مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۶، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۱، صفحه ۹۸-۸۵

طراحی رویتگر مد لغزشی توزیع شده برای سیستمهای غیرخطی دارای تاخیر زمانی و اعمال نامعینی

هاجر قطب[۱]، مهدی سیاهی [۲]، علی معرفیان پور[۳]

[۱]دانشجوی دکتری ، دانشکده مکانیک ، برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران Hajarghotb@yahoo.com
[۲]دانشیار، دانشکده مکانیک ، برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران Mehdi.siahi@srbiau.ac.ir
[۳] استادیار، دانشکده مکانیک ، برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایرانMoarefian@srbiau.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۲۱ ویرایش: ۱۴۰۱/۰۷/۰۸ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۲۹

چکیده: در این مقاله طراحی رویتگر مد لغزشی توزیع شده برای یک کلاس از سیستم های غیرخطی با تاخیر زمانی و اعمال نامعینی در یک شبکه متصل غیرجهتدار در نظر گرفته شده است. به طور خاص، هر رویتگر مد لغزشی توزیع شده به قسمتی از خروجی دسترسی دارد وبا رویتگرهای مجاور خود از طریق پروتکل های اجماع در یک شبکه گراف ارتباط برقرار می کند. این شبکه شامل N رویتگر محلی است که اطلاعات را از طریق یک شبکه گراف مخابراتی همراه با تاخیر زمانی و درنظر گرفتن نامعینی ارسال و دریافت می کنند. روش طراحی بر اساس بکارگیری شرایط لیپشیتز در سیستم های غیر خطی می باشد. دراین راستا با انتخاب مناسبی از توابع لیاپانوف، نامعادله ینسن به یک شبکه متصل غیرجهت دار، اعمال می گردد. همچنین از طریق الگوریتم طراحی، شرایط لازم و کافی برای طراحی پارامترها به منظور تثبیت دینامیک خطا تعریف شده است. در نهایت، شبیه‌سازی‌های عددی برای تایید اثربخشی روش پیشنهادی ارائه می گردد.

کلمات کلیدی:رویتگر مد لغزشی توزیع شده، تئوری گراف، سیستم غیرخطی، تاخیر زمانی، نامعینی.

Developing a Design of Distributed Sliding mode Observers for Nonlinear Systems with Time – Delay and Applying uncertainty

Hajar Ghotb, Mehdi Siahi, Ali MoarefianPour

Abstract: This paper propounds a distributed observer design for a class of nonlinear systems with time delays and applying uncertainty in an undirected network. In particular, each distributed observer has availability, to partial output as it communicates with its neighboring observers through consensus protocols defined on the undirected network. The network includes M local observers where adjacent observers transmit and receive data through a delayed telecommunication graph network with uncertainty. The design method is based on Lipschitz condition of nonlinear terms. Appropriate selection of Lyapunov functions is created, and the Jensen inequality applied in undirected network. Also, by the design algorithm, the necessary and sufficient conditions for the design of parameters are defined so as to stabilize the error dynamics. Finally, numerical simulations are provided to contrast the effectiveness of the proposed method.

Key words: Distributed sliding mode observers, Graph theory, Non-linear system, Time delay, Uncertainty

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

۱- مقدمه

امروزه تجزیه و تحلیل سیستمهای توزیع شده توجه بسیاری از محققان را به خود معطوف داشته است. با توجه به کاربردهای گسترده سیستم های چند عاملی در صنعت از جمله کنترل رباتها، موبایلها، هواپیماهای بدون سرنشین، سنسورهای بی سیم و شبکه حسگرها و ... در سالهای اخیر، توجه ویژه ایی به این مباحث شده است [۱]. همچنین با رشد سریع و ادغام محاسبات، ارتباطات و فناوری های اندازگیری هوشمند، تجهیزات اندازگیری کم هزینه با اندازه کوچک، با توانایی پردازش و قابلیتهای ارتباطی، در یک دامنه وسیع از محیطها گسترش یافته اند[۲]. روابط حاکم بر شبکه توزیع‌شده از تئوری گرافها پیروی می کند. در این تئوری هر عامل می تواند از اطلاعات خود و همسایگان خود استفاده کند. براین اساس ارتباطاتی که بین عوامل وجود دارد، نقش کلیدی در کنترل و نظارت توزیع شده بین عوامل را ایفا می کند[۳]. در این سیستمها به دلیل برقراری ارتباط از طریق یک شبکه، پتانسیل مطلوبی برای بهبود بخشیدن به کارایی سیستم در مقایسه با ساختارهای صرفا غیر متمرکز فراهم می گردد. زیرا همپوشانی اطلاعات کلی، ایستگاههای کنترل توزیع شده را قادر می سازد تا بینش عمیق تری نسبت به سیستم در نظر گرفته شده داشته باشند، و پس از آن تصمیمات هوشمندانه تری اتخاذ کنند[۴]. چنانچه به دلایل اقتصادی و محدودیت‌های فیزیکی امکان اندازه‌گیری کل متغیرها یا حالات سیستم در یک شبکه گسترده و پیچیده وجود نداشته باشد، بحث تخمین حالت‌های سیستم به صورت گسترده مطرح می‌گردد، که در آن تخمین توزیع‌شده حالت‌های سیستم یک مسئله بنیادی است[۵]. تحقیقات زیادی در زمینه طراحی رویتگر توزیع شده خطی وجود دارد[۶-۹]. یکی دیگر از مباحث اساسی بحث مربوط به نوع سیستم می باشد. بسیاری از سیستم ها در عمل به صورت غیرخطی می باشند و فعالیت تحقیقاتی قابل توجهی در توسعه روش‌های مختلف طراحی رویتگرتوزیع‌شده برای سیستم‌های غیرخطی انجام نشده است. و در این مقاله، به طور خاص به طراحی رویتگر توزیع شده در سیستم های غیرخطی می پردازیم. برای این منظور، ابتدا روش‌های رایج برخورد با سیستم‌های غیرخطی متمرکز را بررسی می کنیم [۱۰-۱۲]. روش‌های کلی طراحی رویتگر در سیستم‌های غیرخطی بر دو حالت رویتگرهای تصادفی (فیلتر کالمن) [۱۳-۱۴]ورویتگرهای غیر تصادفی(شبه لیونبرگر) [۱۵] تمرکز می‌کنند. در کنار این تقسیم بندی کلی که برای رویتگرهای غیر خطی پیشنهاد شده است، روش دیگری نیز بر اساس نوع توابع غیرخطی اتخاذ شده است. در تقسیم بندی اخیر، توابع غیر خطی به توابعی که در شرایط لیپشیتز صدق می کنند و توابع غیر خطی با شرایط قطاعی تقسیم می شوند. مرجع [۱۶] از جمله کارهای تحقیقاتی برجسته ای است که در زمینه توابع غیر خطی حاوی شرایط قطاعی انجام شده است.

علاوه بر طراحی پیچیده، یک گروه از عوامل نیز برتک تک زیر سیستمها اثر می گذارند.هریک از این عوامل خود باعث می گردد، که طراحی نهایی پیچیده تر و سخت تر گردد. در تخمین صحیح حالتها توسط رویتگرها، در اختیار داشتن اطلاعات صحیح از ورودی و خروجی بسیار حائز اهمیت است. وجود تاخیر در بسیاری از اوقات، باعث می شود که تخمین صحیحی از عملکرد سیستم در اختیار نباشد. بنابراین توصیف فرآیندهای عملی با معادلات دینامیکی تاخیردار در نظر گرفته می شود[۱۷-۱۸].

تاخیر در ورودی و خروجی نوعی از تاخیر است که با توجه به محدودیتهای سخت افزاری در حلقه کنترل، ایجاد می گردد. نوعی دیگر، تاخیر ذاتی می باشد، که به دلیل بوجود آمدن یک نوع فیدبک داخلی همراه با تاخیر زمانی در سیستم ایجاد می گردد و در معادلات دینامیکی سیستم به صورت تاخیر در حالت مدل می گردد. در این راستا، طراحی رویتگر برای سیستمهای تأخیردار با توجه به ثابت و یا متغیر با زمان بودن تأخیر و نحوه قرار گرفتن تأخیر در معادلات (حالت، ورودی، خروجی و یا تأخیرهای ترکیبی)، به انواع مختلفی تقسیم بندی می شود. نکته مهم سیستمهای تاخیردار، بحث پایداری و پایدارسازی این سیستمها است که با روشهای معمول پایداری متفاوت می باشد. برای جبرانسازی تاخیر در سیستمهای دارای تاخیرهای کوچک، از روش تبدیل مدل استفاده می شود، به این صورت که سیستم به سیستم تاخیردار گسسته تبدیل میشود[۱۹].ولی در برخی موارد از روشهای خاصی مانند روش لیاپانف-کراسفسکی (LKF) برای اثبات پایداری سیستم های تأخیردار استفاده میشود. در [۲۰]، به اعمال دو تاخیر ثابت هم در معادلات حالت و هم در داده های خروجی رویتگر توزیع شده خطی می پردازد وبا استفاده از روش لیاپانف-کراسفسکی به اثبات پایداری سیستم تأخیردار پرداخته می شود. در آن دسته از سیستم هایی که خروجی ها را تاخیردار درنظر می گیرند مهمترین روش استفاده از روش زنجیره ایی می باشد[۲۱].

یکی دیگر از عواملی که به روی تک تک زیر سیستمها اثر می گذارد، وجود نامعینی در سیستم می باشد. در این مقاله نامعینی سیستم به صورت کراندار فرض شده است، و شرط تطبیق که یک فرض مرتبط با نامعینی می باشد برقرار است. رویتگر بکار برده شده در این مقاله، رویتگر مد لغزشی توزیع شده می باشد، که نسبت به رویتگرهای دیگر دارای مزیتهای اساسی از جمله همگرایی در زمان محدود، مقاوم بودن در برابر نامعینی، عدم حساسیت به تغییر پارامترها، تاثیرناپذیری از خطای خارجی، پاسخ دینامیکی سریع و سادگی طراحی و اجرای آن می باشد[۲۲]. نکته حائز اهمیتی که در حوزه رویتگرهای مد لغزشی جهت تفکیک رویکردها و روشهای متفاوت قابل بررسی می باشد، سیستم هایی است که برای طراحی رویتگر انتخاب می شود. به طور کلی دو نوع سیستم غیرخطی برای استفاده از این رویتگرها مورد توجه قرار می گیرند. در نوع اول یک سیستم غیرخطی با در نظر گرفتن اینکه جملات خطی از جملات غیر خطی قابل تفکیک بوده و بخش غیرخطی شرایط لیپ شیتز را برآورده می کند وخروجی آنها نیز به صورت خطی می باشد در نظر گرفته می شود[۲۳-۲۵]. این در حالی است که سیستم نوع دوم به فرم کلی مثلثی لحاظ می گردد و رویتگر مد لغزشی بهره بالا برای آن در نظر گرفته می شود [۲۶].

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

در [۲۷] رویتگرمد لغزشی همراه با شرط تطبیق برای سیستم های غیرخطی همراه با جملات خطی و غیرخطی مجزا مطرح شده است. در ادامه به بررسی تعدادی از جدیدترین مقالات اخیر و بیان نکات متمایز این مقاله، می پردازیم.

