مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۷، شماره ۱، بهار ۱۴۰۲، صفحه ۱۵-۱

چارچوب کنترلی زمان-متناهی ترکیبی برای ربات اسکلت بیرونی با استفاده از رویکرد کنترل غیرخطی مقاوم-تطبیقی

علی ابوئی[۱]، مهدیه کوفه[۲] و مهدی اله‌بخشی[۳]

[۱] استادیار، بخش الکترونیک و کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه یزد، Aliabooee@yazd.ac.ir

[۲] فارغ‌التّحصیل کارشناسی‌ارشد مهندسی برق-کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه یزد، Mh.koofeh@stu.yazd.ac.ir

[۳] دانشیار، بخش مهندسی قدرت و کنترل، دانشکده مهندسی برق وکامپیوتر، دانشگاه شیراز، Allahbakhshi@shirazu.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۱/۰۶/۱۵ ویرایش اول: ۱۴۰۱/۰۹/۰۷ ویرایش دوم: ۱۴۰۲/۰۱/۱۷ ویرایش سوم: ۱۴۰۲/۰۲/۰۷ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۱۶

چکیده: در این مقاله با استفاده از رویکرد کنترل غیرخطی مقاوم-تطبیقی، ساختار کنترلی ترکیبی جدیدی برای حل مسئله‌ی ردیابی زمان-متناهی ربات اسکلت بیرونی (با وجود اصطکاک ناشناخته، نامعیّنی پارامتری، عدم‌قطعیّت مدل‌سازی و گشتاور انسانی نامعلوم) ارائه می‌گردد تا جابجایی‌های زاویه‌ای مفاصل این نوع ربات بعد از گذشت مدّت زمان متناهی دقیقاً به مسیرهای موردنظر برسند. در این راستا، ابتدا مدل غیرخطی کاملی برای توصیف رفتار دینامیکی ربات اسکلت بیرونی ارائه شده و ثابت‌های فیزیکی (هم‌چون جرم، طول و ممان اینرسی بازوها) همگی نامعلوم فرض می‌گردند. علاوه بر این، نیروهای اصطکاک نامعلوم، عدم‌قطعیّت مدل‌سازی و گشتاورهای انسانی نامعلوم (در قالب اغتشاش خارجی) به صورت عبارت‌های جمعی به مدل اضافه گردیده‌اند. بخش‌هایی از مدل که شامل ثابت‌های فیزیکی نامعلوم و نیروهای اصطکاک ناشناخته هستند به صورت دو فرم جداگانه‌ی رگرسوری خطی در پارامتر نوشته می‌شوند. در ادامه، کنترل‌کننده‌های غیرخطی مقاوم-تطبیقی به گونه‌ای طرّاحی می‌شوند که در حضور عوامل نامطلوب مورد اشاره، هدف ردیابی زمان-متناهی برای ربات اسکلت بیرونی برآورده شده و پایداری زمان-متناهی کلّی سیستم حلقه‌بسته تضمین گردد. در ساختار کنترلی ترکیبی پیشنهادی، از تلفیق راهکار کنترل مد لغزشی پایاندار (شامل سطوح لغزشی غیرخطی نوآورانه) و قوانین تطبیقی زمان-متناهی استفاده می‌شود. این قوانین به منظور تخمین ثابت‌های فیزیکی مدل، ضرایب نامعلوم نیروهای اصطکاکی، گشتاورهای انسانی نامعلوم و کران بالای نرم اقلیدسی بردار اغتشاش خارجی به کار گرفته می‌شوند. تحلیل‌های ریاضیاتی مقاله نشان می‌دهد که پاسخ‌های زمانی همه‌ی تخمین‌ها بعد از سپری شدن زمان متناهی، دقیقاً به مقادیر ثابت همگرا خواهند شد. در انتها، ساختار کنترلی غیرخطی پیشنهادی بر روی یک نوع ربات اسکلت بیرونی دو درجه آزادی مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرد تا درستی عملکرد و کارایی آن آشکار گردد.

کلمات کلیدی: پایداری زمان-متناهی کلّی، اسکلت بیرونی، نامعیّنی پارامتری، کنترل مد لغزشی پایاندار، قوانین تطبیقی زمان-متناهی.

A Combined Finite-Time Control Framework for Exoskeleton Robots by Utilizing Adaptive-Robust Nonlinear Control Method

Ali Abooee, Mahdiyeh Koofeh and Mehdi Allahbakhshi

Abstract: In this study, by using the adaptive-robust nonlinear control approach, an innovative hybrid finite-time control framework is introduced to tackle the tracking problem for a great group of exoskeleton robots (in the presence of friction forces, two types of uncertainties, and unknown forces generated by the disabled person). According to the tracking aim, angular displacement of robot must exactly tend to required trajectories within the finite time. Firstly, a general nonlinear model is represented to characterize dynamical behavior of a typical exoskeleton robot possessing unknown physical constants. To complete this model, friction forces, modelling uncertainties, and unknown human torques (external disturbances) are considered. Two components of the exoskeleton model (unknown friction forces and parametric uncertainties) are rewritten as two detached linear regression forms. Secondly, a finite-time adaptive-robust nonlinear control structure is proposed to accomplish the aforementioned tracking aim and, as a result, the global finite-time stability is provided for the closed-loop exoskeleton robot. The mentioned finite-time nonlinear controllers are designed by combining the adaptation rules and the terminal sliding mode control strategy (along with new defined sliding manifolds). These adaptation rules estimates model physical constants, unknown coefficients of the friction forces, unknown human torques and upper bound of the Euclidean norm of the external disturbance vector. Mathematical analysis illustrates that time responses of the estimations precisely tend to constant values after the finite-time. Eventually, the combined finite-time control framework is simulated onto the 2-DOF exoskeleton numerically and obtained results reveal that the proposed control structure appropriately provides the finite-time tracking objective. the maximum power point tracking objective.

Keywords: Global finite-time stability; Exoskeleton robot; Parametric uncertainty and unknown friction;

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

Terminal sliding mode control, Finite-time adaptation rules.

۱- مقدمه

امروزه انسان‌های زیادی از ناتوانی جسمی رنج می‌برند و این ناتوانی ممکن است به دلایلی هم‌چون جراحت، قطع عضو در جنگ (یا تصادف) و نقص عضو مادرزادی باشد. در سال‌های اخیر، دانش بشری برای کمک به افراد معلول، سعی در ساخت ربات‌هایی داشته است که بتوانند به جای عضو ناتوان، فعّالیّت مربوط به آن را انجام دهند. به این ربات‌ها که در انواع مختلف و برای کاربردهای متفاوت ساخته شده‌اند اکسواسکلتون گفته می‌شود [۱]. در متن این نوشتار علمی از لغت اسکلت بیرونی به‌جای اکسواسکلتون استفاده خواهد شد [۲ و ۳]. اسکلت بیرونی رباتی است که به وسیله‌ی یک انسان پوشیده شده و یا بر روی عضو از کار افتاده نصب می‌شود و ضمن ایجاد یک پوشش محافظ برای بدن، می‌تواند با افزایش قدرت و مقاومت عضلات، فرد را در حرکت‌ها، مانورها و هم‌چنین حمل و جابجایی بارها کمک نماید [۴ و ۵].

امروزه، ربات‌های اسکلت بیرونی با درجه‌های آزادی متفاوت ساخته شده‌اند که به افراد معلول کمک می‌کنند تا بتوانند فعّالیّت‌های روزانه خود را راحت‌تر و بدون نیاز به دیگران انجام دهند [۶]. از دیگر کاربردهای ربات‌های اسکلت بیرونی می‌توان به موارد پزشکی (از جمله کمک در عمل‌های جرّاحی)، فیزیوتراپی و نظامی اشاره کرد [۷ و ۸].

غالب ربات‌های اسکلت بیرونی از دو بخش عمده‌ی الکتریکی و مکانیکی تشکیل شده‌اند که بخش الکتریکی شامل تعدادی موتور در مفاصل ربات است [۹ و ۱۰]. این موتورها، گشتاورهای ورودی را برای به حرکت درآوردن تجهیزات مکانیکی و عضو معلول فراهم می‌سازند [۱۱]. اصلی‌ترین هدف کنترلی در این نوع ربات‌ها، طرّاحی گشتاورهای ورودی به گونه‌ای است که عضو معلول بتواند در امتداد مسیر از قبل تعیین‌شده‌ای حرکت کند [۱۵-۱۲].

در دو دهه‌ی اخیر، مطالعات پژوهشی و کاربردی بسیاری مرتبط با مدل‌سازی، کنترل و ساخت ربات‌های اسکلت بیرونی انجام پذیرفته است. این پژوهش‌های علمی را می‌توان به دو دسته‌ی کلّی تقسیم‌بندی کرد. دسته‌ی اوّل شامل مراجع علمی است که به بحث ساخت و مدل‌سازی انواع ربات‌های اسکلت بیرونی پرداخته‌اند [۸-۱]. دسته‌ی دوّم، دربرگیرنده‌ی مقالاتی است که تمرکزشان بر روی توسعه‌ی روش‌های کنترلی مرتبط با این ربات‌ها می‌باشد [۲۵-۱۶]. نمونه‌هایی از راهکارهای کنترلی مورد استفاده برای ساختار حلقه‌بسته‌ی ربات اسکلت بیرونی عبارت هستند از: روش دینامیک وارون ترکیبی با PD [۹]، تکنیک گام به عقب [۱۴]، کنترل مد لغزشی [۱۰ و ۲۴]، کنترل مد لغزشی پایاندار [۱، ۱۱، ۱۳ و ۲۰]، کنترل تطبیقی [۷]، روش ترکیبی لغزشی-تطبیقی [۲، ۱۷ و ۱۸]، تکنیک فازی-لغزشی [۲۳]، روش ترکیبی تطبیقی-فازی [۶ و ۱۵]، راهبرد تطبیقی-عصبی [۵، ۸، ۱۹ و ۲۲]، رویکرد PD-لغزشی، تکنیک فازی-لغزشی-عصبی [۱۲]، الگوریتم ترکیبی PD-فازی-لغزشی [۹]، روش ترکیبی PD-فازی-بهینه [۲۳]، راهکار لغزشی-گام به عقب [۸ و ۱۴] و راهبرد فازی- تطبیقی- گام به عقب [۲۵].

در بحث کنترل ربات‌های اسکلت بیرونی، چالش‌هایی از قبیل غیرخطی‌گری ورودی‌کنترلی (هم‌چون اشباع، ناحیه مرده و لقی)، نیروهای اصطکاک ناشناخته، نامعلوم بودن ثابت‌های فیزیکی مدل (نامعیّنی‌های پارامتری)، گشتاورهای نامعلوم انسانی (اغتشاش خارجی) و عدم‌قطعیّت ناشی از دینامیک‌های مدل نشده وجود دارند. چنانچه هرکدام از این موارد نامطلوب در فرآیند طرّاحی کنترل‌کننده لحاظ نگردد، ساختار کنترلی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات اسکلت بیرونی مقاوم نبوده و در پیاده‌سازی فیزیکی، عملکرد مناسبی در ردیابی مسیرهای موردنظر نخواهد داشت. مطالعه‌ی اجمالی بر روی مقالات مرتبط با روش‌های کنترلی انواع ربات‌های اسکلت بیرونی نشان می‌دهد که چندین نقطه ضعف مشترک در غالب این مراجع علمی وجود دارند. این نقاط ضعف مشترک به صورت فهرست‌وار در زیر بیان گردیده‌اند.

الف) در برخی از مقالات [۱۷-۱۰]، به علّت نبود اطّلاعات کافی و برای سادگی در مدل‌سازی، از نیروهای اصطکاکی مفاصل ربات صرف‌نظر شده و ساختار کنترلی پیشنهاد گردیده است. عدم توجّه به این نیروهای اصطکاکی باعث می‌گردد که در پیاده‌سازی عملی مشکلاتی از جمله کاهش سرعت پاسخ گذرا و حتّی ناپایداری سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات رخ دهد.

ب) در تعداد زیادی از مطالعات پژوهشی [۹ و ۱۶]، از مدل دینامیکی خطی‌سازی شده برای توصیف انواع مختلف ربات‌های اسکلت بیرونی استفاده گردیده است. نویسندگان این مراجع با درنظر گرفتن مدل خطی، از کنترل‌کننده‌های خطی همانند PID برای برآورده‌ساختن اهداف کنترلی استفاده کرده و در نتیجه فقط پایداری مجانبی محلّی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات تضمین می‌شود. کارایی روش‌های کنترلی ارائه شده در این مقالات، شدیداً به مسیرهای موردنظر وابسته است و با تغییر مسیر موردنظر، دوباره باید ضرایب کنترل‌کننده‌های خطی تنظیم شوند. از آنجایی که مدل خطی‌سازی شده فقط در ناحیه‌ی عملکردی خاصّی دارای اعتبار است، چنانچه نقطه‌ی کار ربات خارج از این محدوده باشد، کنترل‌کننده‌های خطی، عملکرد نامناسبی خواهند داشت و حتّی ممکن است ناپایداری سیستم حلقه‌بسته رخ دهد.

پ) در مراجعی هم‌چون [۱، ۸-۳، ۱۴-۱۲، ۲۱-۱۶ و ۲۳] فرض شده که ثابت‌های فیزیکی موجود در مدل دینامیکی ربات اسکلت بیرونی (از جمله جرم، طول، ممان اینرسی بازوها و فاصله هر مفصل از مرکز جرم) معلوم و در اختیار هستند و به طور کلّی هیچ‌گونه نامعیّنی پارامتری در مدل دینامیکی وجود ندارد. این فرض منطقی به نظر نمی‌رسد زیرا همیشه اندازه‌گیری ثابت‌های فیزیکی با نامعیّنی همراه است.

ت) در مقالات [۱۰-۲، ۱۳ و ۲۳-۱۵]، کنترل‌کننده‌های ربات اسکلت بیرونی چنان طرّاحی شده‌اند که پایداری UUB یا پایداری مجانبی کلّی سیستم حلقه‌بسته تضمین گردد. بنابراین همواره بین حرکت عضو معلول و مسیر از قبل تعیین‌شده، خطای ماندگار وجود خواهد داشت و با سپری شدن زمان، این خطای ردیابی مسیر به طور پیوسته کاهش یافته، امّا هیچ‌گاه به صفر واقعی نخواهد رسید. برای آن که بتوان این خطای ردیابی را بعد از گذشت زمان متناهی به صفر واقعی رساند، ساختار کنترلی ربات باید چنان طرّاحی گردد تا پایداری زمان-متناهی کلّی سیستم حلقه‌بسته فراهم شود.

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

در سال‌های اخیر تعدادی راهکار کنترلی برای پایدارسازی زمان-متناهی سیستم‌های غیرخطی ارائه گردیده که شاخص‌ترین آن‌ها همان کنترل مد لغزشی پایاندار (تعمیم کنترل مد لغزشی معمولی) است [۳۰-۲۶].

ث) نویسندگان تعدادی از مراجع [۹] فرض کرده‌اند که هیچ‌گونه عدم‌قطعیّت مدل‌سازی و گشتاور ناخواسته‌ای به ربات اسکلت بیرونی وارد نمی‌شود و تنها گشتاورهای تولید شده توسط موتورهای موجود در مفاصل ربات هستند که عامل حرکت می‌باشند. بدیهی است در حین عملکرد ربات، ممکن است فرد معلول نیز تلاش خود را برای حرکت انجام دهد و گشتاورهایی از طرف شخص به مفاصل ربات وارد شوند و یا حتّی برخورد عضو معلول با محیط اطراف باعث اعمال گشتاورهای ناگهانی و ضربه‌ای به ربات گردد. بنابراین بایستی در مدل‌سازی ربات اسکلت بیرونی، عبارتی را برای توصیف عدم‌قطعیّت مدل‌سازی و گشتاورهای نامعلوم انسانی (اغتشاش خارجی) در نظر گرفت.

با جمع‌بندی نکات مورد اشاره، در این مقاله کنترل‌کننده‌های غیرخطی مقاوم-تطبیقی برای حل مسئله‌ی ردیابی زمان-متناهی ربات‌های اسکلت بیرونی در حضور اصطکاک ناشناخته، ثابت‌های فیزیکی نامعلوم، عدم‌قطعیّت مدل‌سازی و گشتاورهای انسانی ناشناخته (اغتشاش‌های خارجی) طرّاحی می‌شوند. در ابتدا، مدل دینامیکی کاملی برای توصیف ربات‌های اسکلت بیرونی n درجه آزادی ارائه می‌گردد. با لحاظ کردن عوامل نامطلوب در مدل، سعی می‌شود که مدل دینامیکی به واقعیّت‌های عملی نزدیک گردد. بخش‌هایی از مدل دینامیکی که شامل نامعیّنی‌های پارامتری و نیروهای اصطکاک ناشناخته هستند، به دو فرم رگرسوری خطی در پارامتر تبدیل می‌شوند. سپس با ترکیب روش کنترل مد لغزشی پایاندار [۳۱-۳۳] و قوانین تطبیقی زمان-متناهی، گشتاورهای ورودی کنترلی ربات اسکلت بیرونی چنان طرّاحی و پیشنهاد می‌گردند که متغیّرهای جابجایی مفاصل ربات بتوانند مسیرهای از قبل تعیین شده را به صورت زمان-متناهی ردیابی کنند و بعد از گذشت زمان متناهی قابل تنظیمی، خطاهای ردیابی به صفر واقعی برسند. قوانین تطبیقی پیشنهادی برای تخمین زمان-متناهی ثابت‌های فیزیکی مدل، بردار گشتاورهای نامعلوم انسانی (اغتشاش‌های خارجی)، ضرایب نامعلوم نیروهای اصطکاک و کران بالای نرم اقلیدسی بردار عدم‌قطعیّت مدل‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. پایداری زمان-متناهی کلّی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات با استفاده از ترکیب هوشمندانه تئوری پایداری لیاپانوف و برخی لم‌های پایداری زمان-متناهی به اثبات می‌رسد. در فرآیند اثبات پایداری، به صورت تحلیلی نشان داده می‌شود که پاسخ‌های زمانی مرتبط با تخمین‌ها بعد از سپری شدن زمان متناهی دقیقاً به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. برای اطمینان از درستی عملکرد ساختار کنترلی ارائه شده، کنترل‌کننده‌های غیرخطی مقاوم-تطبیقی این مقاله بر روی ربات اسکلت بیرونی دو درجه آزادی مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرند. در مقایسه با مراجع دیگر، این مقاله دارای تعدادی نوآوری شاخص است که در زیر به صورت فهرست‌وار به آن‌ها اشاره می‌شود.

