض» (گروه E) بیانگر افرادی هستند که در معرض پاندمی قرار دارند (آلوده اند اما هنوز عفونی نیستند و توانایی انتقال بیماری را ندارند)، «افراد بیمار» (گروه I) نیز به افراد عفونی همراه با علائم بیماری گفته می شود.

بیماری ویروس کرونا، در نظر گرفتن گروه افراد عفونی بی علامت می تواند مدل را به دنیای واقعی نزدیک تر کند که در [۱۴] این گروه در نظر گرفته نشده است و از آنجاییکه نرخ تماس مستقیماً قابل کنترل نیست، ابتدا باید قرنطینه اعمال گردد تا در نتیجه آن نرخ تماس کاهش یابد، پس لزوم در نظر گرفتن یک گروه به نام «افراد قرنطینه شده» احساس می گردد. همچنین مطالعات دیگری در زمینه کنترل مد لغزشی با رویکرد بیماری های پاندمیک و اپیدمیک، بدون در نظر گرفتن قرنطینه سازی، انجام شده است که می توان به [۱۱]، [۱۵] و [۱۶] اشاره کرد. در هر حال از آنجاییکه تنها راه جلوگیری از انتشار ویروس کرونا تا یافتن واکسن مؤثر، اعمال قرنطینه است، پس مدل های مذکور قابلیت کمتری برای نشان دادن ویژگی های این پاندمی داشته و برای بررسی این بیماری نیاز به در نظر گرفتن قرنطینه در مدل احساس می شود. در نتیجه در مقاله پیش رو، گروه جدیدی با نام «افراد قرنطینه شده» به مدل ارائه شده در [۱۱] اضافه می شود تا بتوان بطور مستقیم به جلوگیری از انتشار ویروس کمک کرد [۱۲] و [۱۳].

با توجه به اینکه کنترل مد لغزشی دارای دقت بالا، قابلیت تنظیم پارامترها به شکل آسان و مقاومت در حضور عدم قطعیت محدود در پارامترها است، در مطالعه پیش رو نرخ تماس به عنوان عدم قطعیت در نظر گرفته شده و سپس نرخ قرنطینه سازی به عنوان یک ورودی کنترلی حاصل از مد لغزشی به مدل اعمال می گردد. با اینکه کنترل مد لغزشی از مزایای زیادی برخوردار است، اما همواره مسئله چترینگ<sup>۱</sup> ناشی از ناپوستگی تابع علامت<sup>۲</sup> در سیگنال کنترل ورودی باعث ایجاد مشکل می گردد و گاهی اوقات می تواند عملکرد سیستم را ناپایدار سازد. روش های مختلفی برای کاهش چترینگ پیشنهاد شده که یکی از این روش ها، جایگزینی تابع علامت با یک تقریب پیوسته مانند توابع اشباع<sup>۳</sup> یا تانژانت هیپربولیک است. لازم به ذکر است، استفاده از کنترل مد لغزشی مرتبه بالاتر [۱۷]، شبکه های عصبی [۱۸] و [۱۹]، و روش لایه مرزی نازک [۲۰] در همسایگی سطح لغزش نیز می تواند اثر چترینگ را از بین ببرد اما یک خطای ثابت حالت ماندگار به وجود می آید. یکی دیگر از روش های حذف چترینگ در استراتژی مد لغزشی، استفاده از منطق فازی به عنوان یک تکنیک کنترل هوشمند مبتنی بر دانش بشر و محاسبات ریاضی کمتر می باشد که آن را به یک روش کنترلی آسان تبدیل کرده است. این منطق از استدلال تقریبی استفاده می کند و عبارات زبانی را به رابطه بین متغیرهای سیستم اعمال می کند [۲۱]. نویسندگان در [۲۲] ابتدا یک کنترل کننده مد لغزشی برای مدل کواد کوپتر طراحی کردند سپس بهره سوئیچینگ کنترل کننده مد لغزشی را بر اساس تکنیک کنترل فازی تنظیم کرده اند. همچنین در [۲۳] از کنترل فازی در تنظیم بلادرنگ ضریب سطح لغزش به منظور اصلاح عملکرد (زمان نشست و فراجش کمتر) استفاده شده است. حذف چترینگ با استفاده از منطق فازی به دو صورت «فازی کردن لایه مرزی» و «فازی کردن ضریب تابع علامت» انجام می شود که در این مطالعه از

<sup>4</sup> Jacobian Matrix

<sup>5</sup> Susceptible-Quarantine-Exposed-Infected-Asymptomatic-Recovered

<sup>1</sup> Chattering

<sup>2</sup> Sign Function

<sup>3</sup> Saturation Function

شکل ۱: بلوک دیاگرام مدل SQEIAR [۱۲].

برای بررسی همواره مثبت بودن حالات (تعداد افراد) در دینامیک مذکور از قضیه زیر استفاده می شود:

**قضیه ۱-** اگر تمام شرایط اولیه بزرگتر یا مساوی صفر باشند، آنگاه پاسخ های  $S(t), E(t), I(t), Q(t), A(t), R(t)$  در سیستم (۱) به ازای زمان های  $t \geq 0$  همواره مثبت هستند.

**اثبات-** با توجه به معادله (۱-الف) و دانستن  $S(t) < 1$  می توان نوشت:

$$\dot{S}(t) \geq -(\beta\Lambda(t) + \lambda)S(t)$$

سپس،

$$\dot{S}(t) + (\beta\Lambda(t) + \lambda)S(t) \geq 0$$

حال اگر دو طرف ناتساوی را در  $e^{\int_0^t (\beta\Lambda(s) + \lambda) ds}$  ضرب کنیم، داریم:

$$\dot{S}(t)e^{\int_0^t (\beta\Lambda(s) + \lambda) ds} + (\beta\Lambda(t) + \lambda)S(t)e^{\int_0^t (\beta\Lambda(s) + \lambda) ds} \geq 0$$

که می توان به فرم زیر نوشت:

$$\frac{d(S(t)e^{\int_0^t (\beta\Lambda(s) + \lambda) ds})}{dt} \geq 0$$

حال با انتگرال گیری از دو طرف ناتساوی در بازه  $t$  تا  $t$  داریم:

$$S(t) \geq S(0)e^{-\int_0^t (\beta\Lambda(s) + \lambda) ds} \geq 0$$

در نتیجه  $S(t)$  همواره مثبت است. برای سایر حالات  $(Q, E, I, A, R)$  نیز به طریق مشابه می توان اثبات کرد که همواره مثبت هستند. یعنی،  $Q(t) \geq 0, E(t) \geq E(0)e^{-\int_0^t (\kappa + \mu) ds} \geq 0, I(t) \geq 0, A(t) \geq A(0)e^{-\int_0^t (\eta + \mu) ds} \geq 0, R(t) \geq 0$  و  $R(t) \geq 0$  و  $R(0)e^{-\int_0^t (\eta_1) ds} \geq 0$  ■

### ۳- محاسبه نقاط تعادل، معیار آستانه $(R_0)$ و

#### تحلیل پایداری

در این بخش، نقاط تعادل مدل پیشنهاد شده در دو حالت بدون بیماری و اندمیک محاسبه و پایداری این نقاط مورد تحلیل و بررسی قرار می گیرد. نقاط تعادل از برابر با صفر قرار دادن معادلات (۱) به فرم زیر بدست می آیند:

$$Q_{DFS} = (N, 0, 0, 0, 0, 0) \tag{۲}$$

که  $Q_{DFS}$  تعادل بدون بیماری و یا پاسخ بدون بیماری نامیده می شود. نقطه تعادل اندمیک<sup>۲</sup> (پاسخ اندمیک) نیز به صورت زیر بدست می آید:

$$Q_{ES} = (S^*, Q^*, E^*, I^*, A^*, R^*) = \left( \frac{\mu + \kappa}{\beta} \left[ \frac{1}{\epsilon + (1-q)c_2 + \delta c_1} \right], \frac{\lambda}{\mu} S^*, \frac{1 - S^* - Q^*}{1 + c_1 + c_2 + \frac{z\eta}{\mu} c_1 + \frac{f\alpha}{\mu} c_2}, c_2 E^*, c_1 E^*, \left[ \frac{z\eta}{\mu} c_1 + \frac{f\alpha}{\mu} c_2 \right] E^* \right) \tag{۳}$$

