مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۵، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۰، صفحه ۶۸-۶۰

کنترل مقاوم و شکل‌دهی مجموعه نامعینی حاصل از شناسایی سیستم

وحید آیین فر[۱]، حمیدرضا مؤمنی[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، V.Aeinfar@Modares.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، Momeni_h@Modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۸/۲۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۶/۳۰)

چکیده: یک نقطه ضعف مهم در ارتباط با طراحی کنترل‌کننده مقاوم برای مدل‌های به‌دست آمده از شناسایی به روش خطای پیش‌بینی این است که روش‌های طراحی کنترل مقاوم بسیار قلیلی مستقیماً با نواحی عدم قطعیت بیضوی، به‌دست آمده از آزمایش شناسایی سیستم سازگار هستند. مدل‌های به‌دست آمده از آزمایش شناسایی سیستم در چارچوب خطای پیش‌بینی در یک مجموعه عدم قطعیت بیضوی جای می‌گیرند. در این مقاله یک روش توام طراحی سیگنال ورودی/کنترل‌کننده مقاوم ارائه می‌شود که پایداری سیستم حلقه-بسته و ارضای کارایی مقاوم مورد نظر را با استفاده از مدل‌های به‌دست آمده از داده‌های آزمایش تضمین کند. از پارامتری‌کردن بعد محدود طیف سیگنال ورودی برای نمایش مسئله طراحی ورودی به صورت یک مسئله بهینه‌سازی محدب استفاده شده است. همچنین از روش طراحی کنترل‌کننده مقاوم H_∞ برای سیستم‌های با عدم قطعیت بیضوی استفاده شده و ویژگی‌های H_∞ داده شده بر روی تابع تبدیل حلقه بسته به صورت شروط کافی بر روی سیگنال ورودی مورد استفاده در آزمایش شناسایی سیستم تعبیر می‌گردند.

کلمات کلیدی: شناسایی برای کنترل، کنترل مقاوم، عدم قطعیت بیضوی، بهینه سازی محدب، بهینه سازی LMI.

Robust Control and Uncertainty Set Shaping Obtained by System Identification

Vahid Aeinfar, Hamidreza Momeni

Abstract: An important shortcoming about designing robust control for models generated from prediction error identification is that very few control design methods directly match the ellipsoidal parametric uncertainty regions that are generated by such identification methods. Models obtained from identification experiments in prediction error framework lie in an ellipsoid uncertainty region. In this contribution we present a joint robust control/input design procedure which guaranties stability and prescribed closed-loop performance using models identified from experimental data. Finite dimensional parameterization of the input spectrum is used to represent the input design problem as a convex optimization. A method for fixed-order H_∞ controller design for systems with ellipsoidal uncertainty is used and given H_∞ specifications on the closed-loop transfer function are translated into sufficient requirements on the input signal used to identify the system.

Keywords: Identification for Control, Robust Control, Ellipsoidal Uncertainty, Convex Optimization, LMI Optimization.

۱- مقدمه

در این مقاله با ارائه روشی کاربردی، شناسایی سیستم در چارچوب خطای پیش‌بینی به تئوری کنترل مقاوم مرتبط شده است. در سایر مقالاتی که با این هدف ارائه شده‌اند، هدف کلی توانایی طراحی کنترل‌کننده‌ای است که پایداری و کارایی مقاوم از پیش تعیین شده‌ای را برای مدل‌های به‌دست آمده از داده‌های آزمایشگاهی تضمین کند.

نویسنده عهده دار مکاتبات: وحید آیین فر

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.1.8]

مدل‌های به‌دست آمده از آزمایش شناسایی سیستم به دلیل وجود نویز اندازه‌گیری و همچنین نایقینی‌های موجود در ساختار مدل دارای عدم قطعیت می‌باشند، [۱]. اگر مدل یک سیستم دقیق باشد، این مدل برای همه کاربردها بهینه می‌باشد. اما اگر مدل تنها تقریبی از سیستم واقعی باشد، کیفیت مدل باید به کاربرد مورد نظر مدل وابسته باشد. بر این اساس، طراحی آزمایش با در نظر گرفتن هدفی که مدل قرار است برای آن مورد استفاده قرار گیرد معنا می‌یابد. به عبارت دیگر باید تضمین کنیم که توزیع خطای مدل به گونه‌ای باشد که بر هدف مورد نظر ما زیاد تاثیر گذار نباشد. مطالب فوق ما را به سمت مبحث شناسایی هدفدار راهنمایی کرده و به ما اجازه می‌دهد که مسئله شناسایی سیستم را به عنوان یک مسئله طراحی در نظر بگیریم، [۲]. به عنوان مثال فرض کنید هدف شناسایی سیستم $G_0(s)=\frac{1}{s+1}$ بوده و پس از انجام آزمایش شناسایی سیستم، مدل $G(s)=\frac{1}{s}$ از سیستم به‌دست آمده است. حال اگر کاربرد مدل دستیابی به دینامیک واقعی سیستم باشد، مدل به‌دست آمده از سیستم برای این منظور مناسب نمی‌باشد. ولی اگر هدف از شناسایی سیستم، طراحی یک کنترل کننده دینامیک با بهره بالا باشد، مدل به‌دست آمده کاملاً مناسب بوده و نیازی به صرف هزینه بیشتر برای دستیابی به مدل دقیقتر نمی‌باشد.

در [۳] یک روش بازگشتی طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی ارائه شده‌است. در [۴] نشان داده شده‌است که مسئله کنترل مقاوم برای عدم قطعیت بیضوی می‌تواند به صورت یک مسئله بهینه‌سازی محدب بیان شود. مسئله طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت برای سیستم‌های با عدم قطعیت بیضوی در [۵ و ۱۱] بررسی شده‌اند . در این مسائل تنها پایدارسازی سیستم نامعین تحقیق شده است. در [۶] روشی برای نمایش مسائل طراحی ورودی در چارچوب خطای پیش بینی به عنوان مسائل بهینه سازی محدب ارائه شده‌است و از لم KYP برای نماش به صورت نامساوی ماتریسی خطی(LMI) استفاده شده است. مسئله طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت H_∞ برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری نیز در [۱] ارائه شده است. در [۱] فرض شده‌است که تنها یکی از ماتریس‌های فضای حالت A یا C به پارامترهای نامعین وابسته باشد. علاوه بر این از یک ماتریس لیاپانوف مشترک برای همه سیستم‌ها درون مجموعه مدل استفاده شده‌است که به محافظه کاری شدیدی منجر می‌شود. در [۷] مسئله طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت H_∞ برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی بر اساس یک تابع لیاپانوف پارامتری مورد بررسی قرارگرفته و با استفاده از مفهوم اکیدا حقیقی مثبت (SPR) در مورد توابع تبدیل، یک روش طراحی کنترل مقاوم مرتبه‌ثابت برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی بر اساس جواب یک دسته از نامساوی‌های ماتریسی خطی ارائه شده‌است. در [۸] روشی برای طراحی کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی و روشی برای طراحی توام سیگنال ورودی و کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت در شناسایی سیستم ارائه شده‌است، در [۱۲]نیز یک روش برای طراحی توام کنترل‌کننده مقاوم و سیگنال ورودی در شناسایی سیستم ارائه شده است. در دو روش فوق از یک ماتریس لیاپانوف و چند جمله‌ای مرکزی ثابت برای همه مدل‌های درون مجموعه عدم قطعیت در طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت استفاده شده‌است که به محافظه‌کاری منجر می‌شود.