الف) راه‌کار کنترلی ارائه شده برای مسئله‌ی ردیابی زمان-متناهی در مقابل عدم‌قطعیّت مدل‌سازی و گشتاورهای نامعلوم انسانی (اغتشاش‌های خارجی)، مقاوم است.

ب) در ساختار کنترلی پیشنهادی، سطوح لغزشی غیرخطی نوآورانه‌ای جایگزین سطوح لغزشی مرسوم و متداول شده‌اند تا امکان پایدارسازی زمان-متناهی سیستم حلقه‌بسته فراهم شود. هم‌چنین با انتخاب مناسب ضرایب اختیاری موجود در سطوح لغزشی، می‌توان زمان متناهی همگرایی را تا حد قابل قبولی کاهش داد.

پ) در ساختار گشتاورهای ورودی کنترلی، تعدادی ثابت اختیاری قابل تنظیم وجود دارند که با انتخاب مقادیر عددی مناسب برای آن‌ها، می‌توان زمان متناهی رسیدن به دینامیک مد لغزشی را کاهش داد و در نتیجه سرعت پاسخ گذرای سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات افزایش می‌یابد.

ت) با استفاده از روابط تحلیلی ریاضیاتی، چندین نامساوی برای تخمین زمان متناهی همگرایی استخراج شده است. این نامساوی‌ها، وابستگی غیرخطی میان ثابت‌های اختیاری ساختار کنترلی و زمان متناهی همگرایی را نشان می‌دهد. می‌توان با استفاده از این نامساوی‌ها و سعی و خطای هوشمندانه، مقادیر عددی مناسبی را برای ضرایب دلخواه اختصاص داد تا ضمن تضمین پایداری زمان-متناهی سیستم حلقه‌بسته، شاخص‌های کیفی پاسخ گذرا و سرعت همگرایی بهبود یابند.

ساختار نوشتاری ادامه‌ی مقاله بدین شرح است. در بخش دوّم، مدل دینامیکی ربات اسکلت بیرونی و ویژگی‌های شاخص آن بیان می‌گردند. در ادامه‌ی همین بخش، لم‌های کاربردی مرتبط با پایداری زمان-متناهی مرور می‌شوند. فرض‌ها و فرمول‌بندی مسئله‌ی ردیابی زمان-متناهی ربات اسکلت بیرونی در بخش سوّم شرح داده می‌شوند. در بخش چهارم، ساختار کنترلی غیرخطی مقاوم-تطبیقی زمان-متناهی برای ربات اسکلت بیرونی پیشنهاد می‌گردد. اثبات‌های تحلیلی مرتبط با پایداری زمان-متناهی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات در همین بخش انجام می‌پذیرند. بخش پنجم، به ارائه‌ی نتایج شبیه‌سازی ساختار کنترلی پیشنهادی بر روی ربات اسکلت بیرونی دو درجه آزادی اختصاص می‌یابد. نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای کارهای پژوهشی آینده در بخش ششم بیان می‌گردند.

۲- ویژگی‌های مدل ربات اسکلت بیرونی و لم‌های پایداری زمان-متناهی

این قسمت از مقاله شامل دو زیربخش جداگانه می‌باشد که در زیربخش اوّل، مدل دینامیکی ربات اسکلت بیرونی به همراه ویژگی‌های ماتریس‌های آن ارائه می‌شود. در زیربخش دوّم، لم‌های کاربردی مرتبط با پایداری زمان-متناهی سیستم‌های غیرخطی آورده می‌شوند.

۲-۱. بیان مدل دینامیکی ربات‌های اسکلت بیرونی

در شکل ۱، نمونه‌ای از ربات اسکلت بیرونی نشان داده شده که مرتبط با اندام پایین‌تنه‌ی فرد معلول است

شکل ۱. تصویری از ربات اسکلت بیرونی پایین‌تنه‌ای

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

با درنظر گرفتن $\{q(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$، $\{\dot{q}(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ و $\{\ddot{q}(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ به عنوان بردارهای جابجایی، سرعت و شتاب مفاصل، مدل دینامیکی ربات‌های اسکلت بیرونی به صورت (۱) قابل بیان است. در ادامه به منظور خلاصه نویسی ازنمادهای q، $\dot{q}$ و $\ddot{q}$ استفاده خواهد شد.

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)+F(\dot{q})=\tau_m(t)+\tau_{\text{hum}}(t)+\tau_{\text{unc}}(q,\dot{q}) \quad (1)$$

در رابطه (۱)، $\{M(q)\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$، $\{C(q,\dot{q})\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$ و $\{G(q)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ به ترتیب بیانگر ماتریس اینرسی، ماتریس نیروهای گریز از مرکز و بردار نیروهای گرانشی می‌باشند. نمادهای $\{\tau_m(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ و $\{F(\dot{q})\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی بردارهای گشتاورهای ورودی مفاصل (بردار ورودی‌های کنترلی اعمالی از طرف موتورهای الکتریکی) و نیروهای اصطکاک می‌باشند. عدم‌قطعیّت‌های مدل‌سازی به صورت انباشته شده و جمعی توسط بردار $\{\tau_{\text{unc}}(q,\dot{q})\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ لحاظ گردیده‌اند. در مدل دینامیکی (۱)، گشتاورهای اعمالی از طرف کاربر انسانی به مفاصل ربات اسکلت بیرونی توسط بردار $\{\tau_{\text{hum}}(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ (به عنوان اغتشاش‌های خارجی) معرّفی شده‌اند که ماهیّتی نامعلوم و ناشناخته دارند. به عبارت دیگر بردار $\{\tau_{\text{hum}}(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ تعامل نیرویی بین انسان و ربات را توصیف می‌کند. برای مواجهه با بردار نامعلوم $\{\tau_{\text{hum}}(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$، می‌توان از چندین ایده در ساختار کنترلی حلقه‌بسته‌ی ربات اسکلت بیرونی استفاده کرد که یکی از مهم‌ترین آن‌ها در قالب تذکّر ۱ شرح داده شده است.

تذکّر ۱. با استناد به اصل تقریب و قضایای ریاضیاتی مرتبط با آن، می‌توان هر تابع برداری غیرخطی را با استفاده از شبکه‌ی عصبی مصنوعی پایه شعاعی (یا حتی سیستم‌های فازی نوع اول و نوع دوم) به صورت لحظه‌ای تخمین زد به طوری که قوانین به‌روزرسانی مرتبط با ضرایب وزنی شبکه‌ی عصبی مصنوعی با گذشت زمان همواره کراندار بوده و به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. از دیدگاه تحلیلی اثبات گردیده که نرم اقلیدسی خطای مابین تابع برداری غیرخطی و خروجی شبکه‌ی عصبی پایه شعاعی همواره کراندار است. بنابراین با استناد به اصل تقریب مورد اشاره می‌توان بردار نامعلوم $\tau_{\text{hum}}(t)$ را با شبکه‌ی عصبی مصنوعی پایه شعاعی تخمین زد و از خروجی آن یعنی $\hat{\tau}_{\text{hum}}(t)$ در ساختار کنترلی حلقه‌بسته‌ی ربات استفاده کرد.

ماتریس‌های $M(q)$ و $C(q,\dot{q})$ که در مدل ربات اسکلت بیرونی (۱) ظاهر شده‌اند، همواره ویژگی‌های زیر را دارند [۱۱].

ویژگی ۱. در هر لحظه از زمان و به ازای هر بردار q، ماتریس اینرسی $M(q)$ همواره متقارن و مثبت معیّن می‌باشد. بنابراین نامساوی (۲) به ازای بردار دلخواه $\{x\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ همواره برقرار بوده و $\{\|x\|\triangleq\sqrt{x^Tx}\}$ نماد نرم اقلیدسی بردار x است. در (۲)، نمادهای $\lambda_{\min}(M(q))$ و $\lambda_{\max}(M(q))$ به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار ویژه ماتریس $M(q)$ می‌باشند [۲۲-۱۸].

$$\lambda_{\min}(M(q))\|x\|\le x^TM(q)x\le\lambda_{\max}(M(q))\|x\| \quad (2)$$

ویژگی ۲. برای ربات (۱)، ماتریس $\{\dot{M}(q)-2C(q,\dot{q})\}$، همواره پادمتقارن است. بنابراین در هر لحظه از زمان به ازای هر بردار دلخواه $\{x\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$، همواره تساوی (۳) برقرار می‌باشد. نماد $\dot{M}(q)$ بیانگر مشتق ماتریس $M(q)$ نسبت به زمان است [۶-۳].

$$x^T(\dot{M}(q)-2C(q,\dot{q}))x=0 \quad (3)$$

ویژگی ۳. ربات اسکلت بیرونی (۱) را همواره می‌توان به فرم رگرسوری خطی در پارامتر (۴) بازنویسی کرد که $\{\sigma(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ برداری کاملاً دلخواه و $\{\dot{\sigma}(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ مشتق این بردار نسبت به زمان است.

$$M(q)\dot{\sigma}(t)+C(q,\dot{q})\sigma(t)+G(q)=Y(q,\dot{q},\sigma,\dot{\sigma})\theta \quad (4)$$

در فرم رگرسوری (۴)، $\{Y(q,\dot{q},\sigma,\dot{\sigma})\in\mathbb{R}^{n\times n_\theta}\}$ ماتریس رگرسور دینامیکی و $\{\theta\in\mathbb{R}^{n_\theta\times1}\}$ بردار پارامترهای ثابت فیزیکی ربات (از جمله جرم، طول، ممان اینرسی بازوها و...) می‌باشند [۱۱ و ۳۴].

۲-۲. مرور لم‌های پایداری زمان-متناهی

تعریف ۱. سیستم غیرخطی خودگردان (۵) را با نقطه‌ی تعادل $\{x=0\}$ و بردار حالت $\{x(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}\}$ در نظر بگیرید که $\{f:\mathbb{R}^{n\times1}\to\mathbb{R}^{n\times1}\}$ تابع برداری پیوسته است.

$$\dot{x}(t)=f(x(t)) \quad \text{with} \quad \{f(0)=0 \text{ and } x(0)=x_0\} \quad (5)$$

در این سیستم، نقطه‌ی تعادل $\{x=0\}$ پایدار زمان-متناهی کلّی است اگر نقطه‌ی تعادل $\{x=0\}$ پایدار مجانبی کلّی بوده و علاوه بر این، زمان متناهی همگرایی $T(x_0)$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر شرط اوّلیه‌ی x_0، رابطه‌ی $\left\{\lim_{t\to T}x(t)=0\right\}$ و تساوی $\{x(t)=0 \text{ for } t\ge T\}$ برقرار شود [۳۸-۳۵].

لم ۱. نقطه‌ی تعادل $\{x=0\}$ سیستم غیرخطی (۵) پایدار زمان-متناهی کلّی است اگر تابع مثبت مشتق‌پذیر بیکران شعاعی $\{V(x(t)):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\}$ و ضرایب $\{\rho_1>0\}$ و $\{0<\rho_2<1\}$ چنان وجود داشته باشند که نامساوی (۶) برقرارگردد. در صورت برقرار بودن (۶)، با شروع از هر شرط اوّلیه‌ی x_0، تمامی متغیّرهای حالت سیستم غیرخطی (۵) برای لحظه‌های $\{t\ge T\}$ به صفر واقعی رسیده و همواره صفر باقی خواهند ماند. در بخش دوّم نامساوی (۶)، کران بالایی برای زمان متناهی همگرایی T نیز ارائه گردیده است [۳۵، ۳۹ و ۴۰].

$$\begin{cases}\dot{V}(x(t))+\rho_1V^{\rho_2}(x(t))\le0\\ T(x_0)\le(\rho_1(1-\rho_2))^{-1}V^{1-\rho_2}(x_0)\end{cases} \quad (6)$$

لم ۲. سیستم غیرخطی مرتبه دوّم (۷) را با متغیّرهای حالت $\{x_1(t),x_2(t)\}$ و نقطه‌ی تعادل $\{x_1=x_2=0\}$ در نظر بگیرید که ضرایب مثبت l_1 و l_2 نامساوی $\{l_1>l_2>0\}$ را برآورده می‌سازند. در (۷)، نماد $\text{sign}(\cdots)$ بیانگر تابع علامت می‌باشد.

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-l_1\text{sign}(x_1(t))-l_2\text{sign}(x_2(t))\end{cases} \quad (7)$$

برای سیستم (۷) اثبات می‌گردد که نقطه‌ی تعادل $\{x_1=x_2=0\}$ پایدار زمان-متناهی کلّی است و چنانچه سیستم (۷) با هر شرط اوّلیه‌ای تحریک گردد، پاسخ‌های متغیّرهای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای زمان‌های $\{t\ge T\}$ دقیقاً به صفر رسیده و همواره صفر باقی می‌مانند. نامساوی (۸) کران بالای زمان متناهی همگرایی T را مشخص و تعیین می‌کند. در (۸)، ضریب $\bar{l}$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که نامساوی $\left\{\sqrt{2(l_1+l_2)}\le\bar{l}\le\sqrt{2(l_1-l_2)}\right\}$ تحقّق یابد. ضرایب l_3، l_4 و l_5 از طریق $\{l_3=l_1+l_2\text{sign}(x_1x_2)\}$، $\left\{l_4=\sqrt{0.5l_3}\left|\sqrt{2l_3}\,\bar{l}-1\right|\right\}$ و $\left\{l_5=\sqrt{2l_3^{-1}}\left(\sqrt{2l_3}\,\bar{l}-1\right)^{-1}\text{sign}(x_1x_2)\right\}$ تعیین می‌گردند [۳۶ و ۴۱-۴۳].

$$\begin{cases} T \le 2(\min(l_4))^{-1}\sqrt{\Psi\big(x_1(t=0), x_2(t=0)\big)} \\ \Psi(x_1,x_2) \triangleq \begin{cases} 0.25(\,l_4)^2(h(\,x_1,x_2))^2 & \text{if } x_1x_2 \neq 0 \\ 0.25\,\left(\bar{l}\right)^2(x_2)^2 & \text{if } x_1 = 0 \\ 0.25\,|x_1| & \text{if } x_2 = 0 \end{cases} \\ h(\,x_1,x_2) = (l_3)^{-1}x_2(t)\mathrm{sign}(x_1) + l_5\sqrt{|x_1| + 0.5(l_3)^{-1}(x_2)^2} \end{cases} \qquad (۸)$$

لم ۳. سیستم غیرخطی (۹) را با متغیّرهای حالت $\{x_1(t), x_2(t)\}$ و نقطه‌ی تعادل $\{x_1 = x_2 = 0\}$ در نظر بگیرید که ضریب توانی ϱ در بازه‌ی $\{0 < \varrho < 1\}$ قرار دارد. برای سیستم (۹) اثبات می‌گردد که نقطه‌ی تعادل $\{x_1 = x_2 = 0\}$ پایدار مجانبی کلّی است. بنابراین به ازای هر شرط اولّیه‌ی دلخواهی که به سیستم (۹) اختصاص یابد، پاسخ‌های دو متغیّر حالت برای زمان‌های $\{t \ge T\}$ همواره صفر واقعی خواهند بود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -|x_2|^{\varrho}\mathrm{sign}(x_2) - |\omega|^{\varrho(2-\varrho)^{-1}}\mathrm{sign}(\omega) \\ \omega(x_1,x_2) = x_1(t) + (2-\varrho)^{-1}|x_2|^{2-\varrho}\mathrm{sign}(x_2) \end{cases} \qquad (۹)$$

کران بالای زمان متناهی همگرایی T با استفاده از نامساوی (۱۰) تعیین گردیده و ضرایب اختیاری ι_1 و ι_2 در بازه‌های $\{0 < \iota_1 < 1\}$ و $\{1 < \iota_2 < \infty\}$ قرار دارند [۳۴–۳۷ و ۴۳].

$$\begin{cases} T \le \big(\varphi(1-\varrho)\big)^{-1}(3-\varrho)\Big(\Upsilon\big(x_1(0), x_2(0)\big)\Big)^{\frac{1-\varrho}{3-\varrho}} \\ \Upsilon(x_1,x_2) \triangleq \frac{2-\varrho}{3-\varrho}|\omega(x_1,x_2)|^{\frac{3-\varrho}{2-\varrho}} + \iota_1 x_2\omega(x_1,x_2) + \frac{\iota_2}{3-\varrho}|x_2|^{3-\varrho} \\ \varphi \triangleq -\max\limits_{(x_1,x_2)\in\Xi}\dot{V}(x_1,x_2) \quad \text{with } \Xi \triangleq \{(x_1,x_2): V(x_1,x_2) = 1\} \end{cases} \qquad (۱۰)$$

لم ٤. به ازای دو بردار ستونی دلخواه $\{y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ و $\{z \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$، همواره نامساوی کوشی–شوآرتز $\{y^Tz \le |y^Tz| \le \|y\|\,\|z\|\}$ برقرار است [۴۴].

