مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۵، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۰، صفحه ۲۱-۱۲

پایدارسازی و کنترل سیستم‌های خطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی: دیدگاه مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی خطی

حامد ملااحمدیان کاسب[۱]، علی کریم پور[۲]، ناصر پریز[۳]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، ha_mo779@stu-mail.um.ac.ir

[۲] استادیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، karimpor@um.ac.ir

[۳] دانشیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۲/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۶/۳)

چکیده: کلاس خاصی از سیستم‌های سوئیچ شونده خطی دارای قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی بوده و در مدلسازی دسته وسیعی از سیستم‌ها قابل استفاده هستند. در این مقاله روشی جهت تحلیل پایداری و طراحی کنترل‌کننده برای این کلاس از سیستم‌های هایبرید ارائه شده است. روش پیشنهادی مبتنی بر طراحی بر اساس تابع لیاپانف مربعی می‌باشد. مساله تحلیل پایداری و طراحی در مورد این سیستم‌ها به حل یک مساله بهینه‌سازی محدب از نوع نامساوی‌های ماتریسی خطی منجر شده است. نتایج شبیه‌سازی بر روی مبدل dc-dc باک، کارآیی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: سیستم خطی سوئیچ شونده، قانون کلیدزنی مقید، تابع لیاپانف مربعی، نامساوی ماتریسی خطی.

Stabilization and Control of Switched Linear Systems with State-Input Logic Constrained: LMI Approach

Hamed Molla-Ahmadian, Ali Karimpour, Naser Pariz

Abstract: The class of switched linear systems with state-input logic constrained can be used for modeling of many systems. This article presents a new stability analysis and controller design method for this class of hybrid systems. Proposed method is based on quadratic lyapunov function. Computational approach for stability analysis and design is convex optimization (Linear Matrix Inequality type). Simulation results on dc-dc buck converter show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Switched Linear Systems, Constrained Switching Law, Quadratic Lyapunov Function, Linear Matrix Inequality.

۱- مقدمه

سیستمهای هایبرید، دسته ای خاص از سیستم‌ها است که نسبت به زمان پیوسته یا گسسته بوده و دارای پیشامدهای گسسته می‌باشند و در مدلسازی دسته وسیعی از سیستم‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱].

کلاسی خاصی از سیستم‌های هایبرید، سیستم‌های سوئیچ شونده خطی با قانون کلیدزنی مقید می‌باشند. این قید می‌تواند به صورت، قید در حداقل زمان بین کلیدزنی‌ها (dwell time) [۲و۳]، نرخ کلیدزنی [۳]، کلیدزنی بر حسب متغیرهای حالت [۴] و ترتیب کلیدزنی [۵] باشد . کلاسی خاص مورد بررسی در این مقاله، سیستم‌های سوئیچ شونده خطی با قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی می‌باشد. مبدل‌های الکترونیک

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.2.9]

قدرت پایه چون باک و بوست در وضعیت کاری ناپیوسته و مبدل رزونانسی سری نمونه ای از این سیستم‌ها می‌باشند. مساله تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای کلاس مورد نظر با اهمیت بوده و کار تحقیقاتی که به این مساله پرداخته باشد، توسط نویسندگان رویت نشده است.

دو کلاس معروف از سیستم‌های هایبرید، سیستم تکه‌ای افاین (PWA) [۱، ۴ و ۶] و سیستم سوئیچ شونده خطی(SLS) بدون قید در قانون کلیدزنی [۷] می‌باشند. در ادامه هر جا از واژه SLS استفاده شده است، منظور سیستم سوئیچ شونده خطی بدون قید در قانون کلیدزنی می‌باشد. سیستم PWA دارای زیر سیستم‌های افاین و قانون کلیدزنی مقید به متغیرهای حالت می‌باشد. SLS دارای زیرسیستم‌های خطی بوده و بر اساس یک ورودی منطقی زیرسیستم فعال انتخاب می‌گردد. سیستم مورد بررسی در این مقاله دارای قانون کلیدزنی می‌باشد که ترکیبی از قانون کلیدزنی سیستم PWA و SLS می‌باشد.

تحلیل پایداری سیستم‌های PWA به طور معمول به وسیله توابع لیاپانف چندگانه (MLF) صورت می‌گیرد. روش مورد استفاده بدین صورت است که به هر زیرسیستم یا ناحیه از فضای حالت یک تابع شبه لیاپانف نسبت داده می‌شود. مشکل اصلی در به کارگیری MLF یافتن تابع شبه لیاپانف مناسب می‌باشد. تابع لیاپانف مربعی یک کاندیدای مناسب است، که در [۶ و۸] شرایط پایداری آن برحسب نامساوی ماتریسی خطی (LMI) بیان شده‌است. پایداری تکه‌ای مربعی این سیستم‌ها در [۴] بررسی شده است. پایدارسازی SLS از دیگر مسائل با اهمیت است که روش‌های مختلفی برای آن ارائه گردیده است [۹]. پایدارسازی مربعی به کمک روش تصویر کمینه در [۱۰] ارائه شده است. این روش بر روی سیستم‌های غیرخطی نیز قابل استفاده است.

با توجه به قابلیت مدلسازی در فرم دینامیک-منطق ترکیبی(MLD) [۱۱]، امکان تبدیل فرم کلاس مورد بررسی به این فرم جهت تحلیل و طراحی میسر می‌باشد، ولی کار تحقیقاتی قابل ملاحظه‌ای در این زمینه رویت نشده است. کنترل کننده پیش‌بین مبتنی بر مدل (MPC) یا جهت کنترل سیستم‌های MLD استفاده شده است [۱۲]. این کنترل کننده دارای پیچیدگی محاسباتی بالایی بوده و پیاده‌سازی آن مشکل می‌باشد. در [۱۳] یک راه حل محاسباتی مبتنی بر جدول داده‌ها جهت پیاده سازی زمان-واقعی این روش کنترلی ارائه شده است. مبدل‌های باک و بوست در وضعیت هدایت ناپیوسته در [۱۴ و ۱۵] به وسیله MLD مدل و کنترل شده‌اند. تبدیل معادلات مبدل‌ها به فرم MLD دارای پیچیدگی محاسباتی بالا بوده و کنترل آن نیز پیچیده می‌باشد. روش معرفی شده در این مقاله بدون تبدیل فرم سیستم، به کمک تابع لیاپانف مربعی، مساله پایداری و طراحی کنترل کننده را حل می‌نماید.

نوآوری‌های اصلی این مقاله عبارتند از: ۱- ارائه قضیه‌هایی جهت تحلیل پایداری و طراحی قانون کلیدزنی پایدار برای سیستم خطی سوئیچ شونده مقید به حالت-ورودی منطقی، ۲- تبدیل مساله تحلیل پایداری و طراحی قانون کلیدزنی سیستم مورد بررسی به یک مساله بهینه‌سازی محدب و به فرم LMI.

