

تحلیل پایداری فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته در محیط تصادفی

حسین بیگ زاده^۱، حمیدرضا تقی‌راد^۲

^۱ فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

^۲ دانشیار گروه کنترل و سیستم، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۲/۲۷، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۷/۲۲)

چکیده: تا کنون به کارگیری رؤیت‌گر SDRE و تحلیل پایداری و عملکرد آن در محیط قطعی و بدون نویز مورد توجه محققان قرار گرفته، اما در عمل وجود نامعینی فرآیند و نویز اندازه‌گیری غیر قابل اجتناب است. در این مقاله با توجه به دست‌آوردهای حاصل برای پایداری فیلتر کالمن-باسی و نتایج مربوط به تحلیل پایداری اتفاقی در مسائل تخمین غیرخطی، به تحلیل رفتار خطای تخمین یک فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته پرداخته شده است. در تحلیل پایداری ارائه شده شرایط کافی به منظور کراندار باقی ماندن خطای تخمین این فیلتر با تعبیر میانگین مربعات ارائه شده است. همچنین نشان داده شده است که اگر خطای تخمین اولیه و اندازه ترم‌های نویز مزاحم هر دو به اندازه کافی کوچک باشند، این شرایط محقق می‌شوند. این یافته‌های تئوری از طریق شبیه‌سازی یک سیستم غیرخطی نمونه راست‌آزمایی شده‌اند.

کلمات کلیدی: رؤیت‌گر غیر خطی، رؤیت‌گر SDRE، پایداری اتفاقی سیستم‌های غیر خطی، فیلتر تفاضلی زمان-گسسته، تحلیل پایداری، کراندار با تعبیر میانگین مربعات.

Stability Analysis of Discrete-Time SDRE Filter in Stochastic Domain

Hossein Beikzadeh, Hamid D. Taghirad

Abstract: Stability of SDRE observers is usually analyzed in a deterministic framework, where the performance of the observer is not perturbed by external noises. However, plant uncertainty and measurement noises are not negligible in real implementations. In this paper based on the stability results developed for Kalman-Bucy filters and stochastic stability analysis of nonlinear systems, the stability of an SDRE filter is analyzed in discrete-time domain. Sufficient conditions are given to limit the estimation errors in sense of mean-squared measure. Furthermore, it is shown that in practical situations there exist feasible regions to satisfy the stability conditions, provided that the initial error and the norm of plant uncertainty and measurement noises are sufficiently small. Finally, the stability conditions are verified through simulation of a typical nonlinear system.

Keywords: Nonlinear observer, SDRE observer, stochastic stability of nonlinear systems, discrete-time nonlinear observer, stability analysis, bound of mean squared error.

۱- مقدمه

می‌رسد. این موضوع در این مقاله با گسترش فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته و به کارگیری تئوری تحلیل پایداری فرآیندهای اتفاقی انجام شده است. در این مقاله با توجه به دست‌آوردهای حاصل برای پایداری فیلتر کالمن-باسی و نتایج مربوط به تحلیل پایداری اتفاقی در مسائل تخمین غیرخطی، به تحلیل رفتار خطای تخمین یک فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته پرداخته شده است. در تحلیل پایداری ارائه شده شرایط کافی به منظور کراندار باقی ماندن خطای تخمین این فیلتر با تعبیر میانگین مربعات ارائه شده و همچنین نشان داده شده است اگر خطای تخمین اولیه و اندازه ترم‌های نویز مزاحم هر دو به اندازه کافی کوچک باشند، این شرایط محقق می‌شوند. در پایان نیز، این یافته‌های نظری از طریق شبیه‌سازی یک سیستم غیرخطی نمونه راست‌آزمایی شده‌اند.

۲- مقدمات ریاضی

پیش از بررسی خواص همگرایی فیلتر SDRE در یک محیط تصادفی، ابتدا به مرور مفاهیم و قضایای مورد نیاز از ریاضیات اتفاقی می‌پردازیم.

۲-۱ شرایط شبه لیاپانوف برای پایداری اتفاقی

شرایط لیاپانوف برای پایداری معادلات دیفرانسیل یا تفاضلی اتفاقی توسط افرادی همچون Zakai, Kushner, Wonham و غیره ارائه شده است (به [۱۱] و مقالاتی که در آن ارجاع داده شده رجوع شود). همچنین روش‌های مختلفی برای تعریف پایداری یا همگرایی فرآیندهای اتفاقی وجود دارد، که به منظور جلوگیری از سردرگمی میان این تعاریف متعدد، تعاریفی را در ادامه بیان می‌کنیم که در تحلیل پایداری اتفاقی سیستم مورد نظر استفاده خواهد شد. با الهام از معیار مرسوم حداقل میانگین مربعات در نظریه تخمین، پایداری فرآیندهای اتفاقی زمان-پیوسته و زمان-گسسته به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند [12].

تعریف ۱- مبدا سیستم اتفاقی پیوسته $e(t)$ پایدار مجانبی با تعبیر میانگین مربعات نامیده می‌شود، اگر ثابت‌های $\eta > 0$ ، $\nu \geq 0$ و $\vartheta > 0$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که

$$E\{\|e(t)\|^2\} \leq \nu + \eta \|e(0)\|^2 e^{-\vartheta t} \quad (1)$$

آنگاه فرایند $e(t)$ کراندار نمایی با تعبیر میانگین مربعات و نمای ϑ خوانده می‌شود.

تعریف ۲- مبدا فرایند اتفاقی گسسته e_k پایدار مجانبی با تعبیر میانگین مربعات گفته می‌شود، اگر ثابت‌های $0 < \vartheta \leq 1$ ، $\nu \geq 0$ و $\eta > 0$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که رابطه (۲) برقرار باشد. آنگاه فرایند e_k کراندار نمایی با تعبیر میانگین مربعات و نمای ϑ نامیده می‌شود.

در سال‌های اخیر، روش‌های طراحی بر پایه حل معادله ریکاتی وابسته به حالت (SDRE^۱) به صورت روزافزونی در دسته وسیعی از مسائل عملی به کار رفته‌اند [۲،۱]. در حقیقت، روش SDRE را می‌توان به عنوان همتای غیرخطی روش طراحی شناخته شده LQR^۲ برای سیستم‌های خطی در نظر گرفت [۳]. به طور مشخص، این روش از نمایش مستقیم معادلات غیرخطی در یک ساختار شبه خطی با ماتریس‌های ضرایب وابسته به حالت بهره می‌برد [۴]. بدین ترتیب در حالت چند متغیره، نمایش SDC^۳ یکتا نبوده و این نمایش درجات آزادی اضافی را فراهم می‌سازد که می‌تواند برای حل مشکلاتی نظیر عملکرد نامناسب، تکینگی و یا از دست رفتن رؤیت‌پذیری در روش‌های سنتی فیلترکردن همچون فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF)، به کار رود [۵،۶]. رؤیت‌گر SDDRE^۴ تفاضلی زمان-گسسته نیز به صورت مجزا در مراجع [۸،۷] مورد مطالعه قرار گرفته و دو دسته شرایط کافی متمایز برای پایداری مجانبی آن بدست آمده است. البته این مجموعه شرایط به طور کامل وابسته به نتایج شبیه‌سازی بوده و در ضمن محدود به سیستم‌های بدون ورودی است. علاوه، تمامی نتایج تئوری مذکور منحصر به فرآیندهای قطعی غیرخطی است و در کلیه نتایج بدست آمده فرض شده است که مدل سیستم کاملاً معلوم است. اعمال رؤیت‌گرهای SDRE مرسوم به سیستم‌های اتفاقی نیز که در کاربردهای عملی مورد توجه است، نیازمند داشتن اطلاعات دقیق از خصوصیات آماری سیگنال‌های نویز می‌باشد. اما در کاربردهای عملی اغلب اوقات اطلاعات آماری ناقصی از نامعینی مدل و سیگنال‌های نویز وجود دارد که به صورت بالقوه می‌تواند سبب ایجاد خطاهای تخمین بیش از اندازه شود.