مسئله تخمین حالت توزیع‌شده با استفاده از فیلترها و یا رویتگرها انجام می شود. به عنوان یکی از مقاله های اخیر که با استفاده از فیلتر توزیع شده انجام شده است، [۳۰] که در سال ۲۰۱۷ می باشد را می توان در نظر گرفت. در این مقاله به طراحی یک نوع از فیلتر برای تخمین حالتها در یک سیستم غیر خطی توزیع شده تصادفی در یک شبکه خاص پرداخته است. در این مقاله تاخیر و نامعینی را در مدل سیستم اعمال نکرده است و فقط یک فیلتر غیرخطی توزیع شده را در نظر گرفته است. عیب روش فیلتر کالمن این است که در محدوده کوچکی از نقطه کار استفاده می شود و اغلب به محاسبات سنگین برای بدست آوردن تخمین وضعیت سیستم نیاز دارد. اما هدف مقاله ما طراحی رویتگر شبه لیونبرگر توزیع شده غیرخطی مقاوم در شبکه گراف غیرجهتدار می باشد که عیوب فیلتر را نداشته و در من به اعمال دو تاخیر در حالت و خروجی و نامعینی نیز پرداخته می شود. در سالهای اخیر، تخمین توزیع شده در سیستم‌های خطی با استفاده از روش‌های مختلفی انجام شده است. به طور خاص در [۳۱] که در سال ۲۰۱۹ می باشد، یک رویتگر توزیع شده لیونبرگر برای دینامیک سیستم خطی در نظر گرفته شده است. که شامل چندین شبکه رویتگر محلی است که هر رویتگر با استفاده از اطلاعات خود و همسایگان، اطلاعات را دریافت می کند. در این مقاله مدل سیستم خطی می باشد وتاخیر را در مدل سیستم اعمال نکرده است و فقط شبکه متصل قوی رادر نظر گرفته است و از روش تبدیل به مدل خطی LMI برای طراحی پارامترها استفاده کرده است. اما هدف مقاله ما طراحی رویتگر غیرخطی همراه با اعمال دو تاخیر و نامعینی در شبکه غیرجهتدار می باشد و ما با استفاده از توابع لیاپانوف و نامعادله جنسن که روشی قویتر و دقیق تر می باشد به طراحی پارامترها پرداخته ایم.

همچنین در [۳۲] که در سال ۲۰۲۰ می باشد به طراحی یک رویتگر توزیع شده غیرخطی شبه لیونبرگر در یک گراف غیرجهتدار می پردازد . دراین مقاله سیستم بدون تاخیرو نامعینی می باشد . همچنین در [۳۳] که در سال ۲۰۲۱ می باشد به طراحی یک رویتگر توزیع شده غیرخطی شبه لیونبرگر در یک شبکه گراف می پردازد.و بااستفاده از ماتریسهای وزنی به طراحی پارامترها می پردازد. اما هدف مقاله ما طراحی رویتگر توزیع شده غیرخطی همراه با اعمال تاخیر و نامعینی در شبکه غیرجهتدار و طراحی پارامترها با استفاده از تابع لیاپانوف و نامعادله جنسن می باشد که روشی قویتر و دقیق تری نسبت به روشهای دیگر می باشد.

سیستم های تخمین توزیع شده دارای کاربردهای گسترده ایی در صنعت می باشند. به عنوان یکی از کاربردهای عملی رویتگرهای توزیع شده، سیستم های شبکه هوشمند مطرح می گردد. از[۳۴] به عنوان مقاله ایی که به بررسی یک مدل عملی شبکه های توزیع شده می پردازد، می توان نام برد. در این مقاله بر اساس یک فیلتر کالمن توزیع شده به تخمین پارامترها می پردازد. تخمین پارامترها می تواند به طور دقیق وضعیت سیستم را در نتیجه به اشتراک گذاری اطلاعات با گره های همسایه تخمین بزنند.

روش طراحی رویتگر مد لغزشی همراه با تاخیر و اعمال نامعینی عمدتا برای سیستمهای خطی متمرکز در نظر گرفته شده است. در مقاله حاضر به بررسی پایداری و طراحی پارامترهای رویتگر مد لغزشی توزیع شده برای سیستم‌های غیر خطی همراه با دو تاخیر زمانی در حالت و خروجی و اعمال نامعینی می‌پردازیم. در این راستا، سیستم‌های غیرخطی به صورت بخش‌های خطی و غیرخطی مجزا بر اساس شرایط لیپشیتز در نظر گرفته می‌شوند، همچنین نامعینی به صورت کراندار فرض شده است، و شرط تطبیق که یک فرض مرتبط با نامعینی می باشد همواره برقرار می باشد. همچنین، با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب به اعمال نابرابری جنسن، در شبکه متصل غیر جهتدار پرداخته می شود. در این راستا، با ارائه الگوریتم مناسب، به بررسی شرایط لازم و کافی برای طراحی پارامترهای رویتگرمد لغزشی توزیع شده با هدف نهایی تثبیت دینامیک خطا می پردازیم.

به طور کلی، هدف اصلی این مقاله را می توان در چند بخش بیان نمود.

- رفع نواقص تخمین متمرکز با ارائه یک استراتژی رویتگر مد لغزشی توزیع شده مناسب، با عملکرد بهتر نسبت به رویکردهای پیشرفته موجود می باشد.
- جنبه نوآورانه مقاله حاضر ارائه الگوریتم به منظور طراحی پارامترهای رویتگرمدلغزشی توزیع شده در یک سیستم غیر خطی همراه با اعمال دو تاخیر ثابت و محدود در حالت و خروجی سیستم و اعمال نامعینی کراندار می باشد.
- روش طراحی مورد استفاده با انتخاب توابع مناسب لیاپانوف و استفاده از نابرابری جنسن بر اساس شرط لیپشیتز در توابع غیرخطی درشبگه گراف غیرجهتدار می باشد.

بنابراین در بخش اول کلیه مفاهیم و عبارات و مفروضات مورد نیاز به اندازه کافی ارائه شده است. در بخش‌های بعدی، تحلیل‌های پایداری و الگوریتم‌های طراحی رویتگر مد لغزشی توزیع‌شده برای شبکه متصل غیرجهتدار پیشنهاد شده است. در نهایت، با کمک نتایج شبیه‌سازی عددی، اثربخشی الگوریتم‌های طراحی پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲- پیش فرضها

یک گراف جهتدار و یا غیر جهتدار توسط $\varphi = (v, \varepsilon, A)$ مشخص می گردد، که در آن $v = \{1,2,3, \dots, N\}$ یک مجموعه غیر تهی محدود از گره ها و $\varepsilon \subset R \times R$ یک مجموعه از یالهای گره های جفت شده مرتب و $G = [g_{ij}] \in R^{N\times N}$ ماتریس مجاورت می باشد. در هر

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

گراف جهتدار، هر یال $(i,j) \in \varepsilon$ نشان می دهد که اطلاعات از گره i به j جریان دارد. برای هر $i,j \in R$ فرض می شود ویژگی ارتباط یک گره با خودش وجود ندارد، یعنی $(i,i) \notin \varepsilon$ همچنین $g_{ij} = 1$ اگر و تنها اگر $(i,j) \in \varepsilon$ در غیر این صورت $g_{ij} = 0$. یک مسیر به طول L از گره i به j شامل یک رشته از گره های $(i_0, i_1, i_2, \dots\dots, i_l)$ می باشد، به طوری که $(i_k, i_{k+1}) \in \varepsilon$ و $i_l = j, i_0 = i$ می باشد. یک گراف غیرجهتدار نامیده می شود، اگر $(i,j) \in \varepsilon$ آنگاه $(j,i) \in \varepsilon$. و چنانچه $G = [g_{ij}]_{N\times N}$ گراف غیر جهتدار متصل باشد، $L = [l_{ij}]_{N\times N}$, $l_{ij} = -g_{ij} \quad i \neq j$ یک ماتریس مثبت نیمه معین است که دارای مقادیر ویژه حقیقی منفی می باشد و صفر یک مقدار ویژه تکین برای L با بردار ویژه 1_N می باشد به گونه ای که 1_N برداری با تمام المانهای 1 می باشد. و فرض می شود که تمام مقادیر ویژه ماتریس L در رابطه $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_N$ صدق می کنند.یک گراف غیر جهتدار، مرتبط می باشد، اگر یک مسیری از i به j برای هر دو گره دلخواه مجزای $i,j \in R$ وجود داشته باشد[۱-۴].

فرض ۱

گراف ارتباطات باید کاملا همبند باشند.

تعریف ۱

به طور کلی تاخیرها یا به صورت گسسته و یا توزیع شده می باشند. و تاخیرهای گسسته یا به صورت ثابت $\tau = \tau_1, \tau = \alpha\,\tau_1$ (تکی و یا ضربیی از همدیگر) وبه صورت معلوم و یا تصادفی هستند و یا متغیر با زمان $\tau(t)$ می باشند و تاخیرهای متغیر بازمان یا به صورت باند محدود می باشند، که به صورت $\tau_{min} \leq \tau(t) \leq \tau_{max}$ تعریف می گردد که در عمل باند بالایی و باند پایینی رادر نظر می گیرند. که در واقع روش اثباتها مشابه همان روش اثبات همراه با تاخیر ثابت باند محدود معلوم می باشد. و یا با نرخ محدود می باشد، که در این صورت $\dot{\tau}(t) \leq D \leq 1$ می باشد که در روش اثبات تابع لیاپانوف به صورت بخشهای مربعی و انتگرالی در نظر گرفته می شود. در این مقاله با هدف کاهش محاسبات تاخیرها را به صورت ثابت و محدود درهنگام دریافت اطلاعات از خروجی و درهنگام تبادل اطلاعات در گراف در نظر می گیریم. بنابراین $\tau_{out} = \tau_2\ \tau_{comunication} = \tau_1$, و $\tau_1 \geq 0$و $\tau_2 \geq 0$ در نظر گرفته می شود. در این راستا، یک ثابت مثبت و معلوم و محدود τ_{max} به گونه ایی در نظر می گیریم که $\tau = max\{\tau_1, \tau_2\} \leq \tau_{max}$ می باشد.

تعریف ۲

در گراف جهتدار و یا غیرجهتدار ، ماتریس L را به صورت ماتریس لاپلاسین تعریف می کنیم. و با استفاده از خصوصیات ضرب کرونکر بین المانهای یک گراف رابطه $\sum_{j=1}^{N} g_{ij} M(e_i(t-\tau_1) - e_j(t-\tau_1)) = (L \otimes M)e(t-\tau_1)$ برقرار می باشد.ودر این رابطه $G = [g_{ij}] \in R^{N\times N}$ ماتریس مجاورت می باشد. وهمچنین M ماتریس بهره رویتگر می باشد، که باید طراحی گردد $M = diag\{M_1, \dots, M_N\}$ و e_i خطا در رویتگر i می باشد.

تعریف ۳

مدل سیستم در نظر گرفته شده در این مقاله به صورت سیستم متمرکز غیرخطی مقاوم تغییر ناپذیر با زمان می باشد، که فاقد ورودی و تاخیر در مدل سیستم می باشد. در طراحی رویتگر توزیع شده غیرخطی مقاوم تاخیردار، با هدف جلوگیری از افزایش محاسبات، تاخیرها را ثابت و دارای باند معلوم در نظر گرفته ایم. بنابراین با توجه به عدم اعمال ورودی و تاخیر ثابت شرط تداخل را اعمال ننموده ایم.

