

## ارائه یک رویکرد بهینه جدید جهت پیش‌بینی متغیرهای حالت در دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی بر مبنای رویکرد تقریب

سعید کاشفی<sup>۱</sup>، مجید حاجتی پور<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی مقطع دکتری، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران s.kashefi@grad.kashanu.ac.ir

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران hajatipour@kashanu.ac.ir

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۲۲

ویرایش: ۱۴۰۱/۰۵/۰۴

دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۰۱

**چکیده:** در این مقاله یک رویکرد بهینه برای سیستم‌های غیرخطی بر مبنای رویکرد جدید ارائه می‌گردد. در این رویکرد برای دستیابی به تخمین آتی حالت‌های سیستم، ابتدا بسط سری تیلور حالت‌های سیستم در یک افق پیش‌بینی با مرتبه دلخواه بدست آمده و سپس یک حل تحلیلی مبتنی بر حل مسئله کمینه‌سازی خطای پیش‌بینی توسعه می‌یابد که یک فرم حلقه بسته رویکرد بهینه را ارائه می‌دهد. در رویکرد پیشنهادی، بهره رویکرد بصورت بهینه از میان تمامی بهره‌هایی که از حل مسئله کمینه‌سازی خطای پیش‌بین بدست آمده و پایداری را برآورده می‌کنند، انتخاب می‌گردد. در نهایت نتایج شبیه‌سازی کارایی روش پیشنهادی در تخمین حالت‌ها را نشان می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** سیستم غیرخطی، رویکرد بهینه، پیش‌بینی حالت، تحلیل پایداری.

### New Optimal Observer Design Based on State Prediction for a Class of Non-linear Systems Through Approximation

Saeed Kashefi, Majid Hajatipour

**Abstract:** This paper deals with the optimal state observer of non-linear systems based on a new strategy. Despite the development of state prediction in linear systems, state prediction for non-linear systems is still challenging. In this paper, to obtain a future estimation of the system states, initially Taylor series expansion of states in their receding horizons was achieved to any specified order and then an analytic solution was developed for the prediction error problem, which resulted in a closed-form for non-linear optimal observer. In the proposed observer, the observer gain was optimally chosen among gains obtained from the analytic solution of the prediction error problem and satisfied the stability condition. Finally, the qualitative simulation results showed the effectiveness of the proposed method in the state observation.

**Keywords:** Nonlinear system, Optimal observer, State prediction, Stability analysis.

## ۱- مقدمه

در مورد سایر رویکردهای بهینه، برخی مطالعات محدود در زمینه تخمین بهینه متغیرهای حالت انجام شده است [۲۳-۲۰]. تخمین بهینه بر مبنای کمینه‌سازی خطای تخمین حالت برای سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان با نرخ همگرایی دلخواه و بصورت بُرون خط در [۲۰] به شکل رویکرد مرتبه کامل<sup>۴</sup> و در [۲۱] به شکل رویکرد مرتبه کاهش یافته<sup>۵</sup> ارائه شده است. علاوه بر این، مرجع [۲۲] یک رویکرد بهینه بر مبنای کمینه‌سازی خطای تخمین خروجی سیستم (نه تمامی حالت‌های سیستم) و مبتنی بر حل بُرون خط مسئله بهینه‌سازی ارائه می‌کند و سپس با حل بُرخط مسئله بهینه‌سازی و تقریب ترم بهینه رویکرد با استفاده از ایده برنامه ریزی پویا<sup>۶</sup>، این رویکرد بهینه ارائه می‌شود. همچنین در [۲۳] برای سیستم‌های غیرخطی، نامعینی مدل با استفاده از بهینه‌سازی بُرخط به روش بیزین<sup>۷</sup> تخمین زده می‌شود و جهت افزایش نرخ همگرایی خطای تخمین حالت، بهره رویکرد ارائه می‌گردد.

با این وجود در تمامی این روش‌ها صرفنظر از خطی یا غیرخطی بودن سیستم و عدم وجود تمامی حالت‌ها در تابع هزینه، کمینه‌سازی خطای تخمین در زمان فعلی بدون رویکرد پیش‌بینی انجام شده است. از طرف دیگر در مورد پیش‌بینی حالت‌های یک سیستم غیرخطی به صورت بهینه مطالعات قابل توجهی وجود ندارد. در این رابطه پژوهش‌هایی در استفاده از الگوریتم پیش‌بینی برای تخمین حالت‌های سیستم‌های دارای تاخیر ورودی نیز وجود دارد که ایده آن به منظور اجتناب از بکاربردن ترم انتگرال‌گیر در کنترل‌کننده‌ها، اولین بار توسط [۲۴] ارائه و توسط [۲۵] و [۲۶] در حالت وجود تاخیر بزرگتر توسعه داده شد. در این ایده از زنجیره‌ای از رویکردها استفاده می‌شود تا هر یک از آنها کسری از تاخیر سیستم را پیش‌بینی کنند. این روش به عنوان پیش‌بینی‌کننده‌های متوالی<sup>۸</sup> شناخته می‌شود که توسط تعدادی دیگر از پژوهشگران نیز به آن پرداخته شده است [۲۷-۳۱].

با وجود این موارد محدود، برای توسعه رویکرد بهینه در سیستم‌های غیر-خطی، یک رویکرد مناسب می‌تواند تقریب دینامیک متغیر با زمان با مرتبه دلخواه باشد که در این مقاله به آن پرداخته می‌شود. در این روش، حالت‌های سیستم و تخمین آنها از طریق بکارگیری بسط سری تیلور با مرتبه دلخواه در جهت افزایش دقت تخمین، تقریب زده می‌شوند. اگرچه تقریب حالت‌های یک سیستم ممکن است، ارائه تحلیل پایداری سیستم را پیچیده‌تر کند، اما می‌تواند نگرش مستقیمی از رفتار و عملکرد دینامیک غیرخطی سیستم فراهم نماید و رفتار گذرای سیستم اصلی را به طور موثرتری بیان و ارائه شود.

علاوه بر این، همانطوریکه اشاره شد، در مورد پیش‌بینی حالت‌های یک سیستم غیرخطی به صورت بهینه، با افق‌های پیش‌بینی قابل انتخاب که می‌تواند به طور موثری کیفیت تخمین را بهبود بخشد، مطالعات

بدلیل کاربرد وسیع تخمین متغیرهای حالت در سیستم‌ها، طراحی رویکردها در دهه‌های اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. تعیین بهره رویکرد یکی از بخش‌های مهم روند تخمین حالت سیستم‌ها است که در مطالعات قبلی نیز مورد توجه بوده است. اولین رویکرد توسط لیونبرگر ارائه شد که در آن بهره رویکرد بر مبنای پایداری خطای تخمین تنظیم گردید [۱-۳]. در ادامه یک رویکرد حالت شبه-لیونبرگر برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی که در آن دینامیک غیرخطی معلوم و لیپ‌شیتز است، توسط تانو [۴] ارائه شد. این رویکرد در ادامه از منظر نوع سیستم، پایداری و کاربرد در [۵ و ۶] توسعه یافت. در همه این رویکردها نیز انتخاب بهره رویکرد مبتنی بر آورده شدن پایداری دینامیک خطای تخمین است. در برخی دیگر از رویکردها مانند رویکردهای مود لغزشی [۷ و ۸] و بهره بالا [۹-۱۱] نیز بهره رویکرد بر اساس پایداری دینامیک خطا در حضور نامعینی‌ها و اغتشاشات تعیین شده است. با این وجود در تمامی این رویکردها اشاره شده، هیچگونه رویکرد بهینه‌سازی برای انتخاب بهره رویکرد وجود ندارد.

در بررسی رویکردهای بهینه، خانواده فیلتر کالمن و تخمین گرهای افق متحرک (MHE)<sup>۱</sup> بخوبی شناخته شده‌اند. در این دسته از تخمین گرها، بهره بر اساس بهینه‌سازی تابع هزینه تعریف شده تنظیم می‌گردد. به عنوان مثال در تخمین گرهای افق متحرک، تخمین به حل بُرخط<sup>۲</sup> مسئله بهینه‌سازی افق محدود، پنجره تخمین تعریف شده در حضور قیود، نویز و اغتشاش بستگی دارد [۱۵-۱۲]. اگرچه رویکردهای بهینه مانند افق متحرک می‌توانند تاحدی در برابر نویز و اغتشاش مقاوم باشند، اما دارای برخی مشکلات و چالش‌ها در حالت پیاده‌سازی هستند. بطور کلی در این نوع از رویکردها، بهینه‌سازی به صورت بُرخط بوده و می‌تواند در حالت پیاده‌سازی به دلیل وجود بعضی محدودیت‌ها، غیر محذب گردد [۱۶ و ۱۷] و در نتیجه ممکن است سبب گرفتاری در کمینه‌های محلی و به عبارتی، دور شدن از شرایط بهینه شود.