پیشرفت‌های تئوری قابل توجه‌ای در رابطه با کنترل‌کننده SDRE و خصوصیات پایداری مجانبی سیستم فیدبک با در اختیار داشتن تمام حالت-ها، حاصل شده است [۹، ۱۰]. با این وجود، تلاش‌های بسیار محدود و ناچیزی درباره مطالعه جنبه‌های تئوری رؤیت‌گر SDRE صورت گرفته و مسائلی همچون پایداری و همگرایی فیلتر در حضور نویز و قوام آن در مقابل نامعینی‌ها و ورودی‌های اغتشاش بدون تحلیل باقی مانده است. همچنین معمولاً به کارگیری رؤیت‌گر SDRE و تحلیل پایداری و عملکرد آن در یک محیط قطعی و بدون نویز طرف توجه محققان بوده است و غالب پژوهش‌های نظری در رابطه با این فیلتر و انواع آن فقط در محیط-هایی که بتوان اثر نویز را نادیده گرفت، قابل استفاده است. وجود سیگنال-های نویز چه به صورت نامعینی فرآیند و چه به صورت نویز اندازه‌گیری، در عمل واقعیتی اجتناب‌ناپذیر است، بنابراین علاوه بر نتایج موجود مطالعه شکل عمومی غیرخطی رؤیت‌گر در یک چهارچوب اتفاقی ضروری به نظر

^۱ State dependent Ricatti equation

^۲ Linear quadratic regulator

^۳ State dependent coefficient

^۴ State dependent discrete Ricatti equation

$$E\{\|e_k\|^2\} \leq \nu + \eta \|e_0\|^2 (1 - \rho)^k \quad (2)$$

■ **اثبات** - این لم از [۱۵] و [۱۱، قضیه ۲] نتیجه می شود.

توجه کنید که این لم حاوی شرایطی شبه لیاپانوف برای پایداری اتفاقی است. به لحاظ شهودی می توان گفت اگر شرط (۵) تحقق یابد، انرژی سیگنال e_k به طور دلخواه افزایش نخواهد یافت.

نکته ۳: با به کار بردن

$$\sum_{i=1}^{k-1} (1-\lambda)^i \leq \sum_{i=1}^{\infty} (1-\lambda)^i = \frac{1}{\lambda} \quad (7)$$

نامساوی (۶) به فرم زیر قابل بازنویسی است

$$E\{\|e_k\|^2\} \leq \frac{\bar{\nu}}{\underline{\nu}} E\{\|e_0\|^2\} (1-\lambda)^k + \frac{\mu}{\underline{\nu}\lambda} \quad (8)$$

۲- طراحی رؤیت گر غیرخطی اتفاقی در حالت کلی

یک سیستم غیرخطی را که با معادله دیفرانسیل اتفاقی زیر توصیف می شود را در نظر بگیرید:

$$dx(t) = f(x(t))dt + \sigma_1(x(t))dw(t) \quad (9)$$

که معادله مشاهده آن عبارت است از:

$$dy(t) = h(x(t))dt + \sigma_2(x(t))dv(t) \quad (10)$$

و در آن $x(t)$ و $f(x(t))$ بردارهای n -بعدی، $y(t)$ و $h(x(t))$ بردارهای m -بعدی و $f(\cdot)$ و $h(\cdot)$ به طور پیوسته مشتق پذیر هستند. همچنین، $w(t)$ و $v(t)$ به ترتیب فرآیندهای حرکت براونی استاندارد ناهمبسته با ابعاد q و r بوده، و $\sigma_1(x(t))$ و $\sigma_2(x(t))$ توابع ماتریسی با ابعاد مناسب می باشند. هدف طراحی یک تخمین گر حالت برای سیستم (۹) با استفاده از خروجی $y(t)$ از (۱۰) است، به گونه ای که اختلاف بین خروجی رؤیت گر $z(t)$ و حالت سیستم $x(t)$ با تعبیر میانگین مربعات کراندار نمایی باشد. خروجی رؤیت گر می تواند به عنوان تخمین حالت سیستم به کار رود. در حالت کلی، چنین رؤیت گری را می توان توسط هر معادله دیفرانسیل اتفاقی به فرم زیر توصیف کرد.

$$dz(t) = g_1(z(t), y(t))dt + g_2(z(t), y(t))dy(t) \quad (11)$$

Tarn و Rasis در [12]، با در نظر گرفتن حالت خاص زیر از رؤیت گر (۱۱) به فرم

$$dz(t) = f(z(t))dt + K[dy(t) - h(z(t))dt] \quad (12)$$

که در آن K یک ماتریس $n \times m$ است، با انتخاب تابع لیاپانوف

$$V(e(t)) = (x(t) - z(t))^T Q (x(t) - z(t)),$$

نکته ۱: تعریف ۱ یا ۲ لزوما دلالت بر کاهش $E\{\|e(t)\|^2\}$ برای همه زمانها را ندارد، بلکه تنها بیان می دارد که کران به صورت نمایی کاهش پیدا می کند. در ضمن، زمانی که $t \rightarrow \infty$ ، میانگین مربعات فرآیند با مقدار $E\{\|e(\infty)\|^2\} \leq \nu$ محدود می گردد، که ثابت ν به نوبتی که عملکرد سیستم را مختل می سازد، بستگی دارد.

نکته ۲: اگر $\nu = 0$ باشد و یا به عبارتی اگر

$$E\{\|e(t)\|^2\} \leq \eta \|e(0)\|^2 e^{-\alpha t} \quad \left(\text{or } E\{\|e_k\|^2\} \leq \eta \|e_0\|^2 (1-\rho)^k \right)$$

آنگاه $e(t)$ (یا e_k) با تعبیر میانگین مربعات به سمت صفر میل می کند، که این حالت بیانگر همگرایی احتمالی نیز خواهد بود. در تکمیل مفهوم کراندار بودن احتمالی، اشاره به تعریف زیر نیز مفید به نظر می رسد.

تعریف ۳- فرآیند اتفاقی گسسته e_k با احتمال واحد کراندار است، اگر شرط (۳) با احتمال واحد برقرار بماند.

$$\sup_{k \geq 0} \|e_k\| < \infty \quad (3)$$

همان گونه که مشخص است، تشخیص پایداری یا کراندار بودن یک فرآیند اتفاقی صرفا براساس تعاریف فوق، در حالت کلی کاری دشوار خواهد بود. به همین دلیل، در [۱۲] شرایطی شبه لیاپانوف برای بررسی پایداری اتفاقی با تعبیر میانگین مربعات ارائه شده که این تحلیل را میسر می سازد. لم زیر که نتیجه متعارفی درباره کراندار بودن فرآیندهای اتفاقی است، این شرایط را برای سیستم های اتفاقی زمان-گسسته بیان می کند. این لم اساس تحلیل پایداری انجام شده در [۱۳]، [۱۴] و نیز مبنای تحلیل خطای تخمین در این مقاله می باشد. نظیر این لم برای فرآیندهای اتفاقی زمان-پیوسته نیز وجود دارد.

لم ۱- فرض کنید e_k یک فرآیند اتفاقی باشد و تابع لیاپانوف اتفاقی $V_k(e_k)$ و همین طور اعداد حقیقی $\bar{\nu}, \underline{\nu}, \mu > 0$ و $0 < \lambda \leq 1$ وجود داشته باشند به نحوی که

$$\underline{\nu} \|e_k\|^2 \leq V_k(e_k) \leq \bar{\nu} \|e_k\|^2 \quad (4)$$

$$E\{V_{k+1}(e_{k+1})|e_k\} - V_k(e_k) \leq \mu - \lambda V_k(e_k) \quad (5)$$

همواره برآورده شوند. آنگاه فرآیند اتفاقی e_k کراندار نمایی با تعبیر میانگین مربعات (تعریف ۲) بوده و برای هر $k \geq 0$ داریم:

$$E\{\|e_k\|^2\} \leq \frac{\bar{\nu}}{\underline{\nu}} E\{\|e_0\|^2\} (1-\lambda)^k + \frac{\mu}{\underline{\nu}} \sum_{i=1}^{k-1} (1-\lambda)^i \quad (6)$$

بعلاوه، این فرآیند اتفاقی با احتمال واحد کراندار نیز هست.