که در آن،  $c_2 = \frac{p\kappa + \eta(1-z)c_1}{\mu + \alpha}$  و  $c_1 = \frac{\kappa(1-p)}{\mu + \eta}$  می باشد. برای بررسی میزان مسری بودن یک بیماری از تعریفی به نام عدد باز تولید اساسی<sup>۳</sup> استفاده

همچنین به دلیل دوره نهان بیماری، افراد بیماری هستند که علائمی از بیماری را در خود نشان نمی دهند اما می توانند به راحتی ویروس را به سایرین منتقل کنند. از اینرو در نظر گرفتن این افراد به عنوان یک گروه مجزا می تواند مدل سازی را به دنیای واقعی نزدیکتر کند. در نتیجه به حاملان ویروس بدون هیچ گونه علامت قابل توجه نیز «افراد بی علامت» (گروه A) گویند. افراد بهبود یافته از ویروس نیز با نام «افراد بهبود یافته» (گروه R) شناخته می شوند. در نهایت، N نشان دهنده کل جمعیت است. معادلات فضای حالت این مدل به صورت زیر می باشند:

$$\dot{S}(t) = (1 - S(t))\mu - \beta\Lambda(t)S(t) - \lambda S(t) \tag{۱-الف}$$

$$\dot{Q}(t) = \lambda S(t) - \mu Q(t) \tag{۱-ب}$$

$$\dot{E}(t) = \beta\Lambda(t)S(t) - (\kappa + \mu)E(t) \tag{۱-ج}$$

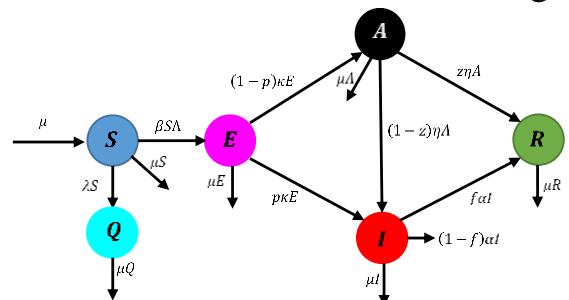
$$\dot{I}(t) = (1 - z)\eta A(t) - (\alpha + \mu)I(t) + p\kappa E(t) \tag{۱-د}$$

$$\dot{A}(t) = (1 - p)\kappa E(t) - (\eta + \mu)A(t) \tag{۱-ه}$$

$$\dot{R}(t) = z\eta A(t) + f\alpha I(t) - \mu R(t) \tag{۱-و}$$

بطوریکه،  $N(t) = S(t) + Q(t) + E(t) + I(t) + A(t) + R(t)$  و  $\Lambda(t) = \epsilon E(t) + (1 - q)I(t) + \delta A(t)$ . شرایط اولیه به صورت  $(S(0), Q(0), E(0), I(0), A(0), R(0)) = (S_0, Q_0, E_0, I_0, A_0, R_0)$  مثبت در نظر گرفته شده اند. همچنین تمام پارامترها دارای عدم قطعیت هستند و مقداری بین صفر و یک دارند.

همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده است، افراد مستعد با نرخ  $\lambda$  به گروه افراد قرنطینه شده می روند. افراد در معرض  $(E)$ ، با نرخ  $\kappa$  به پاندمی مبتلا شده و سپس به دو گروه عفونی باعلامت  $(I)$  و بدون علامت  $(A)$  تقسیم می شوند. کسر  $p$  از اشخاص در معرض به گروه عفونی باعلامت و مابقی (کسر  $(1 - p)$ ) به گروه بدون علامت می روند. کسر  $z$  از افراد بدون علامت  $(A)$  گروه خود را با نرخ  $\eta$  ترک می کنند و به گروه بهبود یافته  $(R)$  می روند و کسر  $(1 - z)$  به گروه افراد عفونی باعلامت  $(I)$  منتقل می شوند. همچنین، کسر  $f$  از افراد عفونی باعلامت با نرخ  $\alpha$  بهبود پیدا کرده و کسر  $(1 - f)$  از آن ها در اثر ابتلا به ویروس کرونا می میرند. نرخ تولد (مرگ طبیعی) توسط  $\mu$  نشان داده شده است. در هر گروه به استثنای افراد بهبود یافته، افراد با نرخ  $\mu$  به طور طبیعی فوت می کنند و افراد بهبود یافته نیز با نرخ  $\mu$  ترخیص می شوند.



<sup>3</sup> Basic Reproduction Number

<sup>1</sup> Disease Free Solution

<sup>2</sup> Endemic Solution

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial S} & \frac{\partial S}{\partial Q} & \frac{\partial S}{\partial E} & \frac{\partial S}{\partial I} & \frac{\partial S}{\partial A} & \frac{\partial S}{\partial R} \\ \frac{\partial Q}{\partial S} & \frac{\partial Q}{\partial Q} & \frac{\partial Q}{\partial E} & \frac{\partial Q}{\partial I} & \frac{\partial Q}{\partial A} & \frac{\partial Q}{\partial R} \\ \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial Q} & \frac{\partial E}{\partial E} & \frac{\partial E}{\partial I} & \frac{\partial E}{\partial A} & \frac{\partial E}{\partial R} \\ \frac{\partial I}{\partial S} & \frac{\partial I}{\partial Q} & \frac{\partial I}{\partial E} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial A} & \frac{\partial I}{\partial R} \\ \frac{\partial A}{\partial S} & \frac{\partial A}{\partial Q} & \frac{\partial A}{\partial E} & \frac{\partial A}{\partial I} & \frac{\partial A}{\partial A} & \frac{\partial A}{\partial R} \\ \frac{\partial R}{\partial S} & \frac{\partial R}{\partial Q} & \frac{\partial R}{\partial E} & \frac{\partial R}{\partial I} & \frac{\partial R}{\partial A} & \frac{\partial R}{\partial R} \end{pmatrix} \quad (V)$$

$$= \begin{pmatrix} -\mu - \beta\lambda - \lambda & 0 & -\beta\varepsilon S & -\beta S(1-q) & -\beta\delta S & 0 \\ \lambda & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta\lambda & 0 & -(\mu + \kappa) + \beta\varepsilon S & \beta S(1-q) & \beta\delta S & 0 \\ 0 & 0 & p\kappa & -(\mu + \alpha) & (1-z)\eta & 0 \\ 0 & 0 & (1-p)\kappa & 0 & -(\mu + \eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f\alpha & z\eta & \mu \end{pmatrix}$$

با استفاده از ماتریس ژاکوبین و پارامترهای جدول ۱ و  $\lambda = \varepsilon = 0$  به ازای نقطه تعادل بدون بیماری، برخی مقادیر ویژه، مثبت هستند که موجب ناپایداری نقطه تعادل بدون بیماری می شود، بدان معنا که بیماری خود به خود ریشه کن نمی شود. همچنین با محاسبه مقادیر ویژه به ازای نقطه تعادل اندمیک و منفی شدن آن ها نتیجه گرفته می شود که نقطه تعادل اندمیک پایدار است، به این معنی که شیوع بیماری در جامعه ادامه دارد. از طرفی با قرار دادن پارامترهای جدول ۱ در معادله (۶)،  $R_0 > 1$  می شود که خود گواهی دوباره بر پایداری نقطه تعادل اندمیک است. در نتیجه نیاز به استفاده از یک کنترل کننده، برای رسیدن به نقطه تعادل بدون بیماری امری ضروری است.

جدول ۱: مقادیر پارامترهای مدل SQEIAR [۱۲].