لم ۵. برای بردار ستونی دلخواه $z = [z_1\ z_2\ \dots\ z_n]^T$، نماد برداری $\{\mathrm{sign}(z) \triangleq [\mathrm{sign}(z_1)\quad \mathrm{sign}(z_2)\quad \cdots\quad \mathrm{sign}(z_n)]^T\}$ را در نظر بگیرید. آنگاه همواره $\{z^T\mathrm{sign}(z) = \sum_{i=1}^{n}|z_i| = \|z\|_1 \ge \|z\|\}$ برقرار است که $\|z\|_1$ و $\|z\|$ به ترتیب نرم‌های یک و اقلیدسی بردار z می‌باشند [۴۵].

۳- فرض‌ها و هدف ردیابی ربات اسکلت بیرونی

فرض ۱. برای بردار عدم‌قطعیّت‌های مدل‌سازی $\{\tau_{\mathrm{unc}}(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ فرض می‌گردد نامساوی $\{\|\tau_{\mathrm{unc}}(q,\dot{q})\| \le \gamma\}$ برقرار بوده که γ تابتی نامعلوم است [۱۱ و ۱۷–۲۰].

فرض ۲. مقادیر عددی تمامی پارامترهای ثابت فیزیکی ربات (۱) که در ماتریس‌های $M(q)$، $C(q,\dot{q})$ و $G(q)$ وجود دارند، نامعلوم در نظر گرفته شده‌اند. با توجّه به فرم رگرسوری ارائه شده در ویژگی ۳، ثابت‌های فیزیکی نامعلوم به صورت بردار نامعیّنی پارامتری $\{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta\times 1}\}$ قابل بیان هستند. بدیهی است که برای بردار نامعیّنی پارامتری θ، همواره نامساوی $\{\|\theta\| \le \alpha\}$ برقرار بوده و α مقداری ثابت و نامعلوم می‌باشد.

فرض ۳. برای بردار نیروهای اصطکاک $\{F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ فرض می‌گردد که فرم رگرسوری خطی در پارامتر $\{F(\dot{q}) = Y_{\mathrm{f}}(\dot{q})\theta_{\mathrm{f}}\}$ وجود دارد. در این فرم رگرسوری، $\{Y_{\mathrm{f}}(\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n_{\theta_{\mathrm{f}}}}\}$ ماتریس رگرسور اصطکاک و $\{\theta_{\mathrm{f}} \in \mathbb{R}^{n_{\theta_{\mathrm{f}}}\times 1}\}$ بردار پارامترهای ثابت نامعلوم اصطکاکی (مثلاً ضرایب چسبندگی و ضرایب اصطکاک کولمب) می‌باشند. برای بردار نامعیّنی اصطکاکی θ_{f}، همواره نامساوی $\{\|\theta_{\mathrm{f}}\| \le \beta\}$ برقرار بوده که β کرانی ثابت و نامعلوم است.

یادآوری ۱. مطابق با فرض‌های ۱، ۲ و ۳، کران‌های ثابت γ، α و β نامعلومند و در ساختار کنترلی پیشنهادی ربات اسکلت بیرونی نمی‌توان مستقیماً از این سه کران استفاده کرد. بنابراین باید قوانین تطبیقی مناسبی طرّاحی کرد تا به صورت لحظه‌ای مقادیر γ، α و β را تخمین بزنند و مقادیر تخمینی در ورودی‌های کنترلی ربات به‌کار گرفته شوند.

فرض ٤. برای ربات اسکلت بیرونی (۱) فرض می‌گردد که بردارهای $\{q \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ و $\{\dot{q} \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ در هر لحظه از زمان به طور فیزیکی با حسگرهای دقیق اندازه‌گیری شده و در اختیار می‌باشند. بنابراین در ساختار کنترلی پیشنهادی برای ربات، می‌توان مستقیماً از این دو بردار فیدبک (بازخورد) گرفت.

فرض ۵. منحنی حرکت مربوط به ربات اسکلت بیرونی از قبل تعیین گردیده و با استفاده از بحث سینماتیک وارون، این منحنی به بردار مسیرهای موردنظر $q_d(t) = \left[q_{d_1}(t)\ q_{d_2}(t)\ \dots\ q_{d_n}(t)\right]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ برای متغیّرهای جابجایی مفاصل تبدیل شده است. بنابراین در طرّاحی گشتاورهای ورودی کنترلی می‌توان مستقیماً از بردار مسیرهای موردنظر $\{q_d(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ استفاده کرد.

فرض ٦. درایه‌های بردار مسیرهای موردنظر $q_d(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ تا دوبار پیوسته و مشتق‌پذیر می‌باشند. به عبارتی دیگر، همواره دو بردار مشتق $\dot{q}_d = \left[\dot{q}_{d_1}(t)\ \dot{q}_{d_2}(t)\ \dots\ \dot{q}_{d_n}(t)\right]^T$ و $\ddot{q}_d = \left[\ddot{q}_{d_1}(t)\ \ddot{q}_{d_2}(t) \dots \ddot{q}_{d_n}(t)\right]^T$ وجود داشته و می‌توانند در روابط گشتاورهای ورودی کنترلی ربات مورد استفاده قرار گیرند.

تذکّر ۲. در اکثر مواقع از ربات اسکلت بیرونی برای هدف نیروافزایی یا توانبخشی عضو کم‌توان فرد معلول استفاده می‌شود، امّا ممکن است در برخی از موارد ربات اسکلت بیرونی برای فرد معلولی مورد استفاده قرار گیرد که عضو مربوطه به طور کامل از کارافتاده بوده و اصلاً امکان بهبود وجود ندارد. در این مقاله فرض شده که ربات اسکلت بیرونی باعث تسهیل انجام فعّالیّت‌های روزمرّه‌ی فرد معلول گردیده و هدف توانبخشی وجود ندارد. بنابراین، در سرتاسر این مقاله بردار تعاملی کاربر و ربات اسکلت بیرونی در قالب بردار اغتشاش‌های خارجی لحاظ گردیده است.

فرض ۷. برای بردار تعاملی کاربر و ربات اسکلت بیرونی (بردار اغتشاش‌های خارجی) که ماهیّتی نامعلوم دارد، نامساوی‌های $\{\|\tau_{\mathrm{hum}}(t)\| \le h_0\}$ و $\|\dot{\tau}_{\mathrm{hum}}(t)\| \le h_1$ برقرارند. هم‌چنین فرض می‌گردد دو کران h_0 و h_1 مشخص و در اختیارند.

هدف اصلی ردیابی، طرّاحی بردار گشتاورهای ورودی کنترلی $\tau_m(t)$ برای ربات (۱) است به طوری که بردار متغیّرهای جابجایی مفاصل $q(t)$ بعد از سپری شدن زمان متناهی T دقیقاً به بردار مسیرهای موردنظر $q_d(t)$ برسد و پایداری زمان–متناهی کلّی سیستم حلقه‌بسته تضمین گردد. از دیدگاه ریاضیاتی، بردار $\tau_m(t)$ باید چنان طرّاحی گردد که شرایط (۱۱) برآورده شوند.

$$\left\{\lim_{t\to T} q(t) = q_d(t)\right\} \text{and} \quad \{q(t) = q_d(t) \quad \text{for } t \ge T\} \qquad (۱۱)$$

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

به منظور فرمول‌بندی مسئله‌ی ردیابی، دو بردار خطا مرتبط با جابجایی‌ها $\{e_{\text{pos}}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ و سرعت‌های مفاصل $\{e_{\text{vel}}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ به صورت (۱۲) تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} e_{\text{pos}}(t) \triangleq q(t) - q_d(t) = [e_1 \;\; e_3 \;\; \dots \;\; e_{2n-1}]^T \\ e_{\text{vel}}(t) \triangleq \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t) = [e_2 \;\; e_4 \;\; \dots \;\; e_{2n}]^T \end{cases} \tag{۱۲}$$

با توجّه به تعریف خطاهای فوق، برای برآوردن شدن هدف ردیابی (۱۱)، ورودی‌های کنترلی $\tau_m(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ باید به گونه‌ای طرّاحی گردند که شرایط ارائه شده در (۱۳) تحقّق یابند. به عبارتی دیگر با تعریف دو بردار خطای $e_{\text{pos}}(t)$ و $e_{\text{vel}}(t)$ نشان داده می‌شود که هدف ردیابی زمان–متناهی ربات معادل با مسئله‌ی پایدارسازی زمان–متناهی سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی است.

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to T} e_{\text{pos}}(t) = 0 \text{ , and } \{e_{\text{pos}}(t) = 0 \;\text{ for } t \geq T\} \\ \lim\limits_{t\to T} e_{\text{vel}}(t) = 0 \text{ , and } \{e_{\text{vel}}(t) = 0 \;\text{ for } \; t \geq T\} \end{cases} \tag{۱۳}$$

٤- ساختار کنترلی غیرخطی مقاوم-تطبیقی زمان-متناهی

به منظور برآورده ساختن هدف ردیابی (۱۱)، ساختار کنترلی ربات اسکلت بیرونی با استفاده از ترکیب روش کنترل مد لغزشی پایاندار و قوانین تطبیقی زمان–متناهی طرّاحی می‌شود. در واقع یکی از نوآوری‌های اصلی این مقاله، تعریف سطوح لغزشی جدید و استخراج قوانین تطبیقی برای تخمین زمان–متناهی پارامترهای ثابت نامعلوم است.

راهکار کنترل مد لغزشی پایاندار به علّت ویژگی‌های ذاتی ازجمله امکان تضمین پایداری زمان–متناهی کلّی، پاسخ گذرای سریع، پیاده‌سازی فیزیکی ساده و ارزان، مقاوم بودن در برابر نامعیّنی پارامتری، عدم‌قطعیّت مدل‌سازی و اغتشاش خارجی مورد استفاده قرار گرفته است. توضیحات جامعی در مورد نحوه‌ی طرّاحی کنترل‌کننده‌های غیرخطی زمان–متناهی با استفاده از روش کنترل مد لغزشی پایاندار در مراجع [۳۶–۳۹] وجود دارد که توسط نویسندگان همین مقاله‌ی حاضر به چاپ رسیده‌اند.

برای ربات اسکلت بیرونی n درجه آزادی (۱)، بردار سطوح لغزشی غیرخطی $S(t) = [s_1 \, s_2 \, \dots \, s_n]^T$ به صورت (۱۴) تعریف می‌شود که $\{l_{j_i} \text{ for } j = 1,2 \text{ and } i = 1,2,\dots,n\}$ ضرایب اختیاری با شرط $\{l_{1_\text{i}} >$ $l_{2_\text{i}} > 0 \text{ for } i = 1,2,\dots,n\}$ هستند. بنابراین بردار سطوح لغزشی (۱۴) شامل $2n$تا ضریب اختیاری است.

$$\begin{cases} S(t) = \dot{q}(t) - \mathrm{v}(t) \\ \mathrm{v}(t) = \dot{q}_d(t) - \int_0^t l_1 \text{sign}\left(e_{\text{pos}}(\vartheta)\right) d\vartheta - \int_0^t l_2 \text{sign}\left(e_{\text{vel}}(\vartheta)\right) d\vartheta \\ l_1 \text{sign}(e_{\text{pos}}) \triangleq [l_{1_1}\text{sign}(e_1) \quad l_{1_2}\text{sign}(e_3) \quad \cdots \quad l_{1_n}\text{sign}(e_{2n-1})]^T \\ l_2 \text{sign}(e_{\text{vel}}) \triangleq [l_{2_1}\text{sign}(e_2) \quad l_{2_2}\text{sign}(e_4) \quad \cdots \quad l_{2_n}\text{sign}(e_{2n})]^T \end{cases} \tag{۱۴}$$

با مشتق‌گیری از بردار (۱۴)، تساوی $\{\ddot{q}(t) = \dot{S}(t) + \dot{\mathrm{v}}(t)\}$ حاصل می‌گردد. با جایگذاری تساوی اخیر در مدل ربات (۱) و در نظر گرفتن تعریف سطوح لغزشی (۱۴)، رابطه‌ی (۱۵) حاصل می‌شود.

$$M(q)\dot{S} + C(q,\dot{q})S + F(\dot{q}) = -\big(M(q)\dot{\mathrm{v}} + C(q,\dot{q})\mathrm{v} + G(q)\big) + \tau_m(t) + \tau_{\text{unc}}(q,\dot{q}) + \tau_{\text{hum}}(t) \tag{۱۵}$$

با توجّه به ویژگی ۳، عبارت $\{M(q)\dot{\mathrm{v}}(t) + C(q,\dot{q})\mathrm{v}(t) + G(q)\}$ که در سمت راست تساوی (۱۵) قرار دارد، به فرم رگرسوری $\{Y(q,\dot{q},\mathrm{v},\dot{\mathrm{v}})\theta = M(q)\dot{\mathrm{v}}(t) + C(q,\dot{q})\mathrm{v}(t) + G(q)\}$ قابل بیان است.

در این فرم $\{\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$ بردار شامل ثابت‌های فیزیکی نامعلوم ربات می‌باشد. با اعمال فرم رگرسوری اخیر به (۱۵)، رابطه‌ی (۱۶) نتیجه می‌شود.

$$M(q)\dot{S}(t) + C(q,\dot{q})S(t) + F(\dot{q}) = -Y(q,\dot{q},\mathrm{v},\dot{\mathrm{v}})\theta + \tau_m(t) + \tau_{\text{unc}}(q,\dot{q}) + \tau_{\text{hum}}(t) \tag{۱۶}$$

مطابق با فرض ۳، به جای بردار نیروهای اصطکاک $F(\dot{q})$ از فرم رگرسوری $\{F(\dot{q}) = Y_{\text{f}}(\dot{q})\theta_{\text{f}}\}$ استفاده کرده و در نتیجه تساوی (۱۶) به صورت (۱۷) قابل بیان است. رابطه‌ی (۱۷)، دینامیک حلقه‌بسته‌ی ربات اسکلت بیرونی (۱) را با لحاظ کردن تعریف سطوح لغزشی (۱۴) نشان می‌دهد.

$$M(q)\dot{S}(t) + C(q,\dot{q})S(t) = -Y(q,\dot{q},\mathrm{v},\dot{\mathrm{v}})\theta - Y_{\text{f}}(\dot{q})\theta_{\text{f}} + \tau_m(t) + \tau_{\text{unc}}(q,\dot{q}) + \tau_{\text{hum}}(t) \tag{۱۷}$$

با توجّه به خمینه‌های لغزشی (۱۴) و دینامیک حلقه‌بسته‌ی ربات (۱۷)، بردار گشتاورهای ورودی τ_m به صورت (۱۸) پیشنهاد می‌شود که نماد برداری $\text{sign}(S)$ بیانگر $\{\text{sign}(S) \triangleq [\text{sign}(s_1) \quad \text{sign}(s_2) \quad \cdots \quad \text{sign}(s_n)]^T\}$ است.

$$\begin{aligned} \tau_m = \{ & Y(q,\dot{q},\mathrm{v},\dot{\mathrm{v}})\hat{\theta}(t) + Y_{\text{f}}(\dot{q})\hat{\theta}_{\text{f}}(t) - k_1 S(t) \\ & -k_2 \text{sign}\big(S(t)\big) - h_1(h_0 + \|\hat{\tau}_{\text{hum}}\|)\frac{\|\Omega^{-1}\|}{\|S(t)\|^2}S(t) \\ & -\big(\|Y(q,\dot{q},\mathrm{v},\dot{\mathrm{v}})\|\hat{\alpha}(t) + \|Y_{\text{f}}(\dot{q})\|\,\hat{\beta}(t) + \hat{\gamma}(t)\big)\,\text{sign}\big(S(t)\big) \\ & -\big(\|Y(q,\dot{q},\mathrm{v},\dot{\mathrm{v}})\|\|\hat{\theta}(t)\| + \|Y_{\text{f}}(\dot{q})\|\|\hat{\theta}_{\text{f}}(t)\| + \|\hat{\tau}_{\text{hum}}\|\big)\,\text{sign}\big(S(t)\big)\} \end{aligned} \tag{۱۸}$$

در (۱۸)، k_1 و k_2 دو اسکالر اختیاری می‌باشند که با شرایط $\{k_1 > 0\}$ و $\{k_2 > h_0\}$ توسط طرّاح تعیین می‌گردند. مقادیر عددی انتخابی برای k_1 و k_2 بر روی زمان متناهی همگرایی و حداکثر دامنه‌ی گشتاورهای ورودی تاثیر دارند. در گشتاورهای ورودی پیشنهادی، $\{\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}\}$، $\{\hat{\theta}_{\text{f}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\theta_\text{f}} \times 1}\}$ و $\hat{\tau}_{\text{hum}}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ به ترتیب تخمین‌های بردارهای نامعلوم θ، θ_{f} و τ_{hum} می‌باشند که با انتگرال‌گیری از قوانین تطبیقی (۱۹) به دست می‌آیند. در (۱۹)، $\{\Gamma \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}\}$، $\{\nabla \in \mathbb{R}^{n_{\theta_\text{f}} \times n_{\theta_\text{f}}}\}$ و $\{\Omega \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$ به ترتیب ماتریس‌های قطری مثبت معیّن دلخواه هستند.