در این مقاله از ایده ارائه شده در [۶] برای پارامتری کردن مسئله طراحی ورودی و نمایش به صورت LMI و ایده ارائه شده در [۷] برای طراحی کنترل‌کننده مقاوم مرتبه ثابت برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی استفاده شده و روشی کاربردی برای طراحی توام سیگنال ورودی و کنترل مقاوم در شناسایی سیستم ارئه شده است.

در ادامه مقاله، مقدمات هر دو مبحث طراحی ورودی در شناسایی سیستم و همچنین طراحی کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی در بخش دوم بیان شده‌اند. در بخش سوم، روش توام برای طراحی همزمان سیگنال ورودی و کنترل مقاوم در شناسایی سیستم ارائه شده است. بخش چهارم حاوی نتایج عددی شبیه‌سازی روش ارائه شده بر روی یک سیستم واقعی و مقایسه با روش‌های موجود بوده و کارایی این روش را اثبات می‌کند. در بخش پنجم نیز نتیجه‌گیری و نکات پایانی ارائه شده‌است.

۲- پیش نیازها و تعریف مسئله

۱.۲ طراحی ورودی در شناسایی سیستم

برای طراحی ورودی در شناسایی سیستم به هدف طراحی کنترل‌کننده در سیستم‌های گسسته‌زمان، خطی، تغییر ناپذیر با زمان تک ورودی-تک خروجی، فرض کنید که سیستم توسط

$$M: y(t)=G(z,\theta)u(t)+H(z,\theta)e(t) \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود که در آن، $y(t)$ خروجی، $u(t)$ ورودی و $e(t)$ نویز سفید با میانگین صفر و واریانس محدود می‌باشد. دینامیک سیستم و نویز به ترتیب توسط توابع تبدیل $G(z,\theta)$ و $H(z,\theta)$ مدل می‌شوند که با استفاده از بردار پارامترها $\theta\in\Theta\subset R^n$ پارامتری شده‌اند. در این مسئله حالتی را در نظر می‌گیریم که مدل به اندازه کافی کارامد است که بتواند دینامیک سیستم واقعی S را شناسایی کند. به عبارت دیگر سیستم واقعی به مجموعه مدل تعلق داشته باشد($S\in M$) تعلق سیستم واقعی به مجموعه مدل به این معنی است که یک بردار پارامتر $\bar{\theta}$ وجود داشته باشد که $G(\bar{\theta})=G_0$ و $H(\bar{\theta})=H_0$ در روابط فوق G_0 نشان دهنده تابع تبدیل سیستم واقعی و H_0 یک تابع تبدیل مونیک(Monic) پایدار و معکوساً پایدار است و رابطه $\Phi_\upsilon(\omega)=\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2\lambda_0$ را برآورده می‌کند. $\Phi_\upsilon(\omega)$ نیز طیف نویز جمع‌شونده با خروجی و λ_0 یک مقدار ثابت است که می‌تواند به عنوان واریانس e در نظر گرفته شود، [۶].

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.1.8]

با نمایش تخمین پارامترها بر اساس N سری داده‌های ورودی–خروجی به صورت $\hat{\theta}_N$، نتایج مهمی در ارتباط با خواص مجانبی تخمین پارامترها $\hat{\theta}_N$ به‌دست می‌آید که عبارتند از،[۹].

$$\begin{aligned}&\sqrt{N}(\hat{\theta}_N-\bar{\theta})\to N(0,P(\bar{\theta}))asN\to\infty\\&\lim_{N\to\infty}NE(\hat{\theta}_N-\bar{\theta})(\hat{\theta}_N-\bar{\theta})^T=P(\bar{\theta})\\&P(\bar{\theta})=\lambda_0[E[\psi(t,\bar{\theta})\psi^T(t,\bar{\theta})]]\\&\psi(t,\bar{\theta})=\frac{d}{d\theta}\hat{y}(t,\bar{\theta})\end{aligned}\qquad(۲)$$

این نتایج نشان می‌دهد که اگر سیستم واقعی درون مجموعه مدل قرار داشته باشد، تخمین پارامترها به سمت پارامترهای سیستم واقعی میل می‌کند و ماتریس کواریانس خطای تخمین با نسبت $1/N$ کاهش می‌یابد. با این وجود تعداد داده‌های آزمایش تنها کمیتی نیست که بر صحت تخمین تاثیر گذار است. با در نظر گرفتن عملیات حلقه–باز، معکوس ماتریس کواریانس، $P^{-1}(\bar{\theta})$، تابعی خوش تعریف(Affine) از طیف ورودی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود، [۹]

$$\begin{aligned}P^{-1}(\bar{\theta})=&\frac{1}{2\pi\lambda_0}\int_{-\pi}^{\pi}F_u(e^{j\omega},\bar{\theta})\Phi_u(\omega)F_u^*(e^{j\omega},\bar{\theta})d\omega\\&+R_0(\bar{\theta})\\R_0(\bar{\theta})=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_e(e^{j\omega},\bar{\theta})F_e^*(e^{j\omega},\bar{\theta})d\omega\end{aligned}\qquad(۳$$

که در آن $F_u(\bar{\theta})=H^{-1}(\bar{\theta})\frac{dG(\bar{\theta})}{d\theta}$ و $F_e(\bar{\theta})=H^{-1}(\bar{\theta})\frac{dH(\bar{\theta})}{d\theta}$.