علاوه بر این، بهینه‌سازی بُرخط به عملیات محاسباتی سنگینی نیازمند است که در حالت پیاده‌سازی، این مسئله مستلزم محاسبات سریع و در عین حال زمان نمونه برداری خیلی کوتاه می‌باشد و این موضوع می‌تواند یک چالش برای سیستم‌های با دینامیک سریع محسوب شود. با این وجود، در برخی از مطالعات به صورت محدود سعی بر غلبه بر این دشواری با استفاده از روش تقریب برای بهینه‌سازی بُرون خط<sup>۳</sup>، در تخمین گرهای افق متحرک شده است [۱۷-۱۹]. در [۱۷] یک ایده با هدف شناسایی بُرون خط رابطه بین توالی داده‌های اندازه‌گیری (ورودی/خروجی) و حالت اولیه متناظر آنها، در ابتدای پنجره متحرک ارائه شده و در ادامه در [۱۸] پیاده‌سازی این ایده با استفاده از ویژگی تقریب‌گیری شبکه‌های عصبی انجام شده است.

<sup>۵</sup> Reduced-order observer<sup>۶</sup> Approximate dynamic programming<sup>۷</sup> Bayesian<sup>۸</sup> Sequential predictors<sup>۱</sup> Moving Horizon EstimatorOn-line<sup>۲</sup><sup>۳</sup> Off-line<sup>۴</sup> Full-order observer

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t) \\ \dot{x}_n(t) &= x_1^{[n]}(t) = f(x, u, t) \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (1) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

که در آن  $x \in R^n$ ،  $u \in R$  و  $y \in R$  به ترتیب حالت‌ها، ورودی و خروجی سیستم هستند. همچنین  $f$  تابع غیرخطی متغیر با زمان بصورت  $f: R^n \times R \times R^+ \rightarrow R$  و معلوم است می‌توان معادلات سیستم (۱) را بصورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(f(x, u, t)) \\ y(t) &= Cx(t) \quad (2) \end{aligned}$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [c_1, \dots, c_n] \quad (3)$$

**فرض ۱.** سیستم غیرخطی (۱) رویت پذیر است.

**فرض ۲.** تابع غیرخطی  $f(x, u, t)$  در سیستم (۱) تا مرتبه دلخواه نسبت به زمان مشتق پذیر است.

**فرض ۳.** تابع  $f(x, u, t)$  شرط لیب شیتز را نسبت به  $x$  برآورده می‌کند. یعنی برای تمامی  $x$  و  $\hat{x}$  ها یک عدد ثابت مثبت  $\alpha$  وجود دارد بطوریکه:

$$|f(x, u, t) - f(\hat{x}, u, t)| \leq \alpha \|x - \hat{x}\| \quad (4)$$

### ۳- طراحی رویکرد بهینه

در ابتدا متغیر حالت  $x_i(t)$  در یک افق پیش‌بینی با سری تیلور تا مرتبه  $r \geq n$  تقریب زده می‌شود.

$$x_i(t + \tau) \cong x_i(t) + \tau \dot{x}_i(t) + \dots + \frac{\tau^r}{r!} x_i^{[r]}(t) \quad (5)$$

$$T_1 \leq \tau \leq T_2, r \geq n$$

یا به عبارت دیگر

$$x_i(t + \tau) \cong \Theta^T X_i(t), \Theta = \left[ 1, \tau, \dots, \frac{\tau^r}{r!} \right]^T \quad (6)$$

و

$$X_i(t) = \left[ x_i(t), x_i^{[1]}(t), \dots, x_i^{[r]}(t) \right]^T$$

$$= \left[ \begin{array}{c} x_i(t), x_{i+1}(t), \dots, x_n(t), \\ f(x, u, t), \dots, z_{i+r-n-1}(x, u, \dots, u^{[i+r-n-1]}, t) \end{array} \right]^T, \quad (7)$$

$$i = 1, \dots, n$$

قابل توجهی وجود ندارد. در این راستا، در این مقاله با استفاده از روش تقریب متغیرهای حالت، تخمین حالت‌های سیستم در افق‌های پیش‌بینی و با استفاده بسط سری تیلور تا مرتبه دلخواه، تقریب زده می‌شود. سپس یک حل تحلیلی مبتنی بر حل مسئله کمینه‌سازی خطای پیش‌بینی متغیرهای حالت، توسعه می‌یابد که بر اساس آن یک فرم حلقه بسته برای رویکرد بهینه ارائه می‌گردد. انتخاب دلخواه مرتبه بسط سری تیلور در این مقاله، بیانگر آنست که با دقت دلخواه می‌توان به حل بهینه مسئله پیش‌بینی نزدیک شد.

نکات برجسته تحقیق ارائه شده در این مقاله را می‌توان به شرح زیر

خلاصه کرد:

الف) استفاده از الگوریتم بهینه سازی مبتنی بر حل مسئله پیش‌بین برای طراحی رویکرد بهینه و انتخاب قاعده‌مند بهره رویکرد

ب) امکان انتخاب افق‌های پیش‌بینی مختلف در تخمین حالت‌ها که بر اساس آن، بهره رویکرد بهینه، پایداری و سرعت همگرایی تخمین تحت تأثیر قرار می‌گیرند. با توجه به تحلیل‌ها و همچنین نتایج شبیه‌سازی، ویژگی کمینه سازی خطای پیش‌بینی حالت‌ها در این روش، به طور موثر کیفیت تخمین را بهبود می‌بخشد. در حالی که در رویکردهای بهینه مرسوم، تخمین فقط با بهینه سازی تخمین در زمان فعلی به دست می‌آید.

ج) تضمین پایداری مجانبی رویکرد بهینه پیشنهادی، مستقل از رویکرد طراحی کنترل کننده فراهم می‌شود. به عبارت دیگر، بهره رویکرد پیشنهادی از میان بهره‌هایی که شرط پایداری را برآورده می‌کنند، بدون اینکه تحت تأثیر نوع کنترل کننده قرار گیرد، به طور بهینه انتخاب می‌شود.

د) از آنجاییکه مسائل بهینه‌سازی غیرخطی بر خط عموماً غیر محدب هستند، رویکرد تحلیلی برون خط ارائه شده در این مقاله، می‌تواند بر دسته‌ای از مشکلات پیش روی مسائل بهینه‌سازی غیرمحدب غلبه کند.

در این مقاله یک رویکرد بهینه جدید مبتنی بر پیش‌بینی ارائه گردید که طبق آنچه که در ویژگی‌های این روش بیان شد، برخی از مشکلات پژوهش‌های قبلی را ندارد. اما از طرفی این روش نیز به مانند سایر روش‌های موجود دارای محدودیت‌هایی است. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به نرمال و تک ورودی- تک خروجی بودن مدل سیستم غیرخطی اشاره کرد. علاوه بر آن وجود برخی فرضیات در طراحی رویکرد پیشنهادی اگرچه محدودیت جدی ایجاد نمی‌کند، اما برآورده شدن آنها از شرایط مسئله است.

ساختار مقاله به این شرح است که در بخش ۲، مدل‌سازی ریاضی و معادلات سیستم ارائه شده و در بخش ۳، رویکرد بهینه و تحلیل پایداری آن توسعه می‌یابد. سپس کارایی روش پیشنهادی با چند مثال شبیه‌سازی در بخش ۴ نشان داده می‌شود.

### ۲- مدل‌سازی و معادلات سیستم

در این تحقیق معادلات سیستم غیرخطی تک ورودی- تک خروجی بصورت زیر است.