در بخش ۲ کلاس مورد نظر این مقاله معرفی و مدل آن بیان می‌شود. در بخش ۳ مروری بر سیستم‌های PWA و تکنیک‌های پایدارسازی و کنترل آنها صورت گرفته است. در بخش ۴ روش پیشنهادی جهت پایدارسازی و کنترل معرفی می‌گردد. در بخش ۵، تحلیل پایداری روش پیشنهادی ارائه گردیده است. در بخش ۶ نتایج شبیه‌سازی ارائه شده و نهایتا در بخش ۷ نتیجه‌گیری مقاله ارائه شده است.

۲- کلاس سیستم‌های خطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی

در این بخش به بیان ریاضی این دسته از سیستم‌ها می‌پردازیم. سیستم‌های هایبرید در حالت کلی [۱۶] به صورت

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), i(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), i(t), u(t)) \\ i(t^+) &= \varphi(x(t), i(t), u(t), S(t)) \end{aligned} \quad (۱)$$

قابل بیان هستند. در این رابطه، $S(t)$، $u(t)$، $i(t)$ و $x(t)$ به ترتیب متغیر خروجی، بردار ورودی منطقی، ورودی پیوسته، شماره زیر سیستم و حالات سیستم می‌باشند. در این رابطه $S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{M_s} \end{bmatrix}^T$، $s_l \in \{0,1\}, l = 1,2,\dots,M_s$، $i \in \{1,2,\dots,M\}$، $y(t) \in R$ و $x(t) \in R^n$ بوده و M_s و M نیز به ترتیب تعداد ورودی منطقی و زیر سیستم‌ها می‌باشند. به طور معمول دو نوع کلیدزنی دلخواه و مقید در مورد سیستم‌های هایبرید می‌تواند رخ دهد. نوع خاصی از کلیدزنی مقید بر اساس متغیرهای حالت می‌باشد و دارای توصیف ریاضی

$$x \in \left\{ x \middle| H_j^T x - g_j < 0 \right\} \Leftrightarrow \varphi(x) = j \quad (۲)$$

می‌باشد که در این رابطه j شماره زیرسیستم فعال، n تعداد متغیرهای حالت، p_j تعداد مرزهای توصیف کننده مش j-ام و $H_j \in R^{p_j \times n}$، $g_j \in R^{p_j \times 1}$، $j = 1,2,\dots,M$ می‌باشد. منظور از مش در این مقاله ناحیه‌ای محدب از فضای حالت می‌باشد که با رابطه (۲) توصیف شده و منظور از کلیدزنی مقید به حالات سیستم، قیدی به فرم رابطه (۲) می‌باشد.

سیستم مورد بررسی در این مقاله به صورت

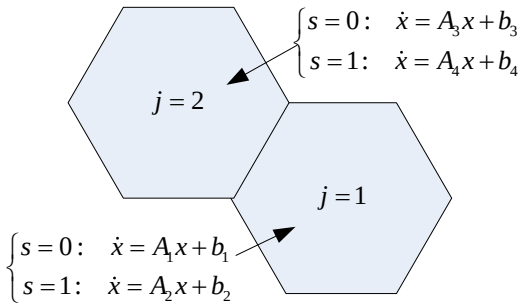
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + b_i \\ y(t) &= C_i x(t) + d_i \\ i(t^+) &= \varphi(i(t), S(t), x(t)) \end{aligned} \quad (۳)$$

می‌باشد که x متغیر حالت، y خروجی، i شماره زیر سیستم فعال ($1 \le i \le M$)، S بردار ورودی منطقی، n تعداد متغیر حالت، $d_i \in R$، $C_i \in R^{1 \times n}$، $b_i \in R^{n \times 1}$ و $A_i \in R^{n \times n}$ می‌باشند. همچنین قانون کلیدزنی (φ) به صورت زیر مشخص می‌گردد:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.2.9]

$$\varphi(i(t),S(t),x(t))=i: \quad H_j^T x-g_j<0 \ \ \& \ S=[s_1 \ \ s_2 \ldots s_{M_s}]^T \qquad (۴)$$

در این رابطه M_s تعداد ورودی‌های منطقی$(1\le k\le M_s)$، s_k مقدار ورودی منطقی k-ام، p_j تعداد مرزهای توصیف کننده مش j-ام، $1\le j\le M_{mesh}$، $M_{m\ e}$ تعداد مش‌ها، $H_j\in R^{n\times p_j}$ و $g_j\in R^{p_j\times 1}$ است. زیر سیستم فعال بر حسب ناحیه قرارگیری متغیرهای حالت و مقادیر ورودی‌های منطقی، مشخص می‌گردد. در اینجا ورودی کنترل شونده همان ورودی منطقی می‌باشد. تعداد کل زیر سیستم‌ها نیز توسط رابطه (۵) مشخص می‌گردد:



شکل ۱: توصیف گرافیکی سیستم‌های مورد بررسی (در حالت خاص: $M_s=1$ و $M_{mesh}=2$)

$$M=2^{M_s}\ M_{mesh} \qquad (۵)$$

۳- پایداری تکه‌ای مربعی سیستم‌های PWA

در این بخش متغیرهای معمول مورد استفاده در تعریف سیستم PWA و پیش‌نیازهای تئوری مورد نیاز ارائه شده است. یک سیستم PWA به صورت زیر توصیف می‌گردد [۴]:

$$\dot{x}=A_ix+B_iu+b_i,\ x\in R_i, i=1,2,\ldots,M \qquad (۶)$$

که M تعداد مش‌ها بوده و مش i-ام با R_i توصیف می‌گردد. مش‌های R_i، زیرمجموعه χ بوده$(R_i\subseteq\chi\subseteq R^n)$ و آن را افراز می‌کنند. در اینجا مساله پایداری کلاس کنترل کننده‌هایی به فرم $u=K_ix+m_i$ در مش R_i مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این شرایط سیستم حلقه بسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{x}=(A_i+B_iK_i)x+B_im_i+b_i \ \square\ \bar{A}_ix+\bar{b}_i \qquad (۷)$$

مش‌ها به صورت چندوجهی‌های محدب در نظر گرفته می‌شوند لذا می‌توان گفت که هر مش R_i از تقاطع p_i ابرصفحه در فضای R^n تشکیل می‌شود و می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} R_i&=\{H_i^Tx-g_i<0\}\\ H_i&=[h_{i1}\ \ h_{i2}\ \ \ldots\ h_{ip_i}]\\ g_i&=[g_{i1}\ \ g_{i2}\ \ \ldots\ g_{ip_i}]^T \end{aligned} \qquad (۸)$$

جهت تحلیل پایداری از تابع لیاپانوفی به فرم

$$\begin{aligned} V(x)&=\sum_{i=1}^{M}\beta_i(x)V_i(x), V(x)>0\\ V_i(x)&=x^TP_ix+2q_i^Tx+r_i \end{aligned} \qquad (۹)$$

که P_i متقارن و مثبت معین بوده و $\beta_i(x)=\begin{cases}1, & x\in R_i\\ 0, & otherwise\end{cases}$, $i=1,2,\ldots,M$ استفاده می‌گردد. در معادله (۹) می‌توان V_i را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$V_i(x)=\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}P_i & q_i\\ q_i & r_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