پارامترها مقادیر پارامترها مقادیر پارامترها مقادیر

۰/۵۴	$\kappa$	۰/۱	$p$	۰/۰۵	$\mu$
۰/۳	$\alpha$	۱	$\delta$	۰/۹۶۵	$f$
۰/۳	$\eta$	۰/۵	$q$	۰/۰۲	$z$

## ۴- تأثیر نرخ قرنطینه سازی در شیوع و کنترل پاندمی

گسترش سریع ویروس کرونا باعث ایجاد یک پاندمی جهانی شده است. اما باید این نکته را در نظر گرفت که زمان عرضه واکسن در ایران و حتی موثر بودن و میزان مصونیت آن هنوز به طور قطع مشخص نشده است، همچنین تولید انبوه آن مستلزم صرف زمان و هزینه است، از این رو، قرنطینه و اقدامات مبتنی بر قرنطینه همچنان می تواند از شیوع بیشتر این بیماری جلوگیری کند. درک اینکه چگونه اقدامات قرنطینه و نرخ قرنطینه سازی افراد در مدل مذکور در محدود کردن گسترش ویروس در جامعه موثر است، می تواند بینش ارزشمندی در مورد چگونگی سرکوب شیوع بیماری در اختیار ما قرار دهد.

می شود. عدد باز تولید اساسی ( $R_0$ ) بیانگر تعداد افراد عفونی ثانویه تولید شده توسط یک فرد بیمار در طول دوره عفونی خود است. در واقع می توان  $R_0$  را پارامتر دوشاخگی<sup>۱</sup> برای مدل (۱) در نظر گرفت.

**قضیه ۲-** اگر  $R_0 < 1$  باشد، نقطه تعادل بدون بیماری  $(N, 0, 0, 0, 0, 0)$  بطور محلی پایدار مجانبی و اگر  $R_0 > 1$  باشد بطور محلی ناپایدار است [۳۶].

با توجه به قضیه ۲، اگر  $R_0$  کمتر از یک باشد، هر فرد آلوده به طور متوسط کمتر از یک فرد را آلوده می کند و از این رو عفونت از بین می رود (پاسخ بدون بیماری). از سوی دیگر، اگر  $R_0$  بیشتر از یک باشد، پاتوژن<sup>۲</sup>، توانایی حمله به جمعیت مستعد را دارد [۳۷] و بیماری به مرحله پاندمی می رسد (پاسخ اندمیک). در ادامه به محاسبه عدد باز تولید اساسی مدل مذکور طبق [۳۶] پرداخته خواهد شد.

ظهور عفونت و انتقال آن از سه گروه  $E$  و  $A$ ،  $I$  می باشد. لذا به منظور محاسبه  $R_0$  داریم:  $F_i$  نرخ ظهور عفونت های جدید در گروه  $i$ ،  $V_i^+$  نرخ انتقال افراد به گروه  $i$ ،  $V_i^-$  نرخ انتقال افراد از گروه  $i$ . فرض بر این است که هر تابع حداقل دو بار در هر متغیر پیوسته مشتق پذیر باشد. مدل انتقال بیماری با شرایط اولیه مثبت به صورت زیر می باشد:

$$\dot{x}_i = f_i(x) = F_i(x) - V_i(x) \quad i = 1, \dots, n \quad (۴)$$

بطوریکه  $V_i^+ = V_i^- - V_i^+$ ، شرایط ذکر شده در [۳۶] این اجازه را می دهد که  $R_0$  طبق  $V$  و  $F$  که در ادامه بیان شده اند محاسبه شود.  $V$  و  $F$  ماتریس های  $m \times m$ ، غیر منفی و ناویژه هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$V = \left[ \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right], \quad F = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right], \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (۵)$$

$V$  و  $F$  برای این مدل به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta(1-q) & \beta\delta & \beta\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \mu + \alpha & -(1-z)\eta & -p\kappa \\ 0 & \mu + \eta & -(1-p)\kappa \\ 0 & 0 & \mu + \kappa \end{pmatrix}$$

در نهایت عدد باز تولید اساسی برابر است با:

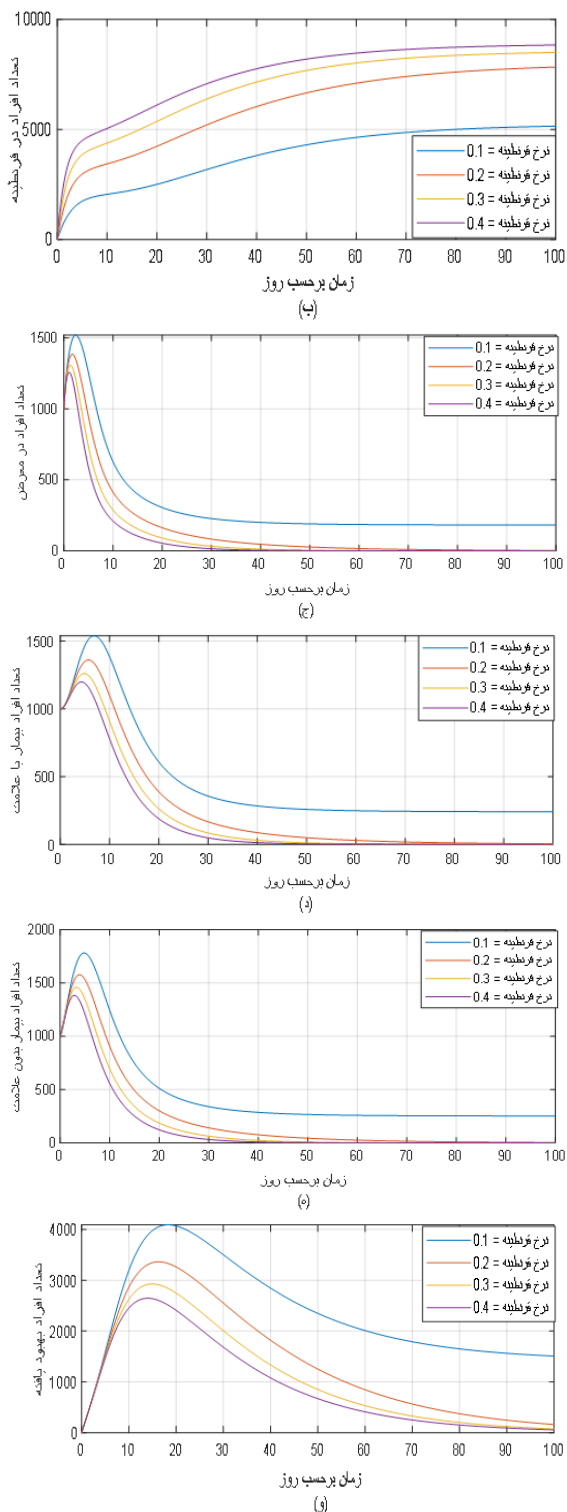
$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{1}{S^*} = \frac{1}{\frac{\mu + \kappa}{\beta} \left[ \frac{1}{\varepsilon + (1-q)c_2 + \delta c_1} \right]} = \frac{\beta}{\mu + \kappa} [\varepsilon + (1-q)c_2 + \delta c_1] \quad (۶)$$

که  $\rho(Y)$ ،  $\rho$ ، ماکزیمم قدر مطلق مقادیر ویژه می باشد (شعاع طیفی ماتریس  $Y$ ).

در ادامه، پایداری دو نقطه تعادل اندمیک و بدون بیماری، با روش خطی سازی توسط ماتریس ژاکوبین حول نقاط تعادل بررسی می شود.

<sup>2</sup> Pathogen

<sup>1</sup> Bifurcation

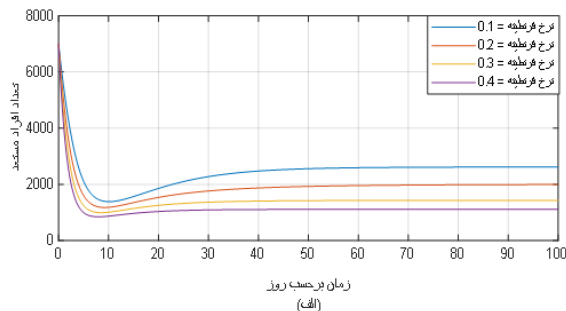


شکل ۲: تأثیر نرخ قرنطینه سازی بر مدل SQEIAR

با این حال، با وجود چالش هایی که در اعمال قرنطینه در اکثر کشورها وجود دارد، بررسی این موضوع که با هر نرخ قرنطینه سازی، جامعه چگونه تحت تأثیر قرار خواهد گرفت حائز اهمیت است. در واقع نرخ قرنطینه سازی ثابت محدودیت هایی در پیش دارد چرا که اگر نرخ قرنطینه سازی زیاد در نظر گرفته شود امکان پیاده سازی آن با توجه به هزینه های اقتصادی که در دوران قرنطینه، هم جامعه و هم مسئولان امر