لم ۱

ماتریس لاپلاسین گراف $G = [g_{ij}] \in R^{N\times N}$، به صورت $L = [l_{ij}]_{N\times N} \triangleq D - G$ نیز تعریف می گردد به گونه ایی که ماتریس قطری $\mathcal{D}$ بصورت $\mathcal{D} = diag\{di\}$ می باشد که $di = \sum_{j\in n, j\neq i} g_{ij}$ درجه داخلی مرتبط با گره i ام می باشد[۷].

لم ۲ (معادلات دیفرانسیل ریکاتی)

فرض کنید زوج (A,H) رویت پذیر باشند. بنابراین برای معادله ریکاتی پارامتری ، یک راه حل منحصر به فرد وجود دارد[۲۰].

$$p(\gamma) = \mathrm{P} > 0 \ \ for\ \gamma > 0: \tag{۱}$$

$$PA^T + AP - PH^THP = -\gamma P$$

به گونه ایی که $p(\gamma)$ دارای مشخصات زیر می باشد.

$$\forall \gamma > 0 \ \lim_{\gamma\to 0} p(\gamma) = 0, \left(\frac{dp(\gamma)}{d\gamma}\right) > 0\ ;\ tr(HP(\gamma)H^T) = n\gamma\ ;\ P(\gamma)H^THP(\gamma) \leq n\gamma P(\gamma);\ e^{At}P(\gamma)e^{A^Tt} \leq e^{(n-1)\gamma t}P(\gamma)\ t \geq 0\,.$$

لم ۳ (معادلات ینسن)

برای هر ماتریس $R^{n\times n} > 0$ و اسکالر t>0 بردار $\varphi: [-t, 0] \to R^n$ انتگرال مربوطه، به گونه ایی تعریف شده است که رابطه زیر صادق می باشد[۱۸].

$$\int_{-t}^{0} \phi(s)^T R\phi(s)ds \geq \frac{1}{t}\int_{-t}^{0} \phi(s)^T ds\ R \int_{-t}^{0} \phi(s)ds \tag{۲}$$

لم ٤ (S-Procedure)

ماتریسهای متقارن $\mathrm{P, Q} \times n\ n$ را در نظربگیرید. و فرض کنید نامعادله مربعی $x^TPx \geq 0$ برقرار باشد. بنابراین نامعادله مربعی $x^TQx \geq 0$ نیز از این رابطه محاسبه می گردد ($x^TPx \geq 0 \to x^TQx \geq 0$) اگر و تنها اگر یک اسکالر حقیقی $\lambda \geq 0$ وجود داشته باشد، به گونه ایی که $\mathrm{P} \geq \lambda \mathrm{Q}$ [۲۹].

لم۵(Cauchy–Schwarz inequality)

نا معادله Cauchy–Schwarz بیان میدارد که برای تمام بردارهای M , N در فضای ضرب داخلی رابطه $|\langle M, N\rangle|^2 \leq$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

$\langle M,M\rangle.\langle N,N\rangle.$ برقرار می باشد. به گونه ایی که $\langle .,. \rangle$ نشان دهنده ضرب داخلی می باشد[۱۸].

لم ٦ (شرط وجود ومنحصر به فرد بودن جواب محلی در توابع غیرخطی دارای شرط لیپ شیتز)

فرض کنید تابع $f(t,x)$ تابع تکه ایی پیوسته در t با شرایط لیپ شیتز می باشد بنابراین

$$\forall x,y \in \|f(t,x)-f(t,y)\| = L\|(x-y)\|,$$
$$M=\{(x\in R^N \| \|x-x_0\|<N)\}, \forall t\in[t_0,t_1]$$

دراین رابطه، به $f(t,x)$ که شرط لیپ شیتز را ارضائ می کند، تابع لیپ شیتزدر x می گویند.و L ثابت لیپ شیتز می باشد. L نباید تابع xویا t در منطقه مورد نظر باشد. شرط لیپ شیتز بودن به معنای هموار بودن f در منطقه مورد نظر از x می باشد. در این رابطه پارامتر $\alpha > 0$ به گونه ایی وجود دارد که تابع غیرخطی $\dot{x}=f(t,x)$ با مقدار اولیه $x(t_0)=x_0$ در ناحیه $[t_0,t_0+\alpha]$ دارای جواب منحصر به فرد می باشد. همچنین، اگر توابع $\left|\frac{df(t,x)}{dx}\right|$ و $f(t,x)$ در ناحیه $[a,b]\times R^n$ وجود داشته باشد، تابع $f(t,x)$ لیپ شیتز محلی درx به روی $[a,b]\times R^n$ می باشد، اگر و تنها اگر $\left|\frac{df(t,x)}{dx}\right|$ به روی $[a,b]\times R^n$ محدود یکنواخت باشد. به استثنای مدل ایده آل غیرخطی گسسته، اکثر پدیده های فیزیکی لیپشیتز محلی می باشند. برای داشتن جواب منحصر به فرد در منطقه D شرط لیپ شیتز محلی کافی می باشد[۱۲].

۳- بیان مسئله

سیستم غیرخطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+f(t,x)+\Gamma d(t)$$
$$y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_1x\\ \vdots\\ H_Mx\end{bmatrix},\ i=1,\dots,N \qquad (۳)$$

که در آن $x\in R^n$ حالت سیستم و $y\in R^m$ خروجی اندازه گیری شده است، که در آن $y_i\in R^{m_i}$ و $\sum_{i=1}^{N} m_i = m$ می باشد. ماتریسهای $A\in R^{n\times n}$ و $\Gamma\in R^n$ معلوم می باشند. تابع غیرخطی به صورت $f(t,x)$ در نظر گرفته می شود که در شرط لیپ شیتز که در لم ۶ بیان شد، صدق می کند. همچنین $d(t)$ نامعینی سیستم و یا ورودی اغتشاش می باشد، که به صورت کراندار در نظر گرفته شده است. و همواره $\|d\|\le D$ می باشد و $D>0$ یک ثابت مثبت می باشد. همچنین فرض می کنیم که همواره نامعینی در شرط زیر که به عنوان شرط تطبیق مطرح می گردد صادق می باشد.

$$\Gamma^T\overline{P}_i = Z_iH_i \qquad (۴)$$

که در این رابطه $Z_i{}^T\in R^{m_i}$ و $\overline{P}_i$ به صورت رابطه (۵) تعریف می گردد، که در این رابطه ماتریس P_i در معادلات ریکاتی که در لم۲ بیان شد صادق می باشد.

$$\overline{P}_i = e^{-A^T\tau_2}P_i^{-1}e^{-A\tau_2} \qquad (۵)$$

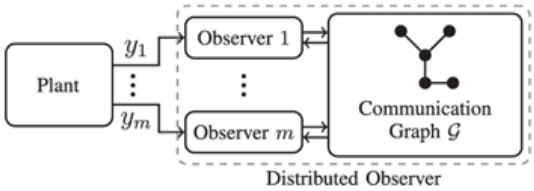
در این رابطه τ_2 تاخیر در دریافت اطلاعات ازخروجی سیستم تعریف می گردد.که به صورت ثابت و محدود و کراندار در نظر گرفته می شود.

فرض ۲

تمام مقادیر ویژه ماتریس A درای مقدار حقیقی منفی می باشند و وزوج (A, H) رویت پذیر می باشند و زوج (A, H_i) می توانندرویت پذیر نباشند.

۳-۱- رویتگر مدلغزشی توزیع شده

سیستم غیرخطی به وسیله یک گراف از سنسورها تصویر می‌شود و شامل N گره می‌باشد که در آن هر گره، شامل یک رویتگر محلی می باشد. هدف هر گره تخمین مجانبی حالت‌های سیستم با استفاده از اندازه‌گیری‌های محدود خود همراه با تبادل اطلاعات با همسایگان می‌باشد. شکل (۱) یک شبکه رویتگر توزیع شده را نشان می دهد.



شکل(۱) : مشخصه کلی رویتگر توزیع‌شده

در واقع، هدف ما طراحی رویتگر مدلغزشی توزیع‌شده غیر خطی مقاوم شامل N رویتگر محلی می باشد.

در ابتدا رویتگر خطی متمرکز لیونبرگر را بدون اعمال هیچ تاخیری در نظر می گیریم. مرحله بعد به اعمال تاخیر در خروجی رویتگر می پردازیم. البته این نکته را درنظر می گیریم که تاخیرها با مقادیر محدود و کوچک می باشند. در مرحله بعد، به اعمال پارامتر توزیع شده می پردازیم. چنانچه رویتگر توزیع شده ایی را در نظر بگیریم. باید به اثرات مجموع تمام گره ها بپردازیم و تاثیر آنهارا در تک تک روابط بررسی نماییم. بنابراین، بخش دوم شامل اعمال تاخیر درحالتهای پارامتر توزیع شده می باشد. که تا این مرحله در مرجع [۲۰] بیان شده است. در بخش سوم به اعمال پارامتر غیر خطی می پردازیم که به صورت متمرکز آن در مراجع [۱۰-۱۱] بیان شده است. اما به صورت توزیع شده آن نکته متمایز مقاله ما می باشد. در مرحله بعدی به اعمال سطح سوئیچینگبه منظور کاهش اثرات نامعینی به رویتگرتوزیع شده غیر خطی می پردازیم که به صورت متمرکز آن در مراجع[۲۵-۲۶-۲۷] بیان شده است. اما به صورت

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

توزیع شده آن نکته متمایز مقاله ما می باشد. در این راستا، دینامیک هر رویتگر محلی در گره i به صورت رابطه (۶) بیان می گردد.

$$\dot{\hat{x}}_i = \underbrace{A\hat{x}_i(t)+G_i\big(y_i(t-\tau_2)-H_i e^{-A\tau_2}\hat{x}_i(t)\big)}_{\text{Luenberger observer with delay}} - \underbrace{\sum_{j=1}^{N} g_{ij}M(\hat{x}_i(t-\tau_1)-\hat{x}_j(t-\tau_1))}_{\text{Distributed observer with delay}} + \underbrace{f(t,\hat{x}_i)}_{\text{Nonlinear function}} + \underbrace{S_i(t,\hat{x}_i)}_{\text{Switching}} \quad i=1,\dots,N. \qquad (۶)$$

که در آن $\hat{x}_i \in R^n$ تخمین حالت رویتگر محلی در گره i می باشد. g_{ij}، (i,j)-امین عنصر ماتریس مجاورت G در شبکه گراف می باشد. $M \in R^{n\times n}$ و $G_i \in R^{n\times m_i}$ ماتریس‌های بهره می‌باشند که باید طراحی شوند. $\tau_{\text{out}} = \tau_{\text{comunication}} = \tau_1$, τ_2 و $\tau_1 \geq 0$ و $\tau_2 \geq 0$ در نظر گرفته می شود. دو تاخیر در نظر گرفته شده در حالت و خروجی سیستم می باشد. $f(t,\hat{x}_i)$ تابع غیرخطی می باشد که بر اساس رابطه لیپ شیتز که در لم ۶ بیان گردید، به صورت زیردر نظر گرفته می شود.

$$\|f(t,x)-f(t,\hat{x}_i)\| \leq \alpha^2\|x(t)-\hat{x}_i(t)\| \qquad (۷)$$

در این رابطه $\alpha > 0$ ثابت لیپ شیتز و نماد $\|.\|$ نشان دهنده نرم اقلیدسی می باشد

اساس روش رویتگر مد لغزشی به این صورت می باشد که، در ابتدا یک سطح سوئیچینگ به صورت تابعی از متغیرهای حالت تعریف می گردد، که در حالت دو بعدی خط و در حالت سه بعدی صفحه می باشد. حالتهای سیستم از یک شرط اولیه شروع می شود و قبل از رسیدن به سطح سوئیچینگ، طراحیهای موجود، سیستم را به سطح مورد نظر هدایت می کنند. هنگامی که تمام حالتها روی سطح قرارگرفت، این حالتها به سمت مبدائ حرکت می کنند. اما این فرض در حالت ایده آل اتفاق می افتد. در عمل عواملی مانند اصطکاک و فرکانس و ...، باعث می شوند که پدیده ها از سطح سوئیچینگ کمی عبور کنند، امادوباره به سمت سطح حرکت می کنند. و این اتفاق تا زمانی که حالتهای سیستم به مبدا برسند و خطا به سمت صفر برود، ادامه دارد.