$$x_{k+1} = A(x_k)x_k + B(x_k)u_k + G_k w_k \quad (16)$$

$$y_k = C(x_k)x_k + D_k v_k \quad (17)$$

که در آن، $A(x_k)$ ، $B(x_k)$ و $C(x_k)$ به ترتیب توابع ماتریسی گسسته $n \times n$ ، $n \times m$ و $l \times n$ هستند. برای سیستم دینامیکی داده شده با (۱۶) و (۱۷)، تخمین گر حالت زیر را معرفی می کنیم

$$\hat{x}_{k+1} = A(\hat{x}_k)\hat{x}_k + B(\hat{x}_k)u_k + L_k [y_k - C(\hat{x}_k)\hat{x}_k] \quad (18)$$

که بهره رؤیت گر L_k یک فرآیند اتفاقی ماتریسی از مرتبه $n \times l$ و \hat{x}_k معرف بردار حالت تخمین زده شده است. اکنون می توان با در نظر گرفتن دوگان تکنیک کنترلی SDRE زمان-گسسته و حذف فرض افق زمان نامحدود، فیلتر SDRE تفاضلی را فرمول بندی نمود. بنابراین تابع هزینه

$$J(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\tilde{x}_k^T Q_k \tilde{x}_k + \tilde{u}_k^T R_k \tilde{u}_k) \quad (19)$$

متناظر با سیستم دوگان که با دینامیک حالت زیر توصیف می شود

$$\tilde{x}_{k+1} = A^T(\tilde{x}_k)\tilde{x}_k + C^T(\tilde{x}_k)\tilde{u}_k \quad (20)$$

را در نظر بگیرد. توجه شود که در (۱۹) افق زمان محدود رؤیت گر بوده، و در (۲۰) $Q_k \in R^{n \times n}$ یک ماتریس مثبت معین متقارن متغیر با زمان و $R_k \in R^{l \times l}$ یک ماتریس مثبت معین متغیر با زمان می باشد. با الهام گیری از روش طراحی رؤیت گر برای سیستم های خطی و به منظور حداقل کردن تابع هزینه فوق، بهره رؤیت گر، L_k در معادله (۱۸)، را به صورت زیر انتخاب می کنیم

$$L_k = A(x_k)P_k C^T(x_k) [C(x_k)P_k C^T(x_k) + R_k]^{-1} \quad (21)$$

و P_k از طریق معادله ریکاتی تفاضلی وابسته به حالت زیر به روز می شود

$$P_{k+1} = A(\hat{x}_k)P_k A^T(\hat{x}_k) - A(\hat{x}_k)P_k C^T(\hat{x}_k) [C(\hat{x}_k)P_k C^T(\hat{x}_k) + R_k]^{-1} [C(\hat{x}_k)P_k A^T(\hat{x}_k) + Q_k] \quad (22)$$

نکته ۴: مشابه حالت زمان-پیوسته، اگر $A_1(x_k)$ و $A_2(x_k)$ دو نمایش متمایز از $f(x_k)$ باشند، این دو می توانند ترکیب شده و یک نمایش جدید را ایجاد کنند.

$$A(x_k, \alpha) = \alpha A_1(x_k) + (1-\alpha)A_2(x_k) \quad (23)$$

این درجات آزادی اضافی، بیشمار نمایش را ممکن می سازد، که می تواند برای بهبود عملکرد فیلتر و دوری از رؤیت ناپذیری به کار رود [۴].

نکته ۵: مشابه فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF)، دو فرمول بندی معمول به نام-های به روزرسانی بازگشتی یک مرحله ای^۱ و به روزرسانی بازگشتی دو

که در آن Q یک ماتریس متقارن مثبت معین است، شرایط کافی برای کراندار نمایی بودن خطای تخمین رؤیت گر $(e(t) = x(t) - z(t))$ را استخراج نموده اند. البته این شرایط مابین ماتریس ثابت K و توابع f و h در نمایش (۹) و (۱۰) بدست آمده اند و روش سیستماتیکی برای انتخاب K ارائه نمی دهد. رؤیت گر SDDRE را می توان در قالب معادله (۱۱) به فرم زیر نمایش داد:

$$dz(t) = A(z(t))z(t)dt + K(t)[dy(t) - C(z(t))z(t)dt] \quad (13)$$

که در این حالت

$$g_1(z(t), y(t)) = A(z(t))z(t) - K(t)C(z(t))z(t) \quad \text{و}$$

$g_2(z(t), y(t)) = K(t)$ می باشد. در این حالت بهره رؤیت گر که با معادلات زیر داده می شود [۱۱]،

$$L(\hat{x}) = \Gamma(\hat{x})C^T(\hat{x})V^{-1}, \\ \dot{\Gamma} = \Gamma(\hat{x})A^T(\hat{x}) + A(\hat{x})\Gamma(\hat{x}) - \Gamma(\hat{x})C^T(\hat{x})V^{-1}C^T(\hat{x})\Gamma(\hat{x}) + U$$

که برخلاف (۱۲) وابسته به زمان است و لذا بدست آوردن شرایطی که کراندار بودن خطای رؤیت گر را تضمین کند به سادگی آنچه در [۱۱] صورت گرفته است، نخواهد بود. در بخش آتی با گسترش شکل زمان-گسسته رؤیت گر SDDRE فیلتر پیشنهادی را معرفی نموده و شرایط پایداری این رؤیت گر در یک محیط اتفاقی را تحلیل خواهیم نمود.

۳- پایداری اتفاقی فیلتر SDDRE زمان-گسسته

۳-۱ فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته

سیستم زمان-گسسته غیرخطی اتفاقی زیر را که نسبت به سیگنال ورودی افاین است را در نظر بگیرد

$$x_{k+1} = f(x_k) + g(x_k)u_k + G_k w_k \quad (14)$$

$$y_k = h(x_k) + D_k v_k \quad (15)$$

که $x_k \in R^n$ حالت، $u_k \in R^m$ ورودی و $y_k \in R^l$ خروجی سیستم می باشد. علاوه بر این، v_k و w_k که به ترتیب نویز اندازه گیری و فرآیند نامیده می شوند، نویزهای سفید R^q و R^p -بعدی ناهمبسته با میانگین صفر و کوواریانس واحد هستند. D_k و G_k ماتریس های متغیر با زمان از مرتبه $l \times q$ و $n \times p$ می باشند. برای سادگی حالت اولیه ثابت x_0 با احتمال واحد را در نظر می گیریم. فرض کنید که توابع غیرخطی $f(x_k)$ و $h(x_k)$ متعلق به C^1 بوده و دینامیک غیرخطی (۱۴) و (۱۵) را بتوان در

قالب نمایش SDC زیر قرار داد:

^۱ One-step recursive update

$$s(x_k, \hat{x}_k) = [C(x_k) - C(\hat{x}_k)]x_k \quad (۳۳)$$

هدف این مقاله تحلیل دینامیک خطا در (۲۹) است. پیش از اقدام به این کار، ابتدا یک بحث مقدماتی در خصوص کران‌های پاسخ معادله ریکاتی (۲۲) ارائه می‌شود.

۳-۲ کران‌های معادله ریکاتی وابسته به حالت

در این بخش نشان می‌دهیم رابطه نزدیکی میان کران‌دار بودن پاسخ معادله ریکاتی (۲۲) با خواص رؤیت‌پذیری و آشکاری‌پذیری سیستم مورد مشاهده وجود دارد. ابتدا نکته زیر را مد نظر قرار دهید.

نکته ۷: در ادامه، ماتریس‌های وابسته به حالتی که در فرمول‌بندی فیلتر ظاهر می‌شوند را با ماتریس‌های وابسته به زمان زیر نمایش می‌دهیم

$$A_k \leftarrow A(\hat{x}_k) \quad B_k \leftarrow B(\hat{x}_k) \quad C_k \leftarrow C(\hat{x}_k) \quad (۳۴)$$

توجه شود که این نمایش صرفاً برای سهولت نشان‌گذاری صورت گرفته و این حقیقت که این ماتریس‌ها با استفاده از بردار حالت \hat{x}_k بدست می‌آیند، مد نظر باقی خواهند ماند.