بر اساس روابط (۶) و (۱۲)، این پیش‌بینی خطای تخمین را می‌توان این چنین بیان نمود:

$$E(t + \tau) = [x_1(t + \tau) - \hat{x}_1(t + \tau), x_2(t + \tau) - \hat{x}_2(t + \tau), \dots, x_n(t + \tau) - \hat{x}_n(t + \tau)]^T \quad (15)$$

$$\cong [(X_1(t) - \hat{X}_1(t)), (X_2(t) - \hat{X}_2(t)), \dots, (X_n(t) - \hat{X}_n(t))]^T \Theta$$

هدف اصلی، یافتن  $u_0(t)$  به عنوان بخشی از رویکرد پیشنهادی است، بطوریکه پیش‌بینی خطای تخمین حالت‌های سیستم طبق تابع هزینه زیر کمینه گردد.

$$J = \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} E^T(t + \tau) E(t + \tau) d\tau \quad (16)$$

که در آن  $T_1$  و  $T_2$  به ترتیب زمان‌های پیش‌بینی بالا و پایین هستند. قضیه ۱. سیستم غیرخطی (۱) و تابع هزینه (۱۶) را در نظر بگیرید. بر مبنای پیش‌بینی خطای تخمین تعریف شده در (۱۴)، سیگنال  $u_0(t)$  در رویکرد پیشنهادی (۹) که تابع هزینه (۱۶) را کمینه می‌کند، بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$u_0(t) = f(x, u, t) + KE(t) \quad (17)$$

که در آن  $K = [k_1, \dots, k_n]$  و در ادامه تعیین می‌گردد. اثبات. با استفاده از رابطه (۱۵)، تابع هزینه (۱۶) را می‌توان بصورت زیر تقریب زد.

$$J \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{T_1}^{T_2} (X_i(t) - \hat{X}_i(t))^T \Theta \Theta^T (X_i(t) - \hat{X}_i(t)) dt$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i(t) - \hat{X}_i(t))^T \int_{T_1}^{T_2} \Theta \Theta^T d\tau (X_i(t) - \hat{X}_i(t)) \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i(t) - \hat{X}_i(t))^T \Lambda (X_i(t) - \hat{X}_i(t))$$

که طبق رابطه (۶) داریم:

$$\Lambda = \int_{T_1}^{T_2} \Theta \Theta^T d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} T_2 - T_1 & \dots & \frac{T_2^{r+1} - T_1^{r+1}}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{T_2^{r+1} - T_1^{r+1}}{(r+1)!} & \dots & \frac{T_2^{2r+1} - T_1^{2r+1}}{r!(2r+1)} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\Lambda \in R^{r+1}$$

$$z_0(x, u, t) = f(x, u, t)$$

$$z_1(x, u, \dot{u}, t) = f^{[1]}(x, u, t)$$

$$= \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial t}$$

$$z_2(x, u, \ddot{u}, t) = f^{[2]}(x, u, t) \quad (8)$$

$$\vdots$$

$$z_{r-n}(x, u, \dots, u^{[r-n]}, t) = f^{[r-n]}(x, u, t)$$

$$\vdots$$

$$z_{r-1}(x, u, \dots, u^{[r-1]}, t) = f^{[r-1]}(x, u, t)$$

بر اساس روابط فوق معادلات دینامیک رویکرد پیشنهادی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B(u_0(t)) \quad (9)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

که در آن  $u_0(t)$  ترم اصلی رویکرد بهینه بوده که در ادامه بدست می‌آید. از طرفی دینامیک خطای تخمین با استفاده از روابط (۲) و (۹) بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\dot{E}(t) = AE(t) + B(f(x, u, t) - u_0) \quad (10)$$

$$e_y(t) = CE(t)$$

که در آن  $E(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)]^T$  و  $i = 1, \dots, n$   $\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(t)$  خطای تخمین هر حالت است. به منظور تعیین  $u_0(t)$ ، مشابه رابطه (۵) پیش‌بینی تخمین حالت  $\hat{x}_i(t)$  در افق آتی با استفاده از بسط سری تیلور بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{x}_i(t + \tau) \cong \hat{x}_i(t) + \tau \dot{\hat{x}}_i(t) + \dots + \frac{\tau^r}{r!} \hat{x}_i^{[r]}(t) \quad (11)$$

$$T_1 \leq \tau \leq T_2, r \geq n$$

یا به عبارت دیگر

$$\hat{x}_i(t + \tau) \cong \Theta^T \hat{X}_i(t) \quad (12)$$

که در آن

$$\hat{X}_i(t) \cong [\hat{x}_i(t), \hat{x}_i^{[1]}(t), \dots, \hat{x}_i^{[r]}(t)]^T \quad (13)$$

$$= [\hat{x}_i(t), \hat{x}_{i+1}(t), \dots, \hat{x}_n(t), u_0(t), \dots, u_0^{[i+r-n-1]}(t)]^T$$

از طرفی پیش‌بینی خطای تخمین حالت‌ها به شکل برداری بصورت زیر قابل بیان است:

$$E(t + \tau) = [e_1(t + \tau), e_2(t + \tau), \dots, e_n(t + \tau)]^T \quad (14)$$

که در آن  $\gamma_i$  و  $\bar{K} = [\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n]$  معلوم و بر مبنای ماتریس  $A$  تعیین می‌گردند.

$$u_o(t) = f(x, u, t) + KE(t) \quad (26)$$

حال برای محاسبه صحیح بردار  $K$  از آنجا که مشتق‌های زمانی عبارت  $f(x, u, t)$  تا مرتبه  $r - 1$  در رابطه (۸) مشخص شده‌اند، داریم:

$$\begin{aligned} u_o(t) &= f(x, u, t) + KE(t) \\ \dot{u}_o(t) &= z_1(x, u, \dot{u}, t) + K\dot{E}(t) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (27)$$

$$u_o^{[r-1]} = z_{r-1}(x, u, \dots, u^{[r-1]}, t) + KE^{[r-1]}$$

سپس با توجه به  $u_o(t)$  در رابطه (۲۷)، رابطه دینامیک خطا در (۱۰) را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= AE(t) + B(-KE(t)) = A_{c1}E \\ e_y(t) &= CE(t) \end{aligned} \quad (28)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A_{c1} &= A - BK \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & -k_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

با استفاده از رابطه (۲۸) مشتقات خطای  $E$  بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= A_{c1}E(t) \\ E^{[2]}(t) &= A_{c1}^{(2)}E(t) \\ &\vdots \\ E^{[r-1]}(t) &= A_{c1}^{(r-1)}E(t) \end{aligned} \quad (30)$$

از جایگذاری (۳۰) در (۲۷) و استفاده از حاصل رابطه (۲۷) در (۲۵) رابطه ماتریسی زیر بدست می‌آید که از حل آن به سادگی بردار  $K$  حاصل شده و اثبات کامل می‌گردد.

$$\gamma_r KA_{c1}^{(r-1)} + \dots + \gamma_1 K + \bar{K} = 0 \quad (31)$$

لذا براساس نتیجه قضیه ۱ یعنی رابطه (۲۶)، دینامیک رویکرد پیشنهادی (۹) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= A\hat{x}(t) + B(f(x, u, t) + KE(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (32)$$

از آنجا که در این رویکرد، از سیگنال‌های  $x$  و  $E$  استفاده شده است، لذا این رویکرد تحقق پذیر نیست. در ادامه برای تحقق پذیر نمودن رویکرد پیشنهادی، سیگنال جدید  $\hat{u}_o(t)$  تعریف شده به صورت زیر، به جای سیگنال  $u_o(t)$ ، بکار گرفته می‌شود:

آنگاه شرط لازم برای بهینه سازی عبارتست از

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_o} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (X_i(t) - \hat{X}_i(t))^T}{\partial u_o} \Lambda(X_i(t) \\ &\quad - \hat{X}_i(t)) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

برای حل رابطه (۲۰)، با استفاده از روابط (۷)، (۱۲) و (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned} &[X_i(t) - \hat{X}_i(t)] \\ &= [e_i(t), e_{i+1}(t), \dots, e_n(t), f(x, u, t) \\ &\quad - u_o(t), \dots, z_{i+r-n-1}(x, u, t, \dots, u^{[i+r-n-1]}) \\ &\quad - u_o^{[i+r-n-1]}(t)]^T \\ &= [\bar{E}_i, H_i]^T \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \bar{E}_i &= [e_i, \dots, e_n]^T, \\ \bar{E}_i &\in R^{(n+1-i)}, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_i &= [f(x, u, t) \\ &\quad - u_o(t), \dots, z_{i+r-n-1}(x, u, \dots, u^{[i+r-n-1]}) \\ &\quad - u_o^{[i+r-n-1]}(t)]^T, \\ &\quad i = 1, \dots, n, H_i \in R^{r-n+i} \end{aligned} \quad (22)$$