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}(t) = -\left(\Gamma_{n_\theta \times n_\theta}\right) Y^T(q,\dot{q},\mathrm{v},\dot{\mathrm{v}})\, S(t) \\ \dot{\hat{\theta}}_{\text{f}}(t) = -\left(\nabla_{n_{\theta_\text{f}} \times n_{\theta_\text{f}}}\right) Y_{\text{f}}^T(\dot{q})\, S(t) \\ \dot{\hat{\tau}}_{\text{hum}}(t) = \left(\Omega_{n\times n}\right) S(t) \end{cases} \tag{۱۹}$$

هم‌چنین $\{\hat{\gamma}(t) \in \mathbb{R}\}$، $\{\hat{\alpha}(t) \in \mathbb{R}\}$ و $\{\hat{\beta}(t) \in \mathbb{R}\}$ به ترتیب تخمین‌هایی از کران‌های نامعلوم γ، α و β هستند و با انتگرال‌گیری از قوانین تطبیقی (۲۰) به صورت لحظه‌ای تعیین می‌گردند. با توجّه به معادلات دیفرانسیلی مرتبه اوّل ارائه شده در (۲۰) و مثبت درنظرگرفتن شرایط اوّلیه، به راحتی اثبات می‌گردد که توابع تخمینی $\hat{\gamma}(t)$، $\hat{\alpha}(t)$ و $\hat{\beta}(t)$ همواره مثبت هستند.

$$\begin{cases} \dot{\hat{\gamma}}(t) = \|S(t)\| & \text{with } \hat{\gamma}(0) > 0 \\ \dot{\hat{\alpha}}(t) = \|S(t)\|\|Y(q,\dot{q},\mathrm{v},\dot{\mathrm{v}})\| & \text{with } \hat{\alpha}(0) > 0 \\ \dot{\hat{\beta}}(t) = \|S(t)\|\|Y_{\text{f}}(\dot{q})\| & \text{with } \hat{\beta}(0) > 0 \end{cases} \tag{۲۰}$$

قضیّه ۱. مدل ربات اسکلت بیرونی (۱) را با تمام فرض‌ها و ویژگی‌های بیان‌شده در نظر بگیرید. با اعمال ورودی کنترلی (۱۸) و قوانین تطبیقی (۱۹) و (۲۰) به ربات ذکر شده، نتایج (الف)، (ب)، (پ) و(ت) حاصل می‌شود. (الف): درایه‌های سه بردار $\{\hat{\theta}(t), \hat{\theta}_{\text{f}}(t), \hat{\tau}_{\text{hum}}(t)\}$ و توابع تخمینی اسکالری $\hat{\gamma}(t)$، $\hat{\alpha}(t)$ و $\hat{\beta}(t)$ برای تمام لحظات کراندار باقی می‌مانند، (ب): دو بردار تخمینی $\{\hat{\theta}(t), \hat{\theta}_{\text{f}}(t)\}$ بعد از گذشت زمان متناهی به دو بردار ثابت $\{\theta_\infty, \theta_{\text{f}\infty}\}$ همگرا می‌شوند که لزوماً این دو بردار ثابت با بردارهای پارامتری نامعلوم θ و θ_{f} برابر نیستند، (پ): سه تابع تخمینی

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

اسکالری $\hat{\alpha}(t)$،$\hat{\gamma}(t)$ و $\hat{\beta}(t)$ بعد از سپری شدن زمان متناهی به مقادیر ثابت γ_∞، α_∞ و β_∞ می‌رسند که لزوماً این سه مقدار ثابت با مقادیر نامعلوم γ، α و β یکسان نیستند، (ت): پایداری زمان-متناهی کلّی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات اسکلت بیرونی تضمین می‌گردد و دو بردار خطای ردیابی $e_{\mathrm{pos}}(t)$ و $e_{\mathrm{vel}}(t)$ برای زمان‌های $\{t \geq (T_{\mathrm{r}} + T_{\mathrm{s}})\}$ به طور دقیق صفر شده و همواره صفر باقی می‌مانند. کران‌های بالای دو زمان متناهی T_{r} و T_{s} توسط روابط (۲۱) و (۲۲) تعیین می‌گردند.

$$\begin{cases} T_{\mathrm{r}} \leq 2\, \dfrac{\sqrt{0.5\left(S^T(0)\, M\left(q(0)\right) S(0)\right)+\frac{1}{\lambda}(\hat{\alpha}(0)-\alpha^*)^2+\frac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}\left(\hat{\beta}(0)-\beta^*\right)^2+\frac{1}{\lambda_\gamma}(\hat{\gamma}(0)-\gamma^*)^2}}{\delta} \\ \delta \triangleq \sqrt{2}\, \left\{\min_t\left(\sqrt{\lambda}\,\Delta_1, \sqrt{\lambda_{\mathrm{f}}}\,\Delta_2, \sqrt{\lambda_\gamma}\,\Delta_3,\ \Delta_4\right)\right\} \\ \Delta_1 \triangleq \left(\|S\|\|Y(q,\dot{q},\nu,\dot{\nu})\|\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\right) \text{ and } \Delta_2 \triangleq \left(\|S\|\|Y_{\mathrm{f}}\|\left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}-1\right)\right) \\ \Delta_3 \triangleq \|S)\|\left(\frac{1}{\lambda_\gamma}-1\right) \quad \text{and} \quad \Delta_4 \triangleq (k_2-h_0)\left(\sqrt{\left(\lambda_{\max}(M)\right)^{-1}}\right) \end{cases} \tag{۲۱}$$

در (۲۱)، ضرایب اسکالری λ، λ_{f} و λ_γ مقادیر مثبت اختیاری کمتر از یک می‌باشند. علاوه بر این α^*، β^* و γ^* مقادیر ثابت به اندازه کافی بزرگ هستند که نامساوی‌های $\{\hat{\alpha}(t) < \alpha^*\}$، $\{\hat{\beta}(t) < \beta^*\}$ و $\{\hat{\gamma}(t) < \gamma^*\}$ برآورده شوند. T_s به صورت $\left\{T_s = \max_i\left(T_{s_i}\right) \text{ with } i = 1, \dots, n\right\}$ تعیین می‌شود که T_{s_i} در (۲۲) تعریف گردیده است.

$$\begin{cases} T_{s_i} \leq 2\left(\min\left(l_{4_i}\right)\right)^{-1}\sqrt{\Psi_i(e_{2i-1}(t = T_{\mathrm{r}}), e_{2i}(t = T_{\mathrm{r}}))} \\ \Psi_i = \begin{cases} 0.25\left(l_{4_i}\right)^2(h_i)^2 & \text{if } e_{2i-1}e_{2i} \neq 0 \\ 0.25\left(\overline{l_i}\right)^2(e_{2i})^2 & \text{if } e_{2i-1} = 0 \\ 0.25|e_{2i-1}| & \text{if } e_{2i} = 0 \end{cases} \\ h_i(e_{2i-1}e_{2i}) = \left(l_{3_i}\right)^{-1} e_{2i}\, \mathrm{sign}(\, e_{2i-1}) + l_{5_i}\sqrt{|e_{2i-1}| + 0.5\left(l_{3_i}\right)^{-1}(e_{2i})^2} \\ l_{3_i} = l_{1_i} + l_{2_i}\mathrm{sign}(e_{2i-1}e_{2i}) \\ l_{4_i} = \sqrt{0.5 l_{3_i}}\left|\sqrt{2} l_{3_i}\overline{l_i} - 1\right| \\ l_{5_i} = \sqrt{2\left(l_{3_i}\right)^{-1}}\left(\sqrt{2 l_{3_i}}\,\overline{l_i} - 1\right)^{-1} \mathrm{sign}(e_{2i-1}e_{2i}) \end{cases} \tag{۲۲}$$

مقدار اختیاری $\overline{l_i}$ با استفاده از $\left\{\left(\sqrt{2\left(l_{1_i} + l_{2_i}\right)}\right)^{-1} < \overline{l_i} < \left(\sqrt{2\left(l_{1_i} - l_{2_i}\right)}\right)^{-1}\right\}$ انتخاب می‌شود.

یادآوری ۲. در ادامه‌ی مقاله به منظور کوتاه شدن طول نوشتاری فرمول‌ها به جای $S(t)$، $\tau_m(t)$، $\tau_{\mathrm{unc}}(q,\dot{q})$، $\tau_{\mathrm{hum}}(t)$، $\hat{\theta}_{\mathrm{f}}(t)$، $\hat{\theta}(t)$، $\hat{\gamma}(t)$، $\hat{\alpha}(t)$، $\hat{\beta}(t)$، $Y(q,\dot{q},\nu,\dot{\nu})$ و $Y_{\mathrm{f}}(\dot{q})$ از نمادهای مختصر گردیده‌ی S، τ_m، τ_{unc}، τ_{hum}، $\hat{\theta}_{\mathrm{f}}$، $\hat{\theta}$، $\hat{\gamma}$، $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$، Y و Y_{f} استفاده می‌شود.

اثبات. فرآیند اثبات شامل چهار مرحله است که $\tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}(t)$، $\tilde{\theta}(t)$، $\tilde{\theta}_{\mathrm{f}}(t)$ و $\tilde{\gamma}(t)$ به صورت $\{\tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}(t) \triangleq \hat{\tau}_{\mathrm{hum}} - \tau_{\mathrm{hum}}\}$،$\{\tilde{\theta}(t) \triangleq \hat{\theta} - \theta\}$، $\{\tilde{\theta}_{\mathrm{f}}(t) \triangleq \hat{\theta}_{\mathrm{f}} - \theta_{\mathrm{f}}\}$ و $\{\tilde{\gamma}(t) \triangleq \hat{\gamma} - \gamma\}$ تعریف شده و در مابقی اثبات مشابه با یادآوری ۲ از نمادهای مختصر گردیده‌ی $\tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}$، $\tilde{\theta}$، $\tilde{\theta}_{\mathrm{f}}$ و $\tilde{\gamma}$ استفاده خواهد شد. برای مرحله‌ی اوّل اثبات، کاندیدای لیاپانوف V_1 به صورت $\left\{V_1 = 0.5\left(S^T M S + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta} + \tilde{\theta}_{\mathrm{f}}^T\nabla^{-1}\tilde{\theta}_{\mathrm{f}} + \tilde{\gamma}^2 + \tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}\right)\right\}$ انتخاب می‌شود که سه ماتریس قطری مثبت معیّن Γ، ∇ و Ω قبلاً معرّفی شده‌اند. با توجّه به ثابت بودن سه بردار θ، θ_{f} و اسکالر γ، مشتق‌های زمانی $\left\{\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}\right\}$، $\left\{\dot{\tilde{\theta}}_{\mathrm{f}} = \dot{\hat{\theta}}_{\mathrm{f}}\right\}$ و $\left\{\dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\hat{\gamma}}\right\}$ به راحتی نتیجه می‌شوند. بنابراین با مشتق‌گیری زمانی از V_1، عبارت اسکالری $\dot{V}_1$ به صورت (۲۳) قابل بیان است.

$$\dot{V}_1 = 0.5\, S^T \dot{M} S + S^T M \dot{S} + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}} + \tilde{\theta}_{\mathrm{f}}{}^T\nabla^{-1}\dot{\hat{\theta}}_{\mathrm{f}} + \tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}} + \tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\dot{\tilde{\tau}}_{\mathrm{hum}} \tag{۲۳}$$

با جایگذاری عبارت $\{M\dot{S}\}$ از (۱۷) در (۲۳)، تساوی (۲۴) برای $\dot{V}_1$ حاصل می‌شود.

$$\dot{V}_1 = 0.5\, S^T\left(\dot{M} - 2C(q,\dot{q})\right)S + S^T(-Y\theta - Y_{\mathrm{f}}\theta_{\mathrm{f}} + \tau_{\mathrm{m}} + \tau_{\mathrm{unc}} + \tau_{\mathrm{hum}}) + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}} + \tilde{\theta}_{\mathrm{f}}{}^T\nabla^{-1}\dot{\hat{\theta}}_{\mathrm{f}} + \tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}} + \tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\dot{\tilde{\tau}}_{\mathrm{hum}} \tag{۲۴}$$

با استناد به ویژگی ۲، $\left\{S^T\left(\dot{M}(q) - 2C(q,\dot{q})\right)S\right\}$ همواره صفر است. با جایگذاری $\{\theta \triangleq \hat{\theta} - \tilde{\theta}\}$، $\left\{\dot{\tilde{\tau}}_{\mathrm{hum}} = \dot{\hat{\tau}}_{\mathrm{hum}} - \dot{\tau}_{\mathrm{hum}}\right\}$، $\{\theta_{\mathrm{f}} \triangleq \hat{\theta}_{\mathrm{f}} - \tilde{\theta}_{\mathrm{f}}\}$ و قوانین به‌روزرسانی $\left\{\dot{\hat{\theta}}(t) = -\Gamma\, Y^T\, S(t)\right\}$، $\left\{\dot{\hat{\theta}}_{\mathrm{f}}(t) = -\nabla\, Y_{\mathrm{f}}^T\, S(t)\right\}$، $\{\dot{\hat{\gamma}}(t) = \|S(t)\|\}$، تساوی (۲۴) به (۲۵) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V}_1 = S^T(\tau_{\mathrm{m}} + \tau_{\mathrm{unc}} + \tau_{\mathrm{hum}}) - S^T Y\hat{\theta} - S^T Y_{\mathrm{f}}\hat{\theta}_{\mathrm{f}} + \tilde{\gamma}\|S\| + \tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\dot{\hat{\tau}}_{\mathrm{hum}} - \tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\dot{\tau}_{\mathrm{hum}} \tag{۲۵}$$

با اعمال بردار گشتاور ورودی کنترلی τ_m به (۲۵)، لحاظ کردن دو حقیقت ریاضی $\{S^T\mathrm{sign}(S) = \|S\|_1\}$، $\{S^T S = \|S\|^2\}$ و استفاده از دو نامساوی $\{S^T\tau_{\mathrm{unc}} \leq \|S\|\|\tau_{\mathrm{unc}}\| \leq \gamma\|S\|\}$، $\{S^T\tau_{\mathrm{hum}} \leq \|S\|\|\tau_{\mathrm{hum}}\| \leq h_0\|S\|\}$، نامساوی (۲۶) برای عبارت $\dot{V}_1$ نتیجه می‌گردد.

$$\dot{V}_1 \leq \{S^T\tau_{\mathrm{hum}} + \gamma\|S\| - k_1\|S\|^2 - k_2\|S\|_1 - h_1\|\Omega^{-1}\|(h_0 + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|) - \left(\|Y\|\left(\hat{\alpha} + \left\|\hat{\theta}\right\|\right) + \|Y_{\mathrm{f}}\|\left(\hat{\beta} + \left\|\hat{\theta}_{\mathrm{f}}\right\|\right) + \hat{\gamma} + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|\right)\|S\|_1 + \tilde{\gamma}\|S\| + \tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\dot{\hat{\tau}}_{\mathrm{hum}} - \tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\dot{\tau}_{\mathrm{hum}}\} \tag{۲۶}$$

با توجه به مثبت بودن $\left(\|Y\|\left(\hat{\alpha} + \left\|\hat{\theta}\right\|\right) + \|Y_{\mathrm{f}}\|\left(\hat{\beta} + \left\|\hat{\theta}_{\mathrm{f}}\right\|\right) + \hat{\gamma} + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|\right)$، استفاده از $\{-\|S\|_1 \leq -\|S\|\}$، اعمال تعریف $\{\tilde{\tau}_{\mathrm{hum}} \triangleq \hat{\tau}_{\mathrm{hum}} - \tau_{\mathrm{hum}}\}$ و قانون تطبیقی $\{\dot{\hat{\tau}}_{\mathrm{hum}} = \Omega\, S\}$، نامساوی (۲۶) به (۲۷) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V}_1 \leq \{-k_1\|S\|^2 - k_2\|S\| - h_1\|\Omega^{-1}\|(h_0 + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|) - \left(\|Y\|\left(\hat{\alpha} + \left\|\hat{\theta}\right\|\right) + \|Y_{\mathrm{f}}\|\left(\hat{\beta} + \left\|\hat{\theta}_{\mathrm{f}}\right\|\right) + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|\right)\|S\| + \hat{\tau}_{\mathrm{hum}}^T S - \hat{\tau}_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\dot{\tau}_{\mathrm{hum}} + \tau_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\dot{\tau}_{\mathrm{hum}}\} \tag{۲۷}$$

چنانچه نامساوی‌های $\{\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}^T S \leq \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|\|S\|\}$، $\{-\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\dot{\tau}_{\mathrm{hum}} \leq h_1\|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|\|\Omega^{-1}\|\}$ و $\{\tau_{\mathrm{hum}}^T\Omega^{-1}\dot{\tau}_{\mathrm{hum}} \leq h_0 h_1\|\Omega^{-1}\|\}$ به (۲۷) اعمال گردند،آنگاه نامساوی ساده شده‌ی (۲۸) برای $\dot{V}_1$ بدست می‌آید.

$$\dot{V}_1 \leq \left\{-k_1\|S\|^2 - k_2\|S\| - \left(\|Y\|\left(\hat{\alpha} + \left\|\hat{\theta}\right\|\right) + \|Y_{\mathrm{f}}\|\left(\hat{\beta} + \left\|\hat{\theta}_{\mathrm{f}}\right\|\right)\right)\|S\|\right\} \tag{۲۸}$$

با توجه به منفی بودن $\left\{-\left(\|Y\|\left(\hat{\alpha} + \left\|\hat{\theta}\right\|\right) + \|Y_{\mathrm{f}}\|\left(\hat{\beta} + \left\|\hat{\theta}_{\mathrm{f}}\right\|\right)\right)\|S\|\right\}$، نامساوی ساده شده‌ی (۲۹) حاصل می‌گردد.