تعریف ۴- ماتریس‌های متغیر با زمان A_k و C_k را در نظر می‌گیریم. گرامیان رویت‌پذیری با معادله زیر داده می‌شود [۱۶]:

$$M_{k+a,k} = \sum_{i=k}^{k+a} \Phi^{-T}(i,k) C_i^T C_i \Phi(i,k) \quad (۳۵)$$

برای هر عدد صحیحی همچون $a > 0$ با فرض $\Phi(k,k) = I$ و برای $i > k$

$$\Phi(i,k) = A_{i-1} \dots A_k \quad (۳۶)$$

ماتریس‌های A_k و C_k ، $k \geq 0$ ، شرط رویت‌پذیری یکنواخت را برآورده می‌کنند در صورتی که اعداد حقیقی $\underline{m}, \bar{m} > 0$ و عدد صحیح $a > 0$ موجود باشند به گونه‌ای که نامساوی زیر تحقق یابد:

$$\underline{m}I \leq M_{k+a,k} \leq \bar{m}I \quad (۳۷)$$

لم ۲- پاسخ P_k معادله ریکاتی (۲۲) کراندار است، بدین معنی که اعداد حقیقی $\underline{p}, \bar{p} > 0$ موجوداند به نحوی که

$$\underline{p}I \leq P_k \leq \bar{p}I \quad (۳۸)$$

در صورتی که شرایط زیر برآورده شوند.

(۱) اعداد حقیقی $\underline{q}, \bar{q}, \underline{r}, \bar{r} > 0$ وجود دارند به گونه‌ای که

$$\underline{q}I \leq Q_k \leq \bar{q}I \quad \text{و} \quad \underline{r}I \leq R_k \leq \bar{r}I$$

(۲) ماتریس‌های A_k و C_k شرط رویت‌پذیری یکنواخت را برآورده کنند.

(۳) ماتریس حالت اولیه P_0 مثبت معین انتخاب شود.

مرحله‌ای^۱، برای فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته موجود است. ساختار بازگشتی یک مرحله‌ای آن چیزی است که در اینجا ارائه گردید و با معادلات (۱۸)، (۲۱) و (۲۲) داده می‌شود. ساختار بازگشتی دو مرحله‌ای در یک محیط قطعی، در [۶] و نیز در [۸] مورد بحث قرار گرفته است. توجه کنید که اگرچه ممکن است این دو فرمول‌بندی عملکرد و رفتار گذرای متفاوتی داشته باشند، اما خصوصیات همگرایی آنها یکسان خواهد بود.

نکته ۶: یک انتخاب مرسوم برای Q_k و R_k ماتریس‌های کوواریانس نویزهای اندازه‌گیری و نامعینی سیستم در (۱۴) و (۱۵) می‌باشد، به عبارت دیگر

$$Q_k = G_k G_k^T \quad (۲۴)$$

$$R_k = D_k D_k^T \quad (۲۵)$$

البته این تنها انتخاب ممکن مثبت معین دیگری به عنوان پارامتر طراحی نیز می‌تواند جایگزین شود. به ویژه در تخمین حالت سیستم-های قطعی بدون نویز، در این مورد $D_k D_k^T = G_k G_k^T = 0$ می‌باشد. اگر خطای تخمین را به صورت زیر تعریف کنیم

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (۲۶)$$

با کم کردن (۱۸) از (۱۶) دینامیک خطا حاصل می‌شود

$$e_{k+1} = A(x_k)x_k + B(x_k)u_k + G_k w_k - A(\hat{x}_k)\hat{x}_k - B(\hat{x}_k)u_k - L_k [C(x_k)x_k + D_k v_k - C(\hat{x}_k)\hat{x}_k] \quad (۲۷)$$

با اضافه و کم کردن $A(\hat{x}_k)x_k$ به کل معادله و اضافه و کم کردن $C(\hat{x}_k)x_k$ به داخل کروشه خواهیم داشت

$$e_{k+1} = A(\hat{x}_k)x_k - A(\hat{x}_k)\hat{x}_k + A(x_k)x_k - A(\hat{x}_k)x_k + [B(x_k) - B(\hat{x}_k)]u_k + G_k w_k - L_k [C(\hat{x}_k)x_k - C(\hat{x}_k)\hat{x}_k + C(x_k)x_k - C(\hat{x}_k)x_k + D_k v_k] \quad (۲۸)$$

به این ترتیب می‌توان دینامیک خطا را به صورت زیر بازنویسی نمود

$$e_{k+1} = [A(\hat{x}_k) - L_k C(\hat{x}_k)]e_k + \varphi_k + \chi_k \quad (۲۹)$$

که φ_k و χ_k به ترتیب ترم‌های آزاد از نویز و دارای نویز در (۲۸) را در بر می‌گیرند

$$\varphi_k = d(x_k, \hat{x}_k, u_k) - L_k s(x_k, \hat{x}_k) \quad (۳۰)$$

$$\chi_k = G_k w_k - L_k D_k v_k \quad (۳۱)$$

و توابع غیرخطی $d(x_k, \hat{x}_k, u_k)$ و $s(x_k, \hat{x}_k)$ با معادلات زیر تعیین می‌گردند

$$d(x_k, \hat{x}_k, u_k) = [A(x_k) - A(\hat{x}_k)]x_k + [B(x_k) - B(\hat{x}_k)]u_k \quad (۳۲)$$

^۱ Two-step recursive update

$$\|C(x_k) - C(\hat{x}_k)\| \leq k_C \|x_k - \hat{x}_k\|^2 \quad (45)$$

همچنین فرض کنید $\|x_k - \hat{x}_k\| \leq \varepsilon_A$ ، $\|x_k - \hat{x}_k\| \leq \varepsilon$ و $\|x_k - \hat{x}_k\| \leq \varepsilon_C$ و $k_A, k_B, k_C > 0$. اکنون با این پیش‌نیازها، قادر به بیان قضیه اصلی این مقاله می‌باشیم، که شرایط کافی برای پایداری اتفاقی خطای تخمین را نشان می‌دهد.

قضیه ۱- سیستم غیرخطی اتفاقی داده شده با (۱۶) و (۱۷) را به همراه فیلتر SDRE تفاضلی تعریف شده با (۱۸)-(۲۲) و ماتریس‌های مثبت معین Q_k و R_k در نظر بگیرید. فرض کنید شرایط ۱ تا ۴ برقرار باشند. آنگاه خطای تخمین داده شده با (۲۹) با تعبیر میانگین مربعات کراندار نمایی و نیز با احتمال واحد کراندار است، مشروط بر آنکه خطای تخمین اولیه شرط

$$\|e_0\| \leq \varepsilon \quad (46)$$

را برآورده سازد و ماتریس‌های کوواریانس ترم‌های نویز توسط

$$G_k G_k^T \leq \delta I \quad (47)$$

$$D_k D_k^T \leq \delta I \quad (48)$$

کراندار باشند، که در آن $\varepsilon, \delta > 0$ اعداد حقیقی مثبت هستند.

نکته ۸: با توجه به لم ۲، در صورتیکه سیستم خاصیت رویت‌پذیری معینی را برآورده کند، آنگاه فرض ۲ تحقق یافته و می‌توان برقراری نامساوی (۴۱) را از پیش تصدیق کرد.

نکته ۹: می‌توان نامساوی‌های (۴۳) تا (۴۵) را به صورت شرایط لپ‌شیتز محلی با توان دو تعبیر نمود. تحقق این نامساوی‌ها در حالت کلی کار دشواری خواهد بود. البته، درجات آزادی اضافی که بواسطه یکتا نبودن نمایش SDC فراهم می‌گردد، می‌تواند در برآورده کردن فرض ۴ مفید واقع شود.

اثبات قضیه ۱- تابع لیاپانوف مرسوم زیر را انتخاب می‌کنیم

$$V_k(e_k) = e_k^T \Pi_k e_k \quad (49)$$

با فرض $\Pi_k = P_k^{-1}$ ، به خاطر مثبت معین بودن P_k (فرض ۲) این ماتریس حتما وجود دارد. از نامساوی (۴۱) داریم

$$\frac{1}{\bar{p}} \|e_k\|^2 \leq V_k(e_k) \leq \frac{1}{\underline{p}} \|e_k\|^2 \quad (50)$$

به عبارت دیگر (۴) با $\underline{v} = 1/\bar{p}$ و $\bar{v} = 1/\underline{p}$ برقرار است. برای اثبات کراندار بودن خطای تخمین با استفاده از لم ۱، نیازمند محاسبه یک حد بالا مشابه (۵) برای $\{V_{k+1}(e_{k+1})|e_k\}$ هستیم. با توجه به (۲۹) داریم

اثبات- این لم مستقیماً از [۱۵] استنباط می‌شود و در [۱۳] نیز، در مورد پاسخ معادله ریکاتی EKF به کار رفته است. ■

توجه شود که اگر ماتریس‌های متغیر با زمان A_k و C_k نظیر آنچه در EKF صورت می‌گیرد از خطی‌سازی معادلات حول حالت تخمینی بدست آمده باشند، آنگاه شرط رویت‌پذیری یکنواخت را می‌توان برحسب شرط رتبه رویت‌پذیری غیرخطی بیان کرد. اما در این حالت که ماتریس‌های متغیر با زمان A_k و C_k از تبدیل معادلات به فرم SDC حاصل می‌شوند، برقراری این ارتباط با این سادگی نیست. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که کراندار بودن P_k با خواص رویت‌پذیری سیستم ارتباط مستقیم پیدا می‌کند. این کراندارایی یکی از فرضیات کلیدی است که در بخش بعد برای تحلیل پایداری مورد استفاده قرار گرفته است.