لذا براساس (۲۱) و (۲۲)، رابطه (۲۰) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} &\left[ 0_{1 \times r}, \left( \frac{\partial H_1}{\partial u_o} \right)^T \right] \Lambda(X_1(t) - \hat{X}_1(t)) + \dots \\ &+ \left[ 0_{1 \times 1}, \left( \frac{\partial H_n}{\partial u_o} \right)^T_{r \times 1} \right] \Lambda(X_n(t) - \hat{X}_n(t)) \\ &= \left[ 0_{1 \times r}, \left( \frac{\partial H_1}{\partial u_o} \right)^T \right] \Lambda \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + \dots \\ &+ \left[ 0_{1 \times 1}, \left( \frac{\partial H_n}{\partial u_o} \right)^T_{r \times 1} \right] \Lambda \begin{bmatrix} \bar{E}_n \\ H_n \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

و در نتیجه رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} &[\Lambda_{r+1,1}, \dots, \Lambda_{r+1,r+1}] \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + \dots \\ &+ [\Lambda_{2,1}, \dots, \Lambda_{2,r+1}] \begin{bmatrix} \bar{E}_n \\ H_n \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن  $\Lambda_{i,j}$  بیانگر المان سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام ماتریس  $\Lambda$  است. با ساده سازی رابطه (۲۴) داریم:

$$\begin{aligned} &\gamma_r (z_{r-1}(x, u, \dots, u^{[r-1]}) - u_o^{[r-1]}(t)) + \dots \\ &+ \gamma_1 (f(x, u, t) - u_o(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{k}_i e_i(t) = \bar{K}E(t) \end{aligned} \quad (25)$$

در مورد نحوه انتخاب این پارامترها به توضیح ۳ و الگوریتم ۱ مراجعه نمایید.

**قضیه ۲.** رویکرد بهینه (۳۴) و همچنین روابط (۳۵) الی (۳۷) را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن فرض‌های ۱ الی ۵، دینامیک خطای تخمین پایدار معنایی است.

**اثبات.** برای اثبات پایداری با استفاده از معادلات خطای تخمین (۳۵) و (۳۷) تابع لیاپانف زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{E}} \quad (40)$$

که در آن  $\mathbf{P}_1$  و  $\mathbf{P}_2$  ماتریسهای معین مثبت تعریف شده در فرض ۴ و ۵ است. اکنون با مشتق‌گیری زمانی از تابع لیاپانف (۴۰) می‌توان نوشت: با جایگذاری رابطه (۳۵) و (۳۷) در رابطه (۴۱) رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_1 \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{E}}}^T \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \mathbf{P}_2 \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} \mathbf{E}^T (\mathbf{A}_c^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_c) \mathbf{E} + \\ & \frac{1}{2} (f(\mathbf{x}, u, t) - f(\hat{\mathbf{x}}, u, t)) (\mathbf{P}_1 \mathbf{B})^T \mathbf{E} + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{B} (f(\mathbf{x}, u, t) - f(\hat{\mathbf{x}}, u, t)) + \\ & \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T (\mathbf{A}_{c1}^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_{c1}) \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{B} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{E}} + \\ & \frac{1}{2} (f(\mathbf{x}, u, t) - f(\hat{\mathbf{x}}, u, t)) (\mathbf{P}_2 \mathbf{B})^T \tilde{\mathbf{E}} + \\ & \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{B} (f(\mathbf{x}, u, t) - f(\hat{\mathbf{x}}, u, t)) - \\ & (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P}_2^{-1}) \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{B} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (42)$$

لازم به توضیح است که در (۴۲) از رابطه زیر استفاده شده است.

$$\begin{aligned} ((\mathbf{K} \mathbf{P}_2^{-1})^T \mathbf{e}_y)^T &= ((\mathbf{K} \mathbf{P}_2^{-1})^T \mathbf{C} \mathbf{E})^T \\ &= \mathbf{E}^T \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{P}_2^{-1} = \mathbf{E}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P}_2^{-1} \end{aligned} \quad (43)$$

لذا دو عبارت آخر رابطه (۴۲) حذف می‌شوند. همچنین می‌دانیم برای هر ماتریس  $\mathbf{X}$  و  $\mathbf{Y}$  و هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، نامساوی زیر برقرار است [۳۲].

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{X} \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{X}^T \mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \quad (44)$$

حال با قرار دادن  $\mathbf{X} = f(\mathbf{x}, u, t) - f(\hat{\mathbf{x}}, u, t)$  و  $\mathbf{Y} = (\mathbf{P}_1 \mathbf{B})^T \mathbf{E}$  با استفاده از فرض‌های ۳ و ۴ نامساوی زیر بدست می‌آید.

$$\hat{u}_0(t) = f(\hat{\mathbf{x}}, u, t) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{E}}(t) \quad (33)$$

و همچنین در پایان این مقاله نشان داده خواهد شد که  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{u}_0(t) = u_0(t)$ .

بر این اساس، دینامیک رویکرد بصورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} (f(\hat{\mathbf{x}}, u, t) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{E}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (34)$$

با استفاده از رابطه (۲) و (۳۴)، دینامیک خطای تخمین بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{A}_{c1} \mathbf{E}(t) + \mathbf{B} (f(\mathbf{x}, u, t) - f(\hat{\mathbf{x}}, u, t) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{E}}(t)) \quad (35)$$

در ادامه در این مقاله، خطای تخمین  $\mathbf{E}$  توسط رویکرد زیر تخمین زده می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{E}}}(t) &= \mathbf{A}_{c1} \hat{\mathbf{E}}(t) + \mathbf{L}_0 (e_y(t) - \hat{e}_y(t)) \\ &+ (\mathbf{K} \mathbf{P}_2^{-1})^T e_y(t) \end{aligned} \quad (36)$$

که در آن  $\mathbf{e}_y(t) = \mathbf{C} \mathbf{E}(t)$  و  $\hat{e}_y(t) = \mathbf{C} \hat{\mathbf{E}}(t)$  است. بردار  $\mathbf{L}_0 \in \mathbf{R}^n$  و ماتریس  $\mathbf{P}_2 \in \mathbf{R}^n$  نیز از برآورده شدن و حل معادله فرض ۵ بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{E}}}(t) &= \mathbf{A}_{c2} \hat{\mathbf{E}}(t) + \mathbf{B} (f(\mathbf{x}, u, t) - f(\hat{\mathbf{x}}, u, t) \\ &+ \mathbf{K} \hat{\mathbf{E}}(t)) - (\mathbf{K} \mathbf{P}_2^{-1})^T e_y(t) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\mathbf{A}_{c2} = \mathbf{A}_{c1} - \mathbf{L}_0 \mathbf{C}$$

**فرض ۴.** برای هر عدد مثبت  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  ماتریس‌های معین مثبت  $\mathbf{Q}_1$  و  $\mathbf{P}_1$  وجود دارد، بطوریکه روابط زیر برقرار باشند.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{c1}^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_{c1} + \varepsilon_1 \mathbf{C}^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \alpha^2 \mathbf{I} &= -\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{B} &= \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (38)$$

**فرض ۵.** برای هر عدد مثبت  $\varepsilon_2$  ماتریس‌های معین مثبت  $\mathbf{Q}_2$  و  $\mathbf{P}_2$  وجود دارد، بطوریکه رابطه زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{c2}^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_{c2} + \varepsilon_2 (\mathbf{P}_2 \mathbf{B}) (\mathbf{P}_2 \mathbf{B})^T + \mathbf{P}_2 \mathbf{B} \mathbf{K} \\ = -\mathbf{Q}_2 \end{aligned} \quad (39)$$

**توضیح ۱.** از آنجا که مرتبه بسط سری تیلور  $T$  و زمان‌های پیش‌بینی  $T_1$  و  $T_2$  قابلیت انتخاب دارند و تغییر آنها منجر به  $\mathbf{K}$  و  $\mathbf{A}_{c1}$  متفاوت می‌گردد، لذا با انتخاب مناسب این پارامترها و همچنین ماتریس‌های معین مثبت  $\mathbf{Q}_1$  و  $\mathbf{Q}_2$ ، پارامترهای  $\varepsilon_1$ ،  $\varepsilon_2$  و بهره رویکرد خطا  $\mathbf{L}_0$  که در  $\mathbf{A}_{c2}$  ظاهر می‌شود، فرض‌های ۴ و ۵ می‌توانند برآورده شوند. جهت توضیحات بیشتر

بهره مناسب  $K$  را از میان بهره‌هایی که این شرط را برآورده می‌کنند، انتخاب کرد و در نتیجه رویکرد حالت بهینه بصورت رابطه (۳۴) ارائه می‌گردد. سپس در ادامه، فرض ۵ بررسی و معادله آن با استفاده از بردار بهره  $K$  بدست آمده از مرحله قبل حل می‌شود، که در نتیجه بردار  $L_0$  و ماتریس  $P_2$  انتخاب و رویکرد خطا بصورت رابطه (۳۶) ارائه می‌گردد. این رویکرد در تکمیل رویکرد حالت (۳۴) به آن در انجام تخمین حالت‌های سیستم کمک می‌کند. علاوه بر این با توجه به برآورده شدن همزمان شروط ۴ و ۵، پایداری مجانبی خطای تخمین نیز تضمین می‌گردد. الگوریتم ۱، روند طراحی رویکرد بهینه پیشنهادی را بیان می‌کند.