در این راستا، در این بخش سعی بر آن شده که تأثیر نرخ قرنطینه سازی را مستقیماً روی افراد مستعد بررسی کرده تا در نتیجه آن بتوان اثرات بر سایر گروه های جامعه را نیز به طور غیر مستقیم مشاهده و بررسی نمود. در شکل (۲)، تأثیر نرخ قرنطینه سازی در مدت ۱۰۰ روز روی تمام گروه های مدل، در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل (۲-الف) مشاهده می کنید، با در نظر گرفتن ۷۰۰۰ نفر به عنوان مقدار اولیه برای افراد مستعد از کل جمعیت ۱۰۰۰۰ نفری که به عنوان یک جامعه آماری در نظر گرفته شده است، اگر با نرخ ۰/۱ قرنطینه سازی انجام گیرد، با توجه به شکل (۲-ب)، تنها حدود ۵۰۰۰ نفر قرنطینه خواهند شد. پس همچنان حدود ۲۰۰۰ نفر فرد مستعد در جامعه خواهند بود. همچنین از آنجاییکه نرخ تماس یک فرد در نظر گرفته شده است (هر فرد در جامعه در واحد زمان تنها با یک فرد دیگر در ارتباط باشد) در نتیجه تقریباً تعداد ۲۰۰۰ نفر همچنان در جامعه حضور داشته و با سایر گروه ها، مخصوصاً افراد عفونی (با علامت و بی علامت) ارتباط دارند که خود موجب شیوع گسترده بیماری می شود. اما همچنان که نرخ قرنطینه سازی بالا می رود تعداد افراد قرنطینه شده بیشتر شده و ارتباطات در جامعه محدود می شود که به نزولی شدن روند بیماری کمک شایانی خواهد کرد.

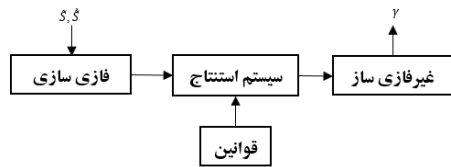
تأثیر نرخ قرنطینه سازی را بر سایر گروه های جامعه نیز می توان تحلیل نمود. برای مثال در شکل (۲-ج) با افزایش نرخ قرنطینه سازی، تعداد افرادی که در معرض بیماری قرار دارند روند نزولی گرفته و در نهایت تقریباً پس از ۷۰ روز تعداد آن ها به صفر می رسد. تعداد افراد عفونی با علامت و بدون علامت مشخص شده در شکل های (۲-د) و (۲-ه) بیانگر کاهش تعداد آن ها در اثر نرخ قرنطینه سازی بالاتر است، به این صورت که نرخ قرنطینه سازی به طور مستقیم روی تعداد افراد مستعد تأثیر گذاشته و آن ها را کم می کند و در نتیجه، هر چقدر تعداد افراد مستعد در جامعه کمتر باشند، تعداد افراد کمتری نیز عفونی می شوند (عفونی با علامت یا بدون علامت). که باعث ریشه کنی تدریجی بیماری در طول یک دوره تقریباً سه ماهه خواهد شد. با مشاهده شکل (۲-و) به این نتیجه می رسیم که هر چقدر تعداد افراد کمتری بیمار شوند، تعداد افراد کمتری نیز بهبود پیدا می کنند. در نهایت، پس از حدود ۱۰۰ روز، افراد بهبود یافته با نرخ ترخیص  $\mu$  از گروه افراد بهبود یافته خارج می شوند. نتایج حاصل، تأثیر نرخ قرنطینه سازی را نشان می دهند.



سطح لغزش برای حالت افراد مستعد به فرم  $\dot{S} = S - S_d$  در نظر گرفته می شود.  $\dot{S}$  برابر با مقدار خطای حالت افراد مستعد نسبت به مقدار مطلوب  $S_d$  است که در این مقاله یک تابع پیوسته و مشتق پذیر  $(S_d = S_0 e^{-\alpha t})$  در نظر گرفته شده است. مشتق سطح لغزش نیز به صورت  $\dot{S} = \dot{S} - \dot{S}_d$  محاسبه می شود. قانون کنترل با استفاده از قضیه لیاپانوف<sup>۲</sup> بدست می آید، به این منظور کاندیدای درجه دو تابع لیاپانوف برای سطح لغزش (خطا) برابر با  $V = \frac{1}{2} \dot{S}^2$  است. سپس مشتق تابع لیاپانوف  $(V)$  با معادله  $\dot{V} = \dot{S} \dot{S} = \dot{S}(\dot{S} - \dot{S}_d)$  نشان داده می شود. برای پایداری سطح لغزش و منفی شدن مشتق تابع لیاپانوف بایستی  $\dot{S} = -\xi \dot{S} + \dot{S}_d$  که در آن  $\xi$  یک پارامتر ثابت و مثبت است. قانون کنترلی مد لغزشی برای نرخ قرنطینه سازی  $\lambda(t)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lambda(t) = \frac{-(\dot{S}_d - \xi \dot{S})}{S(t)} + \frac{(1-S(t))\mu}{S(t)} - \beta \hat{\Lambda} + \gamma \frac{sgn(\dot{S})}{S(t)} \quad (9)$$

که در آن  $\hat{\Lambda}$  و  $\mu$  و  $\beta$  مقادیر عدم قطعیت مدل پاندمی و ویروس کرونا هستند که نسبت به مقادیر واقعی نامعلوم مربوطه دارای خطاهای محدود هستند. نکته قابل توجه در بحث کنترل مد لغزشی، پدیده چترینگ ناشی از ناپیوستگی سیگنال کنترل (تابع علامت) است. از اینرو، از منطق فازی برای فازی کردن بهره مقاوم<sup>۳</sup> ( $\gamma$ ) کنترل کننده پیشنهادی استفاده می شود. شکل (۳) سیستم منطق فازی را به صورت کلی نشان می دهد.



شکل ۳. بلوک دیاگرام منطق فازی

در شکل (۳) و در مرحله فازی سازی، ورودی ها را به مجموعه های فازی تبدیل کرده و به هر مقدار ورودی فازی درجه عضویتی (بین ۰ تا ۱) اختصاص می دهد. برای تعیین توابع عضویت نیاز به دانستن بازه تغییرات ورودی و خروجی است. برای بدست آوردن تخمین مناسبی از کران بالا و پایین  $\dot{S}$  و  $\dot{S}_d$  با دانستن  $\dot{S} = S - S_d$  و  $\dot{S}_d = S_0 e^{-\alpha t}$  و  $S \in [0, 1]$  داریم  $S_{min} = -S_0$  و  $S_{max} = S_{max} - S_{dmin}$  و  $\dot{S}_{min} = -S_0$  و  $\dot{S}_{max} = 1$  به طریق مشابه و با توجه به  $\dot{S}_d = S_0 e^{-\alpha t}$  رابطه (۱-الف)،  $\dot{S}_{min}|_{S=0} \approx -S_0$  و  $\dot{S}_{max}|_{S=0} = \mu$  است. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{min} &= -S_0 \\ \dot{S}_{max} &= \mu + \alpha S_0 \leq \mu + S_0 \end{aligned}$$

که بصورت تقریبی داریم:

$$\dot{S}, \dot{S}_d \in [-S_0, S_0]$$

پایگاه قوانین نیز متشکل از قوانین اگر-آنگاه است. یک قانون فازی را می توان به صورت زیر نوشت:

- اگر سطح لغزش و تغییرات سطح لغزش هر دو مثبت باشند آنگاه مقدار  $\gamma$  زیاد است.

متحمل می شوند، دشوار است. همچنین اعمال قرنطینه با نرخ بالا فقط برای مدت زمان محدود کارساز است، چرا که کشور عملاً بعد از چندین ماه قرنطینه به حالت تعطیل درآمده و ضررهای جبران ناپذیری بر جامعه وارد خواهد شد. از طرف دیگر، قرنطینه سازی با نرخ پایین باعث ماندگاری بیماری می شود و عملاً تأثیری بر کاهش شیوع بیماری نخواهد داشت. همچنین پارامترهای مدل پاندمیک همواره با عدم قطعیت های ناخواسته همراه هستند، زیرا پارامترهای انتشار بیماری و نرخ های انتقال، مرگ و میر و نرخ تماس بین افراد مختلف در جامعه ثابت نیستند و ممکن است بسته به شرایط اجتماعی و همچنین جهش بیماری تغییر کنند. از این رو نرخ قرنطینه سازی را می توان متغیر با زمان در نظر گرفت تا در صورت نیاز، کاهش یا افزایش پیدا کند. در واقع این نرخ را می توان به صورت یک ورودی کنترلی به سیستم اعمال نمود که در بخش بعد به آن پرداخته خواهد شد.