۳-۳- کراندار بودن خطای تخمین

در این بخش تحلیل پایداری فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته ارائه خواهد شد. به منظور تحلیل خطا، ابتدا فرضیات زیر را در نظر بگیرید.

فرض ۱- اعداد حقیقی مثبت $\bar{a}, \bar{c} > 0$ وجود دارند به گونه‌ای که، برای هر $k \geq 0$ ماتریس‌های A_k و C_k از بالا کراندار باشند

$$\|A_k\| \leq \bar{a} \quad (39)$$

$$\|C_k\| \leq \bar{c} \quad (40)$$

و افزون بر آن، برای A_k هر $k \geq 0$ ناویژه باشد.

فرض ۲- برای هر پاسخ \hat{x}_k از معادله تفاضلی رویت‌گر (۱۸)، پاسخ P_k از معادله ریکاتی تفاضلی وابسته به حالت (۲۲) برای هر $k \geq 0$ و اعداد حقیقی مثبت $\underline{p}, \bar{p} > 0$ ، با

$$\underline{p}I \leq P_k \leq \bar{p}I \quad (41)$$

کراندار است.

فرض ۳- اعداد حقیقی $\sigma, \rho > 0$ موجوداند به نحوی که برای هر $k \geq 0$

$$\|x_k\| \leq \sigma, \|u_k\| \leq \rho \quad (42)$$

فرض ۴- نمایش SDC به گونه‌ای انتخاب شود که برای همه $x_k, \hat{x}_k \in R^n$ و هر $k \geq 0$ نامساوی‌های زیر برآورده شوند:

$$\|A(x_k) - A(\hat{x}_k)\| \leq k_A \|x_k - \hat{x}_k\|^2 \quad (43)$$

$$\|B(x_k) - B(\hat{x}_k)\| \leq k_B \|x_k - \hat{x}_k\|^2 \quad (44)$$

$$L_k C_k P_k (A_k - L_k C_k)^T = A_k [A_k^{-1} L_k C_k] \cdot \quad (58)$$

$$[A_k^{-1} (A_k - L_k C_k) P_k]^T; A_k^T \geq 0$$

برقرار است. جایگزینی (58) در (54) منجر می شود به

$$P_{k+1} \geq (A_k - L_k C_k) P_k (A_k - L_k C_k)^T + Q_k \quad (59)$$

نامساوی (56) بیانگر آن است که $(A_k - L_k C_k)^{-1}$ وجود دارد و لذا می توان نوشت

$$P_{k+1} \geq (A_k - L_k C_k) \cdot \quad (60)$$

$$[P_k + (A_k - L_k C_k)^{-1} Q_k (A_k - L_k C_k)^T] (A_k - L_k C_k)^T$$

با استناد به مثبت بودن ماتریس های Q_k ، R_k و $Q \leq I$ و $rI \leq R_k$ ، و با توجه به (18) و نامساوی های (39) تا (41) و همچنین داریم

$$\|L_k\| \leq \frac{1}{\bar{a}pc} \frac{1}{r} \quad (61)$$

به این ترتیب نامساوی زیر از (60) بدست می آید

$$P_{k+1} \geq (A_k - L_k C_k) \left[P_k + \frac{q}{(\bar{a} + \bar{a}pc^2 / r)^2} I \right] (A_k - L_k C_k)^T \quad (62)$$

با معکوس گرفتن از طرفین نامساوی فوق (از آنجا که $P_k \geq pI$ و $(A_k - L_k C_k)$ ناویژه هستند این عمل مجاز است)، سپس ضرب از چپ و راست به ترتیب در $(A_k - L_k C_k)^T$ و $(A_k - L_k C_k)$ ، و با به کار بردن نامساوی (41) و قرار دادن $P_k = P_k^{-1}$ نهایتاً خواهیم داشت

$$(A_k - L_k C_k)^T P_{k+1} (A_k - L_k C_k) \leq \left(1 + \frac{q}{\bar{p}(\bar{a} + \bar{a}pc^2 / r)^2} \right)^{-1} P_k \quad (63)$$

به عبارت دیگر نامساوی (49) با

$$1 - \lambda = \left[1 + \frac{q}{\bar{p}(\bar{a} + \bar{a}pc^2 / r)^2} \right]^{-1} \quad (64)$$

محقق می شود. ■

لم 4- اگر فرضیات قضیه 1 برآورده شوند و L_k و φ_k به ترتیب با (21) و (30) داده شوند، آنگاه اعداد حقیقی $\varepsilon' > 0$ ، $\kappa_\varphi > 0$ وجود دارند به نحوی

$$\|e_k\| \leq \varepsilon' \quad \text{که برای}$$

$$\varphi_k^T P_{k+1} [2(A_k - L_k C_k) e_k + \varphi_k] \leq \kappa_\varphi \|e_k\|^3 \quad (65)$$

اثبات- از (21)، (39) تا (41)، و $C_k P_k C_k^T > 0$ داریم

$$\|L_k\| \leq \frac{1}{\bar{a}pc} \frac{1}{r} \quad (66)$$

جایگزینی در (30) نتیجه می دهد

$$V_{k+1}(e_{k+1}) = [e_k^T (A_k - L_k C_k)^T + \varphi_k^T + \chi_k^T] P_{k+1} \quad (51)$$

$$[(A_k - L_k C_k) e_k + \varphi_k + \chi_k]$$

$$= e_k^T (A_k - L_k C_k)^T P_{k+1} (A_k - L_k C_k) e_k +$$

$$\varphi_k^T P_{k+1} [2(A_k - L_k C_k) e_k + \varphi_k]$$

$$+ 2\chi_k^T P_{k+1} [(A_k - L_k C_k) e_k + \varphi_k] + \chi_k^T P_{k+1} \chi_k$$

در بسط تساوی فوق از مقارن بودن ماتریس P_{k+1} بهره برده ایم. با گرفتن امید ریاضی شرطی $E\{V_{k+1}(e_{k+1})|e_k\}$ از طرفین (51) و در نظر گرفتن خاصیت نویز سفید، مشاهده می شود که ترم

$$E\{\chi_k^T P_{k+1} [(A_k - L_k C_k) e_k + \varphi_k] e_k\}$$

صفر است. علت این امر آن است که نه $P_{k+1} = P_k^{-1}$ و نه A_k ، C_k ، L_k ، φ_k و e_k هیچ کدام به v_k یا w_k بستگی ندارند. به این ترتیب برای دست یابی به هدف خود، نیازمند محاسبه سه ترم باقی مانده $E\{\chi_k^T P_{k+1} \chi_k\}$ و $\varphi_k^T P_{k+1} [2(A_k - L_k C_k) e_k + \varphi_k]$ و $(A_k - L_k C_k)^T P_{k+1} (A_k - L_k C_k)$ هستیم. این محاسبات در لم های 3 تا 5 انجام شده اند.