در این مقاله به دلیل اعمال شبکه توزیع شده، رویت گر دارای N سطح سوئیچینگ می باشد و S_i تابع سطح سوئیچینگ ناپیوسته ایی می باشد که در روئیتگر i در نظر گرفته می شود و به صورت زیر تعریف می گردد.

$$S_i = \begin{cases} -\dfrac{\bar{P}_i^{-1}H_i^T Z_i^T Z_i H_i \delta_i D}{\|Z_i H_i \delta_i\|} & \|Z_i H_i e_i\| \neq 0 \\ 0 & \|Z_i H_i e_i\| = 0 \end{cases} \qquad (۸)$$

که در این رابطه ماتریس $\bar{P}_i$ به صورت معادله (۵) در نظر گرفته می شود و در معادلات ریکاتی که در لم۲ بیان شد صادق می باشد $Z_i \in R^{m_i}$ و δ_i خطا در هر رویتگر i در نظر گرفته می شود.

یک رویتگر توزیع شده، پایدار مجانبی همه‌جانبه خواهد بود اگر رابطه خطا $\delta_i(t) = x(t) - \hat{x}_i(t)$ به ازای مقادیر اولیه $\delta_i(\varphi) = \rho_i(\varphi), \varphi\epsilon[-\tau,0]$ $\tau = \max(\tau_1,\tau_2), i = 1,\dots,N$ برقرار باشد و همچنین به ازای تمام $i \in N$ تخمین حالت به دست آمده توسط هر گره، به صورت مجانبی به مقدار صحیح حالت سیستم همگرا گردد.

نکته ۱

بر اساس تعریف خطا می توان رابطه بین حالتها در یک گراف را به صورت زیر درنظر گرفت.

$$\sum_{j=1}^{M} g_{ij}M(\hat{x}_i(t-\tau_1)-\hat{x}_j(t-\tau_1)) = \sum_{j=1}^{M} g_{ij}M(\hat{x}_i(t-\tau_1)-x(t-\tau_1)+x(t-\tau_1)-\hat{x}_j(t-\tau_1)) = \sum_{j=1}^{M} g_{ij}M(-\big(x(t-\tau_1)-\hat{x}_i(t-\tau_1)\big)+(x(t-\tau_1)-\hat{x}_j(t-\tau_1)) = \sum_{j=1}^{M} g_{ij}M(e_j(t-\tau_1)-e_i(t-\tau_1))\blacksquare$$

در ادامه با توجه به دو رابطه (۳) و (۶) معادله دینامیک خطا به صورت زیر بدست می آید.

$$\dot{\delta}_i(t) = A\delta_i(t) - G_iH_i(e^{-A\tau_2}\delta_i(t)) - \sum_{j=1}^{M} g_{ij}M(\delta_i(t-\tau_1)-\delta_j(t-\tau_1)) + \tilde{f}_i + \Gamma d(t) - S_i \qquad (۹)$$

به گونه ایی که $\tilde{f}_i = f(t,x)-f(t,\hat{x}_i)$ $, i = 1,..,N$ تعریف می گردد. چنانچه بردار خطای تمام M گره به صورت $\delta = col(\delta_1^T,\dots,\delta_N^T)$ در نظر گرفته شود. معادله خطا به صورت زیر در نظر گرفته می شود. که در این رابطه علامت $\otimes$ به صورت ضرب کرونکر تعریف می گردد.

$$\dot{\delta}(t) = \big(I_N\otimes A - \bar{G}\bar{H}(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\big)\delta(t) - (L\otimes M)\delta(t-\tau_1) + \tilde{F} + \Lambda d(t) - S \qquad (۱۰)$$

به گونه ایی که $\bar{G} = diag\{G_1,\dots,G_N\}, \bar{H} = diag\{H_1,\dots,H_N\}$ و $S = col\{s_1^T, s_2^T, \dots, s_N^T\}$ همچنین $\Gamma \epsilon R^N$ از روی هم قرار گرفتن N ماتریس اغتشاش $\Lambda\epsilon R^{n\times M}$ یکسان بوجود می آید. همچنین L در تئوری گراف در لم ۱ تعریف شده است.. و $\tilde{F} = \big[\tilde{f}_1^T \quad \tilde{f}_2^T \quad \tilde{f}_3^T \quad \dots \quad \tilde{f}_N^T\big]^T$ که در شرایط لیپ شیتز صدق می کند. وبرای تابع غیرخطی $\tilde{F}$ شرایط لیپ شیتز در ثابت α و دو متغیر δ, δ^T به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\tilde{F}\tilde{F}^T \leq \delta^T(t)(I_N\otimes\alpha^2 I_n)\delta(t) \qquad (۱۱)$$

همچنین $\tau = \max(\tau_1,\tau_2)\delta(t)\epsilon[0,\tau]$, در نظرگرفته می شود.در ادامه به منظور ساده سازی رابطه خطا تعریف زیر را انجام میدهیم که در پیوست ۱ اثبات آن بیان می گردد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

$$Z(t) = \int_{s=t-\tau_1}^{t}(I_N\otimes e^{A(t-s)})(\bar{G}\bar{H}(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(s) + (L\otimes M)\delta(s-\tau_1) - (\tilde{F}+\Lambda d(t) - S)ds \quad (۱۲)$$

بنابراین داریم $\delta(t-\tau_1) = (I_N\otimes e^{-A\tau_1})(\delta(t)+ z(t))$.در ادامه با جایگذاری رابطه $\delta(t-\tau_1)$ در معادله (۱۰) خطا در M گره به صورت زیر بدست میاید.

$$\dot{\delta}(t) = \big(I_N\otimes A - \bar{G}\bar{H}(I_N\otimes e^{-A\tau_2}) - (L\otimes Me^{-A\tau_1})\big)\delta(t) - (L\otimes Me^{-A\tau_1})z(t) + (\tilde{F}+\Lambda d(t) - S) \quad (۱۳)$$

در این مقاله، قصد ما طراحی رویتگر مد لغزشی توزیع شده غیرخطی تاخیردار برای شبکه متصل غیرجهتدار می باشد. در این راستا، قضایایی که پایداری مجانبی $\delta(t)$ را برای شبکه غیرجهتدار تضمین می کنند ارائه و روند طراحی پارامترهای $M, G_i, i = 1, \dots, N.$ رویتگر، در الگوریتم طراحی خلاصه می گردد.

نکته ۲

در این مقاله فرض ما براین است که شبکه گراف شامل گراف غیرجهتدار متصل همبند می باشد. و تمام اصول وروابط حاکم بر گراف ها که در پیش فرض بیان شده است را در نظر می گیریم. و ماتریس L گراف در شرایط بیان شده در لم ۱ صدق می کند. همچنین دیگر محدودیت ما که در فرض ۱ بیان شده است مربوط به رویت پذیری ماتریس (A,H) می باشد. محدودیت دیگر ما به روی میزان تاخیر در نظر گرفته شده در حالت و خروجی است که در بخش تعریف ۱ به طور مجزا بیان شده است. و محدودیت دیگر مربوط به ماتریس P می باشد که در معادلات ریکاتی که در لم ۲ بیان شده است صدق می کند. همچنین تابع غیرخطی شامل دو قسمت خطی و غیرخطی مجزا می باشد که بخش غیرخطی در شرایط لیپ شیتز که در لم ۶ بیان شده است صدق می کند.

۴ - طراحی پارامترهای رویتگر مد لغزشی توزیع شده

در این بخش، تحلیلی برای طراحی پارامترهای رویتگر مد لغزشی توزیع شده غیرخطی همراه با تاخیر و اعمال نامعینی در یک شبکه ارتباطی متصل غیرجهتدار ، ارائه شده است.

فرضیه ۱

رویتگر مد لغزشی توزیع شده غیرخطی تاخیر دار (۶) را در یک شبکه متصل غیرجهتدار در نظر بگیرید. اگر فرض ۱ و۲ برقرار باشد، و شرط تطبیق (۴) را در نظر بگیریم، برای هر $\tau_1 \geq \tau_2 \geq 0$, ماتریس های $M, G_i, i = 1, \dots, N$ و تابع ناپیوسته S_i به گونه ای طراحی می شوند که پایداری مجانبی معادلات خطا $\dot{e}(t)$ در رابطه (۱۳) برقرار باشد و چنانچه $\beta > 0$ را حداقل نرخ همگرایی در نظر بگیریم. خطای رابطه(۱۳) با حداقل نرخ β به صفر همگرا گردد.

اثبات

در مرجع [۲۰] ماتریس های بهره رویتگر توزیع شده برای سیستم خطی به صورت زیر می باشند. ما با این دستاوردها در شبکه متصل غیرجهتدار شروع می کنیم و اثبات خود را برای حالت غیرخطی توسعه می دهیم.

$$M = k\gamma e^{A\tau_1} \quad (۱۴)$$

$$G_i = \frac{N}{2}e^{A\tau_2}PH_i^T, i = 1, \dots, N \quad (۱۵)$$

در این اثبات، تابع کاندیدای لیاپانوف به شرح زیر برای تجزیه و تحلیل پایداری دینامیک خطا انتخاب می شود.

$$V(e) = \delta^T(I_N\otimes\bar{P})\delta \quad (۱۶)$$

در این رابطه ماتریس $\bar{P}$ در معادله دیفرانسیل ریکاتی (۱) که در لم ۲ ارائه شده است صدق می کند و به صورت زیر می باشد.