#### الگوریتم ۱. روند طراحی رویکرد بهینه پیشنهادی

**گام ۱.** مرتبه مناسب بسط سری تیلور  $r$  و زمان‌های پیش‌بینی  $T_1, T_2$  را انتخاب کنید.

**گام ۲.** ماتریس  $A$  را از معادله (۱۹) محاسبه کنید.

**گام ۳.** معادله (۳۱) را برای بدست آوردن بردار بهره  $K$  حل کنید.

**گام ۴.** معادله (۳۸) را با انتخاب ماتریس  $Q_1$  مثبت مناسب بررسی کنید.

**گام ۵.** ماتریس  $Q_2$  معین مثبت و  $L_0$  مناسب را برای برآورده شدن (۳۹) انتخاب کنید.

**گام ۶.** معادله (۳۹) را برای یافتن ماتریس  $P_2$  معین مثبت متقارن حل کنید.

**گام ۷.** بررسی کنید که آیا  $P_2$  معین مثبت متقارن است یا خیر. اگر خیر، به گام ۱ بروید، گام‌های ۱-۶ را تکرار کنید. در غیر این صورت به گام بعد بروید.

**گام ۸.** بردار بهره بهینه برای رویکرد پیشنهادی در (۳۴) است.

#### ۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش برای ارزیابی رویکرد بهینه طراحی شده، به شبیه‌سازی چند مثال و تحلیل نتایج آن پرداخته می‌شود.

**مثال ۱.** دینامیک سیستم یک ربات تک بازو با معادلات زیر در نظر بگیرید [۳۳].

$$M\ddot{q} + \frac{1}{2}mg\sin q = u \quad (51)$$

که در آن  $m$  و  $l$  به ترتیب جرم و طول بازو است.  $g$  ثابت گرانش،  $u$  ورودی گشتاور، و  $M$  ممان اینرسی است. با انتخاب  $x_1 = q, x_2 = \dot{q}$  معادلات فضای حالت آن بصورت زیر قابل توصیف است.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u - mg\sin x_1)/M \quad (52)$$

$$y = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} & (f(x, u, t) - f(\hat{x}, u, t))^T (P_1 B)^T E + \\ & E^T P_1 B (f(x, u, t) - f(\hat{x}, u, t)) \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon_1} |f(x, u, t) - f(\hat{x}, u, t)|^2 \quad (45) \\ & \quad + \varepsilon_1 E^T P_1 B (P_1 B)^T E \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \alpha^2 E^T E + \varepsilon_1 E^T C^T C E \end{aligned}$$

بطور مشابه برای عبارت مشابه دیگر در رابطه (۴۲) و با استفاده از فرض ۳ داریم:

$$\begin{aligned} & (f(x, u, t) - f(\hat{x}, u, t))^T (P_2 B)^T \tilde{E} + \\ & \tilde{E}^T P_2 B (f(x, u, t) - f(\hat{x}, u, t)) \quad (46) \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon_2} \alpha^2 E^T E + \varepsilon_2 \tilde{E}^T (P_2 B) (P_2 B)^T \tilde{E} \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از روابط (۴۵) و (۴۶) در (۴۲) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq E^T \left( A_{c1}^T P_1 + P_1 A_{c1} + \varepsilon_1 C^T C \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \alpha^2 I \right) E + \quad (47) \\ & \quad \tilde{E}^T (A_{c2}^T P_2 + P_2 A_{c2} + \varepsilon_2 (P_2 B) (P_2 B)^T \\ & \quad \quad + P_2 B K) \tilde{E} \end{aligned}$$

و در نهایت طبق فرض‌های ۴ و ۵، نامساوی زیر نتیجه می‌شود.

$$\dot{V} \leq -E^T Q_1 E - \tilde{E}^T Q_2 \tilde{E} \quad (48)$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که متغیرهای  $E$  و  $\tilde{E}$  پایدار مجانبی هستند. از این رو اثبات کامل است.

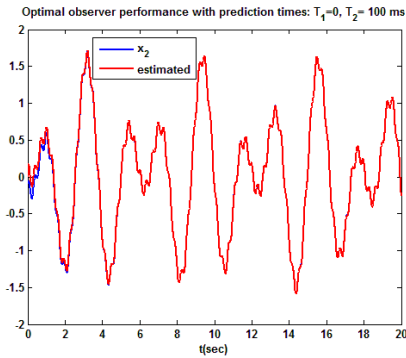
**توضیح ۲.** در قضیه ۲، همگرایی مجانبی خطای تخمین حالت و خطای تخمین خطا به سمت صفر اثبات گردید. لذا برای تمامی  $t \geq 0$  طبق فرض ۳ و روابط (۲۶) و (۳۳) داریم.

$$|u_o(t) - \hat{u}_o(t)| \leq \alpha \|x - \hat{x}\| + \|K\| \|E(t) - \tilde{E}(t)\| \quad (49)$$

در نتیجه عبارت پیش‌بین رویکرد پیشنهادی، یعنی  $\hat{u}_o(t)$  در (۳۳) بطور مجانبی به مقدار بهینه خود در رابطه (۲۶) میل می‌کند و یا به عبارتی

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{u}_o(t) = u_o(t) \quad (50)$$

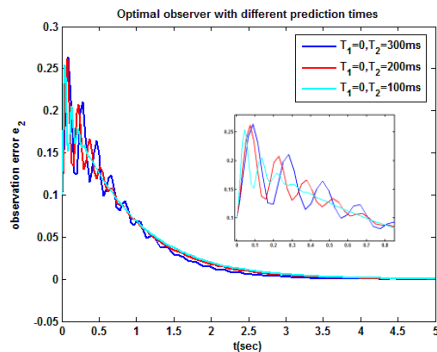
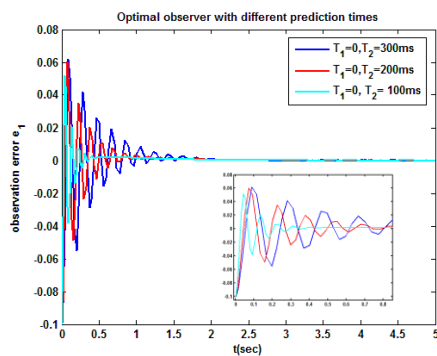
**توضیح ۳.** در جمع‌بندی روند طراحی رویکرد بهینه پیشنهادی، ابتدا ماتریس  $A$  طبق پارامترهای افق پیش‌بینی  $T_1$  و  $T_2$  و مرتبه بسط سری تیلور  $r$  محاسبه می‌گردد. سپس بر مبنای رابطه (۳۱) بردار  $K$  بصورت برون‌خط و بدون نیاز به بهینه‌سازی برخط بدست می‌آید. از آنجا که بردار  $K$  از الگوریتم بهینه‌سازی حاصل می‌شود، لذا بایستی فرض ۴ را بررسی و



شکل ۱: مسیر حالت سیستم ربات تک بازو و تخمین آن توسط رویکرد بهینه پیشنهادی

جدول ۱: شاخص عملکرد ISE برای رویکرد بهینه پیشنهادی به ازای زمان پیش‌بینی مختلف

ISE	زمان پیش‌بینی بالا و پایین		
	$T_1 = 0, T_2 = 300ms$	$T_1 = 0, T_2 = 200ms$	$T_1 = 0, T_2 = 100ms$
$\int_0^{t_f} e_1^2(t) dt$	0.00081	0.00054	0.00023
$\int_0^{t_f} e_2^2(t) dt$	0.02131	0.02080	0.02038



شکل ۲: خطای تخمین حالت سیستم ربات تک بازو توسط رویکرد بهینه پیشنهادی به ازای زمان‌های پیش‌بینی مختلف

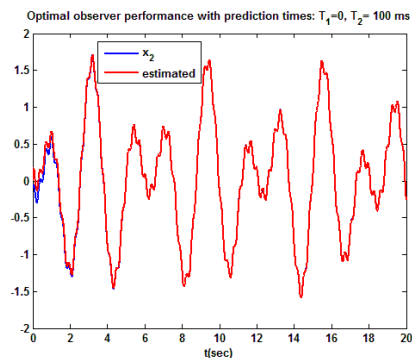
شرایط اولیه سیستم و رویکرد به ترتیب بصورت  $x(0) = [0, 0]^T$  و  $\hat{x}(0) = [0.1, -0.1]^T$  و همچنین پارامترهای سیستم در شبیه‌سازی بصورت  $M = 0.1, m = 1, l = 1$  و  $g = 9.8$  در واحد SI در نظر گرفته می‌شوند. ورودی کنترلی نیز  $u = \sin 2t + \cos 20t$  است.