لم 3- تحت شرایط قضیه 1، عدد حقیقی $0 < \lambda < 1$ وجود دارد به گونه ای که $P_k = P_k^{-1}$ برای $k \geq 0$ و L_k داده شده با معادله (21)، نامساوی زیر را ارضا کنند:

$$(A_k - L_k C_k)^T P_{k+1} (A_k - L_k C_k) \leq (1 - \lambda) P_k \quad (52)$$

اثبات- از (21) و (22) داریم

$$P_{k+1} = A_k P_k A_k^T + Q_k - A_k P_k C_k^T L_k^T \quad (53)$$

مرتب سازی دوباره جملات نتیجه می دهد

$$P_{k+1} = (A_k - L_k C_k) P_k (A_k - L_k C_k)^T + Q_k + L_k C_k P_k (A_k - L_k C_k)^T \quad (54)$$

اکنون توجه خود را به عبارت $L_k C_k P_k (A_k - L_k C_k)^T$ در سمت راست (54) معطوف می کنیم. با در نظر گرفتن (21) می توان نشان داد که

$$A_k^{-1} (A_k - L_k C_k) P_k = P_k - P_k C_k^T (C_k P_k C_k^T + R_k)^{-1} C_k P_k \quad (55)$$

یک ماتریس متقارن است، و با به کار بردن لم معکوس سازی ماتریس نتیجه می گیریم

$$A_k^{-1} (A_k - L_k C_k) P_k = (P_k^{-1} + C_k^T R_k^{-1} C_k)^{-1} > 0 \quad (56)$$

چرا که $P_k^{-1} > 0$ است. بعلاوه، با توجه به (21) و دانستن این که $P_k > 0$ و $R_k > 0$ هستند داریم

$$A_k^{-1} L_k C_k = P_k C_k^T (C_k P_k C_k^T + R_k)^{-1} C_k \geq 0 \quad (57)$$

با ترکیب (56) و (57) و استفاده از $P_k = P_k^T$ ، ثابت می شود که

$$g_k = w_k^T G_k^T \Pi_{k+1} G_k w_k + v_k^T D_k^T L_k^T \Pi_{k+1} L_k D_k v_k \quad (۷۶)$$

از (۷۱)، فرضیات قضیه و $C_k P_k C_k^T > 0$ داریم:

$$\|L_k\| \leq \overline{apc} \frac{1}{r} \quad (۷۷)$$

در نتیجه با توجه به نامساوی فوق، رابطه (۷۲) و فرض $\Pi_k = P_k^{-1}$ می توان نوشت

$$g_k \leq \frac{1}{p} w_k^T G_k^T G_k w_k + \frac{\overline{a}^2 \overline{c}^2 \overline{p}^2}{p \underline{r}^2} v_k^T D_k^T D_k v_k \quad (۷۸)$$

از آنجا که هر دو طرف (۷۸) اسکالر هستند، می توان از سمت راست (۷۸) بدون تغییر مقدار آن trace گرفت:

$$g_k \leq \frac{1}{p} tr(w_k^T G_k^T G_k w_k) + \frac{\overline{a}^2 \overline{c}^2 \overline{p}^2}{p \underline{r}^2} tr(v_k^T D_k^T D_k v_k) \quad (۷۹)$$

به موجب معادله ماتریسی شناخته شده

$$tr(\Gamma \Delta) = tr(\Delta \Gamma) \quad (۸۰)$$

که Γ و Δ چنان ماتریس هایی هستند که به ضرب ماتریسی و عملیات trace فوق معنی می دهند، داریم

$$g_k \leq \frac{1}{p} tr(G_k w_k w_k^T G_k^T) + \frac{\overline{a}^2 \overline{c}^2 \overline{p}^2}{p \underline{r}^2} tr(D_k v_k v_k^T D_k^T) \quad (۸۱)$$

و محاسبه مقدار میانگین منجر می شود به

$$E\{g_k\} \leq \frac{1}{p} tr(G_k E\{w_k w_k^T\} G_k^T) + \frac{\overline{a}^2 \overline{c}^2 \overline{p}^2}{p \underline{r}^2} tr(D_k E\{v_k v_k^T\} D_k^T) \quad (۸۲)$$

در رابطه فوق از این واقعیت که D_k و G_k ماتریس هایی معین هستند استفاده شده است. چون w_k و v_k نویزهای سفید استاندارد فرض شده اند، داریم

$$\begin{aligned} E\{w_k w_k^T\} &= I \\ E\{v_k v_k^T\} &= I \end{aligned} \quad (۸۳)$$

بنابراین می توان نوشت

$$E\{s_k^T \Pi_{k+1} s_k\} = E\{g_k\} \leq \frac{1}{p} tr(G_k G_k^T) + \frac{\overline{a}^2 \overline{c}^2 \overline{p}^2}{p \underline{r}^2} tr(D_k D_k^T) \quad (۸۴)$$

با توجه به شرایط (۴۷) و (۴۸) در قضیه ۱ نتیجه می شود

$$\begin{aligned} tr(G_k G_k^T) &\leq \delta tr(I_n) = n\delta \\ tr(D_k D_k^T) &\leq \delta tr(I_m) = l\delta \end{aligned} \quad (۸۵)$$

$$\|\varphi_k\| \leq \|d(x_k, \hat{x}_k, u_k)\| + \overline{apc} \frac{1}{r} \|s(x_k, \hat{x}_k)\| \quad (۶۷)$$

توابع غیرخطی $d(x_k, \hat{x}_k, u_k)$ و $s(x_k, \hat{x}_k)$ در (۳۲) و (۳۳) را در نظر بگیرد. اکنون با توجه به فرض ۴ و با استفاده از نامساوی های (۴۲) داریم

$$\|d(x_k, \hat{x}_k, u_k)\| \leq \| [A(x_k) - A(\hat{x}_k)] x_k \| + \| [B(x_k) - B(\hat{x}_k)] u_k \| \leq (k_A \sigma + k_B \rho) \|x_k - \hat{x}_k\|^2 \quad (۶۸)$$

$$\|s(x_k, \hat{x}_k)\| = \| [C(x_k) - C(\hat{x}_k)] x_k \| \leq k_C \sigma \|x_k - \hat{x}_k\|^2 \quad (۶۹)$$

با انتخاب $\varepsilon' = \min(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C)$ و به کمک (۶۸) و (۶۹)، می توان نامساوی (۶۷) را به صورت زیر بازنویسی نمود

$$\|\varphi_k\| \leq (k_A \sigma + k_B \rho) \|e_k\|^2 + \overline{apc} \frac{1}{r} k_C \sigma \|e_k\|^2 \quad (۷۰)$$

به ازای $\|e_k\| \leq \varepsilon'$ به عبارت دیگر

$$\|\varphi_k\| \leq \kappa' \|e_k\|^2 \quad (۷۱)$$

با

$$\kappa' = (k_A \sigma + k_B \rho) + \overline{apc} \frac{1}{r} k_C \sigma \quad (۷۲)$$

دقت کنید که در (۷۰) از تعریف خطای تخمین (۲۶) استفاده شده است. به این ترتیب از (۷۰)، فرضیات ۱ و ۲، و همچنین مثبت معین بودن ماتریس R_k نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} \varphi_k^T \Pi_{k+1} [2(A_k - L_k C_k) e_k + \varphi_k] &\leq \\ \kappa' \|e_k\|^2 \frac{1}{p} \left[2 \left(\overline{a} + \overline{apc} \frac{1}{r} \overline{c} \right) \|e_k\| + \kappa' \varepsilon' \|e_k\| \right] \end{aligned} \quad (۷۳)$$

با $\Pi_k = P_k^{-1}$ و برای $\|e_k\| \leq \varepsilon'$ به عبارت دیگر نامساوی (۶۵) با

$$\kappa_\varphi = \kappa' \frac{1}{p} \left[2 \left(\overline{a} + \overline{apc} \frac{1}{r} \overline{c} \right) + \kappa' \varepsilon' \right] \quad (۷۴)$$

برآورده می شود. ■

لم ۵- اگر فرضیات قضیه ۱ برقرار باشند و L_k و χ_k به ترتیب با (۲۱) و (۳۱) داده شوند، آنگاه عدد حقیقی مثبت $\kappa_\chi > 0$ مستقل از δ وجود دارد به شکلی که

$$E\{\chi_k^T \Pi_{k+1} \chi_k\} \leq \kappa_\chi \delta \quad (۷۵)$$

از آنجا که w_k و v_k نامبسته هستند، امید ریاضی جمله هایی که v_k و w_k را با هم شامل می شوند صفر خواهد بود و لذا روی ترم های زیر از $\chi_k^T \Pi_{k+1} \chi_k$ متمرکز می شویم

$$\bar{p} + 1 / \left(1 + \underline{q} / \bar{p} (\bar{a} + \bar{a} \bar{p} \bar{c}^2 / \underline{r})^2 \right) < 1 \quad (92)$$

اثبات قضیه ۱ را می توان برای این حالت تغییر داد.