$$\bar{P} = e^{-A^T\tau_2}P^{-1}e^{-A\tau_2} \quad (۱۷)$$

برای اطمینان از پایداری مجانبی تابع خطا، مشتق تابع لیاپانوف باید منفی معین باشد. بدین منظور به محاسبه تابع مشتق لیاپانوف می پردازیم. در این راستا، مشتق e را از رابطه (۱۳) وبا جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در آن محاسبه می کنیم. در ادامه، نابرابری کوشی در روند اثبات حاضر گنجانده شده است. نابرابری کوشی و نتایج مهم آن در لم ۵ و مرجع [۱۸] بیان شده است. بر طبق این نابرابری داریم $2k\gamma\delta^T(t)(L\otimes\bar{P})\,z(t) \leq k\gamma\delta^T(t)(L\otimes\bar{P})\delta(t) + k\gamma z^T(t)(L\otimes\bar{P})z(t)$ در ادامه این معادلات رادر مشتق لیاپانوف جایگذاری کرده و رابطه زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq\ & \delta^T(t)\big(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2}\big)(A^TP^{-1}+P^{-1}A)(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) \\ & - N\delta(t)\big(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2}\big)\bar{H}^T\bar{H}(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) \\ & - k\gamma\delta^T(t)\big(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2}\big)\,(L\otimes P^{-1})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\,\delta(t) + k\gamma z^T(t)\big(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2}\big) \\ & (L\otimes P^{-1})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})z(t) + \delta^T(t)\big(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2}\big)(I_N\otimes P^{-1})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\,\tilde{F} \\ & + \tilde{F}^T(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes P^{-1})\,(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\,\delta(t) + \delta^T(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes P^{-1}) \\ & (I_N\otimes e^{-A\tau_2})(\Lambda d(t) - S) + (\Lambda d(t) - S)^T(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes P^{-1})\,(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\,\delta(t)\end{aligned} \quad (۱۸)$$

به منظور ساده سازی نابرابری (۱۸) ، با استفاده از شرط تطبیق در رابطه (۴) و تابع ناپیوسته S_i در معادله (۸) می توان رابطه زیر را در هر گره $i \in N$ نظر گرفت.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

$$\delta_i^T(t)e^{-A^T\tau_2}P_i^{-1}e^{-A\tau_2}(\Gamma d(t)-)+(\Gamma d(t)-s_i)^Te^{-A^T\tau_2}P_i^{-1}e^{-A\tau_2}\delta_i(t)\,s_i = -\left(\delta_i^T(t)\bar{P}_is_i+s_i^T\bar{P}_i\delta_i(t)\right)+\left(\delta_i^T(t)\bar{P}_i\Gamma d(t)+\delta_i(t)(\Gamma d(t))^T\bar{P}_i\right)= -2\delta_i^T(t)\bar{P}_is_i+2\delta_i^T\bar{P}_i\Gamma d(t) \le 2\frac{\delta_i^T\bar{P}_i\bar{P}_i^{-1}H_i^TZ_i^TZ_iH_i\delta_iD}{\|Z_iH_i\delta_i\|}-2\|\Gamma^T\bar{P}_i\delta_i\|\mathrm{D} \le 0 \quad (۱۹)$$

بنابر این داریم که $-2\delta_i^T(t)\bar{P}_is_i+2\delta_i^T\bar{P}_i\Gamma d(t)\le 2\|Z_iH_i\delta_i\|D-2\|Z_iH_i\delta_i\|D=0$ حال باتوجه به رابطه فوق، ازرابطه مشتق لیاپانوف داریم

$$\dot{V}\le\delta^T(t)\left(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2}\right)(A^TP^{-1}+P^{-1}A)(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(t)-N\delta(t)\left(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2}\right)\bar{H}^T\bar{H}(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(t)-k\gamma\delta^T(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(L\otimes P^{-1})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\,\delta(t)+k\gamma z^T(t)\left(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2}\right)(L\otimes P^{-1})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})z(t)+\delta^T(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes P^{-1})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\,\tilde{F}+\tilde{F}^T(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes P^{-1})\tilde{F}^T(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes P^{-1})\,(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\,\delta(t) \quad (۲۰)$$

به منظور ساده سازی، نامعادله (۲۰) را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\dot{V}\le\delta^T(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})\sigma(\gamma)(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(t)+k\gamma z^T(t)(L\otimes\bar{P})z(t)+\delta^T(t)(I_N\otimes\bar{P})\tilde{F}+\tilde{F}^T(I_N\otimes\bar{P})\delta(t) \quad (۲۱)$$

$$\mu(\gamma)=I_N\otimes(A^TP^{-1}+P^{-1}A)-N\bar{H}^T\bar{\mathrm{H}}-k\gamma(L\otimes P^{-1}) \quad (۲۲)$$

ترم $\sigma(\gamma)$ در رابطه مشتق لیاپانوف در نظر گرفته می شود. . همچنین در مرجع[۲۰] اثبات میگردد که .$\mu(\gamma)\le-\frac{1}{2}(\gamma I_N\otimes P^{-1})$ می باشد. با استفاده ازاین نامساوی به جایگزاری آن در رابطه (۲۱) می پر دازیم. در ادامه به بررسی ترم دوم مشتق لیاپانوف می پردازیم. برای این منظور، از نابرابری جنسن استفاده می گردد. این نابرابری به طور کلی در لم ۳ومرجع [۱۸] ارائه شده است. در ترم دوم رابطه (۲۱) و با استفاده از معادله (۱۴) و (۱۵) و حداکثر مقدار ویژه ماتریس L، ارائه شده در لم۱ ، رابطه زیر بدست می آید.

$$z^T(t)(L\otimes\bar{P})z(t)\le\tau_1\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}((I_N\otimes e^{A(t-s)})(I_N\otimes\frac{N}{2}e^{A\tau_2}P\bar{H}^T\bar{H})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(s)+(L\otimes k\gamma e^{A\tau_1})\delta(s-\tau_1))ds)^T(I_N\otimes\bar{P})((I_M\otimes e^{A(t-s)})(I_N\otimes\frac{N}{2}e^{A\tau_2}P\bar{H}^T\bar{H}(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(s)+(L\otimes k\gamma e^{A\tau_1})\delta(s-\tau_1))ds-\tau_1\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}(I_N\otimes e^{A(t-s)}\tilde{F})^T(I_N\otimes\bar{P})\left(I_N\otimes e^{A(t-s)}\tilde{F}\right)ds-\tau_1\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}(I_N\otimes e^{A(t-s)}(\Lambda d(t)-S))^T(I_N\otimes\bar{P})\left(I_N\otimes e^{A(t-s)}(\Lambda d(t)- \quad (۲۳)$$

$$S)\right)ds\le 2\tau_1\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}\left(\mu_1(t,s)+\mu_2(t,s)\right)ds-\tau_1\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}\mu_3(t,s)\,ds-\tau_1\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}\mu_4(t,s)\,ds$$

در ادامه با استفاده از معادلات ریکاتی بیان شده در لم ۲ و تعریف تابع لیاپانوف در (۱۶) برای هر ثابت $\varphi>1$ داریم که

$$V(t+\theta)\le\varphi V(t),for\ \ \theta\epsilon[-2\tau_1,0]$$

$$\mu_1(t,s)\le\frac{(nN\gamma)^2}{4}e^{(n-1)\gamma(t-s)}V(s)$$

$$\mu_2(t,s)\le\lambda_N^2(k\gamma)^2\times e^{(n-1)\gamma(t-s+\tau_1)}V(s-\tau_1)\le\varphi\lambda_N^2(v\gamma)^2e^{(n-1)\gamma(t-s+\tau_1)}V(s).$$

با استفاده از نامساوی ینسن که در لم(۳) بیان شده است.

در ادامه به محاسبه $\mu_3(t,s)$ می پردازیم.

$$-\tau_1\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}\mu_3(t,s)\,ds=-\tau_1\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}(I_N\otimes e^{A(t-s)})\tilde{F})^T(I_N\otimes\bar{P})(I_N\otimes e^{A(t-s)}\tilde{F})ds\le\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}(\tilde{F}^T(I_N\otimes e^{A^T(t-s)}))ds(I_N\otimes\bar{P})\int_{t-\tau_1}^{t}((I_N\otimes e^{A(t-s)})\tilde{F})ds\le\lambda_N\tilde{F}^T\times((I_N\otimes\frac{1}{A^T}(e^{A^T\tau_1}-1))(I_N\otimes\bar{P})(I_N\otimes\frac{1}{A}(e^{A\tau_1}-1))\,\tilde{F}) \quad (۲۴)$$

در ادامه به محاسبه $\mu_4(t,s)$ بااستفاده از شرط تطبیق (۴) و نامساوی ینسن و تابع ناپیوسته S_i در (۸)و روابط (۱۴) و(۱۵)داریم

$$-\tau_1\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}\mu_4(t,s)\,ds=-\tau_1\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}(I_N\otimes e^{A(t-s)}(\Lambda d(t)-S))^T(I_N\otimes\bar{P})\left(I_N\otimes e^{A(t-s)}(\Lambda d(t)-S)\right)\le\lambda_N\int_{t-\tau_1}^{t}((\Lambda d(t)-S)^T(I_N\otimes e^{A^T(t-s)}))ds(I_N\otimes\bar{P})\times\int_{t-\tau_1}^{t}((I_N\otimes e^{A(t-s)})(\Lambda d(t)-S))ds\le\lambda_N(\Lambda d(t)-S)^T(I_N\otimes\frac{1}{A^T}(e^{A^T\tau_1}-1))(I_N\otimes\bar{P})(I_N\otimes\frac{1}{A}(e^{A\tau_1}-1))(\Lambda d(t)-S))k\gamma z^T(t)(L\otimes\bar{P})z(t)\le\phi_1(\gamma)\gamma^3V+\phi_2(\gamma)+\phi_3(\gamma) \quad (۲۵)$$

$$\phi_1(\gamma)=2k\lambda_N\tau_1\varphi\frac{(e^{(n-1)\gamma(\tau_1)}-1)}{(n-1)\gamma}\times\left(\frac{n^2N^2}{4}k^2+\lambda_N^2e^{(n-1)\gamma\tau_1}\right)$$

$$\phi_2(\gamma)=k\gamma\lambda_N(\tilde{F}^T\times(I_M\otimes\frac{1}{A^T}(e^{A^T\tau_1}-\text{و}(e^{A\tau_1}-1))\,\tilde{F})1))(I_N\otimes\bar{P})(I_N\otimes\frac{1}{A}(I_N\otimes\frac{1}{A^T}(e^{A^T\tau_1}-\phi_3(\gamma)=k\gamma\lambda_N(\Lambda d(t)-S)^T\times1))(I_N\otimes\bar{P})(I_N\otimes\frac{1}{A}(e^{A\tau_1}-1))(\Lambda d(t)-S))$$

در ادامه معادله (۲۵) را در مشتق تابع لیاپانوف معادله(۲۱) جایگزاری می نماییم.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

$$\begin{aligned}&\dot{V}\\&\leq \delta^T(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes(A^TP^{-1}\\&+P^{-1}A))\,(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(t)\\&-N\delta^T(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})\bar{H}^T\bar{H}(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\,\delta(t)\\&-k\gamma\delta^T(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})\\&(L\otimes P^{-1})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(t)\\&+k\gamma\lambda_N(\tilde{F}^T\times(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes\frac{1}{A^T}(e^{A^T\tau_1}\\&-1))\,(I_N\otimes P^{-1})(I_N\otimes\frac{1}{A}(e^{A\tau_1}\\&-1))\,(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\,\tilde{F})+\delta^T(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})\\&(2k\lambda_N\tau_1\,\varphi\,\frac{(e^{(n-1)\gamma(\tau_1)}-1)}{(n-1)\gamma}\times(\frac{n^2N^2}{4}k^2+\\&\lambda_N^2e^{(n-1)\gamma\tau_1}))\,(I_N\otimes P^{-1})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(t)+\\&(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes P^{-1})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\,\tilde{F}+\\&{}^{T}(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes P^{-1})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\delta(t)+\\&(I_N\otimes\frac{1}{A^T}(e^{A^T\tau_1}-k\gamma\lambda_N(\Lambda d(t)-S)^T\\&1))(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_M\otimes e^{-A\tau_2})(I_N\otimes\frac{1}{A}(e^{A\tau_1}-\\&1))(\Lambda d(t)-S))\end{aligned}\qquad(۲۶)$$