### ۵- طراحی کنترل کننده فازی مد لغزشی

پس از مدل سازی بیماری کووید-۱۹، برای ریشه کن کردن عفونت در جامعه به صورت عملی، از روش قرنطینه سازی افراد مستعد استفاده می شود که در مدل سازی ریاضی به عنوان نرخ ورودی کنترلی، به مدل وارد می گردد، بطوریکه نرخ انتقال افراد مستعد به گروه افراد قرنطینه شده توسط کنترل کننده مشخص خواهد شد. با در نظر گرفتن نرخ قرنطینه سازی به عنوان یک ورودی کنترلی می توان به کنترل مستقیم افراد مستعد و کنترل غیرمستقیم افراد عفونی برای تعقیب مقادیر نهایی آن ها که همان به صفر همگرا شدن و ریشه کن شدن بیماری است پرداخت. مد لغزشی یکی از روش های کنترل مقاوم جهت مقابله با نامعینی های مدل است. از آنجاییکه سیستم مذکور دارای پارامترهای عدم قطعیت ولی محدود است، این روش مناسب می باشد. در این نوع استراتژی بایستی حالت ها به سطحی به نام سطح لغزش نزدیک شده و بر روی آن نگه داشته شوند و در نهایت به نقطه تعادل همگرا شوند. پس در ابتدا سطح لغزش را یافته و سپس با قوانینی که برای کنترل کننده یافت می شود می توان سیستم را به سمت نقطه تعادل برد. طراحی کنترل کننده مد لغزشی شامل دو مرحله [۳۸] است:

- ۱- طراحی سطح لغزش<sup>۱</sup> که باعث می شود مرتبه ی سیستم کاهش یابد (به جای کار بر روی دینامیک سیستم بر روی دینامیک خطای آن کار می کنیم) و بستری مقاوم را در حرکت سیستم به سمت نقطه تعادل فراهم سازد.
  - ۲- انتخاب سیاست کنترلی مناسب که سیستم را به سمت این سطح حرکت داده و قرار گرفتن و باقی ماندن بر روی آن را تضمین کند.
- معادله (۱-الف) را می توان برحسب ورودی کنترلی (نرخ قرنطینه-سازی  $\lambda(t)$ ) به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\lambda(t) = -\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} + \frac{(1-S(t))\mu}{S(t)} - \beta \Lambda(t) \quad (8)$$

<sup>3</sup> Robust Gain

<sup>1</sup> Sliding Surface  
<sup>2</sup> Lyapunov

دیگر، پاسخ  $\dot{E}(t) = -(\kappa + \mu)E(t)$  که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است برابر با  $E(t) = E(0)e^{-(\kappa + \mu)t}$  می باشد و با توجه به مثبت بودن شرایط اولیه به صفر می رسد. با صفر شدن  $S$  و  $E$ ، معادله  $(1-a)$  پس از یک فاصله زمانی محدود به  $\dot{A}(t) = -(\eta + \mu)A(t)$  تبدیل خواهد شد که ترم  $A$  را کاهش می دهد و با همان استدلالی که برای افراد در معرض انجام شد می توان نتیجه گرفت که  $A$  محدود باقی مانده و به صفر همگرا می شود ( $A \rightarrow 0$ ). برای افراد بیمار با علامت نیز همین نتیجه گیری صادق است. واضح است که پس از گذشتن مدت زمان محدود، سه گروه اصلی در شیوع بیماری به صفر می رسند و در واقع بیماری ریشه کن خواهد شد ( $E = I = A = 0$ ).

## ۶- تأثیر جامعه آلوده بر سایر جوامع

بی شک روابط بین کشورها (و شهرها) از عوامل مهم شیوع پاندمی ویروس کرونا در دنیا می باشد که نمی توان به راحتی و بدون تحلیل از این مسئله گذشت. چرا که نرخ بالای انتقال این بیماری موجب شده که به سرعت در جوامع و کشورها پخش شده و کنترل آن به سختی انجام گیرد. طبیعتاً تأثیر جوامع بر یکدیگر متأثر از روابط بین گروه های مختلف افراد (مستعد، در معرض، عفونی و بهبود یافته) در این جوامع است. اگر فرض کنیم افراد عفونی با علامت، هم در جامعه مبدأ و هم در جامعه مقصد، اجازه رفت و آمد نداشته و به نوعی در کشور (شهر) خود ایزوله باشند، افراد مستعد، در معرض، عفونی بدون علامت و بهبود یافته با یک نرخ یکسان به جمعیت جامعه مقصد اضافه می شوند (از جامعه مبدأ به مقصد می روند). در نتیجه می توان معادلات (۱) به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{S}(t) = (1 - S(t))\mu - \beta\Lambda(t)S(t) - \lambda(t)S(t) + \alpha'S'(t) \quad (10-الف)$$

$$\dot{Q}(t) = \lambda(t)S(t) - \mu Q(t) \quad (10-ب)$$

$$\dot{E}(t) = \beta\Lambda(t)S(t) - (\kappa + \mu)E(t) + \alpha'E'(t) \quad (10-ج)$$

$$\dot{I}(t) = (1 - z)\eta A(t) - (\alpha + \mu)I(t) + p\kappa E(t) \quad (10-د)$$

$$\dot{A}(t) = (1 - p)\kappa E(t) - (\eta + \mu)A(t) + \alpha'A'(t) \quad (10-ه)$$

$$\dot{R}(t) = z\eta A(t) + f\alpha I(t) - \mu R(t) + \alpha'R'(t) \quad (10-و)$$

که  $\alpha'$  نرخ انتقال از جامعه مبدأ به مقصد است و  $x'(t) = [S'(t), E'(t), A'(t), R'(t)]$  حالت های مربوط به جامعه مبدأ هستند. نکته ای که باید در نظر داشت این است که نرخ انتقال برای تمامی گروه ها یکسان فرض شده است، چراکه افراد جامعه به صورت یک توزیع یکنواخت امکان جابجایی دارند و شرط خاصی برای رفت و آمد روی افراد نیست.

## ۷- شبیه سازی عددی

هدف از این بخش، بررسی و شبیه سازی تأثیر اعمال کنترل کننده فازی مد لغزشی بر روی مدل دارای عدم قطعیت می باشد. مقادیر پارامترهای مدل در جدول ۱ آورده شده اند. از اینرو، تأثیر اعمال کنترل کننده بر تعداد افراد

که در آن سطح لغزش و تغییرات آن به عنوان ورودی  $\gamma$  خروجی سیستم کنترل فازی است. در ادامه، سایر قوانین فازی در جدول ۲ آورده شده اند.