رابطه **(۳)** به خوبی نشان می‌دهد که چگونه واریانس خطا به طیف سیگنال ورودی بستگی دارد. بر این اساس ورودی‌های با طیف‌های متفاوت به طرق مختلفی واریانس خطا را تحت تاثیر قرار می‌دهند. بنابراین رابطه **(۳)** رابطه‌ای بسیار مفید در مبحث طراحی ورودی می‌باشد. در حالت حلقه–باز، طیف ورودی تنها کمیتی است که می‌توان از آن برای شکل دادن به ماتریس کواریانس مجانبی استفاده کرد، [۶]

با توجه به رابطه **(۳)**، معکوس ماتریس کواریانس به واسطه $\bar{\theta}$ به سیستم واقعی وابسته است که در کاربردهای عملی این موضوع به یک نقطه ضعف در مسئله طراحی ورودی تبدیل می‌شود. برای حل این مشکل در کاربردهای عملی، می‌توان روش طراحی بهینه را با یک روش دو مرحله‌ای جایگزین نمود. در مرحله اول با استفاده از سیگنال‌های معمول و کلاسیک شناسایی سیستم مانند نویز سفید یا سیگنال‌های باینری شبه تصادفی(PRBS) یک مدل اولیه از سیستم تخمین می‌زنیم. در مرحله دوم مدل تخمینی به‌دست آمده از مرحله اول را جایگزین سیستم واقعی در مسئله طراحی ورودی می‌کنیم.

خواص مجانبی (۲) برای حالتی که $S\in M$ و برای N به اندازه کافی بزرگ، ایجاب می‌کند که تخمین پارامتر به طور تقریبی با احتمال p در درون ناحیه عدم قطعیت بیضوی زیر قرار گیرد، [۹].

$$U_\theta=\{\theta\,|\,N(\theta-\bar{\theta})^TP^{-1}(\bar{\theta})(\theta-\bar{\theta})\le\chi(n,p)\}\qquad(۴)$$

رابطه **(۳)** برای معکوس ماتریس کواریانس $P^{-1}(\bar{\theta})$ نشان می‌دهد که طیف ورودی تنها کمیت وابسته به ورودی است که می‌تواند بر روی ماتریس کواریانس تخمین، $P(\bar{\theta})$ تاثیر گذار باشد و برای معیارهای کیفی وابسته به $P(\bar{\theta})$، طیف ورودی تنها کمیتی است که می‌تواند برای برقراری محدودیت‌های کیفی مورد استفاده قرار گیرد.

طیف سیگنال ورودی u طبق رابطه زیر تعریف می‌گردد

$$\Phi_u(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{r}_{|k|}e^{-j\omega k}\qquad(۵)$$

که در آن

$$r_k=Eu(t)u(t-k)\qquad(۶)$$

ضرایب همبستگی می‌باشند. با تغییر مناسب توابع پایه می‌توان رابطه (۵) را به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\Phi_u(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{c}_{|k|}B_k(e^{j\omega})\qquad(۷)$$

که توابع پایه $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ توابع تبدیل کسری پایدار و سره بوده و ضرایب $\tilde{c}_k$ نیز باید به گونه‌ای باشند که

$$\Phi_u(\omega)\ge0,\forall\omega\qquad(۸)$$

با این وجود، استفاده از تعداد نامتاهی پارامتر غیرعملی می‌باشد و این پارامتری کردن باید به گونه‌ای محدود گردد. یک راه حل استفاده از پارمتری کردن بعد محدود می‌باشد، یعنی:

$$\Phi_u=\sum_{k=-(M-1)}^{M}\tilde{c}_{|k|}B_k\qquad(۹)$$

که M یک عدد صحیح مثبت است. این نوع از پارامتری‌کردن در [۶] به عنوان " *پارامتری کردن بعد محدود طیف ورودی* " نامگذاری و نشان داده شده‌است که به جای پارامتری کردن طیف ورودی، می‌توان از پارامتری کردن قسمت حقیقی مثبت آن استفاده کرد، یعنی:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.1.8]

$$\Phi_u(\omega)=\Psi(e^{j\omega})+\Psi^*(e^{j\omega})$$
$$\Psi(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{M-1}\tilde{c}_k B_k(e^{jw}) \qquad (۱۰)$$

با در نظر گرفتن پارامتری‌کردن قسمت حقیقی مثبت، می توان از مفهوم SPR بودن برای برقراری شرط (۸) برای طیف ورودی استفاده نمود و در نتیجه لم KYP کاربرد پیدا می‌کند.

لم۱: [۶] تابع تبدیل $H(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$ SPR، است اگر و فقط اگر ماتریس $Q=Q^T>0$ وجود داشته‌باشد که :

$$K\left(Q,\{A,B,C,D\}\right)=\begin{bmatrix}Q-A^TQA & C^T-A^TQB\\ C-B^TQA & D+D^T-B^TQB\end{bmatrix}>0 \qquad (۱۱)$$

در اینجا با در نظر گرفتن تحقق فضای حالت کانونی کنترل‌کننده $\{A,B,C,D\}$ از $\Psi_u(\omega)$، ماتریس‌های حالت و ورودی A و B مقادیر ثابت بوده و می‌توان از لم KYP برای نمایش شرط مثبت بودن (۸) به صورت LMI استفاده نمود.

با استفاده از پارامتری‌کردن بعد محدود طیف ورودی به فرم (۱۰) ، ثابت شده است که می‌توان معکوس ماتریس کواریانس $P^{-1}(\bar{\theta})$ را نیز به صورت تابع خوش تعریفی از متغیرهای پارامتری‌کننده طیف ورودی نوشت.

لم ۲ : [۶] فرض کنید طیف ورودی توسط متغیرهای $\tilde{c}_k$ به صورت رابطه (۱۰) پارامتری شده است. سپس معکوس ماتریس کواریانس نیز توسط همین متغیرها به صورت زیر پارامتری می‌شود.

$$P^{-1}(\bar{\theta})=R_0(\bar{\theta})+\sum_{k=0}^{M-1}\tilde{c}_k B_k^p(\bar{\theta}) \qquad (۱۲)$$

که در آن:

$$B_k^p(\bar{\theta})=\frac{1}{2\pi\lambda_0}\int_{-\pi}^{\pi}F_u(e^{j\omega},\bar{\theta})[B_k(e^{j\omega})+B_k^*(e^{j\omega})]F_u^*(e^{j\omega},\bar{\theta})d\omega \qquad (۱۳)$$

۲.۲ طراحی کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت H_∞ برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی

تابع تبدیل یک سیستم نامعین تک ورودی-تک خروجی، گسسته و تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید

$$G(z,\theta)=\frac{N(z,\theta)}{M(z,\theta)}=\frac{\theta_0 z^p+\theta_1 z^{p-1}+\ldots+\theta_p}{z^q+\theta_{p+1}z^{q-1}+\ldots+\theta_{n-1}} \qquad (۱۴)$$