در ادامه رابطه زیر را تعریف می نماییم

$$\Omega(t)=col\begin{Bmatrix}\delta^T(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2}),\\,(\tilde{F}+S-\Lambda d(t))^T(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})\end{Bmatrix}\qquad(۲۷)$$

در ادامه می توان مشتق تابع لیاپانوف را به صورت $\dot{V}\leq \Omega(t)^Tv_1\Omega(t)$ نوشت. و با استفاده از تئوری لیاپانوف به منظور اثبات پایداری دینامیک خطا کافی است: $\dot{V}\leq \Omega(t)^Tv_1\Omega(t)$ $-\zeta|\delta(t)|^2$ به طوری که به ازای $\zeta>0$ داریم :

$$0v_1=\begin{bmatrix}w_{11} & (I_N\otimes P^{-1})\\(I_N\otimes P^{-1}) & w_{22}\end{bmatrix}\leq\qquad(۲۸)$$

به گونه ایی که داریم

$$\begin{aligned}&)-N\bar{H}^T\bar{H}-w_{11}=I_N\otimes(A^TP^{-1}+P^{-1}A\\&k\gamma(L\otimes P^{-1})\;+(2k\lambda_N\tau_1\varphi\frac{(e^{(n-1)\gamma(\tau_1)}-1)}{(n-1)\gamma}\times\\&(\frac{n^2N^2}{4}k^2+\lambda_N^2e^{(n-1)\gamma\tau_1}))(I_N\otimes P^{-1}),\\&w_{22}=k\gamma\lambda_N(I_N\otimes\frac{1}{A^T}(e^{A^T\tau_1}-\\&1))(I_N\otimes P^{-1})(I_N\otimes\frac{1}{A}(e^{A\tau_1}-1))\end{aligned}$$

از طرف دیگر طبق فرضیات مساله، تابع غیر خطی $f\in R^M$ را به گونه ایی در نظرگرفته ایم که در شرایط لیپ شیتز صدق می کند. در ادامه هر دو طرف رابطه(۱۱) را در $(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})>0$ ضرب می کنیم وداریم

$$\begin{aligned}&\tilde{F}^T(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\tilde{F}-\\&\delta_i^T(t)(I_N\otimes e^{-A^T\tau_2})(I_N\otimes\alpha^2I_n)\,(I_N\otimes e^{-A\tau_2})\\&\delta_i(t)\leq 0\end{aligned}$$

بنابر این با استفاده از تعریف $\Omega(t)$ در رابطه (۲۷) می توان عبارت $\Omega(t)^Tv_{11}\Omega(t)\leq 0$ را محاسبه کرد به طوری که

$$v_{11}=\begin{bmatrix}-(I_N\otimes\alpha^2I_n) & 0\\0 & I_{Nn}\end{bmatrix}\leq 0\qquad(۲۹)$$

در ادامه روند اثبات، ازرابطه $-$ procedureS استفاده می نماییم. این رابطه در لم ۴ و مرجع [۲۸] بیان شده است. در این راستا با استفاده از تعریف $\Omega(t)$ در رابطه (۲۷) و با بکارگیری لم ۴، در دو ماتریس (۲۸)و (۲۹) روابط زیر برقرار می باشد . چنانچه دو ماتریس $v_{11}\in R^{n\times n}$, $v_1\in R^{n\times n}$ را در نظر بگیریم. اگر یک اسکالر حقیقی $\psi\geq 0$وجود داشته باشد به گونه ایی که $v_{11}^*=v_1-\psi v_{11}<0$ بنابراین $\Omega(t)^Tv_1\Omega(t)<0\;\;for\;any\;\Omega(t)\epsilon R^n\neq 0$ و این ضمانتی است که $\Omega(t)^Tv_{11}\Omega(t)<0 for\;any\;\Omega(t)\epsilon R^n\neq 0$ بنابراین داریم که

$$v_{11}^*=\begin{bmatrix}w_{11}^* & (I_N\otimes P^{-1})\\(I_N\otimes P^{-1}) & w_{22}^*\end{bmatrix}\leq 0\qquad(۳۰)$$

به گونه ایی که داریم

$$\begin{aligned}&w_{11}^*=I_N\otimes(A^TP^{-1}+P^{-1}A)-N\bar{H}^T\bar{H}-\\&k\gamma(L\otimes P^{-1})\;+(2k\lambda_N\tau_1\varphi\frac{(e^{(n-1)\gamma(\tau_1)}-1)}{(n-1)\gamma}\times\\&(\frac{n^2N^2}{4}k^2+\lambda_N^2e^{(n-1)\gamma\tau_1}))(I_N\otimes P^{-1}))+\\&\psi(I_N\otimes\alpha^2I_n)\\&w_{22}^*=k\gamma\lambda_N(I_N\otimes\frac{1}{A^T}(e^{A^T\tau_1}-\\&1))(I_N\otimes P^{-1})(I_N\otimes\frac{1}{A}(e^{A\tau_1}-1))-\psi I_{Nn}\end{aligned}$$

همانگونه که مشاهده می گردد ماتریس v_{11}^* یک ماتریس غیرخطی می باشد، به منظور محاسبه شرایط پایدارسازی خطا در ابتدا این ماتریس را به زیرماتریسهای A, B, C, D بگونه ایی تقسیم می نماییم که

$$A=w_{11}^*,\;B=I_N\otimes P^{-1},\;C=I_N\otimes P^{-1},\;D=w_{22}^*$$

در ادامه اثبات از مکمل شور[۱۸]، استفاده می گردد به گونه ایی که $G(\gamma)=A-BD^{-1}C$ تابع خطا پایدار می گردد اگر شرایط زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned}&G(\gamma)=\;w_{11}^*-\\&(I_N\otimes P^{-1})w_{11}^{*\,-1}(I_N\otimes P^{-1})<0\blacksquare\end{aligned}\qquad(۳۱)$$

نکته ۳

برای هررابطه $G(\gamma)$ میتوان یک $\gamma^*>0$ در نظر گرفت به گونه ایی که $G(\gamma^*)=0$ همچنین برای هر $\gamma\in(0,\gamma^*)$ داریم$G(\gamma)<0$ و برای هر $\gamma>0$ می توان یک $k>0$ به اندازه کافی بزرگ، در نظرگرفت که ضمانتی بر $G(\gamma)<0$ می باشد. دراین مقاله هدف ما طراحی رویتگرتوزیع شده برای سیستمهای غیرخطی همراه با اعمال نامعینی و دو تاخیر زمانی در حالت و خروجی در یک شبکه غیرجهتدار می باشد. درادامه، به منظور ارائه راه حل بهتر، شرایط ارائه شده در قضیه ۱ تضمینی بر پایداری مجانبی e(t) بر اساس نابرابری جنسن است که منجر به محافظه کاری معینی در یک کلاس کلی از سیستم های غیر

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

خطی با شرایط لیپشیتز و تابع لیاپانوف می باشد. در این راستا الگوریتم زیر را می توان برای طراحی k و γ به گونه ای بیان کرد که برای هر G_i , M به اندازه کافی بزرگ، صادق باشد. فلوچارت الگوریتم در پیوست ۲ نشان داده شده است.

Algorithm 1

ورودی: مقدار اولیه k_0 با استپ h را در نظر می گیریم.

I. مقدار اولیه $k=k_0$ را در نظر می گیریم.

II. بر طبق رابطه (۲۲) پارامتر $\mu(\gamma_1^*)$ را در نظر می گیریم، در این راستا یک ثابت مثبت γ_1^* را به گونه ایی انتخاب می کنیم که شرط $\mu(\gamma_1^*) \le -\frac{1}{2}\gamma_1^*(I_M \otimes P^{-1})$ برقرارباشد.

III. رابطه (۲۵) را در نظر می گیریم در این رابطه یک ثابت مثبت γ_2^* را به گونه ایی انتخاب میکنیم که شرط $k\gamma z^T(t)(L\otimes\bar{P})z(t) \le \phi_1(\gamma)\gamma^3 V + \phi_2(\gamma) + \phi_3(\gamma)$ برقرارباشد.

IV. یک $\gamma \le \min(\gamma_1^*, \gamma_2^*)$ را در نظر می گیریم اگر رابطه (۳۱) به صورت زیر برقراربود که الگوریتم پایان می یابد، درغیر این صورت پارامتر k را به صورت $k = k + h$, در نظر می گیریم وبه مرحله ۲ باز می گردیم.

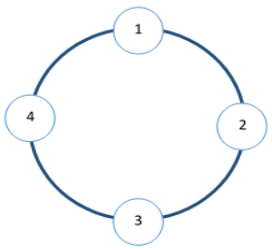
$-(I_N \otimes P^{-1})w_{11}^{*\,-1}(I_N \otimes P^{-1}) < 0 G(\gamma) = w_{11}^*$

خروجی: k و γ را به عنوان خروجی درنظر می گیریم.

نکته ٤

تحت یک شبکه متصل غیرجهتدار به طراحی ماتریسهای M و G_i با استفاده از روابط (۱۴)و(۱۵) می پردازیم. علاوه بر آن با استفاده از الگوریتم ۱ به طراحی پارامترهای γ, k می پردازیم. هر رویتگر اندازه گیریهای موجود خود را جمع آوری می کند و از طریق یک شبکه اتصال غیرجهتدار، اندازگیریهای خود را با اندازگیریهای همسایگان خود مبادله می کند. به این ترتیب، رویتگر مدلغزشی توزیع شده به طور مشترک وضعیت سیستم را دنبال خواهد کرد.

٤- شبیه سازی



شکل ۲: شبکه گراف متصل غیرجهتدار

در این قسمت به بررسی روش پیشنهادی در یک شبکه متصل غیرجهتدار می پردازیم.

مثال ۱: سیستم زیر رادر نظربگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t,x) + \Gamma d(t)$$

$$y_i = H_i x(t), \quad i = 1, \dots, M$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.3770 & 0.6841 & 0 \\ -0.3770 & 0 & 0 & 0.6841 \\ -0.4589 & 0 & -0.0128 & 0.3770 \\ 0 & -0.4589 & -0.3770 & -0.0128 \end{bmatrix}$$

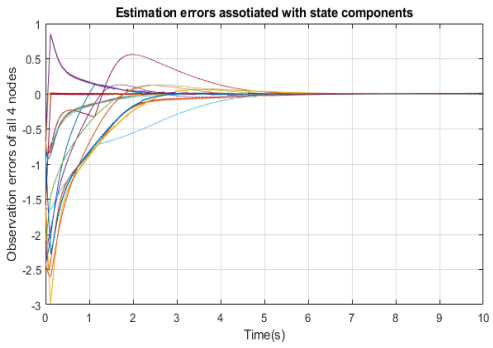
$H_1 = [0,0,1,0], H_2 = [1,0,0,1], H_3 =$ H=[H1' H2' H3' H4']'[1,0,1,0,], $H_4 = [0,1,0,0]$,

$$H = \begin{bmatrix} 0,0,1,0 \\ 1,0,0,1 \\ 1,0,1,0 \\ 0,1,0,0 \end{bmatrix}, f(t,x) = \begin{bmatrix} 3\sin(x_1) + 5\cos(x_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Gamma d(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\sin(\pi t))$,دراین شبیه سازی دو تاخیر زمانی درحالت و خروجی به صورت $\tau_1 = 1$ و $\tau_2 = 2$ در نظرگرفته شده است. همچنین بر طبق محاسبات انجام شده در الگوریتم ارائه شده $\psi = 0.1$ ،S-prosecute و ثابت $\gamma = 0.01$, $w = 60$ همچنین $P(\gamma)$ برطبق معادلات ریکاتی (۱) محاسبه می گردد. گراف ارتباطی بین گرهها مانند شکل ۱ می باشند .با اعمال رویتگر مدلغزشی توزیع شده غیرخطی به سیستم فوق نتایج شبیه سازی بصورت زیر می باشد. شکل۲ خطای تخمین رادر تمام ۴ رویتگر نشان می دهد و شکل۳ خطای ردیابی مسیر هر ۴رویتگر را در ۴ شکل مجزا نشان می دهد.