مشتق زمانی $V_i(x)$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{d}{dt}V_i(x)=\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\bar{A}_i^TP_i+P_i\bar{A}_i & P_i\bar{b}_i+\bar{A}_i^Tq_i\\ \bar{b}_i^TP_i+q_i^T\bar{A}_i & 2\bar{b}_i^Tq_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

تابع لیاپانف (۹) دارای نرخ همگرایی α_i در هر مش بوده و برای ثابت $\varepsilon\ge 0$، داریم:

$$x\in R_i\ \Rightarrow\begin{cases}V_i(x)>\varepsilon\left\|x-x_{cl}^i\right\|_2\\ \dfrac{d}{dt}V_i(x)<-\alpha_iV_i(x)\end{cases} \qquad (۱۲)$$

شرط‌های رابطه (۱۲) خیلی محافظه کارانه بوده و منجر به شرط مثبت بودن تابع لیاپانف و منفی بودن مشتق آن در کل فضا برای هر اندیس i می‌شود. به منظور کاهش محافظه کاری در ادامه شرایط راحت‌تر بیان شده‌اند. به کمک (۸)، (۱۰) و S-procedure [۱۸، ۱۹و ۲۰]، شرط مثبت بودن تابع لیاپانف با نرخ همگرایی α_i در مش R_i وجود ماتریس‌های $P_i>0$، q_i، r_i و ماتریس‌های Z_i و Λ_i با درایه‌های تماما مثبت است به نحوی که [۱۷]:

$$\begin{bmatrix}P_i-\varepsilon I_n-\bar{H}_i^TZ_i\bar{H}_i & q_i+\varepsilon x_{cl}^i+\bar{H}_i^TZ_i\bar{g}_i\\ q_i^T+\varepsilon x_{cl}^{i\,T}+\bar{g}_i^TZ_i\bar{H}_i & r_i-\varepsilon x_{cl}^{i\,T}x_{cl}^i-\bar{g}_i^TZ_i\bar{g}_i\end{bmatrix}>0 \qquad (۱۳)$$

شرط منفی بودن مشتق تابع لیاپانف نیز به صورت زیر حاصل می‌شود [۱۷]:

$$\begin{bmatrix}\left\{\begin{matrix}\bar{A}_i^TP_i+P_i\bar{A}_i+\\ \bar{H}_i^T\Lambda_i\bar{H}_i+\alpha_iP_i\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}P_i\bar{b}_i+\bar{A}_i^Tq_i-\\ \bar{H}_i^T\Lambda_i\bar{g}_i+\alpha_iq_i\end{matrix}\right\}\\ \left\{\begin{matrix}\bar{b}_i^TP_i+q_i^T\bar{A}_i-\\ \bar{g}_i^T\Lambda_i\bar{H}_i+\alpha_iq_i^T\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}2\bar{b}_i^Tq_i+\bar{g}_i^T\Lambda_i\bar{g}_i+\\ \alpha_ir_i\end{matrix}\right\}\end{bmatrix}<0 \qquad (۱۴)$$

که در این روابط $\bar{H}_i=\begin{bmatrix}0 & h_{i1} & h_{i2} & \ldots & h_{ip_i}\end{bmatrix}^T$، I_n ماتریس همانی و $\bar{g}_i=\begin{bmatrix}1 & g_{i1} & g_{i2} & \ldots & g_{ip_i}\end{bmatrix}^T$ است. در [۱۷] قضیه مربوط به طراحی کنترل کننده به حل یک سری نامساوی ماتریسی دو جمله‌ای(BMI) منجر شده است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.2.9]

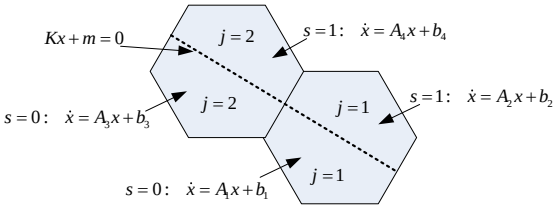
۴- روش پیشنهادی جهت کنترل کلاس معرفی شده

ایده اساسی ارائه روشی جهت تبدیل سیستم خطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی به سیستم PWA می‌باشد. این روش با مش‌بندی فضای حالت و تخصیص هر مقدار مجاز ورودی منطقی به یک ناحیه صورت می‌گیرد. به منظور توضیح ایده مطرح شده، حالت خاصی که سیستم تنها دارای یک ورودی منطقی است در نظر گرفته می‌شود.

$$\dot{x} = A_i x + b_i,\ \ i = \varphi(x,s),\ s = 0,1 \qquad (۱۵)$$

هدف طراحی متغیر منطقی در هر ناحیه از فضای حالت می‌باشد، یعنی:

$$s = \nu(x),\quad x \in R^n \qquad (۱۶)$$



شکل ۲:سیستم مورد بررسی بعد از اعمال روش پیشنهادی (در حالت خاص: $M_s = 1$ و $M_{mesh} = 2$)

در واقع تعیین تابع $\nu(x)$ به معنای مشخص کردن مرز کلیدزنی در صفحه حالت می‌باشد. با در نظر گرفتن مرزی به فرم یک ابرصفحه، متغیر منطقی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$s = step(Kx+m) \qquad (۱۷)$$

شکل ۲ ایده اساسی تبدیل یک سیستم سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی به PWA را برای یک ورودی منطقی نشان می‌دهد. در این شکل یک سمت مرز کلیدزنی، ورودی منطقی $s=1$ و سمت دیگر $s=0$ فرض گردیده است. در این شرایط متغیر طراحی ماتریس‌های ضرایب مرز کلیدزنی (K , m) می‌باشند. در سیستم حاصل از روش پیشنهادی با تغییر مرز کلیدزنی، متغیرهای حالت کنترل می‌گردند. مزیت این روش تغییر حوزه طراحی از فضای متغیرهای منطقی به متغیرهای پیوسته می‌باشد. سیستم حاصل از روش پیشنهادی یک سیستم PWA غیر متداول می‌باشد، زیرا متغیر طراحی به جای وارد شدن در دینامیک سیستم در مرز بین دینامیک‌ها ظاهر می‌شود. در ادامه روشی محاسباتی جهت تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای سیستم مورد نظر ارائه می‌گردد.

۵- پایداری روش پیشنهادی

ابتدا یک سیستم ساده با دو زیرسیستم و بدون قید در قانون کلیدزنی در نظر گرفته و در ادامه به حالت کلی‌تر تعمیم می‌دهیم.