۴- نتایج شبیه سازی

در این بخش، برای نشان دادن اهمیت شرایطی که در بخش قبلی برای پایداری فیلتر بدست آمد، فیلتر SDRE تفاضلی را به یک سیستم نمونه اعمال کرده و به کمک شبیه سازی عددی به بررسی رفتار خطای تخمین می پردازیم. برای این منظور یک سیستم غیرخطی اتفاقی و بدون ورودی،

$u_k \equiv 0$ ، که با (۱۴) و (۱۵) داده می شود را به ازای

$$f(x_k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} + \tau x_{2,k} \\ (1-\tau)x_{2,k} + \tau(x_{1,k}^2 x_{2,k} + x_{2,k}^3 - x_{1,k}) \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$h(x_k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} + x_{2,k} \\ x_{1,k} x_{2,k} \end{bmatrix} \quad (94)$$

در نظر بگیرید. دقت شود که $\tau = 10^{-2}$ زمان نمونه برداری است. از میان انتخاب های ممکن متفاوت، $f(x_k)$ را به شکل زیر نمایش می دهیم

$$f(x_k) = A(x_k) x_k = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 + \tau(x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 - 1) \end{bmatrix} x_k \quad (95)$$

می توان نشان داد که، سیستم مورد نظر برای $\hat{x}_{1,k} = \hat{x}_{2,k}$ نسبت به الگوریتم EKF رؤیت ناپذیر بوده و در چنین وضعیتی هیچ کاری در قبال این مشکل نمی توان انجام داد. حال آنکه با به کار بردن فیلتر SDRE، دو نمایش

SDC متمایز برای تابع مشاهده غیرخطی $h(x_k)$ خواهیم داشت:

$$C_1(x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x_{1,k} \end{bmatrix} \quad C_2(x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_{2,k} & 0 \end{bmatrix} \quad (96)$$

که این دو نمایش می توانند ترکیب شده و ماتریس اندازه گیری وابسته به حالت زیر را شکل دهند

$$C(x_k, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha x_{2,k} & (1-\alpha)x_{1,k} \end{bmatrix} \quad (97)$$

در این نمایش جدید، می توان مقدار α را به گونه ای انتخاب نمود که از رؤیت ناپذیری ممانعت به عمل آید. در واقع، ماتریس های $A(x_k)$ و $C(x_k, \alpha)$ مفروض در (۹۴) و (۹۶) شرط رؤیت پذیری یکنواخت را تضمین کرده و لذا بنا به لم ۲، پاسخ معادله ریکاتی تفاضلی (۲۲) کراندار و مثبت معین خواهد بود. گذشته از این، به سادگی می توان نشان داد که فرض ۴ با این نمایش SDC تحقق می یابد.

که l و n به ترتیب تعداد سطرهای G_k و D_k می باشند. به این ترتیب با تعریف

$$\kappa_\chi = \frac{n}{\bar{p}} + \frac{\bar{a}^2 \bar{c}^2 \bar{p}^2 m}{\underline{p} \underline{r}^2} \quad (86)$$

و با (۸۴) خواهیم داشت

$$E \{ \chi_k^T \Pi_{k+1} \chi_k \} \leq \kappa_\chi \delta \quad (87)$$

که همان نامساوی (۷۵) مطلوب است.

اکنون با توجه به نتایجی که در لم های فوق حاصل شد، می توان به ادامه اثبات قضیه ۱ پرداخت.

ادامه اثبات قضیه ۱- معادله (۵۱) و کران های بدست آمده در لم های ۳ تا ۵ را در نظر بگیرید، به این ترتیب داریم

$$E \{ V_{k+1}(e_{k+1}) | e_k \} \leq (1-\lambda) V_k(e_k) + \kappa_\varphi \|e_k\|^3 + \kappa_\chi \delta \quad (88)$$

برای $\|e_k\| \leq \varepsilon'$ با تعریف

$$\varepsilon = \min(\varepsilon', \frac{\lambda}{2\bar{p}\kappa_\varphi}) \quad (89)$$

و با توجه به (۴۹) و (۵۰)، برای $\|e_k\| \leq \varepsilon$ خواهیم داشت

$$\kappa_\varphi \|e_k\| \|e_k\|^2 \leq \frac{\lambda}{2\bar{p}} \|e_k\|^2 \leq \frac{\lambda}{2} V_k(e_k) \quad (90)$$

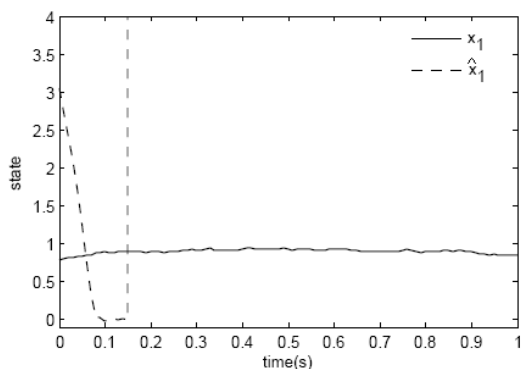
جایگزینی (۹۰) در (۸۸) برای $\|e_k\| \leq \varepsilon$ نتیجه می دهد.

$$E \{ V_{k+1}(e_{k+1}) | e_k \} - V_k(e_k) \leq -\frac{\lambda}{2} V_k(e_k) + \kappa_\chi \delta \quad (91)$$

بنابراین، با داشتن (۵۰) و (۹۱) می توان لم ۱ را به ازای $\|e_0\| \leq \varepsilon$ ، $\mu = \kappa_\chi \delta$ به کار برد، و استنتاج نمود که خطای تخمین e_k در معادله (۲۹) با تغییر میانگین مربعات کراندار نمای بوده و با احتمال واحد کراندار است.

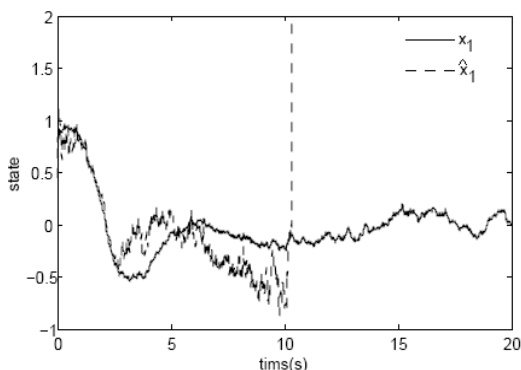
نکته ۱۰: قضیه ۱ شرایط کافی برای تضمین کراندار نمایی بودن خطای تخمین را فراهم می کند. بعلاوه، از آنجایی که کران ها با استفاده از عملگرهای نرم بدست می آیند، این شرایط محافظه کارانه نیز خواهند بود. البته، اثبات این قضیه یک روش سودمند برای تعیین کران خطای تخمین براساس نامساوی (۶) و با پارامترهای $\|e_0\| \leq \varepsilon$ ، $\bar{v} = 1/\underline{p}$ ، $\underline{v} = 1/\bar{p}$ و $\mu = \kappa_\chi \delta$ ارائه می دهد.

نکته ۱۱: می توان نشان داد که، نامساوی های (۴۳) تا (۴۵) در فرض ۴ می تواند به شرایط لپ شیتز استاندارد با توان واحد کاهش یابند، مادامی که خطای تخمین همچنان کراندار باقی می ماند، مشروط بر آنکه علاوه بر فرضیات قضیه ۱ داشته باشیم



شکل ۳: مقدار واقعی و تخمینی اولین مولفه بردار حالت به ازای خطای تخمین اولیه

$$\text{بزرگ } \hat{x}_0 = [3 \ 3]^T \text{ و } D_k = I_2$$



شکل ۴: مقدار واقعی و تخمینی اولین مولفه بردار حالت به ازای نویز اندازه گیری

$$\text{بزرگ } \hat{x}_0 = [0.3 \ 0.3]^T \text{ و } D_k = \sqrt{200}I$$

به این ترتیب تمام شرایط قضیه ۱ برآورده شده و لذا انتظار خطای تخمین کراندار را خواهیم داشت همان گونه که اشکال ۱ و ۲ نیز تأیید می کنند، به ازای خطای تخمین اولیه و نویز کوچک (نامساوی های (۴۶) تا (۴۸)) خطای تخمین کراندار باقی می ماند. اما به دلیل غیرخطی گری شدید موجود در سیستم نمونه مفروض، در صورتی که هر کدام از خطای تخمین اولیه یا سیگنال نویز مزاحم بزرگ باشند، به عبارت دیگر نامساوی های (۴۶) تا (۴۸) نقض شوند، آنگاه خطای تخمین دیگر کراندار نخواهد بود و شکل-های ۳ و ۴ واگرایی تخمین را در این حالت نشان می دهند.