که در آن $N(z,\theta)$ و $M(z,\theta)$ دوچندجمله‌ای و پارامتر $\theta=\begin{bmatrix}\theta_0 & \theta_1 & \ldots & \theta_{n-1}\end{bmatrix}^T\in R^n$ برداری است که G را پارامتری می‌کند. عدم قطعیت مدل توسط ناحیه عدم قطعیت پارامتری بیضوی نمایش داده می‌شود و پارامترها در درون یک بیضی به مرکز تخمین نامی $\bar{\theta}$ قرار می‌گیرند. این ناحیه عدم قطعیت بیضوی توسط رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$U=\left\{\theta\,|\,(\theta-\bar{\theta})^T R_e(\theta-\bar{\theta})\le 1\right\} \qquad (۱۵)$$

برای ساده سازی روابط، متغیر $\Delta=[\theta^T \quad 1]^T$ را در نظر بگیرید. بنابراین مجموعه عدم قطعیت عبارت است از :

$$U=\left\{\Delta\,|\,\Delta^T U_0\Delta\ge 0\right\} \qquad (۱۶)$$

که در آن :

$$U_0=\begin{pmatrix}-R_e & R_e\bar{\theta}\\ \bar{\theta}^T R_e & 1-\bar{\theta}^T R_e\bar{\theta}\end{pmatrix} \qquad (۱۷)$$

سیستم حلقه بسته استاندارد فیدبک واحد را در نظر بگیرید، در اینجا هدف طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت

$$K(z)=\frac{X(z)}{Y(z)}=\frac{x_0z^m+x_1z^{m-1}+\ldots+x_m}{z^m+y_1z^{m-1}+\ldots+y_m} \qquad (۱۸)$$

به گونه‌ای است که سیستم حلقه-بسته پایدار شده و کارایی H_∞ زیر تضمین گردد.

$$\left\|W(z)V(z,\Delta)\right\|_\infty=\left\|\frac{S(z,\Delta)}{L(z,\Delta)}\right\|_\infty<\gamma \qquad (۱۹)$$

که $V(z,\Delta)$ می‌تواند هر تابع تبدیل حلقه بسته‌ای مانند تابع حساسیت، مکمل حساسیت و یا تابع حساسیت ورودی و $W(z)$ نیز یک فیلتر وزنه مناسب می‌باشد. با در نظر گرفتن مفهوم SPR بودن ارائه شده در لم ۱، تعریف زیر در [۱۰] ارائه شده است.

تعریف ۱ : دو تابع‌تبدیل SPR هم‌مرتبه $H_1(z)$ و $H_2(z)$ با تحقق‌های فضای حالت (A_1,B_1,C_1,D_1) و (A_2,B_2,C_2,D_2) را SPR با تابع لیاپانوف مشترک یا CL-SPR می‌نامند اگر H_1 و H_2 نامساوی لم KYP (نامساوی(۱۱)) را با یک ماتریس لیاپانوف Q برآورده سازند، [۱۰].

لم ۳ : [۱۰] چندجمله‌ای $S(z)$ و دو چندجمله‌ای هم‌مرتبه $L(z)$ و $E(z)$ (چند جمله‌ای مرکزی) را در نظر بگیرید. آنگاه $\left\|S(z)/L(z)\right\|_\infty<\gamma$ اگر توابع تبدیل زیر CL-SPR باشند.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.1.8]

$$H_1(z) = (L(z) - \gamma^{-1}S(z))/E(z)$$
$$H_2(z) = (L(z) + \gamma^{-1}S(z))/E(z) \quad (۲۰)$$

در لم ۳، تابع تبدیل $S(z)/L(z)$ می‌تواند هر تابع حساسیت وزندار حلقه-بسته‌ای باشد. برای ساده سازی روابط، تعریف زیر، ارائه شده در [۷] را در نظر بگیرید.

چند جمله‌ای $R(z,\Delta) = \Delta^T r_t z^t + \Delta^T r_{t-1} z^{t-1} + \ldots + \Delta^T r_0$ که تمامی ضرایب آن توابع حقیقی خوش تعریف از بردار پارامتر $\Delta \in U$ می‌باشند را وابسته خطی به پارامتر (LPD) از U می‌نامند اگر $r_0, r_1, \ldots, r_t \in R^{n+1}$ همچنین یک سیستم دارای عدم قطعیت خطی تغییر ناپذیر با زمان با تابع تبدیل

$$G(z,\Delta) = \frac{N(z,\Delta)}{M(z,\Delta)} \quad (۲۱)$$

را یک سیستم LPD از U می‌نامند اگر $N(z,\Delta)$ و $M(z,\Delta)$ چند جمله های LPD از U باشند، [۷]

لم ۴ : [۷] چند جمله‌ای مرکزی $E(z,\Delta)$ که LPD می‌باشد را در نظر بگیرید. آنگاه کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت رابطه (۱۸)، سیستم دارای عدم قطعیت (۲۱) را پایدار کرده و کارایی H_∞ رابطه (۱۹) را برای هر $\Delta \in U$ برآورده می‌کند اگر دو اسکالر حقیقی ε_1 و ε_2 و یک ماتریس متقارن مثبت $P(\Delta) = P(\Delta)^T > 0$ وجود داشته باشد که :

$$Spr(\mathrm{P}(\Delta), \varepsilon_1, L(z,\Delta) + \gamma^{-1}S(z,\Delta), E(z,\Delta)) > 0$$
$$Spr(\mathrm{P}(\Delta), \varepsilon_2, L(z,\Delta) - \gamma^{-1}S(z,\Delta), E(z,\Delta)) > 0 \quad (۲۲)$$

که در آن :

$$Spr(\mathrm{P}(\Delta), \varepsilon, R(z,\Delta), E(z,\Delta)) =$$
$$\begin{bmatrix} P(\Delta) & R^T\Delta & 0_{t\times t} \\ \Delta^T R & 0 & \Psi(\Delta) \\ 0_{t\times t} & \Psi(\Delta)^T & -P(\Delta) \end{bmatrix} +$$
$$\varepsilon \begin{bmatrix} \Pi + \Gamma(\Delta) \\ -I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi^T + \Gamma(\Delta)^T & -I_t \end{bmatrix} \quad (۲۳)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \ldots & r_{t-1} \end{bmatrix} \quad \Psi(\Delta) = \begin{bmatrix} 0_{1\times(t-1)} & \Delta^T r_t \end{bmatrix}$$
$$E = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & \ldots & e_{t-1} \end{bmatrix}, \quad \Pi^T = \begin{bmatrix} 0_{t\times 1} & I_t \end{bmatrix}$$
$$\Gamma(\Delta) = \begin{bmatrix} 0_{t\times(t-1)} & -E^T\Delta \\ 0_{1\times(t-1)} & 0 \end{bmatrix} \text{ و}$$