$$\dot{V}_1 \leq \{-k_1\|S\|^2 - k_2\|S\|\} \leq 0 \tag{۲۹}$$

با توجّه به تعریف کاندیدای لیاپانوف $V_1(t)$، درنظر گرفتن نامساوی $\{\dot{V}_1(t) \leq -k_1\|S\|^2 \leq 0\}$، استفاده از قضیّه‌ی اساسی پایداری لیاپانوف و اعمال لم باربالات، می‌توان نتیجه گرفت که درایه‌های بردارهای $\tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}$، $\tilde{\theta}$، $\tilde{\theta}_{\mathrm{f}}$، S و تابع اسکالری $\tilde{\gamma}$ برای تمام لحظات کراندار هستند و عبارت $\|S\|$ به صورت مجانبی به صفر می‌رسد. با توجّه به $\{\tilde{\tau}_{\mathrm{hum}} \triangleq \hat{\tau}_{\mathrm{hum}} - \tau_{\mathrm{hum}}\}$، $\{\tilde{\theta} \triangleq \hat{\theta} - \theta\}$، $\{\tilde{\theta}_{\mathrm{f}} \triangleq \hat{\theta}_{\mathrm{f}} - \theta_{\mathrm{f}}\}$، کراندار بودن درایه‌های $\tilde{\tau}_{\mathrm{hum}}$، $\tilde{\theta}$، $\tilde{\theta}_{\mathrm{f}}$ و استناد به سه نامساوی $\|\tau_{\mathrm{hum}}\| \leq h_0$، $\{\|\theta\| \leq \alpha\}$، $\{\|\theta_{\mathrm{f}}\| \leq \beta\}$، می‌توان نتیجه گرفت که تمامی درایه‌های بردارهای تخمینی $\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}$، $\hat{\theta}$ و $\hat{\theta}_{\mathrm{f}}$ همواره کراندار بوده و $\hat{\theta}$ و $\hat{\theta}_{\mathrm{f}}$ با گذشت زمان به بردارهای ثابت θ_∞ و $\theta_{\mathrm{f}\infty}$ همگرا می‌شوند. باید توجّه داشت که لزوماً دو بردار ثابت θ_∞ و $\theta_{\mathrm{f}\infty}$ با دو بردار پارامتری نامعلوم θ و θ_{f} برابر نیستند. همچنین با توجّه به تعریف $\{\tilde{\gamma} \triangleq \hat{\gamma} - \gamma\}$ و کراندار بودن $\tilde{\gamma}$، می‌توان نتیجه گرفت که تابع تخمینی اسکالری $\hat{\gamma}$ همواره کراندار بوده و با سپری شدن زمان، به مقدار ثابت γ_∞

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

همگرا می‌شود. شایان ذکر است که مقدار ثابت γ_∞ لزوماً با مقدار نامعلوم γ یکسان نیست. در مرحله‌ی دوّم اثبات، $\tilde{\alpha}(t)$ و $\tilde{\beta}(t)$ به صورت $\{\tilde{\alpha}(t) \triangleq \hat{\alpha} - \alpha\}$ و $\{\tilde{\beta}(t) \triangleq \hat{\beta} - \beta\}$ تعریف شده و در ادامه به جای $\tilde{\alpha}(t)$ و $\tilde{\beta}(t)$ از نمادهای مختصر $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ استفاده خواهد شد. برای مرحله‌ی دوّم، با استفاده از نمادهای $\tilde{\alpha}$، $\tilde{\beta}$ و $\tilde{\gamma}$، کاندیدای لیاپانوف V_2 به صورت $\{V_2(S,\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}) = 0.5(S^TM(q)S + \tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2)\}$ انتخاب می‌شود. با توجّه به ثابت بودن α و β، دو عبارت مشتقی $\{\dot{\tilde{\alpha}} = \dot{\hat{\alpha}}\}$ و $\{\dot{\tilde{\beta}} = \dot{\hat{\beta}}\}$ بدست می‌آیند. با مشتق‌گیری از کاندیدای لیاپانوف V_2، عبارت $\dot{V}_2$ به صورت $\{\dot{V}_2 = 0.5S^T\dot{M}(q)S + S^TM(q)\dot{S} + \tilde{\alpha}\dot{\hat{\alpha}} + \tilde{\beta}\dot{\hat{\beta}} + \tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}}\}$ نتیجه می‌شود. چنانچه روالی یکسان و مشابه با روابط (۲۳) تا (۲۴) بر روی $\dot{V}_2$ انجام پذیرد، تساوی (۳۰) حاصل می‌گردد.

$$\dot{V}_2 = -S^TY\theta - S^TY_{\mathrm{f}}\,\theta_{\mathrm{f}} + S^T\tau_{\mathrm{m}} + S^T\tau_{\mathrm{hum}} + S^T\tau_{\mathrm{unc}} + \tilde{\alpha}\dot{\hat{\alpha}} + \tilde{\beta}\dot{\hat{\beta}} + \tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}} \tag{۳۰}$$

با جایگذاری بردار τ_m، اعمال نامساوی‌های $\{-\|s\| \leq -\|S\|_1\}$، $\{S^T\tau_{\mathrm{unc}} \leq \gamma\|S\|\}$ و $\{S^T\tau_{\mathrm{hum}} \leq h_0\|S\|\}$ و در نظر گرفتن $\{S^T\mathrm{sign}(S) = \|S\|_1\}$ رابطه‌ی (۳۰) به نامساوی (۳۱) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 \leq \{&-S^TY\theta - S^TY_{\mathrm{f}}\,\theta_{\mathrm{f}} + S^TY\hat{\theta} + S^TY_{\mathrm{f}}\,\hat{\theta}_{\mathrm{f}} - k_1\|S\|^2 - h_1\|\Omega^{-1}\|(h_0 + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|)\\ &-\|S\|\big(\hat{\gamma} + \|Y\|\,\hat{\alpha} + \|Y_{\mathrm{f}}\|\hat{\beta}\big) - \|S\|\big(\|Y\|\|\hat{\theta}\| + \|Y_{\mathrm{f}}\|\|\hat{\theta}_{\mathrm{f}}\| + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|\big)\\ &-(k_2 - h_0)\|S\| + \gamma\|S\| + \tilde{\alpha}\dot{\hat{\alpha}} + \tilde{\beta}\dot{\hat{\beta}} + \tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}}\}\end{aligned} \tag{۳۱}$$

با استفاده از نامساوی کوشی-شوآرتز و فرض‌های $\{\|\theta\| \leq \alpha\}$ و $\{\|\theta_{\mathrm{f}}\| \leq \beta\}$، چهار نامساوی رابطه‌ی (۳۲) برای ترم‌های اسکالری $\{-S^TY\theta\}$، $\{-S^TY_{\mathrm{f}}\,\theta_{\mathrm{f}}\}$، $\{S^TY\hat{\theta}\}$ و $\{S^TY_{\mathrm{f}}\,\hat{\theta}_{\mathrm{f}}\}$ استخراج می‌شوند.

$$\begin{cases}(a): \{-S^TY\theta\} \leq |S^TY\theta| \leq \|S\|\|Y\|\|\theta\| \leq \alpha\|S\|\|Y\|\\ (b): \{-S^TY_{\mathrm{f}}\,\theta_{\mathrm{f}}\} \leq |S^TY_{\mathrm{f}}\,\theta_{\mathrm{f}}| \leq \|S\|\|Y_{\mathrm{f}}\|\|\theta_{\mathrm{f}}\| \leq \beta\|S\|\|Y_{\mathrm{f}}\|\\ (c): \{S^TY\hat{\theta}\} \leq |S^TY\hat{\theta}| \leq \|S\|\|Y\|\|\hat{\theta}\|\\ (d): \{S^TY_{\mathrm{f}}\,\hat{\theta}_{\mathrm{f}}\} \leq |S^TY_{\mathrm{f}}\,\hat{\theta}_{\mathrm{f}}| \leq \|S\|\|Y_{\mathrm{f}}\|\|\hat{\theta}_{\mathrm{f}}\|\end{cases} \tag{۳۲}$$

با اعمال نامساوی‌های چهارگانه‌ی فوق به (۳۱) و در نظرگرفتن $\{-(k_2 - h_0)\|S\| \leq 0\}$ و $\{-h_1\|\Omega^{-1}\|(h_0 + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|) \leq 0\}$، نامساوی ساده شده‌ی (۳۳) برای $\dot{V}_2(t)$ حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) \leq \{&\|S\|\|Y\|(\alpha - \hat{\alpha}) + \|S\|\|Y_{\mathrm{f}}\|(\beta - \hat{\beta}) - k_1\|S\|^2\\ &-\|S\|\|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\| + \|S\|(\gamma - \hat{\gamma}) + \tilde{\alpha}\dot{\hat{\alpha}} + \tilde{\beta}\dot{\hat{\beta}} + \tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}}\}\end{aligned} \tag{۳۳}$$

با جایگذاری $\dot{\hat{\gamma}}$، $\dot{\hat{\beta}}$ و $\dot{\hat{\alpha}}$ از قوانین تطبیقی (۲۰) و لحاظ کردن تعاریف $\{\tilde{\alpha} \triangleq \hat{\alpha} - \alpha\}$، $\{\tilde{\beta} \triangleq \hat{\beta} - \beta\}$ و $\{\tilde{\gamma} \triangleq \hat{\gamma} - \gamma\}$، نامساوی ساده شده‌ی $\{\dot{V}_2(t) \leq -k_1\|S\|^2 \leq 0\}$ بدست می‌آید. با توجّه به کاندیدای لیاپانوف $\dot{V}_2(t)$، استناد به نامساوی $\{\dot{V}_2(t) \leq -k_1\|S\|^2 - k_2\|S\| \leq 0\}$ و استفاده از قضیّه‌ی پایداری لیاپانوف، مشخص می‌گردد که خطاهای تخمین $\tilde{\alpha}$، $\tilde{\beta}$ و $\tilde{\gamma}$ همواره کراندار هستند. با توجّه به سه تعریف $\{\tilde{\alpha} \triangleq \hat{\alpha} - \alpha\}$، $\{\tilde{\beta} \triangleq \hat{\beta} - \beta\}$ و $\{\tilde{\gamma} \triangleq \hat{\gamma} - \gamma\}$ و کرانداربودن $\tilde{\alpha}$، $\tilde{\beta}$ و $\tilde{\gamma}$، می‌توان نتیجه گرفت که توابع تخمینی اسکالری $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ و $\hat{\gamma}$ همواره کراندار بوده و با گذشت زمان به مقادیر ثابت α_∞، β_∞ و γ_∞ همگرا می‌شوند. شایان ذکر است که α_∞، β_∞ و γ_∞ لزوماً با مقادیر نامعلوم α، β و γ یکسان نیستند. با توجّه به کراندار بودن $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ و $\hat{\gamma}$، همواره سه عدد به اندازه کافی بزرگ α^*، β^* و γ^* وجود دارند که نامساوی‌های $\{\hat{\alpha} < \alpha^*\}$، $\{\hat{\beta} < \beta^*\}$ و $\{\hat{\gamma} < \gamma^*\}$ برقرار باشند. بدون از دست دادن کلّیت، می‌توان فرض کرد که مقادیر نامعلوم α، β و γ به ترتیب کوچکتر از α^*، β^* و γ^* بوده و نامساوی‌های $\{\alpha < \alpha^*\}$، $\{\beta < \beta^*\}$ و $\{\gamma < \gamma^*\}$ برآورده می‌گردند. در مرحله‌ی سوّم اثبات، $\bar{\bar{\alpha}}(t)$، $\bar{\bar{\beta}}(t)$ و $\bar{\bar{\gamma}}(t)$ به صورت $\{\bar{\bar{\alpha}}(t) \triangleq \hat{\alpha} - \alpha^*\}$، $\{\bar{\bar{\beta}}(t) \triangleq \hat{\beta} - \beta^*\}$ و $\{\bar{\bar{\gamma}}(t) \triangleq \hat{\gamma} - \gamma^*\}$ تعریف شده و در بقیّه‌ی اثبات از نمادهای مختصر $\bar{\bar{\alpha}}$، $\bar{\bar{\beta}}$ و $\bar{\bar{\gamma}}$ استفاده می‌شود. با توجّه به توضیحات فوق بدیهی است که همواره $\bar{\bar{\alpha}}$، $\bar{\bar{\beta}}$ و $\bar{\bar{\gamma}}$ منفی هستند. برای مرحله‌ی سوّم، با استفاده از $\bar{\bar{\alpha}}$، $\bar{\bar{\beta}}$ و $\bar{\bar{\gamma}}$، تابع کاندیدای لیاپانوف V_3 به صورت $\left\{V_3(S,\bar{\bar{\alpha}},\bar{\bar{\beta}},\bar{\bar{\gamma}}) = 0.5\left(S^TMS + \frac{1}{\lambda}\bar{\bar{\alpha}}^2 + \frac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}\bar{\bar{\beta}}^2 + \frac{1}{\lambda_\gamma}\bar{\bar{\gamma}}^2\right)\right\}$ تعریف می‌شود که λ، λ_{f} و λ_γ ضرایب مثبت اختیاری با شروط $\{0 < \lambda < 1\}$، $\{0 < \lambda_{\mathrm{f}} < 1\}$ و $\{0 < \lambda_\gamma < 1\}$ می‌باشند. با توجّه به ثابت بودن مقادیر α^*، β^* و γ^*، مشتق‌های زمانی $\{\dot{\bar{\bar{\alpha}}} = \dot{\hat{\alpha}}\}$، $\{\dot{\bar{\bar{\beta}}} = \dot{\hat{\beta}}\}$ و $\{\dot{\bar{\bar{\gamma}}} = \dot{\hat{\gamma}}\}$ به راحتی قابل حصول هستند. بنابراین با مشتق‌گیری از کاندیدای لیاپانوف V_3، عبارت $\left\{\dot{V}_3(t) = 0.5\,S^T\dot{M}S + S^TM\dot{S} + \frac{1}{\lambda}\bar{\bar{\alpha}}\dot{\bar{\bar{\alpha}}} + \frac{1}{\lambda_f}\bar{\bar{\beta}}\dot{\bar{\bar{\beta}}} + \frac{1}{\lambda_\gamma}\bar{\bar{\gamma}}\dot{\bar{\bar{\gamma}}}\right\}$ نتیجه می‌شود. با جایگذاری $\{M(q)\dot{S}\}$ از دینامیک سیستم حلقه‌بسته‌ی (۱۷) و طی کردن روالی کاملاً یکسان با روابط (۲۴) الی (۲۷)، نامساوی (۳۴) برای عبارت اسکالری $\dot{V}_3(t)$ بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(t) \leq \{&-S^TY\theta - S^TY_{\mathrm{f}}\,\theta_{\mathrm{f}} + S^TY\hat{\theta} + S^TY_{\mathrm{f}}\,\hat{\theta}_{\mathrm{f}} - k_1\|S\|^2 - h_1\|\Omega^{-1}\|(h_0 + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|)\\ &-\|S\|(\hat{\gamma}) + \|Y\|\,\hat{\alpha} + \|Y_{\mathrm{f}}\|\hat{\beta} - \|S\|\big(\|Y\|\|\hat{\theta}\| + \|Y_{\mathrm{f}}\|\|\hat{\theta}_{\mathrm{f}}\| + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|\big)\\ &+\gamma\|S\| - (k_2 - h_0)\|S\| + \tfrac{1}{\lambda}\bar{\bar{\alpha}}\dot{\hat{\alpha}} + \tfrac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}\bar{\bar{\beta}}\dot{\hat{\beta}} + \tfrac{1}{\lambda_\gamma}\bar{\bar{\gamma}}\dot{\hat{\gamma}}\}\end{aligned} \tag{۳۴}$$

با اعمال نامساوی‌های (۳۲) به رابطه (۳۴) و استناد به نامساوی‌های $\{\|S\|\|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\| < 0\}$، $\{-h_1\|\Omega^{-1}\|(h_0 + \|\hat{\tau}_{\mathrm{hum}}\|) \leq 0\}$، $\{\alpha < \alpha^*\}$، $\{\beta < \beta^*\}$ و $\{\gamma < \gamma^*\}$، نامساوی (۳۵) برای $\dot{V}_3$ نتیجه می‌گردد.

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 \leq \{&\|S\|\|Y\|(\alpha^* - \hat{\alpha}) + \|S\|\|Y_{\mathrm{f}}\|(\beta^* - \hat{\beta}) - k_1\|S\|^2\\ &-k_1\|S\|^2 + \|S\|(\gamma^* - \hat{\gamma}) + \tfrac{1}{\lambda}\bar{\bar{\alpha}}\dot{\hat{\alpha}} + \tfrac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}\bar{\bar{\beta}}\dot{\hat{\beta}} + \tfrac{1}{\lambda_\gamma}\bar{\bar{\gamma}}\dot{\hat{\gamma}}\}\end{aligned} \tag{۳۵}$$

با جایگذاری $\dot{\hat{\alpha}}$، $\dot{\hat{\beta}}$ و $\dot{\hat{\gamma}}$ از قوانین تطبیقی (۲۰) و در نظر گرفتن تعاریف $\{\bar{\bar{\alpha}} \triangleq \hat{\alpha} - \alpha^*\}$، $\{\bar{\bar{\beta}} \triangleq \hat{\beta} - \beta^*\}$ و $\{\bar{\bar{\gamma}} \triangleq \hat{\gamma} - \gamma^*\}$، نامساوی (۳۵) به صورت ساده شده‌ی (۳۶) قابل بیان است.