۵-۱ پایداری سیستم خطی سوئیچ شونده بدون قید در قانون کلیدزنی

سیستم سوئیچ شونده خطی‌افاین به صورت

$$\dot{x} = A_i x + b_i,\ i = 1,2\ ,\ x \in R^n, A_i \in R^{n\times n}, b_i \in R^n \qquad (۱۸)$$

در نظر گرفته می‌شود، که i شماره زیر سیستم فعال بوده و آزادانه انتخاب می‌گردد. در این صورت کنترل کننده عبارت از تعیین مرز کلیدزنی به صورت

$$i = step(Kx+m)+1 \qquad (۱۹)$$

می‌باشد. سیستم (۱۸) به همراه کنترل کننده (۱۹) تبدیل به یک سیستم PWA به فرم زیر می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A_i x + b_i,\ i = 1,2 \\ &i = 1 \Leftrightarrow\ Kx+m < 0 \\ &i = 2 \Leftrightarrow\ Kx+m > 0 \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

سیستم حاصل دارای دو مش می‌باشد. این مساله به طور غیر مستقیم به کمک قضیه مرجع [۱۷] و حل یک دسته معادلات BMI قابل تحلیل است. مزیت روش پیشنهادی این مقاله، محدب بودن مساله بهینه‌سازی و طراحی مستقیم کنترل‌کننده توسط تعیین K و m می‌باشد.

قضیه ۱: سیستم (۱۸) تحت کنترل‌کننده (۱۹) پایدار مجانبی سرتاسری است اگر روابط LMI زیر دارای جواب باشند.

$$\begin{bmatrix} P & q & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T \\ q^T & r & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T \\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & Y_i & 0 \\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & 0 & Y_i \end{bmatrix} > 0, Y_i > 0 \qquad (۲۱)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} -A_i^T P - \\ PA_i - \alpha_i P \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} -Pb_i - \\ A_i^T q - \alpha_i q \end{Bmatrix} & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T \\ \begin{Bmatrix} -b_i^T P - \\ q^T A_i - \alpha_i q^T \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} -2b_i^T q - \\ \alpha_i r \end{Bmatrix} & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T \\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & W_i & 0 \\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & 0 & W_i \end{bmatrix} > 0, \qquad (۲۲)$$
$$W_i > 0$$

در روابط فوق $i = 1,2$، $\alpha_i > 0$ اسکالر ثابت دلخواه، $P \in R^{n\times n}, q \in R^n, r \in R$ متغیرهای بهینه‌سازی، $0 < Y_i = Y_i^T \in R^{2\times 2}, 0 < W_i = W_i^T \in R^{2\times 2}$ متغیرهای بهینه سازی با عناصر ماتریس معکوس تماما مثبت و $\bar{H}_i \in R^{2\times n}, \bar{g}_i \in R^2$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.2.9]

متغیرهای بهینه‌سازی فرم‌دار به صورت $\bar{H}_1=\begin{bmatrix}0\\-K\end{bmatrix},\bar{g}_1=\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix},\bar{H}_2=\begin{bmatrix}0\\K\end{bmatrix},\bar{g}_2=\begin{bmatrix}1\\-m\end{bmatrix}$ می‌باشند.

اثبات: برای اثبات پایداری مجانبی، تابع لیاپانف زیر برای همه نواحی تعریف می‌گردد:

$$V(x)=x^TPx+2q^Tx+r \qquad (۲۳)$$

که P یک ماتریس متقارن است. نظر به پیوستگی تابع لیاپانف فوق، باید برقراری شرایط مثبت بودن تابع لیاپانف و منفی بودن مشتق آن بررسی گردند. تابع لیاپانف (۲۳) دارای نرخ همگرایی a_i در R_i می‌باشد اگر

$$x\in R_i \Rightarrow \frac{d}{dt}V(x)<-\alpha_iV(x) \qquad (۲۴)$$

بر طبق [۱] در صورتی $x\ \hat{\mathrm{I}}\ R_i$ است که رابطه

$$\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\bar{H}_i^TZ_i\bar{H}_i & -\bar{H}_i^TZ_i\bar{g}_i\\ -(\bar{H}_i^TZ_i\bar{g}_i)^T & \bar{g}_i^TZ_i\bar{g}_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}>0 \qquad (۲۵)$$

برقرار باشد که در این رابطه Z_i ماتریس متقارن با عناصر تماما مثبت و $\bar{H}_1=\begin{bmatrix}0^{1\times n}\\-K\end{bmatrix},\bar{g}_1=\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix},\bar{H}_2=\begin{bmatrix}0^{1\times n}\\K\end{bmatrix},\bar{g}_2=\begin{bmatrix}1\\-m\end{bmatrix}$ می‌باشد.

به کمک توصیف مش (۲۵) و S-procedure [۱۸،۱۹ و ۲۰]، شرط مثبت بودن تابع لیاپانف و منفی بودن مشتق آن وجود ماتریس‌های $P>0$، q و r است به نحوی که روابط زیر برقرار باشند [۱۷]:

$$\begin{bmatrix}P-\bar{H}_i^TZ_i\bar{H}_i & q+\bar{H}_i^TZ_i\bar{g}_i\\ q^T+\bar{g}_i^TZ_i\bar{H}_i & r-\bar{g}_i^TZ_i\bar{g}_i\end{bmatrix}>0 \qquad (۲۶)$$

$$\begin{bmatrix}\left\{\begin{matrix}A_i^TP+PA_i+\\ \alpha_iP+\bar{H}_i^T\Lambda_i\bar{H}_i\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}Pb_i+A_i^Tq+\\ \alpha_iq-\bar{H}_i^T\Lambda_i\bar{g}_i\end{matrix}\right\}\\ \left\{\begin{matrix}b_i^TP+q^TA_i+\\ \alpha_iq^T-\bar{g}_i^T\Lambda_i\bar{H}_i\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}2b_i^Tq+\alpha_ir+\\ \bar{g}_i^T\Lambda_i\bar{g}_i\end{matrix}\right\}\end{bmatrix}<0 \qquad (۲۷)$$

که در روابط فوق تمام عناصر ماتریس‌های Z_i و Λ_i مثبت هستند. در ضمن در صورت برقراری روابط فوق علاوه بر تضمین پایداری می‌توان نشان داد که نرخ همگرایی در هر مش R_i برابر α_i است. نامساوی (۲۵) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\bar{H}_i & -\bar{g}_i\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Z_i & 0\\0 & Z_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{H}_i & -\bar{g}_i\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}>0 \qquad (۲۸)$$

به کمک رابطه (۲۸)، روابط (۲۶) و (۲۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{bmatrix}P & q\\ q^T & r\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{H}_i & -\bar{g}_i\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Z_i & 0\\0 & Z_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{H}_i & -\bar{g}_i\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i\end{bmatrix}>0 \qquad (۲۹)$$

$$-\begin{bmatrix}A_i^TP+PA_i+\alpha_iP & Pb_i+A_i^Tq+\alpha_iq\\ b_i^TP+q^TA_i+\alpha_iq^T & 2b_i^Tq+\alpha_ir\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{H}_i & -\bar{g}_i\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\Lambda_i & 0\\0 & \Lambda_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{H}_i & -\bar{g}_i\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i\end{bmatrix}>0 \qquad (۳۰)$$