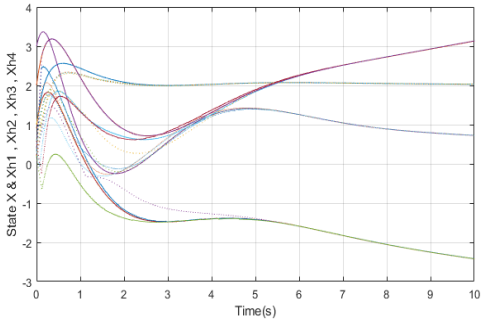
$$M = \begin{bmatrix} 0.9796 & 0.1113 & 0.2026 & 0.0230 \\ -0.1113 & 0.9796 & -0.0230 & 0.2026 \\ -0.1359 & -0.0154 & 0.9758 & 0.1108 \\ 0.0154 & -0.1359 & -0.1108 & 0.9758 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.0145 \\ 0.0084 \\ 0.0082 \\ 0.0056 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.0091 \\ 0.0101 \\ 0.0082 \\ 0.0085 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 0.0199 \\ 0.0093 \\ 0.0097 \\ 0.0108 \end{bmatrix}, G_4 = \begin{bmatrix} 0.0157 \\ 0.0100 \\ 0.0100 \\ 0.004 \end{bmatrix}$$



شکل۳: خطای تخمین در تمام ۴ رویتگر(E_1,E_2,E_3,E_4)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]



شکل۴: نمودار مقادیر حقیقی و تخمین زده شده حالتها در هر ۴ رویتگر

مثال ۲: به منظورمقایسه عملکرد ارائه شده ، مقاله مرجع [۲۸] را در نظر گرفته وبا اعمال پارامترهای غیرخطی آن را بهبود بخشیده ایم. مقادیرماتریسها و شبکه گراف در مرجع مورد د نظر بیان شده است. تابع غیر خطی را به صورت زیر در نظر می گیریم. مقادیر پارامترهای غیر خطی در رابطه زیر بیان شده است.

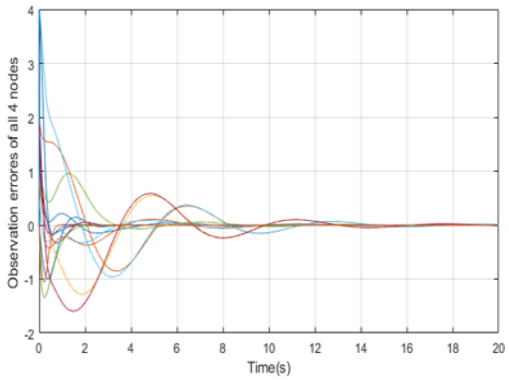
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x,t)$$
$$y_i = H_i x(t)\,, \quad i = 1, \dots, N$$
$$f(x,t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sin(x) + 3\cos(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای بهره رویتگر محلی M_i و L_i به صورت زیر محاسبه می گردد

$$L_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2.25 & 0 & 0 \\ 2.25 & 2.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$, M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.144 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1.548 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7410 & 1.1250 \\ 0 & 0 & 1.1250 & 1.2870 \end{bmatrix}$$



شکل۵ : خطای تخمین در تمام ۴ رویتگر(E_1,E_2,E_3,E_4)

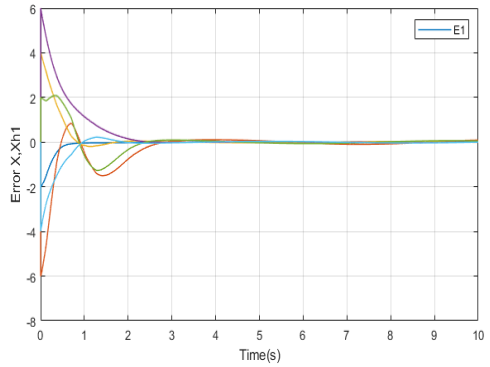
مثال ۳: به منظورمقایسه عملکرد ارائه شده ، مقاله مرجع [۳۱] را در نظر گرفته وبا اعمال پارامترهای غیرخطی آن را بهبود بخشیده ایم. مقادیرماتریسها و شبکه گراف در مرجع مورد د نظر بیان شده است. تابع غیر خطی را به صورت زیر در نظر می گیریم. مقادیر پارامترهای غیر خطی در رابطه زیر بیان شده است.

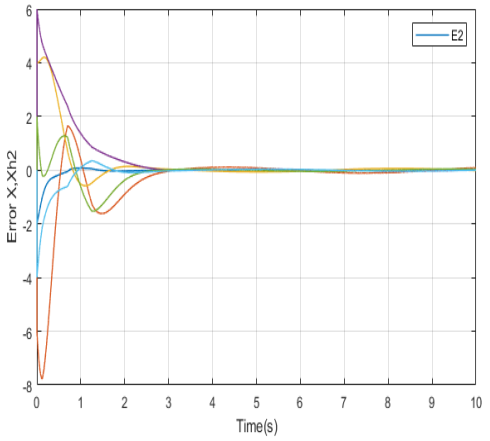
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x,t) + \Gamma d(t)$$
$$y_i = H_i x(t)\,, \quad i = 1, \dots, N$$
$$\Gamma d(t) = 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(t), f(x,t) = \begin{bmatrix} 3\sin(\pi x) \\ 3\sin(\pi x) \\ 3\sin(\pi x) \\ 3\sin(\pi x) \\ 3\sin(\pi x) \\ 3\sin(\pi x) \end{bmatrix}$$

ماتریسهای بهره رویتگر محلی M_i و L_i به صورت زیر محاسبه می گردد.

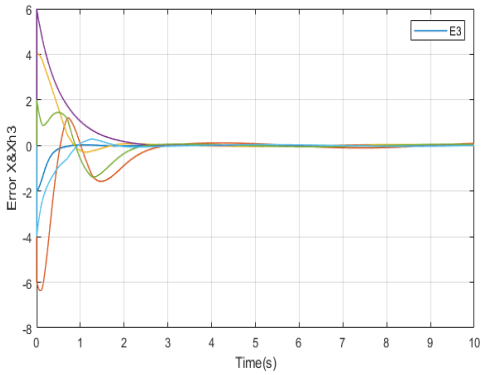
$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.1436 & 0.5757 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5218 & -0.1822 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1.2638 \\ -6.3179 \\ 0.3438 \\ -2.0418 \\ -5.5558 \\ 1.4010 \end{bmatrix},$$

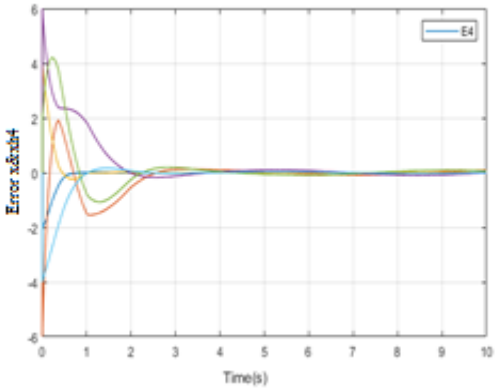
$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4311 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} -0.0069 & -0.0137 \\ -1.7673 & -3.5346 \\ 0.4472 & 0.8944 \\ 0.5823 & 1.1646 \\ -0.8332 & -1.6664 \\ 0.2372 & 0.4744 \end{bmatrix}$$



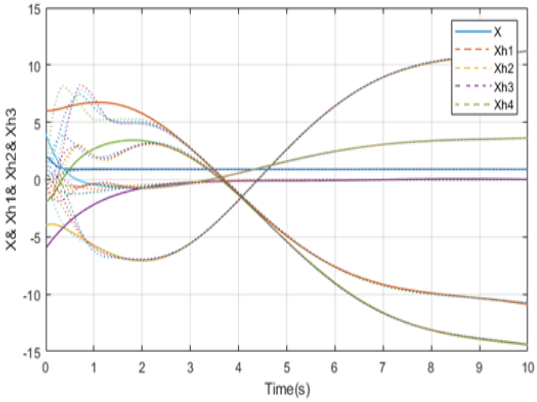


[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]





شکل۶: خطای تخمین در تمام ۴ رویتگر(E_1,E_2,E_3,E_4)



شکل ۷: نمودار مقادیر حقیقی و تخمین زده شده در تمام رویتگرها

نتیجه گیری

مقاله پژوهشی حاضر طراحی رویتگر مد لغزشی توزیع‌شده را برای یک کلاس از سیستم‌های غیرخطی شامل تأخیرهای زمانی و اعمال نامعینی در نظر می‌گیرد. انگیزه اصلی این کار رفع نواقص تخمین متمرکز با ارائه یک استراتژی رویتگر توزیع شده مناسب با عملکرد بهتر نسبت به رویکردهای پیشرفته می باشد. رویتگرمدلغزشی توزیع شده پیشنهادی به بخشی از خروجی دسترسی دارد و با رویتگرهای مجاور خود از طریق یک شبکه گراف غیرجهتدار تاخیری در ارتباط است. روش طراحی بر اساس بکارگیری شرایط لیپشیتز در بخش غیرخطی و با انتخاب توابع مناسب لیاپانوف و اعمال نابرابری جنسن در شبکه‌های متصل غیرجهتدار ، انجام شده است. در این راستا قضایایی که پایداری مجانبی خطا را تضمین می کنند ارائه شده و روند طراحی پارامترهای رویتگر در یک الگوریتم خلاصه شده است. در نهایت، نتایج شبیه‌سازی برای شبکه متصل غیرجهتدار مورد بررسی قرار گرفت.