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 \leq \{&-k_1\|S\|^2 - (k_2 - h_0)\|S\| + \left(\tfrac{1}{\lambda} - 1\right)\|S\|\|Y\|\bar{\bar{\alpha}}\\ &+\left(\tfrac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}} - 1\right)\|S\|\|Y_{\mathrm{f}}\|\bar{\bar{\beta}} + \left(\tfrac{1}{\lambda_\gamma} - 1\right)\|S\|\bar{\bar{\gamma}}\}\end{aligned} \tag{۳۶}$$

با توجّه به آنکه α^*، β^* و γ^* همواره منفی هستند، می‌توان از عبارت‌های جایگزین $\{\bar{\bar{\alpha}} = -|\bar{\bar{\alpha}}|\}$، $\{\bar{\bar{\beta}} = -|\bar{\bar{\beta}}|\}$ و $\{\bar{\bar{\gamma}} = -|\bar{\bar{\gamma}}|\}$ استفاده کرد و در این صورت، نامساوی (۳۶) به (۳۷) تبدیل می‌گردد.

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 \leq \{&-k_1\|S\|^2 - (k_2 - h_0)\|S\| - \left(\tfrac{1}{\lambda} - 1\right)\|S\|\|Y\||\bar{\bar{\alpha}}|\\ &-\left(\tfrac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}} - 1\right)\|S\|\|Y_{\mathrm{f}}\||\bar{\bar{\beta}}| - \left(\tfrac{1}{\lambda_\gamma} - 1\right)\|S\||\bar{\bar{\gamma}}|\}\end{aligned} \tag{۳۷}$$

از آنجایی که عبارت $\{-k_1\|S\|^2\}$ همواره منفی است، می‌توان آن را از طرف دوّم نامساوی (۳۷) حذف کرده و نامساوی هم‌چنان برقرار است. با سه تعریف $\left\{\Delta_1 \triangleq \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\|S\|\|\bar{Y}\|\right\}$، $\left\{\Delta_2 \triangleq \left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}} - 1\right)\|S\|\|Y_{\mathrm{f}}\|\right\}$ و $\left\{\Delta_3 \triangleq \left(\frac{1}{\lambda_\gamma} - 1\right)\|S\|\right\}$، نامساوی (۳۷)به صورت ساده شده‌ی (۳۸) قابل بیان است. با توجّه به اینکه سه ضریب λ، λ_{f} و λ_γ اعداد اختیاری مثبت کوچکتر از یک هستند، سه عبارت Δ_1، Δ_2 و Δ_3 همواره مثبت می‌باشند.

$$\dot{V}_3(t) \leq -(k_2 - h_0)\|S\| - \Delta_1|\bar{\bar{\alpha}}| - \Delta_2|\bar{\bar{\beta}}| - \Delta_3|\bar{\bar{\gamma}}| \leq 0 \tag{۳۸}$$

براساس ویژگی ۱، به ازای هر بردار سطوح لغزشی $S \in \mathbb{R}^{n\times1}$، نامساوی $\left\{-\|S\| \leq -\sqrt{\left(\lambda_{\max}(M(q))\right)^{-1}S^TM(q)S}\right\}$ نتیجه می‌شود. با اعمال نامساوی اخیر و لحاظ کردن $\left\{\Delta_4 \triangleq (k_2 - h_0)\sqrt{\left(\lambda_{\max}(M(q))\right)^{-1}}\right\}$، نامساوی (۳۸) به (۳۹) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V}_3(t) \leq \left\{-\Delta_1|\bar{\bar{\alpha}}| - \Delta_2|\bar{\bar{\beta}}| - \Delta_3|\bar{\bar{\gamma}}| - \Delta_4\sqrt{S^TM(q)S}\right\} \tag{۳۹}$$

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

با ضرب و تقسیم ضرایب مناسب در چهار عبارت سمت راست نامساوی (۳۹) و تعریف $\left\{\delta \triangleq \sqrt{2}\min_t\left(\sqrt{\lambda}\Delta_1, \sqrt{\lambda_{\mathrm{f}}}\Delta_2, \sqrt{\lambda_\gamma}\Delta_3, \Delta_4\right)\right\}$، نامساوی (۴۰) از (۳۹) استخراج می‌گردد. در ادامه سعی می‌گردد که عبارت سمت راست نامساوی (۴۰) برحسب تابع کاندیدای لیاپانوف V_3 بازنویسی شود تا بتوان از لم ۱ استفاده کرد.

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(t) &\leq \left\{-\sqrt{2}\,\Delta_4\frac{\sqrt{S^TM(q)S}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2\lambda}\,\Delta_1\frac{|\bar{\bar{\alpha}}|}{\sqrt{2\lambda}} - \sqrt{2\lambda_{\mathrm{f}}}\,\Delta_2\frac{|\bar{\bar{\beta}}|}{\sqrt{2\lambda_{\mathrm{f}}}} - \sqrt{2\lambda_\gamma}\,\Delta_3\frac{|\bar{\bar{\gamma}}|}{\sqrt{2\lambda_\gamma}}\right\} \\ &\leq -\delta\times\left(\frac{(S^TM(q)S)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{|\bar{\bar{\alpha}}|}{\sqrt{2\lambda}} + \frac{|\bar{\bar{\beta}}|}{\sqrt{2\lambda_{\mathrm{f}}}} + \frac{|\bar{\bar{\gamma}}|}{\sqrt{2\lambda_\gamma}}\right)\end{aligned} \quad (۴۰)$$

با تعریف چهار نماد ابتکاری $\left\{\varepsilon_1 \triangleq \frac{(S^TM(q)S)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\right\}$، $\left\{\varepsilon_2 \triangleq \frac{|\bar{\bar{\alpha}}|}{\sqrt{2\lambda}}\right\}$، $\left\{\varepsilon_3 \triangleq \frac{|\bar{\bar{\beta}}|}{\sqrt{2\lambda_{\mathrm{f}}}}\right\}$، $\left\{\varepsilon_4 \triangleq \frac{|\bar{\bar{\gamma}}|}{\sqrt{2\lambda_\gamma}}\right\}$ و استفاده از $\left\{-\sum_{i=1}^4|\varepsilon_i| \leq -\sqrt{\sum_{i=1}^4\varepsilon_i^2}\right\}$، نامساوی (۴۱) بدست می‌آید.

$$\dot{V}_3(t) \leq -\delta\times\sqrt{\left(\frac{S^TM(q)S}{2} + \frac{|\bar{\bar{\alpha}}|^2}{2\lambda} + \frac{|\bar{\bar{\beta}}|^2}{2\lambda_{\mathrm{f}}} + \frac{|\bar{\bar{\gamma}}|^2}{2\lambda_\gamma}\right)} \quad (۴۱)$$

با توجّه به تعریف تابع کاندیدای لیاپانوف V_3، رابطه‌ی (۴۱) به نامساوی ساده شده‌ی $\left\{\dot{V}_3(t) \leq -\delta V_3^{\frac{1}{2}}\right\}$ تبدیل می‌شود. با انتخاب کردن دو ضریب $\rho_1 = \delta$، $\rho_2 = 0.5$ و استفاده‌ی مستقیم از لم ۱، به طور صریح اثبات می‌گردد که برای لحظه‌های $\{t \geq T_r\}$، بردار $S(t)$ و توابع اسکالری $\bar{\bar{\alpha}}$، $\bar{\bar{\beta}}$، $\bar{\bar{\gamma}}$ دقیقاً به صفر می‌رسند و کران بالای زمان متناهی همگرایی T_r در نامساوی (۲۱) آورده شده است. بنابراین سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات اسکلت بیرونی برای زمان‌های $\{t \geq T_r\}$، به دینامیک لغزشی $\{S(t) = \dot{S}(t) = 0\}$ تبدیل می‌شود. برای مرحله‌ی چهارم اثبات باید نشان داده شود که سیستم دینامیکی مد لغزشی $\{S(t) = \dot{S}(t) = 0\}$ دارای پایداری زمان-متناهی کلّی است. با توجّه به تعریف بردار سطوح لغزشی، دینامیک مد لغزشی برای زمان‌های $\{t \geq T_r\}$ به صورت رابطه‌ی (۴۲) نتیجه می‌شود. مطابق با (۴۲)، دینامیک مد لغزشی $\{S(t) = \dot{S}(t) = 0\}$ شامل n زیرسیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوّم مستقل از هم با $i = 1,2,\cdots,n$ است.

$$\begin{cases}\dot{e}_{2i-1}(t) = e_{2i}(t) \\ \dot{e}_{2i} = -l_{1_i}\mathrm{sign}\big(e_{2i-1}(t)\big) - l_{2_i}\mathrm{sign}\big(e_{2i}(t)\big)\end{cases} \quad (۴۲)$$

با مقایسه‌ی مستقیم سیستم غیرخطی موجود در لم ۲ و هر کدام از زیرسیستم‌های (۴۲)، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که خطاهای ردیابی (قرار گرفته برروی دینامیک مد لغزشی $S(t) = \dot{S}(t) = 0$) بعد از سپری شدن T_s ثانیه دقیقاً به صفر همگرا می‌شوند و تخمینی از کران بالای T_s در رابطه‌ی (۲۲) ارائه شده است. در انتها، با استناد به مراحل چهارگانه‌ی اثبات، به راحتی نتیجه می‌شود که هدف ردیابی زمان-متناهی (۱۱) و (۱۳) برای زمان‌های $\{t \geq (T_r + T_s)\}$ برآورده می‌شود. بنابراین اثبات در اینجا پایان می‌پذیرد.

یادآوری ۳. در ساختار کنترلی پیشنهادی می‌توان بردار سطوح لغزشی (۱۴) را با بردار (۴۳) جایگزین کرد و بردار گشتاورهای ورودی τ_m و قوانین تطبیقی مطابق با همان رابطه‌های (۱۸) الی (۲۰) خواهند بود. در (۴۳)، پارامتر اختیاری ϱ از بازه‌ی صفر تا یک انتخاب می‌شود.

$$\begin{cases}S(t) = \dot{q}(t) - \mathrm{v}(t) \ \text{ or } \ s_i(t) = \dot{q}_i(t) - \mathrm{v}_i(t) \ \text{ with } \ i = 1,2,\cdots,n \\ \mathrm{v}_i(t) = \dot{q}_{d_i}(t) - \int_0^t \mathrm{sig}^{\varrho}\big(e_{2i}(\vartheta)\big)d\vartheta - \int_0^t \mathrm{sig}^{\varrho(2-\varrho)^{-1}}\big(\omega(e_{2i}(\vartheta), e_{2i-1}(\vartheta))\big)d\vartheta \\ \mathrm{sig}^{\varrho}\big(e_{2i}(\vartheta)\big) \triangleq |e_{2i}(\vartheta)|^{\varrho}\mathrm{sign}(e_{2i}(\vartheta)) \\ \omega(e_{2i}(\vartheta), e_{2i-1}(\vartheta)) \triangleq e_{2i-1}(\vartheta) + (2-\varrho)^{-1}|e_{2i}(\vartheta)|^{2-\varrho}\mathrm{sign}(e_{2i}(\vartheta)) \\ \mathrm{sig}^{\varrho(2-\varrho)^{-1}}\big(\omega(e_{2i}, e_{2i-1})\big) \triangleq |\omega(e_{2i}, e_{2i-1})|^{\varrho(2-\varrho)^{-1}}\mathrm{sign}\big(\omega(e_{2i}, e_{2i-1})\big)\end{cases} \quad (۴۳)$$

قضیّه ۲. با در نظر گرفتن بردار سطوح لغزشی (۴۳) و اعمال گشتاورهای ورودی کنترلی (۱۸) به ربات اسکلت بیرونی (۱)، سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات پایدار زمان-متناهی کلّی بوده و متغیّرهای جابجایی مفاصل ربات برای لحظه‌های $\{t \geq (T_r + T_s)\}$ دقیقاً به مسیرهای مورد نظر می‌رسند. بنابراین هدف ردیابی زمان-متناهی (۱۱) و (۱۳) برآورده می‌شوند. زمان متناهی T_r با همان نامساوی (۲۱) و زمان متناهی T_s با رابطه‌ی (۴۴) تعیین می‌گردد که ضرایب اختیاری ι_{1_i} و ι_{2_i} در بازه‌های $\{0 < \iota_{1_i} < 1\}$ و $\{1 < \iota_{2_i} < \infty\}$ قرار دارند.

$$\begin{cases}T_s = \max_i\big(T_{s_i}\big) \ \text{with } i = 1,\dots,n \\ T_{s_i} \leq \big(\varphi_i(1-\varrho)\big)^{-1}(3-\varrho)\big(\Upsilon_i(e_{2i-1}(t=T_r), e_{2i}(t=T_r))\big)^{\frac{1-\varrho}{3-\varrho}} \\ \dot{\Upsilon}_i(e_{2i-1}, e_{2i}) \triangleq \frac{2-\varrho}{3-\varrho}|\omega(e_{2i-1}, e_{2i})|^{\frac{3-\varrho}{2-\varrho}} + \iota_{1_i}e_{2i}(t)\omega(e_{2i-1}, e_{2i}) + \frac{\iota_{2_i}}{3-\varrho}|e_{2i}(t)|^{3-\varrho} \\ \varphi_i \triangleq -\left(\max_{(e_{2i-1}, e_{2i})\in\Xi_i}\dot{\Upsilon}_i(e_{2i-1}, e_{2i})\right) \quad \text{with } \Xi_i = \{(e_{2i-1}, e_{2i}) : \Upsilon_i(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1\}\end{cases} \quad (۴۴)$$

اثبات. فرآیند این اثبات شامل چهار مرحله بوده که سه مرحله‌ی ابتدایی آن کاملاً با مراحل اثبات قضیّه ۱ یکسان هستند. بنابراین به منظور جلوگیری از تکرار و خلاصه‌نویسی، از آوردن آن‌ها خودداری می‌کنیم. در سه مرحله‌ی ابتدایی نشان داده می‌شود که با در نظر گرفتن بردار سطوح لغزشی (۴۳) و اعمال ورودی‌های کنترلی (۱۸) به ربات اسکلت بیرونی (۱)، معادلات دینامیکی ربات برای زمان‌های $\{t \geq T_r\}$ به دینامیک مد لغزشی $\{S(t) = \dot{S}(t) = 0\}$ تبدیل می‌شوند. این دینامیک مد لغزشی در رابطه‌ی (۴۴) آورده شده که متشکل از n زیرسیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوّم بدون اندرکنش با $i = 1,2,\cdots,n$ است. برای مرحله‌ی چهارم اثبات باید پایداری زمان-متناهی کلّی دینامیک مد لغزشی (۴۴) نشان داده شود.

$$\begin{cases}\dot{e}_{2i-1} = e_{2i} \\ \dot{e}_{2i} = -|e_{2i}|^{\varrho}\mathrm{sign}(e_{2i}) - |\omega(e_{2i}, e_{2i-1})|^{\varrho(2-\varrho)^{-1}}\mathrm{sign}\big(\omega(e_{2i}, e_{2i-1})\big)\end{cases} \quad (۴۵)$$

چنانچه سیستم غیرخطی لم ۳ با هر کدام از زیرسیستم‌های مرتبه‌ی دوّم (۴۵) مقایسه گردد، پایداری زمان-متناهی کلّی دینامیک لغزشی (۴۵) به طور صریح و مستقیم نتیجه می‌شود. بنابراین خطاهای ردیابی قرار گرفته بر روی دینامیک مد لغزشی (۴۵) پس از گذشت زمان متناهی T_s دقیقاً صفر می‌شوند. با توجّه به مراحل ذکرشده، بدیهی است که هدف ردیابی ربات برای زمان‌های $\{t \geq (T_r + T_s)\}$ برآورده می‌شود. اثبات قضیّه ۲ در اینجا به اتمام می‌رسد. برای درک بهتر از نحوه‌ی عملکرد ساختار کنترلی پیشنهادی، تصویری مفهومی از این ساختار در شکل ۲ ارائه گردیده است.