در ادامه فرض می‌شود که Z_i و Λ_i علاوه بر مثبت بودن عناصر آنها، معکوس پذیر بوده و Z_i^{-1} و Λ_i^{-1} مثبت معین می‌باشند. بنا به schur complement [۲۰]، از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix}P & q & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T\\ q^T & r & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & Z_i^{-1} & 0\\ \bar{H}_i^T & -\bar{g}_i & 0 & Z_i^{-1}\end{bmatrix}>0, Z_i^{-1}>0 \qquad (۳۱)$$

$$\begin{bmatrix}\left\{\begin{matrix}-A_i^TP-\\ PA_i-\alpha_iP\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}-Pb_i-\\ A_i^Tq-\alpha_iq\end{matrix}\right\} & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T\\ \left\{\begin{matrix}-b_i^TP-\\ q^TA_i-\alpha_iq^T\end{matrix}\right\} & -2b_i^Tq-\alpha_ir & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & \Lambda_i^{-1} & 0\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & 0 & \Lambda_i^{-1}\end{bmatrix}>0,\quad \Lambda_i^{-1}>0 \qquad (۳۲)$$

و با تعریف $Z_i=Y_i^{-1}$ و $\Lambda_i=W_i^{-1}$ معادلات فوق به فرم LMI زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{bmatrix}P & q & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T\\ q^T & r & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & Y_i & 0\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & 0 & Y_i\end{bmatrix}>0, Y_i>0 \qquad (۳۳)$$

$$\begin{bmatrix}\left\{\begin{matrix}-A_i^TP-\\ PA_i-\alpha_iP\end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix}-Pb_i-\\ A_i^Tq-\alpha_iq\end{matrix}\right\} & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T\\ \left\{\begin{matrix}-b_i^TP-\\ q^TA_i-\alpha_iq^T\end{matrix}\right\} & -2b_i^Tq-\alpha_ir & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & W_i & 0\\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & 0 & W_i\end{bmatrix}>0,\quad W_i>0 \qquad (۳۴)$$

در نتیجه پایداری ثابت می‌گردد. این پایداری مجانبی است زیرا $\alpha_i>0$ است، همچنین سرتاسری می‌باشد زیرا تابع لیاپانف برای R^n این ویژگی‌ها را برآورده می‌سازد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.2.9]

نکته ۱: اگر قضیه به ازای a_i های مختلف اجرا گردد به نحوی که $\bar{a} = \min_{i=1,2} a_i$ بیشینه گردد در این صورت سیستمی با نرخ همگرایی بیشینه فراهم می‌گردد.

نکته ۲: مثبت بودن عناصر ماتریس‌های Y_i^{-1} و W_i^{-1} معادل با مثبت بودن عناصر قطر اصلی و منفی بودن عناصر قطر فرعی ماتریس‌های Y_i و W_i است. که شرط اخیر به سادگی در قالب روابط LMI قابل بیان است.

نکته ۳: در این مساله $P,q,r,Y_i,W_i,\bar{H}_1,\bar{g}_1,\bar{H}_2,\bar{g}_2$ پارامترهای تنظیم و هدف محاسبه K و m می‌باشد.

نکته ۴: قضیه ۱ به منظور طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های PWA نیز قابل کاربرد است.

۲-۵ قضیه پایدارسازی و طراحی در حالت کلیدزنی مقید بین M زیر سیستم

سیستم خطی سوئیچ شونده با قید کلیدزنی حالت-ورودی منطقی با فرض یک ورودی منطقی به صورت

$$\begin{aligned}&\dot{x} = A_i x + b_i,\ i = 1,2,...,M,\ j = 1,2,...,M_{mesh}\\&\varphi(.) = i : H_j^T x - g_j < 0, s = 0,1\end{aligned} \quad (۳۵)$$

قابل بیان است. این رابطه با فرض استفاده از کنترل‌کننده پیشنهادی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\dot{x} = A_i x + b_i,\ i = 1,2,...,M,\ j = 1,2,...,M_{mesh}\\&\varphi(.) = i : H_j^T x - g_j < 0, s = step(K_j x + m_j)\end{aligned} \quad (۳۶)$$

یا به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}&\dot{x} = A_i x + b_i,\ i = 1,2,...,M,\ j = 1,2,...,M_{mesh},\\&\begin{cases} s = 1 : \begin{bmatrix} H_j^T \\ -K_j \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} g_j \\ m_j \end{bmatrix} < 0 \\ s = 0 : \begin{bmatrix} H_j^T \\ K_j \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} g_j \\ -m_j \end{bmatrix} < 0 \end{cases}\end{aligned} \quad (۳۷)$$

قضیه ۱ برای شرایطی که قید بر روی قانون کلیدزنی وجود دارد و سیستم دارای یک ورودی منطقی است به صورت زیر تعمیم می‌یابد.

قضیه ۲: سیستم

$$\begin{aligned}&\dot{x} = A_i x + b_i,\ i = 1,2,...,M,\ j = 1,2,...,M_{mesh}\\&\varphi(.) = i : H_j^T x - g_j < 0, s = 0,1\end{aligned}$$

تحت کنترل کننده

$$s = step(K_j x + m_j)$$

پایدار مجانبی سرتاسری می‌باشد، اگر روابط LMI زیر دارای جواب باشند.

$$\begin{bmatrix} P & q & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T \\ q^T & r & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T \\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & Y_i & 0 \\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & 0 & Y_i \end{bmatrix} > 0, Y_i > 0 \quad (۳۸)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} -A_i^T P - \\ PA_i - \alpha_i P \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} -Pb_i - \\ A_i^T q - \alpha_i q \end{Bmatrix} & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T \\ \begin{Bmatrix} -b_i^T P - \\ q^T A_i - \alpha_i q^T \end{Bmatrix} & -2b_i^T q - \alpha_i r & -\bar{g}_i^T & -\bar{g}_i^T \\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & W_i & 0 \\ \bar{H}_i & -\bar{g}_i & 0 & W_i \end{bmatrix} > 0, \quad W_i > 0 \quad (۳۹)$$

که در این روابط $\alpha_i > 0$ اسکالر ثابت دلخواه، $P \in R^{n\times n}, q \in R^n, r \in R$ متغیرهای بهینه‌سازی، $0 < Y_i = Y_i^T, 0 < W_i = W_i^T$ متغیرهای بهینه سازی با عناصر تماما مثبت برای معکوس آنها، K, m ماتریس‌های کنترل کننده و $\bar{H}_i \in R^{3\times n}, \bar{g}_i \in R^3$ متغیرهای بهینه‌سازی فرم‌دار به صورت

$$\begin{cases} i = 2j-1 : \bar{H}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ H_j^T \\ -K_j \end{bmatrix}, \bar{g}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ g_j \\ m_j \end{bmatrix} \\ i = 2j : \bar{H}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ H_j^T \\ K_j \end{bmatrix}, \bar{g}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ g_j \\ -m_j \end{bmatrix} \end{cases}$$

می‌باشند.