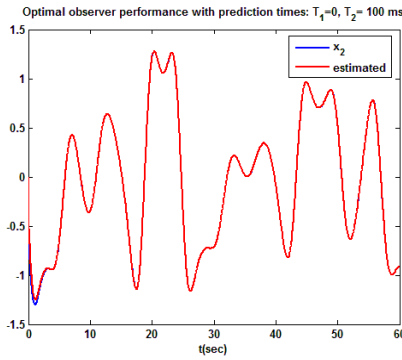
با استفاده از روند طراحی در الگوریتم ۱ به ازای زمان‌های پیش‌بینی  $T_1 = 0, T_2 = 100ms$  و مرتبه بسط تیلور  $r = 2$  بهره رویکرد بصورت  $K = [400, 26.67]$  بدست می‌آید. علاوه بر این، بهره رویکرد خطا  $P_2 = [1, 100]^T$  در فرض ۵ ماتریس‌های معین مثبت بصورت  $P_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$ ،  $Q_2 = \begin{bmatrix} 7500 & 5510 \\ 1776.7 & 1766.7 \end{bmatrix}$  و  $\epsilon_2 = 5$  انتخاب می‌گردد. فرض ۴ نیز به ازای  $P_1 = \begin{bmatrix} 421.67 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $Q_1 = \begin{bmatrix} 785 & 0 \\ 0 & 36.35 \end{bmatrix}$  و  $\epsilon_1 = 5, \alpha = 5$  برقرار است. شکل ۱ نتایج شبیه‌سازی رویکرد پیشنهادی را نشان می‌دهد. همانطور که از نمودار شکل ۱ مشاهده می‌شود، عملکرد رویکرد پیشنهادی مناسب و همگرایی حالت‌های رویکرد به حالت‌های واقعی سیستم بخوبی انجام می‌گیرد.

به منظور بررسی تاثیر انتخاب زمان‌های پیش‌بینی مختلف  $T_1, T_2$  در عملکرد رویکرد پیشنهادی، خطای تخمین حالت‌ها به ازای زمان‌های پیش‌بینی مختلف در شکل ۲ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود با کاهش زمان بالای پیش‌بینی سرعت، همگرایی سیگنال خطا بیشتر می‌شود. جهت بررسی بیشتر عملکرد رویکرد، از شاخص تحلیل عملکرد خطا ISE با رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$ISE = \int_0^{t_f} e^2(t) dt \quad (53)$$

که در آن  $t_f$  زمان کل شبیه‌سازی است. نتایج عددی این شاخص عملکرد به ازای زمان‌های پیش‌بینی متفاوت بصورت جدول ۱ است. مشاهده می‌شود با کاهش زمان بالای پیش‌بینی این شاخص عملکرد که بیانگر میزان خطای تخمین در کل شبیه‌سازی است، کاهش می‌یابد.

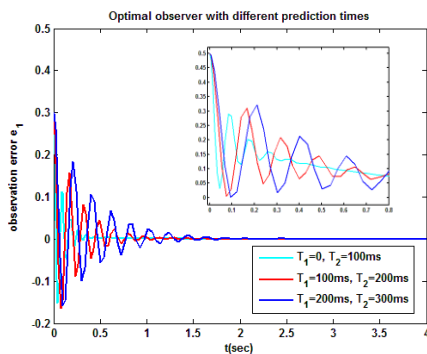
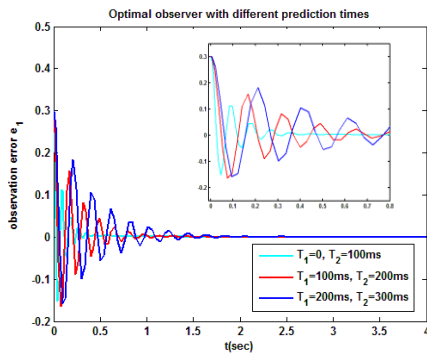




شکل ۴: مسیر حالت سیستم پاندول آشوبناک و تخمین آن توسط رویکرد بهینه پیشنهادی

شکل ۴ نتایج شبیه سازی رویکرد پیشنهادی را نشان می‌دهد. همانطوریکه مشاهده می‌شود، عملکرد رویکرد پیشنهادی و همگرایی حالت‌های رویکرد به حالت‌های واقعی سیستم بخوبی انجام می‌گیرد. همچنین در شکل ۵ به منظور بررسی تاثیر زمان‌های بالا و پایین متفاوت اما با طول بازه زمان پیش‌بینی یکسان، سیگنال خطای تخمین رویکرد پیشنهادی، به ازای زمان‌های پیش‌بینی مختلف  $T_1, T_2$  با فاصله زمانی یکسان یعنی  $T_1 - T_2 = 100ms$  نشان داده شده است.

مشاهده می‌شود با کاهش زمان‌های بالا و پایین پیش‌بینی، مشابه نتایج مثال قبلی سرعت همگرایی سیگنال خطا بیشتر می‌شود. مشابه مثال قبل نتایج عددی شاخص عملکرد ISE به ازای زمان‌های پیش‌بینی متفاوت بصورت جدول ۲ آمده است. مشاهده می‌شود با افزایش زمان‌های پیش‌بینی، این شاخص عملکرد که بیانگر میزان خطای تخمین در کل شبیه‌سازی است، افزایش می‌یابد.



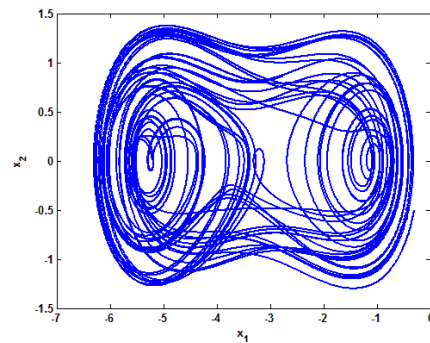
شکل ۵: خطای تخمین حالت سیستم پاندول آشوبناک توسط رویکرد بهینه پیشنهادی به ازای زمان‌های پیش‌بینی مختلف

مثال ۲. معادلات فضای حالت سیستم پاندول آشوبناک را بصورت زیر در نظر بگیرید [۳۴].

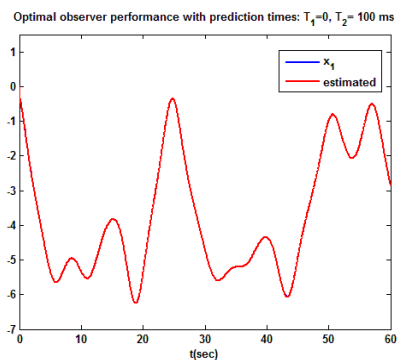
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-\sin x_1 - \alpha x_1 \\ &\quad - \delta x_2 + f(t)) \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (54)$$

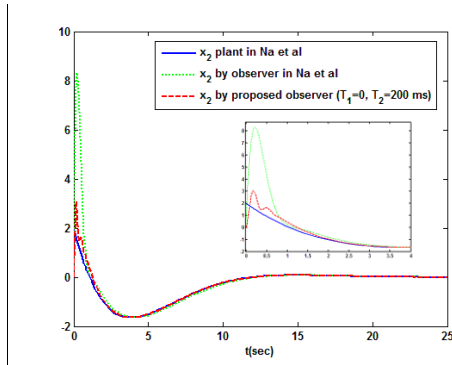
که در آن  $f(t) = (\alpha - \omega^2)a_1 \cos(\omega t) - \delta \omega a_1 \sin(\omega t) + \sin(a_1 \cos(\omega t) + a_0) + \alpha a_0$  و پارامترهای آن بصورت  $\alpha = -3, a_1 = 0.3, \delta = 0.12, \omega = 0.75, a_0 = -3$  می‌باشند.