۵- نتایج شبیه‌سازی

ساختار کنترلی غیرخطی پیشنهادی بر روی ربات اسکلت بیرونی دو درجه آزادی مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرد. معادلات دینامیکی این ربات دو درجه آزادی از مدل رابطه‌ی (۱) پیروی می‌کنند. در معادلات دینامیکی، $\{q_1, q_2\}$ و $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2\}$ به ترتیب جابجایی‌ها و سرعت‌های زاویه‌ای دو مفصل ربات هستند [۶ و ۴۳]. برای ربات اسکلت بیرونی دو درجه آزادی، ماتریس‌های $M(q)$، $C(q, \dot{q})$ و بردار $G(q)$ در رابطه‌ی (۴۶) ارائه شده‌اند که نماد g بیانگر شتاب جاذبه‌ی زمین است.

$$\begin{cases}M(q) = \begin{bmatrix}p_1 + 2p_2\cos(q_2) & p_3 + p_2\cos(q_2) \\ p_3 + p_2\cos(q_2) & p_4\end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix}-p_2\sin(q_2)\,\dot{q}_1 & -2p_2\sin(q_2)\,\dot{q}_1 \\ 0 & p_2\sin(q_2)\,\dot{q}_2\end{bmatrix} \\ G(q) = [p_5\cos(q_1) + p_6\cos(q_1 + q_2) \quad p_6\cos(q_1 + q_2)]^T\end{cases} \quad (۴۶)$$

$$\begin{cases}p_1 = (m_1 + m_2){r_1}^2 + m_2{r_2}^2 + J_1 \\ p_2 = m_2r_1r_2 \ \text{ and } \ p_3 = m_2{r_2}^2 \\ p_4 = p_3 + J_2 \ \text{and } p_5 = (m_1 + m_2)r_1g \\ p_6 = m_2r_2g\end{cases}$$

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

در (۴۶)، $\{m_1, m_2\}$، $\{r_1, r_2\}$ و $\{J_1, J_2\}$ به ترتیب جرم‌ها، طول‌ها و ممان اینرسی‌های مرتبط با دو بازوی اوّل و دوّم ربات هستند. برای ایجاد مدل ربات در محیط شبیه‌سازی نرم‌افزار MATLAB از مقادیر عددی $\{m_1 = 0.5\ (kg), m_2 = 1.5(kg)\}$، $\{r_1 = 1(m), r_2 = 0.8(m)\}$، $\{J_1 = J_2 = 5(kg.m^2\}$ و $g = 9.8(\frac{m}{s^2})$ استفاده شده است [۶ و ۴۳]. باید توجّه داشت که در ساختار کنترلی، مقادیر تمام ثابت‌های فیزیکی ربات دو درجه آزادی نامعلوم در نظر گرفته می‌شوند. برای ربات مذکور می‌توان فرم رگرسوری خطی در پارامتر را مطابق با رابطه (۴۷) نوشت که بردار $\mathrm{v} = [\mathrm{v}_1 \quad \mathrm{v}_2]^T$ قبلاً در (۱۴) و (۴۳) تعریف گردیده است.

$$\begin{cases} M(q)\dot{\mathrm{v}} + C(q,\dot{q})\mathrm{v} + G(q) = Y(q,\dot{q},\mathrm{v},\dot{\mathrm{v}})\theta \\ \mathrm{v} = [\mathrm{v}_1 \quad \mathrm{v}_2]^T, \dot{\mathrm{v}} = [\dot{\mathrm{v}}_1 \quad \dot{\mathrm{v}}_2]^T,\ q = [q_1 \quad q_2]^T, \dot{q} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T \\ \theta_{6\times1} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6]^T \\ Y(q,\dot{q},\mathrm{v},\dot{\mathrm{v}}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{v}}_1 & y_{1,2} & \dot{\mathrm{v}}_2 & 0 & \cos(q_1) & \cos(q_1+q_1) \\ 0 & y_{2,2} & \dot{\mathrm{v}}_1 & \dot{\mathrm{v}}_2 & 0 & \cos(q_1+q_1) \end{bmatrix}_{2\times6} \\ y_{1,2} = 2\,\dot{\mathrm{v}}_1\cos(q_2) + \dot{\mathrm{v}}_2\cos(q_2) - \dot{q}_1\mathrm{v}_1\sin(q_2) - 2\,\dot{q}_1\mathrm{v}_2\sin(q_2) \\ y_{2,2} = \dot{\mathrm{v}}_1\cos(q_2) - \dot{q}_2\mathrm{v}_2\sin(q_2) \end{cases} \quad (۴۷)$$

بحث مدل‌سازی نیروهای اصطکاک کار پیچیده‌ای می‌باشد. تاکنون مدل‌های متفاوتی از اصطکاک از جمله مدل ویسکوز–کولمب، مدل آرمسترانگ و مدل لوگر ارائه گردیده است. برای انجام شبیه‌سازی، از مدل نیروی اصطکاکی ویسکوز–کولمب در مفاصل ربات مطابق با (۴۸) استفاده شده است.

$$\begin{cases} F(\dot{q}) = [F_1(\dot{q}_1) \quad F_2(\dot{q}_2)]^T \ \text{with}\ i = 1,2 \\ F_i(\dot{q}_i) = \left(f_{c_i} + (f_{s_i} - f_{c_i})e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{s_i}}\right)^2}\right)\mathrm{sign}(\dot{q}_i) + \mu_i\dot{q}_i \end{cases} \quad (۴۸)$$

در رابطه‌ی (۴۸)، f_{c_i} ضریب اصطکاک کولمب، f_{s_i} ضریب چسبندگی، $\dot{q}_{s_i}$ سرعت استریبیک و μ_i ضریب اصطکاک ویسکوز نامیده می‌شوند که همگی پارامترهای ثابت نیروی اصطکاک هستند. در شبیه‌سازی برای افزودن نیروهای اصطکاکی به دو مفصل ربات از مقادیر عددی $\{f_{c_1} = f_{c_2} = 0.0217\}$، $\{f_{s_1} = f_{s_2} = 0.024\}$، $\{\dot{q}_{s_1} = \dot{q}_{s_2} = 0.105\}$ و $\{\mu_1 = \mu_2 = 2.0137\}$ استفاده شده است. باید توجّه داشت که در ساختار کنترلی غیرخطی پیشنهادی، تمام ضرایب ثابت نیروهای اصطکاکی مفاصل، نامعلوم درنظر گرفته شده و نیروهای اصطکاک به فرم رگرسوری خطی در پارامتر $\{F(\dot{q}) = Y_{\mathrm{f}}(\dot{q})\theta_{\mathrm{f}}\}$ بازنویسی می‌شوند. با استفاده از تقریب بسط سری تیلور $\left\{e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{s_i}}\right)^2} \cong 1 - \left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{s_i}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{s_i}}\right)^4\right\}$، مدل نیروهای اصطکاکی (۴۸) را می‌توان به فرم رگرسوری (۴۹) نوشت. شبیه‌سازی ساختار کنترلی پیشنهادی بر روی ربات اسکلت بیرونی به صورت جداگانه با دو بردار سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳) انجام پذیرفته است. در شبیه‌سازی با بردار سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳)، مقادیر پارامترهای اختیاری $\{l_{1_1} = l_{1_2} = 8\}$، $\{l_{2_1} = l_{2_2} = 3\}$ و $\{\varrho = 0.1\}$ انتخاب شده‌اند. ضرایب اختیاری گشتاورهای ورودی به صورت $\{k_1 = 1\}$ و $\{k_2 = 2\}$ در نظر گرفته شده‌اند. بردارهای عدم‌قطعیّت τ_{unc} و نیروهای تعاملی کاربر و ربات τ_{hum} به ترتیب به صورت $\{\tau_{\mathrm{unc}} = 0.25[\sin(q_1) \quad \sin(q_1q_2)]^T\}$ و $\left\{\tau_{\mathrm{hum}} = 0.5e^{-3t}\left[\sin(q_1+q_2) \quad \sin(\sqrt{q_1q_2})\right]^T\right\}$ لحاظ گردیده‌اند. بردار مسیر مورد نظر $q_d(t)$ به صورت $q_d(t) = \left[\sin\left(t+\frac{\pi}{5}\right) \quad \sin\left(t+2\frac{\pi}{5}\right)\right]^T$ اعمال شده‌اند. دو ماتریس اختیاری قوانین تطبیقی به صورت $\{\Gamma_{6\times6} = \mathrm{diag}(1,1,0.1,0.1,1,1)\}$ و $\{\nabla_{8\times8} = \mathrm{diag}(1,1,1,1,1,5,5,5)\}$ لحاظ گردیده‌اند. شرط اوّلیه برای بردارهای $\hat{\theta}$ و $\hat{\theta}_{\mathrm{f}}$، به صورت $\hat{\theta}(0) = [1,1,1,1,1,1]^T$ و $\hat{\theta}_{\mathrm{f}}(0) = [0,0,0,0,0,0,0,0]^T$ منظور شده‌اند. شرایط اوّلیه برای توابع تخمینی $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$، $\hat{\gamma}$، بردارهای جابجایی q و سرعت‌های زاویه‌ای ربات $\dot{q}$ به صورت $\{\hat{\alpha}(0) = \hat{\beta}(0) = \hat{\gamma}(0) = 0.1\}$، $q(0) = [0.5,0.5]^T$ و $\dot{q}(0) = [-\pi, 1]^T$ انتخاب گردیده‌اند. پاسخ‌های زمانی متغیّرهای جابجایی زاویه‌ای مفاصل ربات (۴۷) با در نظر گرفتن دو بردار سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳) در شکل ۳ نمایش داده شده‌اند. با دقت در شکل ۳ می‌توان فهمید که متغیّرهای $q_1(t)$ و $q_2(t)$ با وجود هر کدام از سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳) پس از گذشت زمان متناهی به مسیرهای مورد نظر همگرا شده‌اند. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای ورودی مفاصل ربات (۴۷) با وجود هر کدام از بردارهای سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳) در شکل ۴ به تصویر کشیده شده‌اند. پاسخ‌های زمانی نرم اقلیدسی بردارهای تخمینی $\|\hat{\theta}(t)\|$ و $\|\hat{\theta}_{\mathrm{f}}(t)\|$ با وجود هر کدام از بردارهای سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳) در شکل ۵ ارائه گردیده‌اند که با سپری شدن مدت زمان متناهی به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. در شکل ۶ پاسخ‌های زمانی توابع تخمینی $\hat{\alpha}(t)$، $\hat{\beta}(t)$ و $\hat{\gamma}(t)$ با وجود هر کدام از دو بردار سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳) نمایش داده شده‌اند.

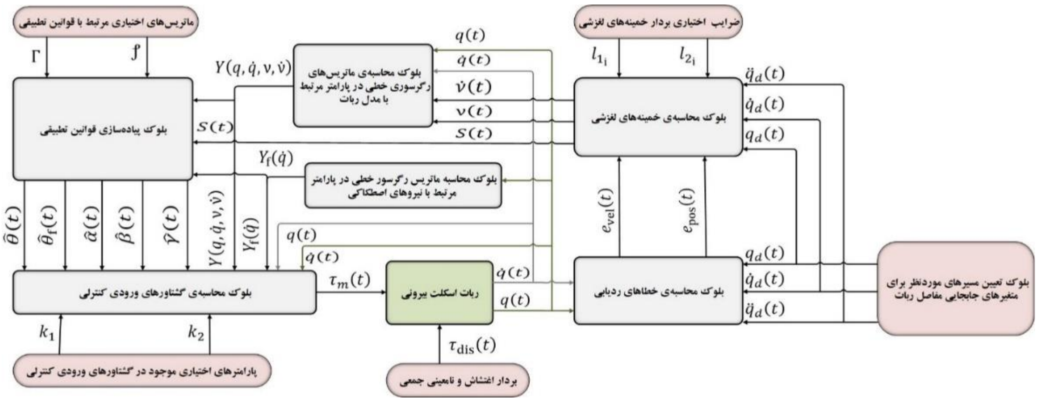
$$\begin{cases} \{F(\dot{q}) = Y_{\mathrm{f}}(\dot{q})\theta_{\mathrm{f}}\}\ \text{or}\ \begin{bmatrix} F_1(\dot{q}_1) \\ F_2(\dot{q}_2) \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} \left(Y_{\mathrm{f}_1}(\dot{q}_1)\right)_{1\times4} & \mathbf{0}_{1\times4} \\ \mathbf{0}_{1\times4} & \left(Y_{\mathrm{f}_2}(\dot{q}_2)\right)_{1\times4} \end{bmatrix}_{2\times8} \begin{bmatrix} \theta_{\mathrm{f}_1} \\ \theta_{\mathrm{f}_2} \end{bmatrix}_{8\times1} \\ \theta_{\mathrm{f}_1} = \left[f_{s_1} \quad (f_{s_1} - f_{c_1})\frac{1}{(\dot{q}_{s_1})^2} \quad (f_{s_1} - f_{c_1})\frac{0.5}{(\dot{q}_{s_1})^4} \quad \mu_1\right]^T \\ \theta_{\mathrm{f}_2} = \left[f_{c_2} \quad (f_{s_2} - f_{c_2})\frac{1}{(\dot{q}_{s_2})^2} \quad (f_{s_2} - f_{c_2})\frac{0.5}{(\dot{q}_{s_2})^4} \quad \mu_2\right]^T \\ Y_{\mathrm{f}_1}(\dot{q}_1) = [\,\mathrm{sign}(\dot{q}_1) \ \ -\dot{q}_1^2\mathrm{sign}(\dot{q}_1) \ \ \dot{q}_1^4\,\mathrm{sign}(\dot{q}_1) \ \ \dot{q}_1]^T \\ Y_{\mathrm{f}_2}(\dot{q}_2) = [\,\mathrm{sign}(\dot{q}_2) \ \ -\dot{q}_2^2\mathrm{sign}(\dot{q}_2) \ \ \dot{q}_2^4\,\mathrm{sign}(\dot{q}_2) \ \ \dot{q}_2]^T \end{cases} \quad (٤٩)$$

٦- نتیجه‌گیری

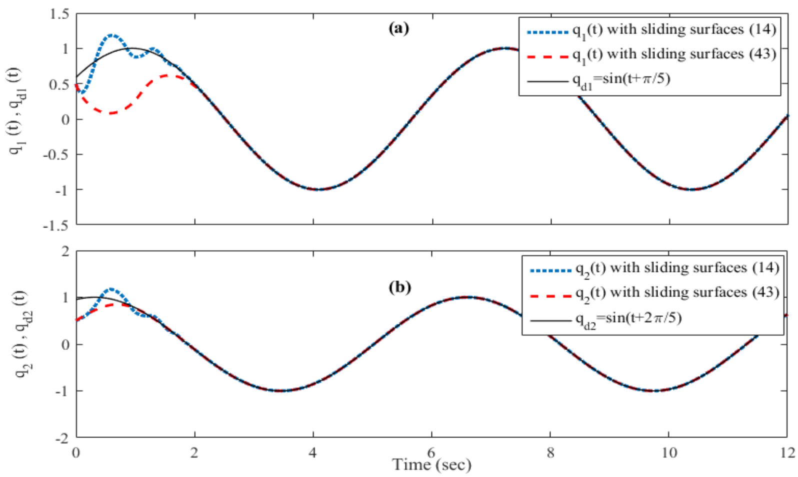
در این مقاله، مدل دینامیکی برای ربات‌های اسکلت بیرونی n درجه آزادی در حضور نیروهای اصطکاک ناشناخته، ثابت‌های فیزیکی نامعلوم، عدم‌قطعیّت مدل‌سازی و نیروهای تعاملی نامعلوم کاربر انسانی (اغتشاش‌های خارجی) ارائه گردید. با توجّه به این که نیروهای اصطکاک و بخشی از مدل دینامیکی شامل ثابت‌های فیزیکی نامعلوم بودند، فرم‌های رگرسوری خطی در پارامتر جداگانه‌ای برای توصیف آن‌ها استخراج شد. برای برآورده ساختن هدف ردیابی و تضمین پایداری زمان–متناهی کلّی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات، ساختار کنترلی ترکیبی نوآورانه‌ای با استفاده از توسعه روش کنترل مد لغزشی پایاندار و ترکیب آن با قوانین تطبیقی زمان–متناهی پیشنهاد گردید. قوانین تطبیقی، مقادیر تخمینی لحظه‌ای را برای ثابت‌های نامعلوم مدل ربات، بردار نیروهای تعاملی کاربرو و ربات (بردار اغتشاش خارجی)، ضرایب نامشخص نیروهای اصطکاک و کران بالای نرم اقلیدسی بردار عدم‌قطعیّت‌های مدل‌سازی فراهم کردند که همگی با سپری شدن زمان متناهی دقیقاً به مقادیر ثابتی همگرا شدند. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که کنترل‌کننده‌های غیرخطی طرّاحی شده، عملکرد خوبی در برآورده ساختن هدف ردیابی زمان–متناهی ربات دارند. در راستای ادامه‌ی کار پژوهشی این مقاله می‌توان پیشنهاداتی را به شرح زیر ارائه داد. ربات‌های اسکلت بیرونی همواره در معرض عوامل غیرخطی‌ساز (از جمله ناحیه مرده و اشباع) می‌باشند که محدودیّت‌هایی را بر روی گشتاورهای ورودی کنترلی ایجاد می‌کنند. عدم توجّه به این محدودیّت‌ها، کاهش کارایی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات را به‌دنبال خواهد داشت. در راستای اوّلین کار

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

پژوهشی آینده می‌توان با استفاده از راهکار کنترلی فازی-عصبی، اثر عوامل غیرخطی ساز را در طرّاحی ساختار کنترلی و تحلیل پایداری سیستم حلقه‌بسته درنظر گرفت. در ساختار کنترلی ترکیبی پیشنهادی فرض شد که متغیّرهای جابجایی و سرعت مفاصل ربات قابل اندازه‌گیری و در دسترس هستند. در پیاده‌سازی عملی، حسگرهای اندازه‌گیری متغیّرهای سرعت گران و پرهزینه می‌باشند. به عنوان دوّمین کار پژوهشی آینده، می‌توان رویتگر غیرخطی زمان-متناهی را برای تخمین متغیّرهای سرعت طرّاحی کرد. بنابراین با اتصال این رویتگر و کنترل‌کننده‌های غیرخطی مقاله‌ی حاضر، می‌توان الگوریتم کنترلی زمان-متناهی جدیدی را ارائه داد. در راستای سوّمین کار پژوهشی آینده می‌توان راهکار کنترلی پیشنهادی را با تعریف سطوح لغزشی غیرخطی دیگری توسعه داد و زمان‌های متناهی همگرایی مناسب‌تری را فراهم آورد. در این مقاله فرض گردید که ربات اسکلت بیرونی از نوع تحریک کامل بوده و تعداد گشتاورهای ورودی کنترلی با تعداد درجه‌های آزادی ربات برابرند. به عنوان چهارمین کار پژوهشی می‌توان راهکار کنترلی پیشنهادی را به ربات‌های اسکلت بیرونی تحریک ناقص (که تعداد ورودی‌های کنترلی‌شان کمتر از تعداد درجه‌های آزادی‌شان است) تعمیم داد. در راستای پنجمین کار تحقیقاتی آتی می‌توان از ایده مطرح شده در تذکّر ۱ کمک گرفت و نقش تعاملی کاربر انسانی (فرد معلول) و ربات اسکلت بیرونی را در ساختار کنترلی پیشنهادی به صورتی غیر از اغتشاش‌های خارجی لحاظ کرد.