اثبات: تنها کافی است در قضیه ۱ برای مقادیر فرد i و برای مقادیر زوج i $\begin{bmatrix} H_j^T \\ -K_j \end{bmatrix} \to H_j^T, \begin{bmatrix} g_j \\ m_j \end{bmatrix} \to g_j$ صورت گیرد. $\begin{bmatrix} H_j^T \\ K_j \end{bmatrix} \to H_j^T, \begin{bmatrix} g_j \\ -m_j \end{bmatrix} \to g_j$

در ادامه قضیه قبلی برای حالتی که تعداد ورودی منطقی دلخواه است، تعمیم می‌یابد. سیستم خطی سوئیچ شونده با قید کلیدزنی حالت-ورودی منطقی با M_s ورودی منطقی به صورت

$$\begin{aligned}&\dot{x} = A_i x + b_i,\ i = 1,2,...,M\\&\varphi(.) = i : H_j^T x - g_j < 0,\ j = 1,2,...,M_{mesh},\\&S \in \{S_1, S_2, ..., S_{2^{M_s}}\}\end{aligned} \quad (۴۰)$$

قابل بیان است. کنترل‌کننده زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$S = msign(K_j x) \quad (۴۱)$$

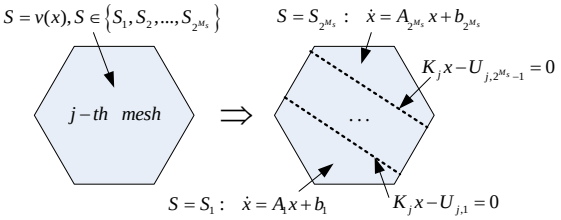
که تابع $msign$ به صورت

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.2.9]

$$msign:[U_{\min},U_{\max}]\to\{0,1\}^{M_s}$$
$$msign(v)=\begin{cases}\begin{bmatrix}0&0&...&0\end{bmatrix}^T & U_{\min}\le v<U_1\\ \begin{bmatrix}1&0&...&0\end{bmatrix}^T & U_1\le v<U_2\\ \vdots & \vdots\\ \begin{bmatrix}1&1&...&1\end{bmatrix}^T & U_{2^{M_s}-1}\le v<U_{\max}\end{cases} \quad (۴۲)$$
$$U_{\min}<U_1<U_2<...<U_{2^{M_s}-1}<U_{\max},$$
$$U_0=U_{\min},\ U_{2^{M_s}}=U_{\max}$$

تعریف می‌گردد، این تابع، تعمیم ***step*** می‌باشد. در این رابطه $U_{\min}$ و $U_{\max}$ دو عدد دلخواه و بقیه اندیس‌های U_i متغیر می‌باشند. با فرض کنترل‌کننده (۴۱)، توصیف سیستم (۴۰) و تعریف تابع ***msign*** نتیجه می‌شود:

$$\dot{x}=A_ix+b_i,\ i=1,2,...,M,\ j=1,2,...,M_{mesh},$$
$$l=1,2,...,2^{M_s}$$
$$\begin{bmatrix}H_j & -K_j^T & K_j^T\end{bmatrix}^T x-\begin{bmatrix}g_j^T & -U_{j,l-1}^T & U_{j,l}^T\end{bmatrix}^T<0 \quad (۴۳)$$



شکل ۳: نحوه تخصیص بردار ورودی منطقی (S) در روش پیشنهادی (برای مش شماره j)

در شکل۳ نحوه تخصیص بردار ورودی منطقی (S) در روش پیشنهادی برای یکی از مش‌های سیستم مورد بررسی، نشان داده شده است. همه بحث‌های بخش ۵-۱ با ماتریس‌های:

$$\bar{H}_i=\begin{bmatrix}0&H_j&-K_j^T&K_j^T\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{U}_i=\begin{bmatrix}1&g_j^T&-U_{j,l-1}^T&U_{j,l}^T\end{bmatrix}^T,i=1,2,..,M \quad (۴۴)$$

قابل بیان است و قضیه۲ به صورت زیر تعمیم می‌یابد.

قضیه۳: سیستم (۴۰)، تحت کنترل کننده (۴۱) پایدار مجانبی سرتاسری است اگر LMI زیر جواب داشته باشد. در این شرایط با حل مساله بهینه سازی، ماتریس‌های کنترل‌کننده ($K_j,U_{jl},\ j=1,2,...,M_{mesh}$) طراحی می‌گردند.

$$U_{\min,j}<U_{j,1}<U_{j,2}<...<U_{j,N-1}<+U_{\max,j},$$
$$U_{j,0}=U_{\min,j},U_{j,N}=U_{\max,j} \quad (۴۵)$$

$$\begin{bmatrix}P&q&\bar{H}_i^T&\bar{H}_i^T\\ q^T&r&-\bar{U}_i^T&-\bar{U}_i^T\\ \bar{H}_i&-\bar{U}_i&Y_i&0\\ \bar{H}_i&-\bar{U}_i&0&Y_i\end{bmatrix}>0,Y_i>0 \quad (۴۶)$$

$$\begin{bmatrix}\begin{Bmatrix}-A_i^TP-\\ PA_i-\alpha_iP\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}-Pb_i-\\ A_i^Tq-\alpha_iq\end{Bmatrix} & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T\\ \begin{Bmatrix}-b_i^TP-\\ q^TA_i-\alpha_iq^T\end{Bmatrix} & -2b_i^Tq-\alpha_ir & -\bar{U}_i^T & -\bar{U}_i^T\\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i & W_i & 0\\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i^T & 0 & W_i\end{bmatrix}>0,$$
$$W_i>0 \quad (۴۷)$$

که در این روابط، $\alpha_i>0$ دارای مقدار ثابت، P,q,r متغیرهای بهینه سازی، Y_i,W_i متغیرهای بهینه سازی با عناصر تماما مثبت برای معکوس آنها و $\bar{H}_i,\bar{U}_i$ متغیرهای بهینه سازی فرم دار به صورت:

$$\bar{H}_i=\begin{bmatrix}0&H_j&-K_j^T&K_j^T\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{U}_i=\begin{bmatrix}1&g_j^T&-U_{j,l-1}^T&U_{j,l}^T\end{bmatrix}^T,$$
$$i=1,2,..,M,\ j=1,2,...,M_{mesh},l=1,2,...,2^{M_s}$$

می‌باشند. همچنین $U_{\min,j},U_{\max,j}$ مقادیر ثابتی فرض می گردند.