در شکل ۳، نمودار صفحه فاز و رفتار آشوبناک این سیستم به مدت ۵۰۰ ثانیه نشان داده شده است. با توجه به الگوریتم ۱، در رویکرد طراحی شده زمان‌های پیش‌بینی  $T_1 = 0, T_2 = 100ms$  مرتبه بسط سری تیلور  $r = 2$  بهره رویکرد بصورت  $K = [400, 26.67]$  بهره رویکرد خطا  $L_0 = [1, 100]^T$  ماتریس‌های معین مثبت در فرض ۵ بصورت  $\mathcal{E}_2 = \begin{bmatrix} 7500 & 5510 \\ 1776.7 & 1766.7 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$  و انتخاب می‌شوند. شرایط اولیه سیستم و رویکرد به ترتیب بصورت  $\hat{x}(0) = [0, 0]^T$  و  $x(0) = [-0.3, -0.5]^T$  علاوه بر این فرض ۴ نیز به ازای  $P_1 = \begin{bmatrix} 422.67 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $\mathcal{E}_1 = \begin{bmatrix} 784.75 & 0 \\ 0 & 36.09 \end{bmatrix}$  و  $\alpha = 5$  برآورده می‌گردد.



شکل ۳: رفتار آشوبناک سیستم پاندول آشوبناک (صفحه فاز)





شکل ۶: نتایج مقایسه‌ای رویکرد پیشنهادی و رویکرد ارائه شده در [۲۲] (Na et al)

**مثال ۴.** سیستم غیرخطی موسوم به نوسان‌ساز وندربول را در نظر بگیرید.

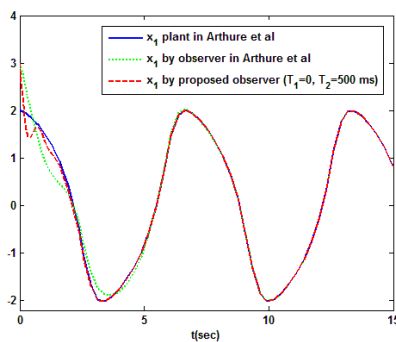
[۳۵]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \{-x_1 + x_2 - x_1^2 x_2\} \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (۵۶)$$

در این مثال، برای بررسی مقایسه‌ای، نتایج رویکرد پیشنهادی با رویکرد غیرخطی ارائه شده در مرجع [۳۵] برای سیستم نوسان‌ساز وندربول مقایسه شده است. در شبیه‌سازی پارامترهای رویکرد پیشنهادی بر اساس روند طراحی ارائه‌شده در الگوریتم ۱ و پارامترهای رویکرد [۳۵]، از همان مرجع گرفته می‌شوند. در شبیه‌سازی انجام شده، شرایط اولیه سیستم و رویکرد به ترتیب  $x(0) = [2, 0]^T$  و  $\hat{x}(0) = [3, -6]^T$ ، مرتبه سری تیلور  $r = 2$ ، زمان‌های پیش‌بینی  $T_1 = 0, T_2 = 500ms$  و بردار بهره رویکرد  $K = [16.11, 5.36]^T$  می‌باشند.

فرض ۴ به ازای  $Q_1 = \begin{bmatrix} 23.89 & 0 \\ 0 & 0.39 \end{bmatrix}$ ،  $P_1 = \begin{bmatrix} 18.47 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $\varepsilon_1 = 3$ ،  $\alpha = 2$  و  $\varepsilon_2 = 1$  و  $Q_2 = \begin{bmatrix} 2100 & 1110 \\ 243.5 & 233.5 \end{bmatrix}$ ،  $P_2 = \begin{bmatrix} 500 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$ ،  $L_0 = [1, 5]^T$ ،  $\varepsilon_2 = 1$  و  $Q_2 = \begin{bmatrix} 2161.1 & 171.1 \\ 63.6 & 53.6 \end{bmatrix}$ ،  $P_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$  در نظر گرفته شده‌اند.

همانطوریکه نتایج شبیه‌سازی در شکل ۷ نشان می‌دهد، رویکرد پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به رویکرد مرجع [۳۵] دارد. زیرا همگرایی حالت‌های رویکرد به حالت‌های واقعی در رویکرد پیشنهادی بیشتر بوده و در نتیجه خطای تخمین نیز کمتر است.



جدول ۲: شاخص عملکرد ISE برای رویکرد بهینه پیشنهادی به ازای زمان پیش‌بینی مختلف

ISE	زمان پیش‌بینی بالا و پایین		
	$T_1 = 200ms, T_2 = 300ms$	$T_1 = 100ms, T_2 = 200ms$	$T_1 = 0, T_2 = 100ms$
$\int_0^{t_f} e_1^2(t) dt$	0.00788	0.00513	0.00213
$\int_0^{t_f} e_2^2(t) dt$	0.02503	0.02249	0.01964

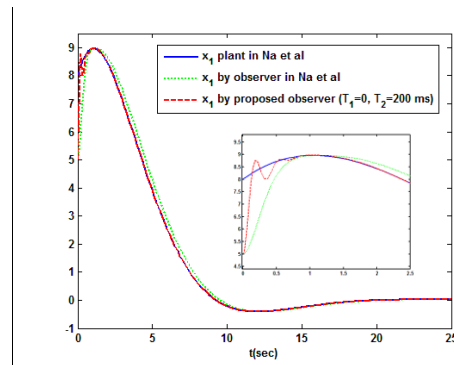
**مثال ۳.** سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید. [۲۲]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -0.56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۵۵)$$

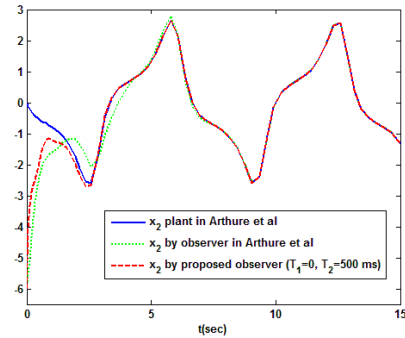
در این مثال، نتایج به‌دست‌آمده توسط رویکرد پیشنهادی با رویکرد بهینه ارائه شده توسط مرجع [۲۲] مقایسه شده است. در شبیه‌سازی رویکرد [۲۲]، تنظیم پارامترها از همان مرجع گرفته شده است. از سوی دیگر، پارامترهای تنظیم رویکرد پیشنهادی بر اساس روند طراحی ارائه شده در الگوریتم ۱، تنظیم می‌شوند.

در شبیه‌سازی انجام شده، شرایط اولیه سیستم و رویکرد به ترتیب  $x(0) = [8, 2]^T$  و  $\hat{x}(0) = [5, 0]^T$ ، مرتبه سری تیلور  $r = 2$ ، زمان‌های پیش‌بینی  $T_1 = 0, T_2 = 200ms$ ، بردار بهره رویکرد  $K = [100, 13.35]^T$  و بردار بهره رویکرد خطا  $L_0 = [1, 10]^T$  در نظر گرفته شده‌اند. علاوه بر این ماتریس‌های معین مثبت  $P_2$  و  $Q_2$  در فرض ۵ بصورت  $\varepsilon_2 = 1$  و  $Q_2 = \begin{bmatrix} 2100 & 1110 \\ 243.5 & 233.5 \end{bmatrix}$ ،  $P_2 = \begin{bmatrix} 500 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$  هستند. فرض ۴ نیز به ازای  $Q_1 = \begin{bmatrix} 111.35 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $P_1 = \begin{bmatrix} 184.5 & 0 \\ 0 & 9.2 \end{bmatrix}$  و  $\varepsilon_1 = 2, \alpha = 3$  برقرار است.

نتایج شبیه‌سازی هر دو رویکرد در شکل ۸ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، نرخ همگرایی تخمین حالت‌ها به حالت‌های واقعی در رویکرد پیشنهادی بیشتر بوده و در نتیجه خطای تخمین نیز کمتر است. بنابراین رویکرد پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به رویکرد مرجع [۲۲] دارد.