جدول ۲: جدول قواعد فازی

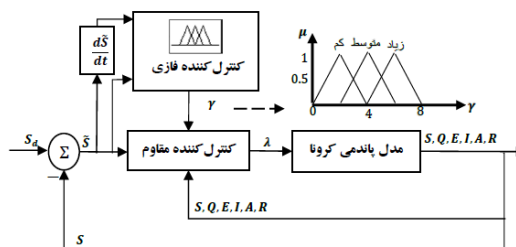
تغییرات سطح لغزش سطح لغزش	$\dot{S} > 0$	$\dot{S} = 0$	$\dot{S} < 0$
	$\dot{S} > 0$	زیاد	متوسط
$\dot{S} = 0$	متوسط	صفر	متوسط
$\dot{S} < 0$	کم	متوسط	زیاد

خروجی نیز توسط یک غیر فازی ساز از یک مجموعه فازی به یک متغیر یا مقدار حقیقی تبدیل می شود. بازه تغییرات خروجی  $\gamma$  را نیز به صورت تقریبی و مناسب بین صفر تا هشت در نظر می گیریم. علاوه بر این خروجی فازی را می توان با کمک غیر فازی ساز میانگین مرکز<sup>۱</sup> به صورت زیر بدست آورد:

$$\gamma = \frac{\sum_{j=1}^m W_j C_j}{\sum_{j=1}^m W_j} = v^T \psi$$

بطوریکه،  $\psi = \frac{[w_1, \dots, w_m]^T}{\sum_{j=1}^m w_j}$  و  $v = [c_1, \dots, c_m]^T$ ،  $w_j = \prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i)$  است.  $m$  و  $n$  به ترتیب تعداد کل قوانین فازی و متغیرهای ورودی هستند.  $C_j$  مرکز تابع عضویت در قسمت آنگاه قانون  $Z$ ام را نشان می دهد.  $\mu_{F_i}$  نشان دهنده مقدار عضویت متغیر زبانی  $x_i$  به مجموعه فازی  $F_i$  در قانون  $Z$ ام است.  $W_j$  نیز وزن قانون  $Z$ ام را نشان می دهد و  $\psi$  بردار وزن است.

شکل (۴) نشان دهنده سیستم حلقه بسته مدل، در حضور کنترل کننده فازی مد لغزشی می باشد:

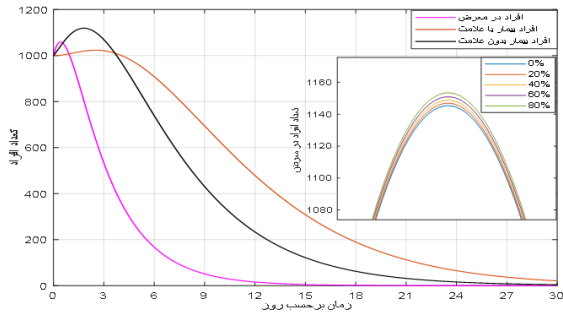


شکل ۴: بلوک دیاگرام استراتژی کنترل فازی مد لغزشی برای شیوع ویروس کرونا

قبلاً اثبات شد که اگر ورودی کنترلی به صورت رابطه (۹) بدست آید مشتق تابع لیاپانوف منفی شده و  $\dot{S} = 0$  می شود، در نتیجه  $S \rightarrow S_d$ ، و از آنجاییکه  $S_{d \rightarrow \infty} = 0$  است. بنابراین تعداد افراد مستعد کاهش یافته و به صورت مجانبی به صفر همگرا می شود.

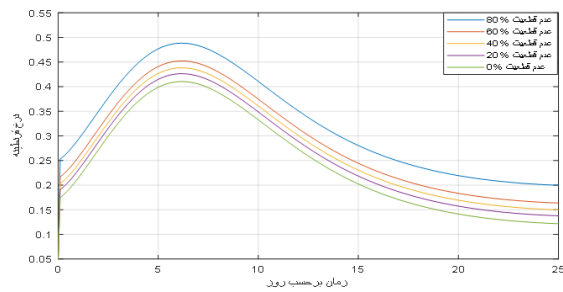
از آنجا که متغیر  $S$  کاهش یافته و به صفر میل می کند، با توجه به معادله  $(1-ج)$  می توان گفت که پس از یک زمان محدود نامعادله  $\beta S \Lambda < (\mu + \kappa)E$  بدست می آید. در واقع،  $\dot{E}$  پس از مدت زمان محدود، منفی می شود ( $\dot{E} < 0$ ) با اطمینان از اینکه  $(E \geq 0)$  است می توان گفت بعد از یک بازه زمانی تعداد افراد در معرض به صفر می رسد ( $E \rightarrow 0$ ). به بیان

<sup>1</sup> Center Average Defuzzifier (CAD)



شکل ۷: تأثیر اعمال کنترل کننده بر تعداد افراد در معرض و عفونی (باعلامت و بدون علامت) در حضور عدم قطعیت های متفاوت

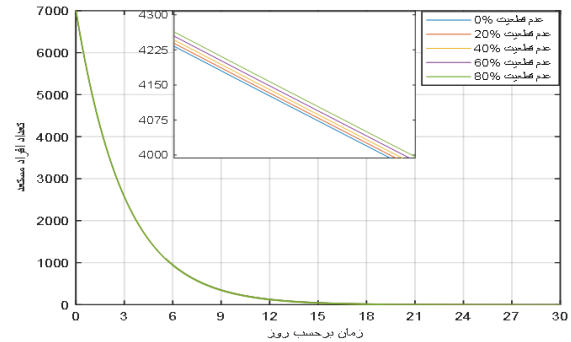
در شکل (۸)، ورودی کنترلی (نرخ قرنطینه سازی) اعمال شده به سیستم نشان داده شده است. هرگاه در پارامترها عدم قطعیتی وجود نداشته باشد پس از شروع اعمال قرنطینه، ابتدا نرخ قرنطینه سازی افزایش پیدا کرده تا بتواند از شیوع بیشتر پاندمی جلوگیری کند و با اعمال حداکثر تلاش کنترلی (نرخ قرنطینه سازی) برابر با ۰/۴۱ در بازه زمانی روز ششم تا هفتم می توان افراد را قرنطینه سازی کرد. تعداد افراد مستعد در طول زمان کاهش می یابد و به تلاش کنترلی کمتری نیاز است. نرخ قرنطینه سازی متغیر با زمان، متناسب با شیوع پاندمی به صورت تطبیق پذیر افزایش داشته و با عبور از پیک بیماری کاهش می یابد.



شکل ۸: نرخ قرنطینه سازی در حضور عدم قطعیت های متفاوت

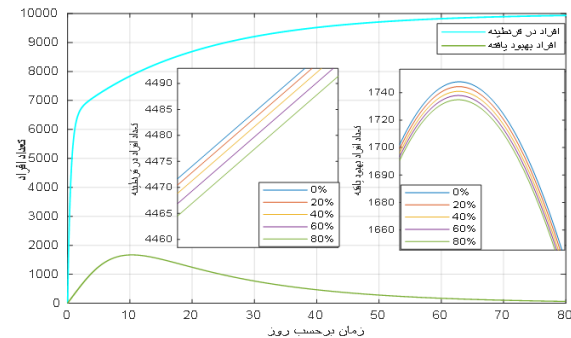
تأثیر جوامع بر یکدیگر به دو بخش «تأثیر جامعه بیمار بر جامعه سالم» و «تأثیر جامعه بیمار بر بیمار» تقسیم شده است. همچنین با توجه به مقاوم بودن کنترل کننده و عدم تأثیر آن چنانی عدم قطعیت ها بر روند کنترل، در این بخش برای سادگی و کاهش پیچیدگی بصری عکس ها، از عدم قطعیت ثابت استفاده کردیم و عملکرد کنترل کننده را به ازای نرخ های انتقال مختلف مورد بررسی قرار دادیم. با توجه به شکل (۹) و به ازای نرخ های انتقال مختلف، در جامعه آلوده مقصد، پیک افراد در معرض تا روز دوم ادامه داشته و بعد از آن روند نزولی در پیش گرفته است، در صورتیکه در جامعه سالم مقصد، این پیک در روز پنجم اتفاق افتاده و بعد از آن روند شیوع، کاهشی شده است. دلیل این امر می تواند عدم آمادگی جامعه سالم برای مواجه با اپیدمی باشد، یا از دیدگاه کنترلی، صفر بودن نرخ قرنطینه سازی به عنوان ورودی در روز اول و افزایش تدریجی آن باشد.

مستعد در حضور عدم قطعیت های متفاوت در شکل (۵) بیان شده است. همانگونه که مشخص است در اثر اعمال کنترل کننده، در مدت زمان بسیار کمتر از ۱۰۰ روز تعداد افراد مستعد به مرور کم و به صفر همگرا شده که بیانگر این است، کنترل کننده مقاوم توانسته با در نظر گرفتن عدم قطعیت در پارامترها از صفر تا ۸۰ درصد بخوبی عمل کرده و تعداد افراد مستعد را در بازه زمانی تقریباً ۳۰ روز به صفر برساند.