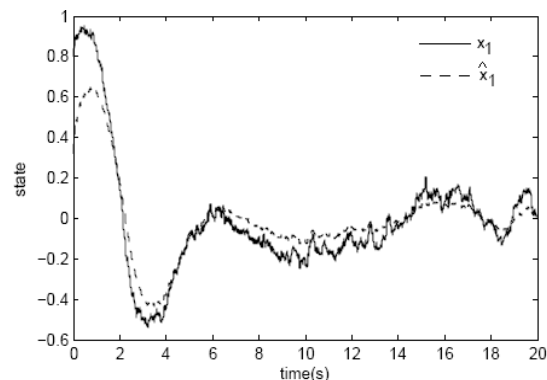
۵- نتیجه گیری

در این مقاله، یک فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته برای حل مسائل تخمین حالت غیرخطی عمومی در یک محیط تصادفی در نظر گرفته شده و رفتار خطای آن تحلیل شده است. همچنین نشان داده شده است که خطای تخمین تحت قیود مشخصی با تعبیر میانگین مربعات کراندار نمایی و با احتمال واحد کراندار است. این شرایط عبارتند از آن که نمایش SDC یک شرط لیب شیتز معین را ارضا کند، پاسخ معادله ریکاتی تفاضلی وابسته به حالت مثبت معین و کراندار باقی بماند، و علاوه بر آن خطای تخمین اولیه و همین طور سیگنال های نویز مخرب به اندازه کافی کوچک باشند. نتایج شبیه سازی نشان می دهند که اگر هر یک از خطای تخمین اولیه یا ترم های

برای انجام شبیه سازی های عددی، یک وضعیت با خطای تخمین کراندار و دو وضعیت با خطای تخمین واگرا در نظر گرفته شده است. در تمامی حالات، فیلتر SDRE تفاضلی با استفاده از پارامترهای طراحی داده شده در جدول ۱ و ماتریس های وابسته به حالت (۹۴) و (۹۶) پیاده شده است. علاوه بر این، حالت اولیه واقعی به صورت $x_0 = [0.8 \ 0.4]^T$ و کوواریانس نویز فرآیند $G_k = \sqrt{10^{-3}}I_2$ فرض شده است. ماتریس باقی مانده D_k و نیز حالت اولیه تخمینی \hat{x}_0 ، برای هر یک از این سه وضعیت به طور مشخص انتخاب شده اند. نتایج شبیه سازی در شکل های ۱ تا ۴ به تصویر کشیده شده اند. برای خطای اولیه و نویز کوچک، کران های $\bar{a} = 1.0001$ ، $\bar{c} = 1.4$ ، $\bar{p} = 0.6806$ ، $\bar{\sigma} = 0.9746$ از نتایج شبیه سازی بدست می آیند. این حدود برقراری نامساوی های (۳۹) تا (۴۲) را تصدیق می کنند.

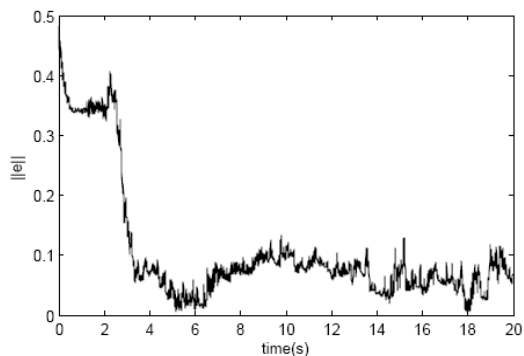
جدول ۱: پارامترهای طراحی فیلتر SDRE تفاضلی

Design Parameters	Q_k	R_k	P_0	α
Value	diag(0.05,0.1)	100I ₂	I ₂	0.8



شکل ۱: مقدار واقعی و تخمینی اولین مولفه بردار حالت به ازای خطای تخمین اولیه

$$\text{و نویز اندازه گیری کوچک، } \hat{x}_0 = [0.3 \ 0.3]^T \text{ و } D_k = I_2$$



شکل ۲: نرم خطای تخمین به ازای خطای تخمین اولیه و نویز اندازه گیری کوچک

- [13] K. Reif, S. Gunther, E. Yaz and R. Unbehauen, "Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pp. 714-728, 1999.
- [14] J. Xu, G.M. Dimirovski, Y. Jinx and C. Shen, "UKF design and stability for nonlinear stochastic systems with correlated noises," In Proc. of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, 2007.
- [15] T. Morozan, "Stability of stochastic discrete systems," *Journal of Mathematics Analysis and Application*, vol. 23, pp. 1-9, 1968
- [16] I. C. Baik, K. H. Kim and M. J. Youn, "Robust nonlinear speed control of PM synchronous motor using boundary layer integral sliding mode control technique," *IEEE Transactions on Control System Technology*, vol. 8, no. 1, Jan. 2000.

نویز بزرگ باشند، واگرایی خطای تخمین محتمل خواهد بود. از آنجا که تاکنون تحلیل پایداری و همگرایی فیلتر SDRE فقط در محیط‌های قطعی (فاقد نویز) با ساختاری خاص صورت گرفته است این چهارچوب ارائه شده می‌تواند تأثیر قابل توجهی در توسعه فیلترهای SDRE در کاربردهای واقعی بگذارد. نکته چشمگیر آن است که در مقایسه با نتایج موجود، هیچ شرط محدود کننده قابل توجهی بر روی معادلات غیرخطی سیستم و نمایش SDC آن تحمیل نشده است.

مراجع

- [1] H. T. Banks, Hae-Dae Kwon, J. A. Toivanen, and H. T. Tran, "A state-dependent Riccati equation-based estimator approach for HIV feedback control," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 27, no. 2, pp. 93-121, Feb. 2006.
- [2] A. Nemra, and N. Aouf, "Robust INS/GPS Sensor Fusion for UAV Localization Using SDRE Nonlinear Filtering," *IEEE Sensors Journal*, vol. 10, no. 4, pp. 789 - 798, 2010.
- [3] A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, 2001.
- [4] C. P. Mracek, J. R. Cloutier, and C. A. D'Souza, "A new technique for nonlinear estimation," Proc. of the 1996 IEEE Int. Conf. on Control Applications, Dearborn, MI, pp. 338-343, 1996.
- [5] J. R. Cloutier, C. A. D'Souza, and C. P. Mracek, "Nonlinear regulation and H_∞ control via the state-dependent Riccati equation technique; part 1, theory; part 2, examples," In Proc. of the 1st Int. Conf. on Nonlinear problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, FL, 1996

[۶] حسین بیگ زاده و حمید رضا تقی راد، طراحی رویت گر نمایی برای سیستم‌های غیر خطی بر اساس معادله ریکاتی وابسته به حالت SDRE، مجله کنترل، جلد ۴، شماره ۴، صفحات ۱۴-۲۳، زمستان ۱۳۹۰.

- [7] C. M. Ewing, "An analysis of the state-dependent Riccati equation nonlinear estimation technique," In Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Denver, CO, 2000.
- [8] C. Jaganath, A. Ridley, and D. S. Bernstein, "A SDRE-based asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems," Proc. of the 2005 American Control Conference, Portland, OR, pp. 3630-3635, 2005
- [9] H. T. Banks, B. M. Lewis, and H. T. Tran, "Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equation approach", *Computational Optimization and Applications*, vol. 37, no. 2, pp. 177-218, March 2007.
- [10] Tayfun Çimen, "Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method," *Annual Reviews in Control*, Vol. 34, Issue 1, pp. 32-51, April 2010.
- [11] E. Wong, *Stochastic processes in information and dynamical systems*, McGraw-Hill, New York, 1971.
- [12] T. J Tarn and Y. Rasis, "Observers for nonlinear stochastic systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-21, pp. 441-448, 1976