پیوست ۱

ابتدا رابطه خطا را برای تمام حالتها در نظر می گیریم.

$$\dot{\delta}(t) = \left(I_N \otimes A - \bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\right)\delta(t) - (L \otimes M)\delta(t-\tau_1) + \tilde{F} + \Lambda d(t) - S$$

دو طرف رابطه بالا را در $(I_N \otimes e^{A(t-s)}) < 0$ ضرب می کنیم و داریم که

$$(I_N \otimes e^{A(t-s)})\dot{\delta}(t) = (I_N \otimes e^{A(t-s)})(I_N \otimes A)\delta(t) - (I_N \otimes e^{A(t-s)})\,(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) - (I_N \otimes e^{A(t-s)})(L \otimes M)\delta(t-\tau_1) + S)(I_N \otimes e^{A(t-s)})(\tilde{F} + \Lambda d(t) -$$

در این راستا عبارات شامل $\left(I_N \otimes e^{A(t-s)}\right)(I_N \otimes A)\delta(t)$ را یک طرف می بریم.

$$\left(I_N \otimes e^{A(t-s)}\right)\dot{\delta}(t) - \left(I_N \otimes e^{A(t-s)}\right)(I_N \otimes A)\delta(t) = (I_N \otimes e^{A(t-s)})\,(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) - (I_N \otimes e^{A(t-s)})(L \otimes M)\delta(t-\tau_1) + S)(I_N \otimes e^{A(t-s)})(\tilde{F} + \Lambda d(t) -$$

در ادامه باتوجه به خصوصیات ضرب کرانکر داریم

$$\left(I_N \otimes e^{A(t-s)}\right)(L \otimes M)\delta(t-\tau_1) = (L \otimes M e^{A(t-s)})\delta(t-\tau_1)$$

با توجه به تعریف مشتق داریم $\left(I_N \otimes e^{A(t-s)}\right)\dot{\delta}(t) -$

$$\left(I_N \otimes e^{A(t-s)}\right)(I_N \otimes A)\delta(t) = \frac{d}{dt}\left(\left(I_N \otimes e^{A(t-s)}\right)\delta(t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left(I_N \otimes e^{A(t-s)}\right)\delta(t)\right) = -(I_N \otimes e^{A(t-s)})\,(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) - (L \otimes M e^{A(t-s)})\delta(t-\tau_1) + (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\tilde{F} + S)\Lambda d(t) -$$

در ادامه از دو طرف رابطه انتگرال می گیریم.

$$\int_{s=t-\tau_1}^{s=t} \frac{d}{dt}\left(\left(I_N \otimes e^{A(t-s)}\right)\delta(t)\right) = -\left(\int_{s=t-\tau_1}^{s=t} (I_N \otimes e^{A(t-s)})\,(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) + \left(L \otimes M e^{A(t-s)}\right)\delta(s-\tau_1) - (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\tilde{F} + \right) = \left(\left(I_N \otimes e^{A(t-t)}\right)\delta(t)\right) - \Lambda d(t) - S)\,)\,ds$$

$$\left(\left(I_N \otimes e^{A(t-t+\tau_1)}\right)\delta(t-\tau_1)\right) = -\left(\int_{s=t-\tau_1}^{s=t} (I_N \otimes e^{A(t-s)})\,(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) + \left(L \otimes M e^{A(t-s)}\right)\delta(s-\tau_1) - (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\tilde{F} + \Lambda d(t) - S)\right) ds$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

$$\delta(t) - \left(\left(I_N \otimes e^{A(t-t+\tau_1)}\right)\delta(t-\tau_1)\right) = -\left(\int_{s=t-\tau_1}^{s=t}(I_N \otimes e^{A(t-s)})\left(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) + \left(L \otimes M e^{A(t-s)}\right)\delta(t-\tau_1) - \left(I_N \otimes e^{A(t-s)}\right)\left(\tilde{F} + \Lambda d(t) - S\right)\right)\mathrm{ds}$$

$$\delta(t) = \left(I_N \otimes e^{A(\tau_1)}\right)\delta(t-\tau_1) - \left(\int_{s=t-\tau_1}^{s=t}(I_N \otimes e^{A(t-s)})\left(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) + \left(L \otimes M e^{A(t-s)}\right)\delta(s-\tau_1) - (I_N \otimes e^{A(t-s)})\left(\tilde{F} + \Lambda d(t) - S\right)ds\right.$$

در ادامه، بخش شامل انتگرال را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$z(t) = \int_{s=t-\tau_1}^{s=t}(I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})e(s) + S))ds(L \otimes M)e(s-\tau_1) - (\tilde{F} + \Lambda d(t) -$$

تعریف می گردد و به صورت محدود می باشد.بنابراین داریم که

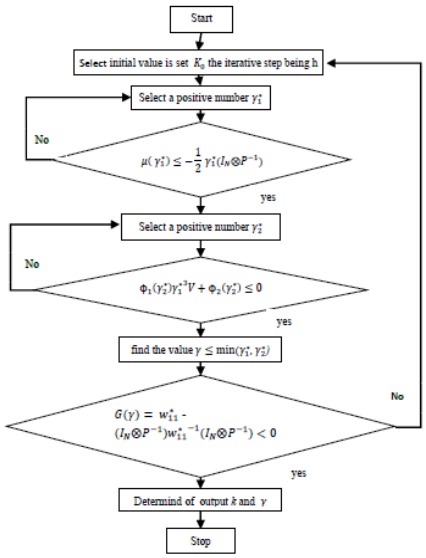
از آنجایی که $\delta(t)$ در بازه $t \in [-\tau_1, 0]$

در این $\delta(t-\tau_1) = \left(I_N \otimes e^{-A(\tau_1)}\right)(\delta(t) + z(t))$

راستا مشتق خطا به صورت زیر می باشد.

$$\dot{\delta}(t) = \left(I_N \otimes A - \bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}) - (L \otimes M e^{-A\tau_1})\right)\delta(t) - (L \otimes M e^{-A\tau_1})z(t) + (\tilde{F} + S) \blacksquare \Lambda d(t) -$$

پیوست۲



شکل ۸: فلوچارت الگوریتم طراحی پارامترهای kو γ

مراجع

[1]. W. Fei-Yue and L. Derong, "Networked Control Systems: Theory and Applications," ed: Springer-Verlag, London, 2008.

[2]. W. Ren, R. W. Beard," Distributed Consensus in Multi- vehicle cooperative control", theory and application, Springer, 2008.

[3]. J. Lunze, "Control theory of digitally networked dynamic systems". Springer, 2014

[4]. F.L. Lewis, H.Zhang,, K.H Movric, A. Das, "Cooperative Control of Multi-Agent Systems" optimal and adaptive Design Approaches,Springer,2014.

[5]. Y. Bar-Shalom, XR Li, T Kirubarajan " Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software", Amazon, 2004.

[6]. L. Wang and A. S. Morse, "A distributed observer for a time-invariant linear system," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 63, PP. 2123-2130, 2018.

[7]. S. Park and N. C. Martins, "Design of Distributed LTI Observers for State Omniscience", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.2, No. 4, April 2017.

[8]. A. Mitra and S. Sundaram, "Distributed observers for LTI systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.63, No. 11, PP. 3689-3704, 2018..

[9]. K. Liu, H. Zhu, and J. Lü," Cooperative Stabilization of a Class of LTI Plants With Distributed Observers", IEEE Transaction on Circutis and systems,2017

[10]. Zak, H. Stanislaw, "On the Stabilization and Observation of Nonlinear/Uncertain Dynamic Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.35.5, PP. 604-607, 1990.

[11]. Raghavan, Sekhar, and J.K. Hedrick, "Observer Design for a Class of Nonlinear Systems", International Journal of Control 59.2,PP..515-528.1994.

[12]. R. Rajamani,"Observer for Lipschitz nonlinear Systems", IEEE Transactions on Automatic control, Vol. 43.3, PP. 397-401, 1998.

[13]. Dan Simom." Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches "Springer, 2006.

[14]. R. Olfati-Saber and J. S. Shamma, "Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion," in Decision and Control, 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on, 2005, pp. 6698-6703:.

[15]. G. Ciccarella, M.. DallaMora and A. Germani."A Luenberger - Like observer for nonlinear systems". International Journal of Control, Vol.57.3.PP. 537-556, 1993A.

[16]. Murat and P. Kokotovic, "Nonlinear Observer: a circle criterion design and robustness analysis." Automatica, Vol.37.2. PP. 1923-1930. 2001.

[17]. M.Krstic, "Delay Compensation for nonlinear, Adaptive, and PDE Systems, Birkhauser,2009

[18]. E.Fridman, " Introduction to Time-Delay Syatems, , Birkhauser,2014

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]

design for linear systems". IEEE Transactions on Automatic Control. 64(1):329-336. 2019.

[32]. G. Yang, H. Rezaee, and T. Parisini," Distributed State Estimation for a Class of Jointly Observable Nonlinear Systems" IFAC PapersOnLine Vol. 53, No.2,, PP.5045–5050,2020.

[33]. H. Xu, J. Wang and H. Wang and W. Bohui,""Distributed observers design for a class of nonlinear systems to achieve omniscience asymptotically via differential geometry"International Journal of Robust and Nonlinear Control,2021.

[34]. Md. Masud Rana, LiLi,Steven W.su and Wei Xiang," Micro grid State Estimation: A Distributed Approach", IEEE Transaction on Industrial Informatic",2017

[19]. J.Wei，W.Hongli，L.Jinghui，Q.Weiwei,C. Guangbin , " Non fragile Robust Model Predictive Control for Uncertain Constrained Time-delayed System with Compensations", Journal of Franklin Institute, 2017.

[20]. K. Liu, J. Lü, and Z. Lin, "Design of Distributed Observers in the Presence of Arbitrarily Large Communication Delays," IEEE transactions on neural networks and learning systems, Vol. 29, No. 9, PP. 4447-4461, 2018.

[21]. .M. Farza and O. H.Gonz and. T. Ménard and , B.Targui, and M. M'Saad , and C.M. aragoza," Cascade observer design for a class of uncertain nonlinear systems with delayed outputs" , Automatica, . 2017.

[22]. .M. Ekramian,S. Hosseinnia, F.Sheikholeslam,"General framework in designing Luenberger - Like nonlinear observer ". IET Control Theory & Applications, Vol.7, no. 2, PP. 253-260,2013.

[23]. A.M.Pertew,H.J.Marquez, Zhao,"H/sub/spl/ infin//observer design for lipschitznonlinear system", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 51,no.7,PP.1211-1216,2006..

[24]. M.S.Chen, C.C.Chen,"Robust nonlinear observer for Lipschitz nonlinear systems subject to disterbances," IEEE Transaction on Automatic Control vol.52,no.12,PP.2365-2369,2007.

[25]. M.Ekramian, S.Hosseinnia, F. Sheikholeslam,"Observer design for nonlinear systems based on generalised Lipschitz condition" IET Control Theory & Applications, vol.5,no.16.PP. 1813-2011.

[26]. M. Hou,K,Busawon,M.Saif," Observer design fornonlinear systems via injective mapping", IEEE Transaction on Automatic Control, vol.45.PP. 1350-1355,2000.

[27]. S.Mobayen, D.Baleanu," Linear matrix inequalities designapproach for robust stabilizationof uncertain nonlinearsystems with perturbation based on optimally-tuned global sliding mode control", Journal of Vibration and control, vol. 23,no.8,PP.1285-1295,2017.

[28]. T. Kim, H. Shim, and D. D. Cho, "Distributed luenberger observer design," in Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on, 2016, pp. 6928- 6933: IEEE.

[29]. V. Yakubovich,"S-procedure in nonlinear control theory",Vestn Leningr Univ 62–77,1971.

[30]. Jenabzadeh and B. Safarinejadian," A Lyapunove -based distributed consensus filter for a class of nonlinear stochastic systems" Automatica, Vol.86, pp.53-62. 2017.

[31]. Han W, Trentelman H L, Wang Z, and Shen YA" simple approach to distributed observer

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.7.5]
[DOI: 10.61186/joc.16.4.85]