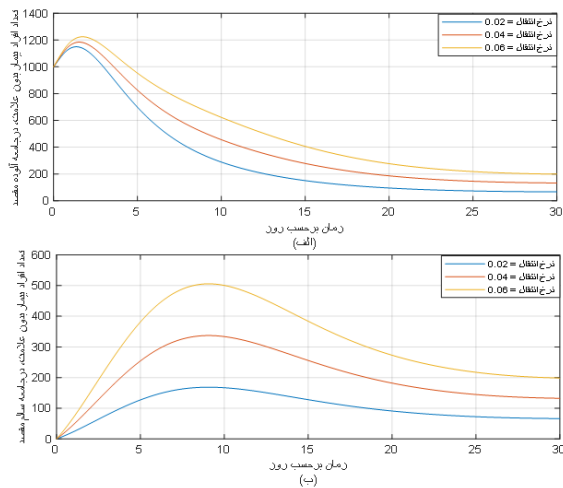


شکل ۹: تأثیر اعمال کنترل کننده بر تعداد افراد مستعد در حضور عدم قطعیت های متفاوت

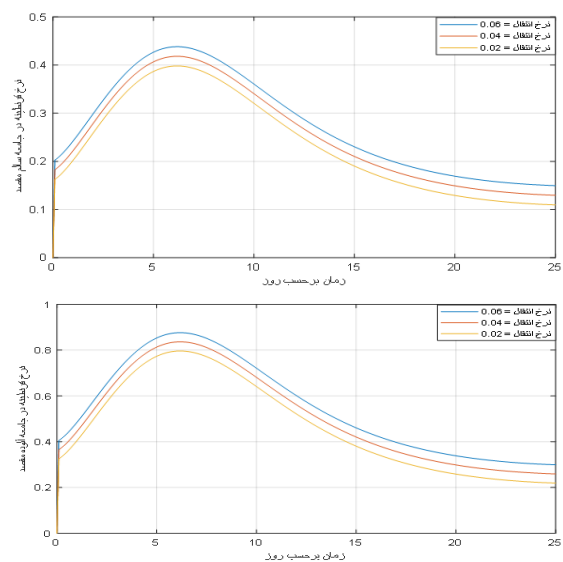
با توجه به شکل (۶) با اعمال کنترل کننده (قرنطینه افراد مستعد در جامعه) همزمان با کاهش تعداد افراد مستعد و انتقال آن ها به گروه افراد قرنطینه شده، افراد در قرنطینه افزایش می یابند. همچنین با توجه به شکل (۷) با اعمال قرنطینه و کاهش افراد مستعد در جامعه، افراد کمتری در معرض بیماری قرار می گیرند، در نتیجه آن، تعداد افراد کمتری نیز عفونی (با علامت، بدون علامت) می شوند و در نهایت تعداد کمتری نیز بهبود پیدا می کنند (شکل ۶). همانطور که مشخص است عدم قطعیت ها به خوبی توسط کنترل کننده مهار شده و اختلاف تعداد نفرت در عدم قطعیت های مختلف، مقداری کمتر از ۲۰ نفر در هر گروه است.



شکل ۱۰: تأثیر اعمال کنترل کننده بر تعداد افراد قرنطینه شده و بهبود یافته در حضور عدم قطعیت های متفاوت



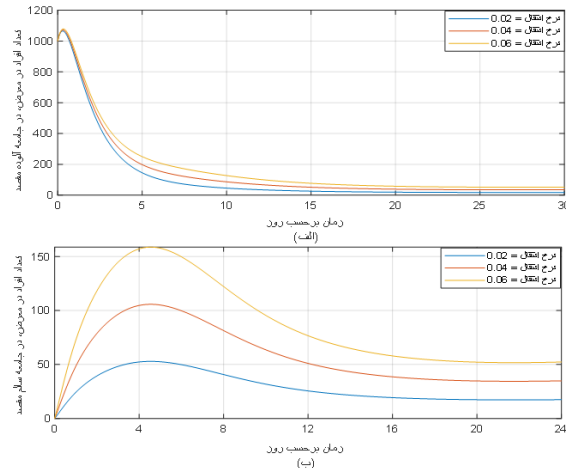
شکل ۱۱: تأثیر کنترل کننده بر تعداد افراد بیمار بدون علامت در دو جامعه آلوده و سالم به ازای نرخ‌های انتقال متفاوت



شکل ۱۲: نرخ قرنطینه سازی به ازای نرخ‌های انتقال متفاوت

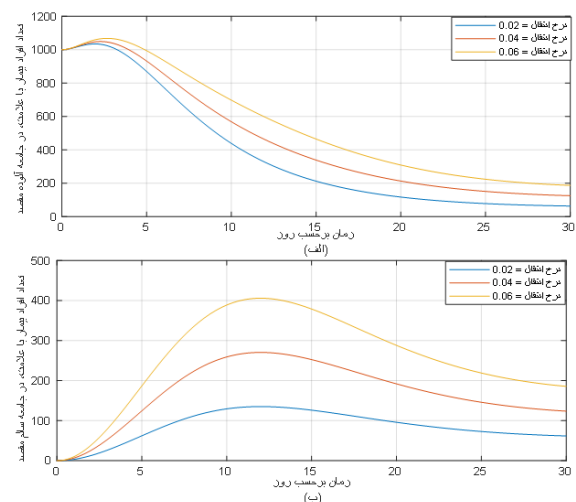
## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله به دلیل لزوم قرنطینه افراد مستعد، مدلی شامل افراد قرنطینه شده به عنوان یک گروه جدید در نظر گرفته شده است. این مدل شامل افراد مستعد، در معرض، عفونی با علامت و بدون علامت و افراد بهبود یافته است. از آنجاییکه نرخ قرنطینه سازی ثابت می‌تواند با چالش‌هایی همراه باشد، از استراتژی مقاوم مد لغزشی برای بدست آوردن نرخ قرنطینه سازی افراد مستعد به عنوان یک ورودی کنترلی استفاده شده و بهره مقاوم آن با استفاده از منطق فازی بدست آمده است که موجب کاهش چترینگ سیگنال کنترلی و در نهایت ریشه کنی بیماری گردیده است. در ادامه، ارزیابی مدل ارائه شده در حضور کنترل کننده و با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های مختلف برای مقادیر پارامترها انجام شده است. سپس تأثیر جامعه آلوده بر جوامع آلوده و سالم مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت برای ارزیابی عملکرد کنترل کننده و تأیید نتایج تئوری ارائه شده، شبیه سازی با استفاده از نرم افزار MATLAB® انجام شده است. با توجه به



شکل ۱۰: تأثیر کنترل کننده بر تعداد افراد در معرض در دو جامعه آلوده و سالم به ازای نرخ‌های انتقال متفاوت

این مسئله برای افراد عفونی در جامعه سالم جدی تر می‌شود، چرا که شوک اولیه ناشی از انتقال افراد جامعه آلوده مبدأ بر جامعه سالم بیشتر از تأثیر آن بر جامعه آلوده بوده است، با توجه به شکل (۱۰) به ازای نرخ انتقال  $0.06$  تغییرات افزایشی در جامعه آلوده در حدود  $100$  نفر بوده است و بعد از حدود  $4$  روز روندی کاهشی در پیش گرفته است، در صورتی که روند افزایشی بیماران در جامعه سالم تا حدود  $400$  نفر است و زمان رسیدن به این پیک در حدود  $12$  روز اتفاق افتاده که نشان دهنده تأثیر مخرب جامعه آلوده بر جامعه سالم است. افراد بیمار بدون علامت نیز با توجه به شکل (۱۱) روندی مشابه با افراد بیمار با علامت داشته و زمان رسیدن به پیک بیماری و کنترل آن‌ها در جامعه سالم طولانی تر از جامعه بیمار است. با توجه به شکل (۱۲)، ورودی‌های کنترلی (نرخ قرنطینه سازی) به ازای نرخ‌های انتقال بزرگتر، افزایش داشته است. همچنین علیرغم تغییرات بیشتر افراد بیمار در جامعه سالم، افزایش این نرخ در جامعه سالم نسبت به جامعه آلوده کمتر بوده است و حداکثر این نرخ در حدود  $0.45$  است، درحالی که در جامعه بیمار این نرخ تا  $0.9$  افزایش یافته است.