اثبات: سیستم (۴۰) با فرض کنترل کننده (۴۱) به صورت

$$\dot{x}=A_ix+b_i,\ i=1,2,...,M$$
$$i=j:\bar{H}_ix-\bar{U}_i<0$$
$$U_{\min}<U_1<U_2<...<U_{M-1}<+U,$$
$$U_0=-U,U_N=U_{\max}$$
$$\bar{H}_i=\begin{bmatrix}0\\-\tilde{J}_j\\-K_j\\K_j\end{bmatrix},\bar{U}_i=\begin{bmatrix}1\\g_j\\-U_{j,l-1}\\U_{j,l}\end{bmatrix},i=1,2,..,M, \quad (۴۸)$$
$$j=1,2,...,M_{mesh},l=1,2,...,2^{M_s}$$

بیان می‌شود. شرط توصیف مش i -ام به صورت زیر می باشد [۱]:

$$R_i=\left\{x\left|\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\bar{H}_i^TZ_i\bar{H}_i & -\bar{H}_i^TZ_i\bar{U}_i\\ -(\bar{H}_i^TZ_i\bar{U}_i)^T & \bar{U}_i^TZ_i\bar{U}_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}>0\right.\right\} \quad (۴۹)$$

که

$$Z_i=\begin{bmatrix}z_{00}^i & z_{01}^i & . & . & z_{0n}^i\\ z_{10}^i & & & & .\\ . & & & & .\\ . & & & & .\\ z_{1n}^i & . & . & . & z_{nn}^i\end{bmatrix}$$

و همه عناصر Z_i مثبت هستند. همچنین (۴۱) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.2.9]

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_i^T Z_i \bar{H}_i & -\bar{H}_i^T Z_i \bar{U}_i \\ -(\bar{H}_i^T Z_i \bar{U}_i)^T & \bar{U}_i^T Z_i \bar{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_i & -\bar{U}_i \\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.5Z_i & 0 \\ 0 & 0.5Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_i & -\bar{U}_i \\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i \end{bmatrix} > 0 \quad (۵۰)$$

تابع لیاپانف و مشتق آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V_i(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & q \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۵۱)$$

$$\frac{d}{dt} V(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i & P b_i + A_i^T q \\ b_i^T P + q^T A_i & 2 b_i^T q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۵۲)$$

به کمک (۵۱)، (۵۲) و S-procedure، شرط مثبت بودن تابع لیاپانف با نرخ همگرایی α_i در مش R_i وجود ماتریس‌های $P > 0$، q، r و ماتریس های Z_i و Λ_i با دارایه‌های تماما مثبت است به نحوی که:

$$\begin{bmatrix} P & q \\ q^T & r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{H}_i & -\bar{U}_i \\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_i & 0 \\ 0 & Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_i & -\bar{U}_i \\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i \end{bmatrix} > 0 \quad (۵۳)$$

به طور مشابه شرط منفی بودن مشتق تابع لیاپانف به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + \alpha_i P & P b_i + A_i^T q + \alpha_i q \\ b_i^T P + q^T A_i + \alpha_i q^T & 2 b_i^T q + \alpha_i r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{H}_i & -\bar{U}_i \\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_i & 0 \\ 0 & Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_i & -\bar{U}_i \\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i \end{bmatrix} < 0 \quad (۵۴)$$

با فرض معکوس پزیری و مثبت معین بودن ماتریس‌های Z_i و Λ_i و بنا به schur complement روابط (۵۳) و (۵۴) به صورت زیر قابل بازنویسی هستند:

$$\begin{bmatrix} P & q & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T \\ q^T & r & -\bar{U}_i^T & -\bar{U}_i^T \\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i & Z_i^{-1} & 0 \\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i & 0 & Z_i^{-1} \end{bmatrix} > 0, Y_i > 0 \quad (۵۵)$$

$$\begin{bmatrix} \{-A_i^T P - PA_i - \alpha_i P\} & \{-Pb_i - A_i^T q - \alpha_i q\} & \bar{H}_i^T & \bar{H}_i^T \\ \{-b_i^T P - q^T A_i - \alpha_i q^T\} & \{-2b_i^T q - \alpha_i r\} & -\bar{U}_i^T & -\bar{U}_i^T \\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i & \Lambda_i^{-1} & 0 \\ \bar{H}_i & -\bar{U}_i & 0 & \Lambda_i^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad W_i > 0 \quad (۵۶)$$

و با تعریف $Z_i = Y_i^{-1}$ و $\Lambda_i = W_i^{-1}$ حکم ثابت می شود.

نکته ۵: یک مبدل الکترونیک قدرت با بیش از یک کلید نیمه‌هادی تمام کنترل شونده مثالی از کاربرد قضیه ۳ می‌باشد.

نکته ۶: به منظور دستیابی به یک پاسخ با خطای حالت دائمی صفر، می‌بایست معادله کلیدزنی با فرض $e = x_{ref} - x$ به صورت

$$s = msign(K_j e) = msign(-K_j x + K_j x_{ref}) \quad (۵۷)$$

در نظر گرفته شود. در این شرایط روند ارائه شده در قضیه ۳ با جایگذاری $-K_j \to K_j, K_j x_{ref} \to m_j$ قابل استفاده است.

نکته ۶: الگوریتم زیر فرآیند پایدارسازی و طراحی کنترل کننده برای کلاس مورد بررسی را ارائه می‌نماید:

گام ۱: مدلسازی سیستم مورد بررسی در فرم سیستم سوئیچ شونده خطی مقید به حالت–ورودی منطقی، در این گام مطابق رابطه (۳) و (۴)، ماتریس‌های A_i, b_i, C_i, d_i و قانون کلیدزنی $\varphi(i(t), s(t), x(t))$ مشخص می‌شوند.

گام۲: مش‌بندی فضای حالت و تخصیص ورودی منطقی به هر مش (یعنی $s = msign(K_j x)$).

گام ۳: استفاده از قضیه تعمیم یافته شماره ۳ و طراحی قانون کلیدزنی پایدارساز

۶- نتایج شبیه‌سازی

یک مبدل باک با معادلات سیستم و کنترل‌کننده پایدارساز پیشنهادی به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = A_i x + b_i, i = 1,2,3,4$$
$$H_j x - g_j < 0, s = msign(K_j (x - x_{ref}))$$
$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$H_3 = H_4 = \begin{bmatrix} +1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$g_j = 0, j = 1,2$$

در جدول ۱ ماتریس های رابطه فوق تعریف شده اند. سیستم اولیه دارای دو مش می‌باشد و بعد از قرار گرفتن کنترل کننده پیشنهادی تعداد آن به چهار عدد افزایش می‌یابد. در نتیجه به کمک قضیه ۲ می‌بایست متغیر $K_1 = K_2$ طراحی گردد (برای سادگی در هر دو مش از یک مرز کلیدزنی استفاده شده است) همچنین داریم:

$$j = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x > 0$$
$$j = 2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x > 0$$

و

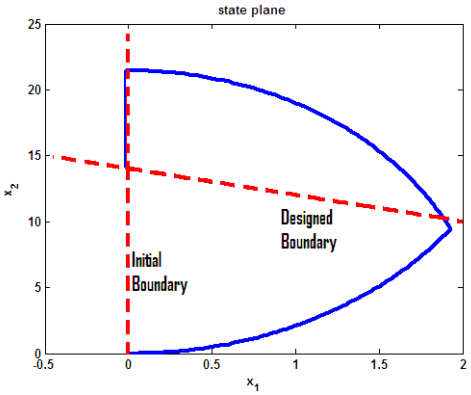
$$\bar{H}_1 = \bar{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -K_1 \end{bmatrix}, \bar{H}_2 = \bar{H}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ K_1 \end{bmatrix},$$
$$m_1 = m_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -K_1 x_{ref} \end{bmatrix}, m_2 = m_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ K_1 x_{ref} \end{bmatrix}$$