با استفاده از لم ۴، مسئله طراحی کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت H_∞ برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی می‌تواند به صورت یک مسئله بهینه‌سازی با بعد نا محدود نمایش داده شود. برای ساده‌سازی مسئله، یک راه حل این است که یک ماتریس لیاپانوف ثابت برای همه مدل‌های درون مجموعه مدل در نظر گرفت، یعنی $\forall \Delta \in U, P = P(\Delta)$ اما این روش محافظه کاری زیادی را ایجاد می‌کند. یک روش بهبود یافته، استفاده از ماتریس لیاپانوف وابسته پارامتری است که به محافظه کاری کمتری منجر می‌شود،]7[. با در نظر گرفتن ساختار

$$P(\Delta) = (I_t \otimes \Delta^T) P_q (I_t \otimes \Delta) \quad (۲۴)$$

برای ماتریس لیاپانوف که در آن $\otimes$ نشان دهنده ضرب کرانکر می‌باشد، می‌توان یک تقریب با بعد محدود از (۲۳) برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی ارائه داد، [۷] .بنابراین می‌توان ماتریس‌های $\Pi = (I_{t+1} \otimes \Delta^T)\Pi_q$ ، $\Pi, \Gamma(\Delta), I_t, R$ و $\Psi(\Delta)$ را به صورت $I_t = (I_t \otimes \Delta^T)\Lambda_q$ ، $\Gamma(\Delta) = (I_{t+1} \otimes \Delta^T)\Gamma_q$ ، $R = R_q(I_t \otimes \Delta)$ و $\Psi(\Delta) = \Delta^T \Psi_q (I_t \otimes \Delta)$ نمایش داد که ماتریس‌های $\Pi_q, \Gamma_q, \Lambda_q, R_q, \Psi_q$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$R_q = [(0_{(n+1)\times n} \quad r_0) \quad \ldots \quad (0_{(n+1)\times n} \quad r_t)]$$
$$\Psi_q = [0_{(n+1)\times(nt+t-1)} \quad r_t], \Pi_q = \begin{bmatrix} 0_{(n+1)\times t} \\ \Lambda_q \end{bmatrix}$$
$$\Lambda_q = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n\times 1} \\ 1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 0_{n\times 1} \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$
$$\Gamma_q = \begin{bmatrix} & & -e_0 \\ 0_{((n+1)(t+1))\times(t-1)} & & \vdots \\ & & -e_{t-1} \\ & & 0_{(n+1)\times 1} \end{bmatrix}$$

در [۷] با استفاده از تعاریف فوق و استفاده از روند S ، شرط با بعد نا محدود $Spr(P(\Delta), \varepsilon, R(z,\Delta), E(z,\Delta)) > 0$ در(۲۳)، با شرط وجود اسکالر $\tau_{spr} > 0$ و ماتریس T_{spr} تعریف شده توسط (۲۷) با $f = 2t+1$ جایگزین شده است به گونه‌ای که

$$H_q(P, \varepsilon, R, E, r_t) - \tau_{spr}(I_{2t+1} \otimes U_0) + T_{spr} > 0 \quad (۲۵)$$

که در آن

$$H_q(P, \varepsilon, R, E, r_t) = \begin{bmatrix} P_q & R_q^T & 0 \\ R_q & 0 & \Psi_q \\ 0 & \Psi_q^T & -P_q \end{bmatrix} +$$
$$\varepsilon \begin{bmatrix} \Pi_q + \Gamma_q \\ -\Lambda_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_q^T + \Gamma_q^T & -\Lambda_q^T \end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.1.8]

و ماتریس بلوکی T تشکیل شده از ماتریس‌های شبه متقارن $T_{ij} = -T_{ij}^T \in R^{(n+1)\times(n+1)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & T_{21}^T & \cdots & T_{f1}^T \\ T_{21} & 0 & & T_{f2}^T \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_{f1} & T_{f2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$

همچنین شرط $P(\Delta) > 0, \forall \Delta \in U_0$ نیز با شرط وجود یک اسکالر حقیقی مثبت $\tau_p > 0$ و ماتریس T_p (تعریف شده توسط (۲۷) با $f = t$) جایگزین شده است به گونه ای که،]7[

$$P_q - \tau_p(I_t \otimes U_0) + T_p > 0 \qquad (۲۸)$$

با استفاده از تعاریف فوق و اعمال در لم ۴، می‌توان مسئله طراحی کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی را به صورت بهینه سازی محدب و در نتیجه به صورت LMI بیان نمود.

همانطور که در [۷] نیز بیان شده است، انتخاب چند جمله‌ای مرکزی $E(z,\Delta)$ مهمترین دلیل پیدایش محافظه کاری در مسئله طراحی کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت می‌باشد. ساده‌ترین انتخاب یک چندجمله‌ای ثابت است که تابع Δ نباشد. اما این انتخاب به جواب‌های شدیداً محافظه کارانه منجر می‌شود. محافظه کاری روش کمتر می‌شود اگر یک کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت $K_0(z) = X_0(z)/Y_0(z)$ وجود داشته باشد که سیستم LPD را برای هر $\Delta \in U$ پایدار کند (بدون در نظر گرفتن کارایی). این کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت می‌تواند با استفاده از روش ارائه شده در [۱۱] محاسبه شده و یا کنترل‌کننده محافظه کارانه به‌دست آمده توسط چند جمله‌ای مرکزی ثابت باشد. سپس یک انتخاب خوب برای چند جمله‌ای مرکزی عبارت است از :

$$E(z,\Delta) = X_0(z)N(z,\Delta) + Y_0(z)M(z,\Delta) \qquad (۲۹)$$

$E(z,\Delta)$ یک چند جمله‌ای مرکزی LPD است که برای هر $\Delta \in U$ پایدار است، [۷].