شکل ۱۰: تأثیر کنترل کننده بر تعداد افراد بیمار با علامت در دو جامعه آلوده و سالم به ازای نرخ‌های انتقال متفاوت

[14] Rohith, G. and Devika, K.B., "Dynamics and Control of COVID-19 Pandemic with Nonlinear Incidence Rates", *Nonlinear Dynamics*, 101(3), pp.2013-2026, 2020.

[15] Xiao, Y., Xu, X. and Tang, S., "Sliding Mode Control of Outbreaks of Emerging Infectious Diseases", *Bulletin of Mathematical Biology*, 74(10), pp.2403-2422, 2012.

[16] Ibeas, A., de la Sen, M. and Alonso-Quesada, S., "Sliding Mode Robust Control of SEIR Epidemic Models", In 2013 21st Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE). pp. 1-6. IEEE, 2013.

[17] Ozer, H.O., Hacıoglu, Y., Yagiz, N., "Controlling the Building Model Using High Order Sliding Mode Control Optimized by Multi Objective Genetic Algorithm", *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*, 5(3), 2017.

[18] Yakut, O. and Alli, H., "Neural Based Sliding-Mode Control with Moving Sliding Surface for the Seismic Isolation of Structures", *Journal of Vibration and Control*, 17(14), pp.2103-2116, 2011.

[19] Li, Z., Deng, Z. and Gu, Z., "New Sliding Mode Control of Building Structure Using RBF Neural Networks", In 2010 Chinese Control and Decision Conference. pp. 2820-2825. IEEE, 2010.

[20] Adhikari, R. and Yamaguchi, H., "Sliding Mode Control of Buildings with ATMD", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 26(4), pp.409-422, 1997.

[21] Baghaei, K., Ghaffarzadeh, H., Hadigheh, A. and Dias-da-Costa, D., "Chattering-Free Sliding Mode Control with A Fuzzy Model for Structural Applications", 2019.

[22] Samantaray, J. and Chakrabarty, S., "A Fuzzy Sliding Mode Control Design for Quadcopter", In International Conference on Unmanned Aerial System in Geomatics. pp. 191-200, 2019, April.

[23] Ardakani, F.F., Vatankhah, R. and Sharifi, M., "Fuzzy Sliding-Mode Control of a Human Arm in The Sagittal Plane with Optimal Trajectory", *ETRI Journal*, 40(5), pp.653-663, 2018.

[24] Zamani, I., Amiri Mehra, A.H., Abbasi, Z. and Shafiee, M., "Robust Stability for Affine TS Fuzzy Impulsive Control Systems Subject to Parametric Uncertainties", In 2019 27th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE). pp. 1102-1107. IEEE, 2019.

[25] Lin, B., Su, X. and Li, X., "Fuzzy Sliding Mode Control for Active Suspension System with Proportional Differential Sliding Mode Observer", *Asian Journal of Control*, 21(1), pp.264-276, 2019.

[26] Palm, R., 1992, "Sliding Mode Fuzzy Control", In [1992 Proceedings] IEEE International Conference on Fuzzy Systems. pp. 519-526. IEEE, 1992.

[27] Ha, Q.P., Nguyen, Q.H., Rye, D.C. and Durrant-Whyte, H.F., "Fuzzy Sliding-Mode Controllers with Applications", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 48(1), pp.38-46, 2001.

[28] Zamani, I. and Zarif, M.H., "Nonlinear Controller for Fuzzy Model of Double Inverted Pendulums". *World Academy of*

کشف واکسن کرونا، به عنوان تحقیقات آینده با ارتقاء مدل سازی مذکور و در نظر گرفتن افراد واکسینه شده به عنوان یک گروه مستقل و واکسیناسیون به عنوان استراتژی کنترلی، می توان پژوهش را توسعه بخشید.

## مراجع

- [1] مرکز تحقیقات ویروس شناسی (www.vrc.sbmu.ac.ir)
- [2] World Health Organization (WHO) (www.who.int/ar/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019-farsi)
- [3] Centers for Disease Control and Prevention (CDC) (https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/long-term-effects.html)
- [4] "Iran Reports Its First 2 Cases of the New Coronavirus", *New York Times*. Archived from the original on 19 February 2020. Retrieved 19 February 2020.
- [5] Cooper, I., Mondal, A. and Antonopoulos, C.G., "A SIR Model Assumption for The Spread of COVID-19 in Different Communities", *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, p.110057, 2020.
- [6] Comunian, A., Gaburro, R. and Giudici, M., "Inversion of an SIR-Based Model: A Critical Analysis About the Application To COVID-19 Epidemic", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 413, p.132674, 2020.
- [7] Abbasi, Z., Zamani, I., Amiri Mehra, A.H., and Shafieirad, M., "Optimal Control of SEIR Epidemic Model Considering Nonlinear Transmission Rate and Time Delay", In 2021 7th International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA). IEEE, 2021.
- [8] Kada, D., Kouidere, A., Balatif, O., Rachik, M. and Labriji, E.H., "Mathematical Modeling of The Spread of COVID-19 Among Different Age Groups in Morocco: Optimal Control Approach for Intervention Strategies", *Chaos, Solitons & Fractals*, p.110437, 2020.
- [9] Samui, P., Mondal, J. and Khajanchi, S., "A Mathematical Model for COVID-19 Transmission Dynamics with A Case Study of India", *Chaos, Solitons & Fractals*, 140, p.11017, 2020.
- [10] Ndairou, F., Area, I., Nieto, J.J. and Torres, D.F., "Mathematical Modeling of COVID-19 Transmission Dynamics with a Case Study of Wuhan". *Chaos, Solitons & Fractals*, p.109846, 2020.
- [11] Amiri Mehra, A.H., Zamani, I., Abbasi, Z. and Ibeas, A., "Observer-Based Adaptive PI Sliding Mode Control of Developed Uncertain SEIAR Influenza Epidemic Model Considering Dynamic Population", *Journal of Theoretical Biology*, 482, p.109984, 2019.
- [12] Abbasi, Z., Zamani, I., Amiri Mehra, A.H., Shafieirad, M. and Ibeas, A., "Optimal Control Design of Impulsive SQEIAR Epidemic Models with Application to COVID-19", *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, p.110054, 2020.
- [13] Amiri Mehra, A.H., Shafieirad, M., Abbasi, Z. and Zamani, I., "Parameter Estimation and Prediction of COVID-19 Epidemic Turning Point and Ending Time of a Case Study on SIR/SQAIR Epidemic Models", *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2020, 2020.

Science, Engineering and Technology, 1(10), pp.1596-1602, 2007.

[29] Zamani, I. and Shafie, M., "Fuzzy Affine Impulsive Controller". In 2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. pp. 361-366, 2009.

[30] Zamani, I. and Zarif, M.H., "An Approach for Stability Analysis of TS Fuzzy Systems Via Piecewise Quadratic Stability", International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 6(9), pp.4041-4054, 2010.

[31] Zamani, I. and Zarif, M.H., "On the Continuous-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems Stability Analysis", Applied Soft Computing, 11(2), pp.2102-2116, 2011.

[32] Zamani, I. and Sadati, N., "Fuzzy Large-Scale Systems Stabilization with Nonlinear State Feedback Controller", 2009 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 5156-5161.

[33] Shafieirad, M., Shafiee, M. and Abedi, M., "Recursive Identification of Continuous Two-Dimensional Systems in The Presence of Additive Colored Noise", IETE Journal of Research, 60(1), pp.74-84, 2014.

[34] Shafieirad, M., Shafiee, M. and Abedi, M., "Estimation of Space and Time Shifts in Continuous 2-D Systems Using Instrumental Variable", Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering, 37(1), pp.42-47, 2014.

[35] Shafieirad, M., Shafiee, M. and Abedi, M., "Identification of Linear Partial Difference Equations with Constant Coefficients", Journal of Basic and Applied Scientific Research, 3(1), pp.655-660, 2013.

[36] Van Den Driessche, P., Watmough, J., "Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission", Mathematical Biosciences, 180, (1), pp. 29-48, 2002.

[37] Hernandez-Vargas, A. E. and Meyer-Hermann, M., "Innate Immune System Dynamics to Influenza Virus", IFAC Proceedings Volumes, 45, (18), pp. 260-265. 2012.

[38] Slotine, J. J. E., Li, W., "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 199, 1991.