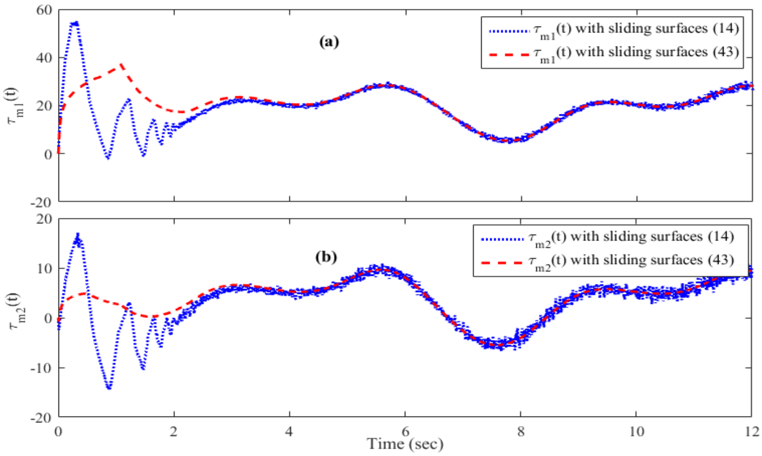
شکل ۲. تصویری مفهومی از نحوه‌ی ارتباط اجزای ساختار کنترلی غیرخطی پیشنهادی برای ربات اسکلت بیرونی



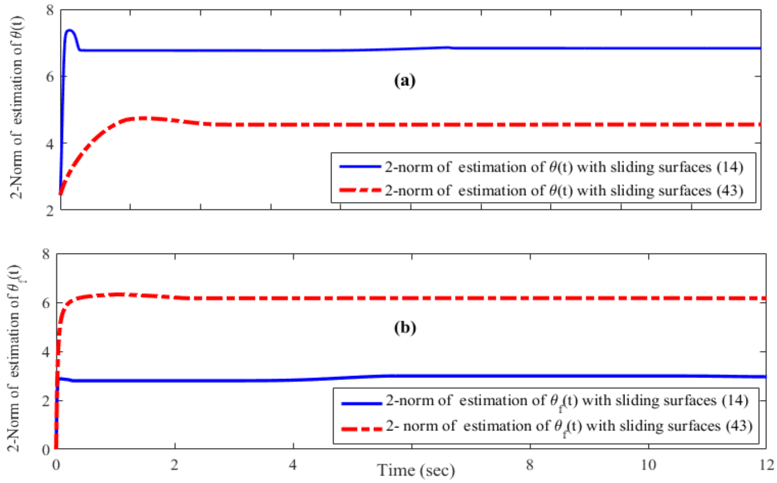
شکل ۳. پاسخ‌های زمانی متغیّرهای جابجایی زاویه‌ای مفاصل ربات اسکلت بیرونی دو درجه آزادی

(a): پاسخ‌های زمانی $q_1(t)$ با وجود سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳)، (b): پاسخ‌های زمانی $q_2(t)$ با وجود سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳)

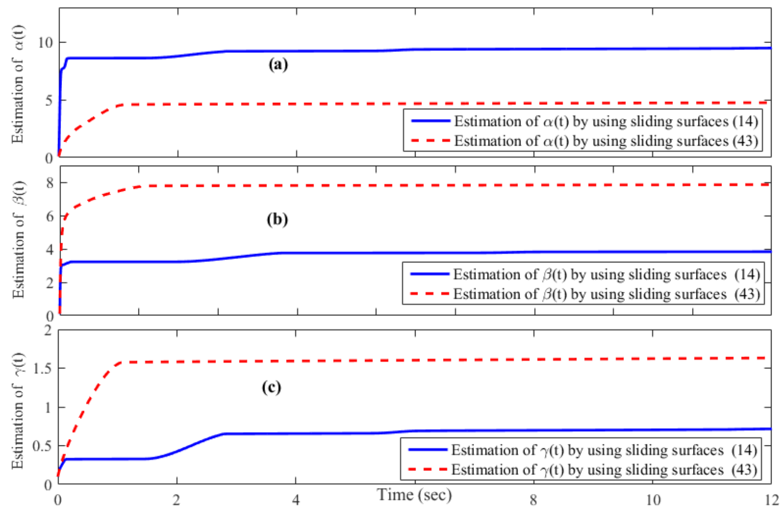
[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]



شکل ۴. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای کنترلی اعمالی به مفاصل ربات اسکلت بیرونی دو درجه آزادی با وجود سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳)



شکل ۵. پاسخ‌های زمانی نرم اقلیدسی بردارهای تخمینی $\|\hat{\theta}(t)\|$ و $\|\hat{\theta}_f(t)\|$: (a) پاسخ‌های زمانی $\|\hat{\theta}(t)\|$ با وجود سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳)، (b): پاسخ‌های زمانی $\|\hat{\theta}_f(t)\|$ با وجود سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳)



شکل ۶. پاسخ‌های زمانی توابع تخمینی $\hat{\alpha}(t)$، $\hat{\beta}(t)$ و $\hat{\gamma}(t)$: (a): پاسخ‌های زمانی $\hat{\alpha}(t)$ با وجود سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳)، (b): پاسخ‌های زمانی $\hat{\beta}(t)$ با وجود سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳)، (c): پاسخ‌های زمانی $\hat{\gamma}(t)$ با وجود سطوح لغزشی (۱۴) و (۴۳)

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

مراجع

[1] P. Yang, X. Ma, J. Wang, G. Zhang, Y. Zhang, and L. Chen, "Disturbance observer based terminal sliding mode control of a 5-DOF upper-limb exoskeleton robot," *IEEE Access*, vol. 7, no. 1, pp. 62833-62839, 2019.

[2] M. Sharifi, J. K. Mehr, V. K. Mushahwar, and M. Tavakoli, "Autonomous locomotion trajectory shaping and nonlinear control for lower limb exoskeletons," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 27, no. 2, pp. 645-655, 2022.

[3] G. Zhang, J. Wang, P. Yang, and S. Guo, "A learning control scheme for upper-limb exoskeleton via adaptive sliding mode technique," *Mechatronics*, vol. 86, no. 1, pp. 102832 (1-12), 2022.

[4] M. Khamar, M. Edrisi, and S. Forghany, "Designing a robust controller for a lower limb exoskeleton to treat an individual with crouch gait pattern in the presence of actuator saturation," *ISA Transactions*, vol. 126, no. 1, pp. 513–532, 2022.

[5] Y. Yang, Y. Li, X. Liu, and D. Huang, "Adaptive neural network control for a hydraulic knee exoskeleton with valve dead-band and output constraint based on nonlinear disturbance observer," *Neurocomputing*, vol. 473, no. 7, pp.14-23, 2022.

[6] J. Han, S. Yang, L. Xia, and Y.H. Chen, "Deterministic adaptive robust control with a novel optimal gain design approach for a fuzzy 2-DOF lower limb exoskeleton robot system," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 29, no. 8, pp. 2373-2387, 2021.

[7] L. Gao, L.J. Zhao, G.S. Yang, and C.J. Ma, "A digital twin-driven trajectory tracking control method of a lower-limb exoskeleton," *Control Engineering Practice*, vol. 127, no. 1, pp. 105271 (1-14), 2022.

[8] V. Molazadeh, Q. Zhang, X. Bao, and N. Sharma, "An iterative learning controller for a switched cooperative allocation strategy during sit-to-stand tasks with a hybrid exoskeleton," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 30, no. 3, pp. 1021-1036, 2022.

[9] L. Teng, M. A. Gull and S. Bai, "PD-based fuzzy sliding mode control of a wheelchair exoskeleton robot," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 25, no. 5, pp. 2546-2555, 2020.

[10] J. Zhao, T. Yang, X. Sun, J. Dong, Z. Wang, and C. Yang, "Sliding mode control combined with extended state observer for an ankle exoskeleton driven by electrical motor," *Mechatronics*, vol. 76, no. 1, pp. 102554 (1-12), 2021.

[11] A. Abooee, M. M. Arefi, F. Sedghi and V. Abootalebi, "Robust nonlinear control schemes for finite-time tracking objective of a 5-DOF robotic exoskeleton," *International Journal of Control*, vol. 92, no. 9, pp. 2178-2193, 2019.

[12] A. Razzaghian "A fuzzy neural network-based fractional-order Lyapunov-based robust control strategy for exoskeleton robots: Application in upper-limb rehabilitation," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 193, no. 3, pp. 567-583, 2022.

[13] S. Bembli, N. K. Haddad, and S. Belghith, "Model free terminal sliding mode with gravity compensation control of a 2 DOF exoskeleton-upper limb system," *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*, vol. 14, no. 9, pp. 451-457, 2020.

[14] G. W. Zhang, P. Yang, J. Wang, J. J. Sun, and Y. Zhang, "Integrated observer-based fixed-time control with backstepping method for exoskeleton robot," *International Journal of Automation and Computing*, vol. 17, no. 1, pp. 71-82, 2019.

[15] W. Sun, J.W. Lin, S.F. Su, N. Wang, and M. Joo Er, "Reduced adaptive fuzzy decoupling control for lower limb exoskeleton," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 51, no. 3, pp. 1099-1109, 2021.

[16] J. Wang and O. R. Barry, "Inverse optimal robust adaptive controller for upper limb rehabilitation exoskeletons with inertia and load uncertainties," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 6, no. 2, pp. 2171-2178, 2021.

[17] Z. Zhao, L. Hao, M. Liu, H. Gao, and X. Li, "Prescribed performance model-free adaptive terminal sliding mode control for the pneumatic artificial muscles elbow exoskeleton," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 35, no. 7, pp. 3138-3197, 2021.

[18] R.P. San Lazaro, I. Salgado, and I. Chairez, "Adaptive sliding-mode controller of a lower limb mobile exoskeleton for active rehabilitation," *ISA Transactions*, vol. 109, no. 1, pp. 218–228, 2021.

[19] M. Deng, Z. Li, Y. Kang, C. L.P. Chen, and X. Chu, "A learning-based hierarchical control scheme for an exoskeleton robot in human–robot cooperative manipulation," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 50, no. 1, pp. 112-125, 2020.

[20] J. Sun, J. Wang, P. Yang, and S. Guo, "Model-free prescribed performance fixed-time control for wearable exoskeletons," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 90, no. 1, pp. 61–77, 2021.

[21] B. Brahmi, M. Saad, M.H. Rahman, and C.O. Luna, "Cartesian trajectory tracking of a 7-DOF exoskeleton robot based on human inverse kinematics," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Human*, vol. 49, no. 3, pp. 600-611, 2019.

[22] W. He, Z. Li, Y. Dong, and Ting Zhao, "Design and adaptive control for an upper limb robotic exoskeleton in presence of input saturation," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 30, no. 1, pp. 97-108, 2019.

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

[23] R. Sharma, P. Gaur, S. Bhatt, and D. Joshi, “Optimal fuzzy logic-based control strategy for lower limb rehabilitation exoskeleton,” *Applied Soft Computing*, vol. 105, no. 1, pp. 107226 (1-12), 2021.

[24] E. Fazli, S. M. Rakhtala, N. Mirrashid, and H. R. Karimi, “Real-time implementation of a super twisting control algorithm for an upper limb wearable robot,” *Mechatronics*, vol. 84, no. 1, pp. 102808 (1-13), 2022.

[25] Q. Wu, B. Chen, and H. Wu, “RBFN-based adaptive backstepping sliding mode control of an upper-limb exoskeleton with dynamic uncertainties,” *IEEE Access*, vol. 7, no. 1, pp. 134635-134646, 2019.

[26] H. Fakharizade Bafghi, M.R. Jahed-Motlagh, A. Abooee, and A. Moarefianpur, “Robust finite-time tracking for a square fully-actuated class of nonlinear systems,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 103, no. 1, pp. 1611-1625, 2021.

[27] F. Sedghi, M. M. Arefi, A. Abooee, and S. Yin, “Distributed adaptive-neural finite-time consensus control for stochastic nonlinear multi-agent systems subject to saturated inputs,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, DOI: 10.1109/TNNLS.2022.3145975, 2022.

[28] F. Sedghi, M. M. Arefi, A. Abooee, and O. Kaynak, “Adaptive robust finite-time nonlinear control of a typical autonomous underwater vehicle with saturated inputs and uncertainties,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 26, no. 5, pp. 2517-2527, 2021.

[29] A. Abooee, M. Hayeri Mehrizi, M. M. Arefi, and S. Yin, “Finite-time sliding mode control for a 3-DOF fully actuated autonomous surface vehicle,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 2, pp. 371-389, 2021.

[30] S. Neisarian, M. M. Arefi, A. Abooee, and S. Yin, “Fast finite-time observer-based sliding mode controller design for a class of uncertain nonlinear systems with input saturation,” *Information Sciences*, vol. 630, no. 1, pp. 599-622, 2023.

[31] A. Abooee and M. M. Arefi, “Robust finite time stabilizers for five-degree-of-freedom active magnetic bearing system,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, no. 1, pp. 80-102, 2019.

[32] F. Sedghi, M. M. Arefi, and A. Abooee, “Command filtered-based neuro-adaptive robust finite-time trajectory tracking control of autonomous underwater vehicles under stochastic perturbations,” *Neurocomputing*, vol. 519, no. 1, pp. 158-172, 2023.

[33] H. Li, S. Zhao, W. He, and R. Lu, “Adaptive finite-time tracking control of full state constrained nonlinear systems with dead-zone,” *Automatica*, vol. 100, no. 1, pp. 99–107, 2019.

[34] A. Abooee and M. M. Arefi, “Robust finite-time stabilizers for a connected chain of nonlinear double-integrator systems,” *IEEE Systems Journal*, vol. 13, no. 1, pp. 833-841, 2019.

[35] M. Basin, “Finite- and fixed-time convergent algorithms: Design and convergence time estimation,” *Annual Reviews in Control*, vol. 48, no. 1, pp. 209–221, 2019.

[۳۶] علی ابویی، حمیدرضا احمدزاده، محمد حائری و محمد مهدی عارفی "طراحی گشتاورهای غیرخطی زمان-محدود مقاوم برای ربات-n درجه آزادی درحضور نامعینی‌ها و غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی و ناحیه مرده" *مجله علمی و پژوهشی کنترل*، جلد ۱۴، شماره ۱، بهار ۱۳۹۹، صفحات ۷۳-۹۱.

[۳۷] علی ابویی، مهران اسلامی و محمد حائری، "طراحی کنترل‌کننده‌های غیرخطی زمان-محدود مقاوم برای زیردریایی شش درجه آزادی به منظور ردیابی مسیر" *مجله علمی و پژوهشی کنترل*، جلد ۱۴، شماره ۱، بهار ۱۳۹۹، صفحات ۹۳-۱۱۳.

[۳۸] علی ابویی، "ارائه‌ی ساختار کنترلی تلفیقی نوآورانه برای وسیله‌ی دریایی خودکار تحریک کامل" *نشریه سامانه‌های غیرخطی در مهندسی برق*، جلد ۹، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۱، صفحات ۱۱۸-۱۴۶.

[۳۹] علی ابویی، فرزاد محمودیان بارزی و محمد حائری، "ردیابی نقطه بیشینه توان در سیستم فتوولتائی دارای نامعینی با رویکردکنترل غیرخطی زمان-متناهی" *مجله علمی و پژوهشی کنترل*، جلد ۱۶، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۱، صفحات ۱-۱۳.

[40] S. Song, B. Zhang, J. Xia, and Z. Zhang, “Adaptive backstepping hybrid fuzzy sliding mode control for uncertain fractional-order nonlinear systems based on finite-time scheme,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 50, no. 4, pp. 1559–1569, 2020.

[41] W. Dou, S. Ding, and X. Chen, “Practical adaptive finite-time stabilization for a class of second-order systems,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 431, no. 1, pp. 127340 (1-14), 2022.

[42] W. Lv, J. Lu, Y. Li, Y. Chu, and S. Xu, “Adaptive neural finite-time control of nonlinear systems subject to sensor hysteresis,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 359, no. 7, pp. 2932-2948, 2022.

[43] J A. Abooee, M. Moravej Khorasani, and M. Haeri, “Finite-time control of robotic manipulators with position output feedback,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, no. 16, pp. 292-2999, 2017.

[44] T. Yu, H. Wang, J. Cao, and C.F. Xue, “Finite-time stabilization of memristive neural networks via two-phase method,” *Neurocomputing*, vol. 491, no. 1, pp. 24-33, 2022.

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]

[45] A. Abooee, M. Moravej Khorasani, and M. Haeri, "Global finite-time stabilization of a class of uncertain MIMO nonlinear systems," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 138, no. 2, pp. 021007 (1-9), 2016.

[۴۶] علی ابویی، سجاد مرادی و وحید ابوطالبی، "هدایت زمان-متناهی سوزن جرّاحی رباتیک در بافت پروستات بر اساس رویکرد کنترل غیرخطی مقاوم-تطبیقی" *نشریه سامانه‌های غیرخطی در مهندسی برق*، جلد ۹، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۱، صفحات ۲۷-۵۰.

[DOI: 10.61186/joc.17.1.1]