با استفاده از پارامترهای جدول ۲ شبیه سازی صورت گرفته است. با حل LMI مربوطه به کمک جعبه ابزار Robust Control نرم افزار MATLAB نتیجه زیر حاصل گردیده است:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.2.9]

$$K_1 = K_2 = 10^{-8} \times \begin{bmatrix} -0.4263 & -0.2185 \end{bmatrix}$$

نتایج شبیه سازی در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است. در شکل ۴ نمودار تغییرات متغیر خروجی رسم شده است. پاسخ دارای خطای حالت دائمی صفر و فراجهش قابل ملاحظه‌ای می‌باشد، اما راهکار معرفی شده در این مقاله صرفا پایدارسازی است و مساله بهینه‌سازی پاسخ گذرا هدف این مقاله نمی‌باشد. در شکل ۵ نمودار صفحه حالت به همراه مرز ذاتی و طراحی شده سیستم نشان داده است. در بالای مرز طراحی شده، ورودی منطقی۱ و در پایین آن صفر می‌باشد. در این شکل فضای حالت به چهار مش تقسیم شده است و در هر مش یکی از چهار زیرسیستم فعال می‌باشد.



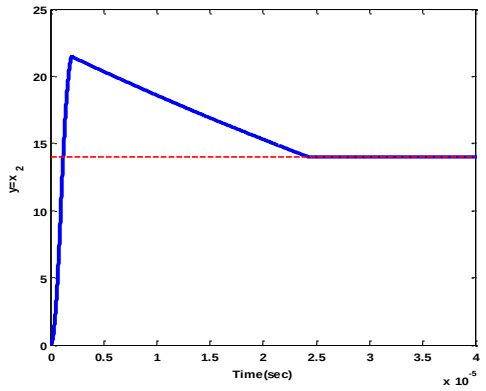
شکل ۵: نمودار صفحه حالت به همراه مرز ذاتی و طراحی شده

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی جدید جهت طراحی کنترل کننده و پایدارسازی کلاس سیستم‌های خطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی مقید ارائه گردید. این روش جهت تعیین ورودی منطقی، نواحی صفحه حالت را مش‌بندی و به هر یک، یک ورودی منطقی نسبت می‌دهد. پیاده‌سازی روش پیشنهادی ساده می‌باشد و روند طراحی آن مبتنی بر حل یک دسته معادلات LMI می‌باشد. قضایای پایداری و طراحی کنترل کننده برای کلاس مورد بررسی ارائه و اثبات گردیده است. جهت ادامه کار بهبود حالت گذرا با افزودن قیود LMI مناسب به مساله پایدارسازی، پیشنهاد می گردد.

جدول ۱: ماتریس‌های توصیف کننده مبدل باک به همراه شرط فعال شدن هر زیرسیستم

i	1	2	3	4
A_i	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix}$
b_i	$\begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} & 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\varphi(.)$	$s=1,\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x > 0$	$s=0,\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x > 0$	$s=1,\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x < 0$	$s=0,\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x < 0$
C_i	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$



شکل ۴: نمودار تغییرات خروجی

جدول ۲: ماتریس‌های توصیف کننده مبدل باک به همراه شرط فعال شدن هر زیرسیستم

متغیر	نماد	مقدار	واحد
مقاومت بار	R	1000	Ω
سلف فیلتر	L	10μ	H
خازن خروجی	C	$100n$	F
ولتاژ تغذیه	V_g	24	V
ولتاژ خروجی مطلوب	$x_{2,ref}$	14	V
جریان سلف مطلوب	$x_{1,ref}$	0.014	A

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.2.9]

مراجع

[1] L. Rodrigues, "Dynamic Output Feedback Controller Synthesis for Piecewise Affine Systems," PhD Thesis, Stanford university, June 2002.

[2] M. de la Sen and A. Ibeas, "Stability Results for Switched Linear Systems with Constant Discrete Delays," Mathematical Problems in Engineering, vol. 2008, 2008.

[3] Robert Shorten, Fabian Wirth, Oliver Mason, Kai Wulff, Christopher King, "Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems," SIAM REVIEW , vol. 49, no . 4, pp . 545–592, 2007.

[4] A. Rantzer and M. Johansson, "Piecewise linear quadratic optimal control," IEEE Trans. Automat Control, vol. 45, no. 4, pp. 629–637, Apr. 2000.

[5] S. S. Ge and Zhendong Sun, "Switched Controllability via Bumpless Transfer Input and Constrained Switching," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 53, no. 7, 2008.

[6] M. Johansson, Piecewise Linear Control Systems-A Computational Approach, New York: Springer-Verla , vol, 284, 2002.

[7] Zhendong Sun, Shuzhi S.Ge, Switched Linear Systems: Control and Design, Springer-Verlag Publication, 2004.

[8] S. Pettersson and B. Lennartson, "Hybrid system stability and robustness verification using linear matrix inequalities," Inter. J. Control, vol. 75, no. 16-17, pp. 1335–1355, , 2002.

[9] Hai Lin, and Panos J. Antsaklis," Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results," IEEE Trans. Automatic Control, vol. 54, no. 2, 2009.

[10] S. Pettersson and B. Lennartson, "Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy," in Proc. Amer. Control Conf, pp. 223–228, 2001.

[11] A. Bemporad and M. Morari, "Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints," Automatica, vol. 35, no. 3, pp. 407–427, 1999.

[12] A. Beccuti, S. Mariethoz, S. Cliquennois, S. Wang, and M. Morari, "Explicit model predictive control of DC-DC switched mode power supplies with extended Kalman filtering," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 56, no. 3, pp. 1864–1874, 2009.

[13] A. Bemporad, F. Borrelli, and M. Morari, "Model predictive control based on linear programming—The explicit solution," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 47, pp. 1974–1985, 2002.

[14] Mohammad Hejri and Hossein Mokhtari, "Global hybrid modeling and control of a buck converter: A novel concept," International Journal of Circuit Theory and Applications, vol 37, pp 968–986, 2009.

[15] Mohammad Hejri and Hossein Mokhtari, "Hybrid predictive control of a DC–DC boost converter in both continuous and discontinuous current modes of operation," Optimal Control Applications and Methods, 2010.

[16] Luca Greco, "Stability and Stabilization Issues in Switched Systems," PHD thesis, Bioingegneria, Robotica e Sistemi di Automazione Industriale - Ciclo XVII, 2005.

[17] L. Rodrigues and J.P. How, "Observer-based control of piecewise-affine systems," Internat. J. Control, vol 76, pp. 459–477, 2003.

[18] F. Uhlig, "A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extentions: A survey," Linear Algebra and Applications, vol 25, pp 219-237, 1979.

[19] V. A. Yakubovich, "The S procedure in non-linear control theory," Vestnik Leningrad Univ. Math, vol 4, pp 73-93 , 1977, In Russian.

[20] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, Philadelphia, The SIAM press, 1994.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.2.2.9]