۳- روش طراحی توام سیگنال ورودی و کنترل کننده

در این بخش هدف کلی ایجاد ارتباط بین روش طراحی کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی (ارائه شده در بخش ۲-۱) و مسئله طراحی ورودی در شناسایی سیستم (ارائه شده در بخش ۲-۲) و ارائه یک روش ترکیبی برای طراحی توام سیگنال ورودی و کنترل در آزمایش شناسایی سیستم می‌باشد. ساختار مدل (۱) که توسط $\theta \in \Theta \subset R^n$ پارامتری شده و کنترل‌کننده مرتبه ثابت (۱۸) را در نظر بگیرید. حال هدف طراحی سیگنال ورودی با حداقل انرژی به گونه‌ای است که قادر به طراحی یک کنترل‌کننده پایدارساز (در صورت وجود) باشیم که یک کارایی مقاوم مانند (۱۹) را تضمین کند. در بخش ۲-۱ اشاره شد که تخمین پارامترهای $\hat{\theta}_N$، به‌دست آمده از آزمایش شناسایی سیستم در چارچوب خطای پیش بینی، در داخل ناحیه عدم قطعیت بیضوی (۴) قرار می‌گیرد. بنابراین مسئله طراحی توام به صورت کلی به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\textit{minimize} \quad \underset{\Phi_u}{\alpha}$$

subject to:

$$\Phi_u(\omega) \geq 0; \forall \omega$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_u(\omega) d\omega \leq \alpha \qquad (۳۰)$$
$$\exists \textit{ fixed-order controller such that}$$
$$\left\| W(z)V(z,\Delta) \right\|_\infty < \gamma; \forall \omega,$$
$$\forall \Delta \in U$$

به منظور ارائه روش جدید برای طراحی توام سیگنال ورودی و کنترل‌کننده در آزمایش شناسایی سیستم، ناحیه عدم قطعیت به‌دست آمده از آزمایش شناسایی (۴) باید به شکل (۱۵) نمایش داده شود. بدین منظور فرض کنید

$$R_e = \frac{P^{-1}(\bar{\theta})N}{\chi(n,p)} \qquad (۳۱)$$

با این تعریف، پارامتر واقعی سیستم و ماتریس کواریانس تخمین به روش طراحی کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی وارد می‌شود. همانطور که در بخش ۲ اشاره شد، برای نمایش مسئله طراحی ورودی به صورت بهینه سازی محدب، می‌توان از پارامتری نمودن طیف ورودی استفاده کرد. بنابراین با تعریف پارامتری کردن بعد محدود (۹)، می‌توان از لم KYP برای تضمین برقراری شرط مثبت بودن (۸) استفاده نمود.به علاوه با استفاده از این پارامتری‌کردن، معکوس ماتریس کواریانس $P^{-1}(\bar{\theta})$ و در نتیجه U_0 بر حسب پارامترهای $\tilde{c}_k; k = 0,1,\ldots,M-1$ پارامتری می‌شوند. پس پارامتری کردن ناحیه عدم قطعیت، برای برقراری شرط کارایی (۱۹)، لم ۱ و روابط مربوط به آن یعنی روابط (۲۵) الی (۲۸) می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

واضح است که با پارامتری کردن U_0 بر حسب $\tilde{c}_k$، رابطه (۲۵) بر حسب τ و $\tilde{c}_k$ خطی نمی‌باشد. برای حل این مشکل، با تعریف متغیرهای جدید $c_k = \tau\tilde{c}_k; k = 0,1,\ldots,M-1$ و جایگزین کردن در R_e، می‌توان پارامتری‌کردن جدیدی از طیف ورودی و در نتیجه معکوس ماتریس کواریانس بر حسب c_k تصور کرد. بنابراین با تعریف

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.1.8]

$$\tilde{U}_0 = \begin{pmatrix} -\tilde{R}_e & \tilde{R}_e\bar{\theta} \\ \bar{\theta}^T\tilde{R}_e & \tau - \bar{\theta}^T\tilde{R}_e\bar{\theta} \end{pmatrix} \qquad (۳۲)$$

رابطه (۲۵) به یک LMI بر حسب P_q, c_k, τ, T و پارامترهای کنترل‌کننده یعنی $x_0, x_1, \ldots, x_m$ و $y_1, \ldots, y_m$ تبدیل می‌شود. برای جمع بندی این بخش با در نظر گرفتن لم ۴ و روابط (۲۵) الی (۲۸) می‌توان قضیه زیر را بیان نمود.

قضیه ۱ : ساختار مدل (۱) و همچنین ناحیه عدم قطعیت (۴) را در نظر بگیرید. فرض کنید طیف ورودی به شکل (۱۰) پارامتری‌شده و قسمت حقیقی طیف ورودی $\Psi_u(\omega)$، دارای تحقق فضای حالت کانونی کنترل‌پذیری (A,B,C,D) باشد. آنگاه مسئله طراحی توام سیگنال ورودی و کنترل‌کننده در آزمایش شناسایی سیستم که کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت مدل به‌دست آمده از آزمایش را پایدار کرده و کارایی H_∞ رابطه (۱۹) را برای هر $\Delta \in U$ برقرار می‌کند، می‌تواند به صورت یک مسئله بهینه سازی محدب پارامتری و به صورت نامساوی ماتریسی خطی، LMI به صورت زیر نمایش داده شود :

$$\begin{aligned} &\textit{minimize} \quad \alpha \\ &x_0,\ldots,x_m, y_1,\ldots,y_m, c_0,\ldots,c_{M-1}, \\ &T_{spr1}, T_{spr3}, T_p, p_q, \tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \\ &\textit{subject to:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &H_q(P, \varepsilon_1, L - \gamma^{-1}S, E, l_t - \gamma^{-1}s_t) \\ &\qquad -(I_{2t+1} \otimes \tilde{U}_0) + T_{spr1} > 0 \\ &H_q(P, \varepsilon_2, L + \gamma^{-1}S, E, l_t + \gamma^{-1}s_t) \\ &\qquad -(I_{2t+1} \otimes \tilde{U}_0) + T_{spr2} > 0 \\ &P_q - (I_t \otimes \tilde{U}_0) + T_p > 0 \\ &K\big(Q, \{A,B,C,D\}\big) \geq 0 \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_u(\omega)d\omega \leq \alpha \\ &\tau, Q, p_q > 0 \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

اثبات: این قضیه کاربرد مستقیم لم ۴، لم ۱ و استفاده از پارامتری کردن بعد محدود می‌باشد.

قابل ذکر است که پارامترهای کنترل‌کننده به صورت خطی در L و S ظاهر می‌شوند و (۳۳) یک مجموعه LMI بر حسب پارامترهای کنترل‌کننده و P_q, c_k, τ, T می‌باشد.