- [4] Thau, F.E., 1973, "Observing the state of non-linear dynamic systems", *International Journal of Control*, 17, 471-479.
- [5] Kou, S.R., Elliot, D.L. and Tarn, T.J., 1975, "Exponential observers for non-linear dynamic systems", *Information and Control*, 29, 204-216.
- [6] Zheng, G., Boutat, D. and Wang, H., 2017, "A non-linear Luenberger-like observer for non-linear singular systems", *Automatica*, 86, 11-17.
- [7] Hajatipour, M. and Farrokhi, M., 2010, "Chattering free with noise reduction in sliding mode observers using frequency domain analysis", *Journal of Process Control* 20(8), 912- 921.
- [8] Modarres, A.A. and Momeni, H.R., 2010, "A New Sliding Mode Observer Design for Linear System with Unknown Input and Time-varying Delay", *Journal of Control*, 4(4), 24-31. (In Persian)
- [9] Ahrens, J.H. and Khalil, K.H., 2009, "High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach", *Automatica*, 45(4), 936-943.
- [10] Khalil, H.K., 2017, "High-gain observers in feedback control: Application to permanent magnet synchronous motors", *IEEE Control System*, 37(3), 25-41.
- [11] Adil, A., Hamaz, A., N'Doye, I., Zemouche, A., Laleg-Kirati, T.-M. and Bedouhene, F., "On high-gain observer design for nonlinear systems with delayed output measurements", *Automatica*, 141, 2022, 110281.
- [12] Moraal, P.E. and Grizzle, J.W., 1995, "Observer design for non-linear systems with discrete-time measurement", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 40(3), 395-404.
- [13] Rao, C.V., Rawlings, J.B. and Mayne, D.Q., 2003, "Constrained state estimation for non-linear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximation", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48(2), 246-258.
- [14] Kühl, P., Diehl, M., Kraus, T., Schlöder, J.P. and Bock, H.G., 2011, "A real-time algorithm for moving horizon state and parameter estimation", *Computer and Chemical Engineering*, 35, 71-83.
- [15] Alessandri, A., Baglietto, M. and Battistelli, G., 2003, "Receding horizon estimation for discrete time linear systems", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48(3), 473-478.
- [16] Almir, M., 2007, "Non-linear Moving Horizon Observers: Theory and Real-Time Implementation. In: Besançon G Non-linear Observers and Applications", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, Berlin, Heidelberg, 139-179.
- [17] Almir, M., 2013, "A new identification framework for off-Line computation of moving-horizon



شکل ۷: مسیر حالت سیستم و اندرپل، نتایج مقایسه ای روتگر پیشنهادی و روتگر ارائه شده در [۳۵] (Arthure et al)

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش جدید در طراحی روتگر بهینه برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی متغیر با زمان معرفی گردید. در ابتدا، خطای پیش‌بینی با استفاده از بسط سری تیلور با مرتبه دلخواه که تقریب مناسبی از رفتار سیستم غیرخطی را نتیجه می‌دهد، تقریب زده می‌شود. این بدان معناست که هیچ محدودیتی در مرتبه بسط سری تیلور وجود ندارد و بنابراین از نظر تئوری راه حل تحلیلی ارائه شده در این مقاله می‌تواند با هر دقت مشخصی به مسئله پیش‌بینی نزدیک شود. سپس، تابع هزینه شامل خطای پیش‌بینی به صورت تحلیلی کمینه‌سازی شده و منجر به ارائه بهره بهینه روتگر پیشنهادی می‌شود

علاوه بر این، در این روتگر پیشنهادی، پایداری مجانبی خطای تخمین اثبات شد و همچنین بر خلاف برخی مطالعات مرتبط اخیر، طراحی روتگر بهینه پیشنهادی تحت تأثیر نوع و شرایط کنترل‌کننده سیستم قرار نمی‌گیرد. از آنجا که در این رویکرد نیازی به بهینه‌سازی برخط نیست، پیاده‌سازی روتگر پیشنهادی حتی برای سیستم‌های با دینامیک سریع نیز به سادگی قابل انجام است. علاوه بر این، زمان‌های مختلف پیش‌بینی منجر به بهره‌های روتگر مختلفی می‌شود که نرخ‌های هم‌گرایی خطای تخمین مختلفی نیز ارائه می‌دهد. به این ترتیب، بهره روتگر را می‌توان از میان بهره‌های متناظر با سرعت همگرایی مطلوب انتخاب کرد. کارایی این رویکرد از طریق شبیه‌سازی و مقایسه با دیگر تحقیقات نشان داده شد.

## مراجع

- [1] Luenberger, D.G., 1964, "Observing the state of a linear system", *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2), 74-80.
- [2] Luenberger, D.G., 1966, "Observers for multivariable systems", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 11(2), 190-197.
- [3] Luenberger, D.G., 1971, "An introduction to observers", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 16(6), 596-602.

- state observer”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- [30] Sanz, R., García, P., Fridman E. and P. Albertos P., 2018 “Robust Predictive Extended State Observer for a Class of Nonlinear Systems with Time-Varying Input Delay”, *Journal of control*, 93(2), 1-18.
- [31] Zhu, Y., Fridman E., 2021, Sub-predictors for network-based control under uncertain large delays. *Automatica* 123, 109350.
- [32] Koshkouei, A.J. and Zinober, A.S.I., 2004, “Sliding mode state observation for non-linear systems”, *International Journal of Control*, 77(2), 118-127.
- [33] Young, H.K., Frank, L.L. and Chaouki, T.A., 1997, “A dynamic recurrent neural-network-based adaptive observer for a class of nonlinear systems”, *Automatica*, 33(8), 1539-1543.
- [34] Ruiqi, W. and Zhujun, J., 2004, “Chaos control of chaotic pendulum system”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 21, 201-207.
- [35] Arthur, J.K. and Mingqing, X., “Non-linear observer design in the SIEGEL domain”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(3), 2002, 932–953.
- observers”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 58(6), 1877–1882.
- [18] Alessandri, A., Baglietto, M. and Battistelli, G., 2008, “Moving-horizon state estimation for non-linear discrete-time systems: New stability results and approximation schemes”, *Automatica*. 44(7), 1753–1765.
- [19] Alessandri, A., Baglietto, M., Battistelli, G. and Gaggero, M., 2011, “Moving-horizon state estimation for non-linear systems using neural networks”, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 22(5), 768–780.
- [20] Ramar, K. and Gourishankar, V., 1976, “Optimal observers with specified eigenvalues”, *International Journal of Control*, 27(2), 239-244.
- [21] Chou, Fu.I. and Cheng, M.Y., 2019, “Optimal design of reduced-order observers with specified eigenvalues and performance measurement of minimizing estimation errors using evolutionary optimization”, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 38(2), 728–739.
- [22] Na, J., Herrmann, G. and Vamvoudakis, K., “Adaptive optimal observer design via approximate dynamic programming”, In: *American Control Conference IEEE*, Seattle, USA, 24-26 May 2017, 3288-3293. Washington: IEEE.
- [23] Chakrabarty, A. and Benosman, M., 2021, “Safe learning-based observers for unknown nonlinear systems using Bayesian optimization”, *Automatica*, 133, 109760.
- [24] Besancon, G., Georges, D. and Benayache, Z., 2007, “Asymptotic state prediction for continuous-time systems with delayed input and application to control”, In: *Control conference (ecc)*, European, 2007, 1786–1791.
- [25] Najafi, M., Hosseinnia, S., Sheikholeslam, F. and Karimadini, M., 2013, “Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors”, *International Journal of Control*, 86 (4), 599–609.
- [26] Najafi, M., Sheikholeslam, F., Wang, Q.G. and Hosseinnia, S., 2014, “Robust  $H_\infty$  control of single input-delay systems based on sequential sub-predictors”, *IET Control Theory and Applications*, 8 (13), 1175–1184.
- [27] Ahmed-Ali, T., Cherrier, E. and Lamnabhi-Lagarrigue, F. 2012, “Cascade high gain predictors for a class of nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57 (1), 221–226.
- [28] Mazenc, F. and Malisoff, M., 2016 “New prediction approach for stabilizing time-varying systems under time-varying input delay. In *Decision and control (CDC)*”, In: *IEEE 55th conference*, 3178–3182.
- [29] Sanz, R., Garcia, P., Fridman, E. and Albertos, P., 2018, “Rejection of mismatched disturbances for systems with input delay via a predictive extended