۴- نتایج عددی شبیه سازی بر روی یک سیستم واقعی

برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده، از سیستم مثال ارائه شده در [۱۱] استفاده شده است. این مثال مربوط به تابع تبدیل سیستم دو تانک متصل به هم به صورت سری با بازسازی بخار می‌باشد. تابع تبدیل نامی سیستم عبارت است از :

$$G_0(z) = \frac{0.0028z + 0.0038}{z^2 - 1.1871z + 0.2087} \qquad (۳۴)$$

در اینجا به دنبال طراحی یک آزمایش شناسایی سیستم با حداقل تحریک هستیم که ضمن شناسایی پارامترها قادر به طراحی یک کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت مقاوم K باشیم که سیستم حلقه-بسته را پایدار کرده و کارایی مقاوم زیر را نیز تضمین کند.

$$\left\| \frac{1}{1 + K(z)G(z)} \right\|_\infty = \left\| \frac{S(z,\Delta)}{L(z,\Delta)} \right\|_\infty < \gamma \qquad (۳۵)$$

آزمایش شناسایی سیستم را در چارچوب خطای پیش بینی و با ساختار مدل خطای خروجی در نظر بگیرید، یعنی :

$$y(t) = G_0(z)u(t) + e(t) \qquad (۳۶)$$

که $G_0(z)$ توسط (۳۴) داده شده و $e(t)$ نیز یک نویز سفید با میانگین صفر و واریانس ۰/۰۵ می‌باشد. با در نظر گرفتن تعداد $N = 1000$ داده برای آزمایش شناسایی، انتخاب احتمال 95% برای ناحیه عدم قطعیت در (۱۵) و پارامتری‌کردن طیف ورودی با $M = 20$ متغیر و توابع پایه $B_k(e^{j\omega}) = e^{-jk\omega}$، می‌توان محدودیت کیفی برای کمینه کردن انرژی سیگنال ورودی در (۳۳) را با شرط $\alpha\tau - r_0 \geq 0$ جایگزین نمود. با استفاده از یک آزمایش پیش شناسایی با سیگنال ورودی نویز سفید و تعداد داده‌های $N_{init} = 500$ می‌توان تخمین اولیه

$$\theta_{init} = [0.0027 \quad 0.0040 \quad -1.1680 \quad 0.1894]^T \qquad (۳۷)$$

را به عنوان پارامترهای واقعی سیستم در مسئله طراحی ورودی و کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت در نظر گرفت. همچنین فرض کنید که کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت به صورت زیر پارامتری شده است.

$$K = \frac{x_0 z + x_1}{z + y_1} \qquad (۳۸)$$

چندجمله‌ای مرکزی LPD نیز با استفاده از روش ارائه شده در [۱۰] محاسبه شده است. کنترل‌کننده زیر برای سیستم نامی بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت طراحی شده است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.1.8]

$$K_0 = \frac{50.5540z - 11.1954}{z + 0.6801} \qquad (۳۹)$$

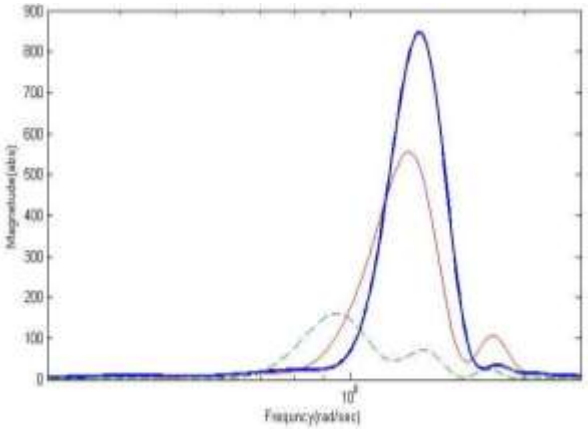
بنابراین چندجمله‌ای مرکزی توسط (۲۹) محاسبه می‌شود.

کوچکترین مقدار α (انرژی سیگنال ورودی) با جستجوی خطی در بین مقادیر قابل قبول در مسئله بهینه‌سازی (۳۳) به دست می آید. حل این مسئله، پارامترهای طیف ورودی و کنترل‌کننده را به ما می‌دهد. نتایج شبیه سازی برای سه حد بالای متفاوت بر روی کارایی مقاوم در مسئله (۳۳) در جدول ۱ارائه شده است.

جدول ۱ : حداقل انرژی و کنترل‌کننده طراحی شده توسط (۳۳)

γ	α	x_0	x_1	y_1
۵	۲۵	۵۷/۸۶	۰/۸۲۸	۰/۷۲۸۸
۱/۲	۸۵	۳۰/۳۶	۰/۵۴۳	۰/۷۱۹۳
/۱۷۳ ۱	۱۰۶	۲۸/۴۹	− ۰/۲۸۴	۰/۷۱۵۳

نتایج ارائه شده در جدول ۱ کاملاً با مفاهیم تئوری کنترل مقاوم سازگار است، به این معنی که برقراری کارایی مقاوم (۱۹) با مقادیر کوچکتر γ مستلزم ناحیه عدم قطعیت کوچکتر و این موضوع نیز بر اساس رابطه **(۳)** نیازمند سیگنال ورودی با انرژی بیشتر برای شناسایی در آزمایش می‌باشد. طیف‌های طراحی شده در شکل ۱ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱: طیف طراحی شده بهینه : خط ضخیم ممتد : $\gamma = 1.173$ ، خط نازک ممتد $\gamma = 1.2$ ، خط چین : $\gamma = 5$

این نتایج نیز کاملاً با درک شهودی ما از مسئله سازگار است، یعنی بیشتر انرژی سیگنال ورودی در محدوده پهنای باند مطلوب سیستم حلقه-بسته که همان محدوده فرکانسی حیاتی برای کارایی مقاوم می‌باشد توزیع شده است. برای به‌دست آوردن سیگنال ورودی، با داشتن طیف ورودی و با استفاده از روش یول-واکر می‌توان یک فیلتر دیجیتال به گونه‌ای طراحی نمود که پاسخ فرکانسی آن مانند طیف سیگنال ورودی باشد. سپس با اعمال یک نویز سفید بعنوان ورودی به فیلتر، خروجی فیلتر را می‌توان به عنوان سیگنال ورودی در آزمایش شناسایی سیستم در نظر گرفت.

برای نشان دادن کارایی روش، حالت سوم یعنی $\gamma = 1.173$ را در نظر بگیرید. با استفاده از روش ارائه شده، یک سیگنال ورودی با انرژی $\alpha = 106$ (شکل ۱) طراحی شده‌است. مدل نامی و مجموعه عدم قطعیت به‌دست آمده از آزمایش شناسایی با این سیگنال ورودی به وسیله کنترل‌کننده طراحی شده پایدار بوده و شرط کارایی مقاوم متناسب با $\gamma = 1.173$ را نیز برآورده می‌کند. حالتی را در نظر بگیرید که می‌خواهیم آزمایش شناسایی سیستم را با استفاده از سیگنال‌های کلاسیک شناسایی سیستم مانند PRBS یا نویز سفید انجام دهیم. فرض کنید که سیگنال ورودی را یک نویز سفید با طول داده‌های $N = 1000$ و انرژی ۱۰۶ (همان مقدار انرژی به‌دست آمده از روش طراحی توام) انتخاب کرده و آزمایش شناسایی سیستم را انجام داده‌ایم. برای مدل نامی و ناحیه عدم قطعیت بیضوی به‌دست آمده از این آزمایش شناسایی سیستم، نمی‌توان کنترل‌کننده مقاومی طراحی نمود که شرط کارایی مقاوم را برای $\gamma = 1.173$ برآورده کند. در این حالت بهترین کارایی که می‌توان به‌دست آورد متناسب با $\gamma = 3.035$ می‌باشد. نتایج این شبیه سازی به خوبی کارایی روش توام ارائه شده در این مقاله را در ارتباط با مبحث مربوطه یعنی ***شناسایی برای کنترل***، نشان می دهد.

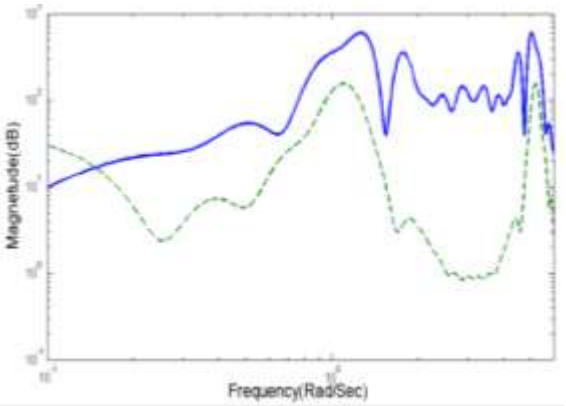
در این قسمت، به منظور مقایسه روش ارائه شده در این مقاله، با روش ارائه شده در [۱۲]، حالت سوم یعنی کارایی متناسب با $\gamma = 5$ را در نظر بگیرید. با استفاده از روش ارائه شده در بخش سوم، یک سیگنال ورودی با انرژی $\alpha = 25$ و یک کنترل‌کننده مقاوم مرتبه یک طراحی شد که در شکل ۲ ارائه شده است. حال اگر همین مسئله را با استفاده از روش ارائه شده در [۱۲] حل کنیم، کمینه مقدار انرژی ورودی متناسب با $\alpha = 167$ و کنترل‌کننده مرتبه یک زیر به‌دست می‌آید.

$$K_0 = \frac{191.16z - 40.24}{z + 0.8261} \qquad (۴۰)$$

طیف ورودی طراحی شده توسط این روش نیز در شکل ۲ نمایش داده شده است.

همان طور که مشاهده می‌شود، با استفاده از روش ارائه شده در [۱۲]، به یک سیگنال ورودی با ۶ برابر انرژی بیشتر نیاز است که نشان دهنده محافظه‌کاری این روش می‌باشد و همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، این محافظه‌کاری به دلیل استفاده از یک چندجمله‌ای مرکزی و تابع لیاپانوف ثابت برای همه مدل‌های داخل مجموعه عدم قطعیت می‌باشد. مقایسه نتایج شبیه سازی این دو روش نشان دهنده تاثیر استفاده از چندجمله‌ای مرکزی و تابع لیاپانوف وابسته پارامتری در کاهش محافظه‌کاری روش طراحی کنترل‌کننده مقاوم مرتبه ثابت می‌باشد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.1.8]



شکل ۲: طیف طراحی شده بهینه : خط ضخیم ممتد : $\gamma = 5$ با استفاده از روش ارائه شده در [۱۲]، خط چین : $\gamma = 5$ با استفاده از روش ارائه شده در بخش سوم.

۵- نتیجه گیری

یک روش جدید برای طراحی توام سیگنال ورودی و کنترل‌کننده مرتبه‌ثابت مقاوم در آزمایش شناسایی سیستم ارائه شد. به منظور محدب سازی مسئله، از یک روش طراحی کنترل‌کننده مقاوم مرتبه‌ثابت برای سیستم‌های با عدم قطعیت پارامتری بیضوی و پارامتری‌کردن طیف ورودی استفاده شد و مسئله به صورت یک مسئله بهینه سازی محدب ارائه شد. پارامترهای کنترل‌کننده و طیف ورودی متغیرهای بهینه سازی بوده و شرط کارایی مقاوم برای سیستم حلقه-بسته و کمینه سازی انرژی سیگنال ورودی به صورت شروطی بر روی پارامترهای کنترل‌کننده و طیف ورودی تعبیر شده است. مسئله به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی نمایش داده شد و نتایج شبیه سازی بر روی یک سیستم واقعی، کارایی روش ارائه شده را نشان می‌دهد.

مراجع

[1] M.Barenthin, H.Hjalmarsson, “Identification and control: Joint input design and H∞ state feedback with ellipsoidal parametric uncertainty via LMIs” Automatica 44 (2008) 543 – 551
[2] Michel Gevers, IDENTIFICATION FOR CONTROL: ACHIEVEMENTS AND OPEN PROBLEMS Center for Systems Engineering and Applied Mechanics (CESAME) Universit´e Catholique de Louvain
[3] X.Bombois, G.Scorletti, M.Gevers, R.Hildebrand, P.Van den Hof, “Least costly identification experiment for control” Automatica 42 (2006) 1651 – 1662
[4] Ballamudi RK, Crisalle OD. Robust pole-placement for ellipsoidally uncertain systems. Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, 1995.
[5] H. F. Raynaud, L. Pronzato, and E. Walter, “Robust identification and control based on ellipsoidal parametric uncertainty descriptions,” in European Journal of Control, vol. 6, pp. 245–255, 2000.
[6] H.Jansson and H.Hjalmarsson,“Input Design via LMIs Admitting Frequency-Wise Model Specification in Confidence region,” IEEE Trans. Autom Control, vol.50, no.10, Oct.2005.
[7] A.Sadeghzadeh, H.Momeni and A.Karimi, “Fixed-order H∞ controller design for systems with ellipsoidal parametric uncertainty” International Journal of Control, vol. 84, no. 1, p. 57 – 65..
[8] A.Sadeghzade,H.momeni," Shaping the Uncertainty Set Resulted from System Identification for Robust Control Design" Journal of Control, Vol. 4, No. 1, Spring 2010
[9] L. Ljung, System Identification—Theory for the User, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999
[10] H.Khatibi and A.Karimi, “Fixed-order H∞ controller design via convex optimization using an alternative to Youla parameterization,” IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 55, NO. 9, SEPTEMBER 2010
[11] Henrion, D.,Sebek, M., and Kucera, V. (2001), “LMIs for robust stabilization of systems with ellipsoidal uncertainty,” in Process Control Conference, Strbske Pleso, Slovakia.
[12] A.Sadeghzadeh, H.Momeni, "Fixed-order robust H∞ control and control-oriented uncertainty set shaping for systems with ellipsoidal parametric uncertainty" , Int. J. Robust. Nonlinear Control (2010). DOI: 10.1002/rnc.1614

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.1.8]