مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۳، صفحه ۹-۱

کنترل مد لغزشی هذلولی بر پایه رویت‌گر حالت جهت ردیابی آرایش در سیستم چند عاملی نامطمئن و با ورودی نامعلوم رهبر

مجتبی زائری امیرانی[۱]، نوشین بیگدلی [۲]، محمد حائری [۳]

[۱] فارغ‌التحصیل دکتری، گروه مهندسی برق-کنترل، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه بین المللی امام خمینی،تهران zaeri.mojtaba@gmail.com

[۲] استاد، گروه مهندسی برق-کنترل، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه بین المللی امام خمینی،تهران، ایران n.bigdeli@eng.ikiu.ac.ir

[۳] استاد، گروه مهندسی برق-کنترل، دانشکدهٔ مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، تهران،ایران haeri@sharif.ir

دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۱۶ ویرایش: ۱۴۰۳/۵/۱۹ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۲۱

چکیده: ردیابی آرایش برای سیستم چندعاملی رهبر پیرو نامطمئن در این مقاله مدنظر قرار گرفته است. فرض بر آن است که مسیر حرکت رهبر برای پیروها نامعلوم است و همچنین عدم قطعیت در مدل هریک از عوامل وجود دارد. هدف، طراحی کنترل‌کننده‌ای است که ردیابی کنترل آرایش را برای سیستم چند عاملی محقق سازد و نسبت به عدم قطعیت‌های مربوط به دینامیک هر عامل مقاوم باشد. بدین منظور، یک کنترل‌کننده مدلغزشی هذلولی با زمان رسیدن محدود بر پایه رویتگر حالت طراحی شده است. رویتگر طراحی شده، رویتگر زنجیره انتگرالی مشتقگیر است. رویتگر به گونه‌ای طراحی شده که بتواند حالت‌های سیستم را علیرغم عدم قطعیت‌های ناشناخته پارامتری مدل و تنها بر اساس اندازه گیری موقعیت عامل‌ها، بطور مقاوم شناسایی کند. کنترل کننده مد لغزشی نیز با بکارگیری یک سطح لغزش تانژانت هیپربولیکی، وظیفه ردیابی آرایش با ورودی نامعلوم را بر عهده دارد. بررسی تحلیلی و شبیه سازی انجام شده نشان می دهد که زمان رسیدن به سطح لغزش محدود و تابعی از پارامترهای کنترل کننده است. همچنین، ورودی کنترلی نیز محدود و ورودی و حالت‌ها فاقد چترینگ می باشد.

کلمات کلیدی: سیستم چندعاملی رهبر-پیرو، ردیابی آرایش، کنترل مد لغزشی هذلولی، رویتگر زنجیره انتگرالی مشتقگیر.

The Design of Hyperbolic Sliding Mode Controller based on State Observer for Formation Tracking of Uncertain Multi Agent Systems with Unknown Leader Input

Mojtaba Zaeri Amirani, Noshin Bigdeli, Mohamad Haeri

Abstract: Formation tracking for uncertain leader-follower multi-agent systems is considered in this paper. It is assumed that the leader trajectory is unknown to followers and there is also uncertainty in the model of each agent. The main purpose of this paper is to design a controller that achieves formation tracking for the multi-agent system which is robust against the model uncertainties each agent. For this purpose, a state observer based hyperbolic sliding model controller with finite reaching time has been designed. The designed observer is an Integral Chain Differentiator observer. The observer has been designed to be able to robustly estimate the system states in spite of parametric uncertainties in states and just via measurements of agents' positions. Formation tracking, on the other hand is achieved via employing tangent hyperbolic sliding surfaces in the sliding mode controller. The analytical investigations and the simulation results are representative that the reaching time to sliding surface is finite and related to the controller parameters. Besides, the control input is limited and the chattering is not observed in the inputs and states.

Keywords: Leader-follower multi-agent system, Formation tracking, Hyperbolic sliding mode control, Integral chain differentiator.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

۱- مقدمه

سیستم های چند عاملی در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته‌اند [۱، ۲] . یکی از مهمترین و اساسی ترین مباحث در سیستم‌های چند عاملی، مسئله کنترل آرایش است. کنترل آرایش به لحاظ ساختار به سه دسته تقسیم می‌شود: الف) ساختار رهبر- پیرو [۳] ساختار رهبر مجازی [۴]و استراتژی های مبتنی بر رفتار[۵]. با این حال، هر یک از این چارچوب‌ها کاربردها ویژگیها و اشکالات خاص خود را دارند [۶]. از سوی دیگر، استفاده از نظریه اجماع در کنترل آرایش به دلیل استحکام و انعطاف پذیری بالایی که برای سیستم ایجاد می کند در حال افزایش است [۷، ۸] . باید توجه داشت که آرایش ممکن است تغییر کند؛ لذا مسئله کنترل آرایش متغیر با زمان بر پایه اجماع مطرح می‌شود[۲, ۷, ۸]. برای سیستم-های چند عاملی مرتبه اول با اغتشاشات خارجی، یک قانون کنترل اجماع برای گراف جهت دار در[۳] پیشنهاد شده است. برای سیستم‌های چند عامل مرتبه دوم ، کنترل براساس اجماع در [۹، ۱۰] طراحی شده‌است. برای سیستم‌های چند عاملی مرتبه بالا، الگوریتم کنترلی از یک رویتگر توزیع شده در [۱۱] بهره می‌برد. مسئله ردیابی آرایش برای سیستم چند عاملی ناهمگن در [۱۲] بررسی شده است. برای چندین جسم متحرک زیرآب، الگوریتم کنترل آرایش با استراتژی مبتنی بر رخداد در[۱۳] پیشنهاد گردیده است. شایان ذکر است که اکثر روش‌های کنترل، از جمله نتایج فوق الذکر، به شدت به مدل دینامیکی دقیق هر یک از عوامل بستگی دارند. بدون شک وجود عدم قطعیت در مدل هریک از عوامل می‌تواند بر عملکرد کنترل آرایش موثر باشد. به منظور حل مسئله فوق، تحقیقات مبتنی بر رویتگر مورد توجه قرار گرفته است. استفاده از رویتگر این امکان را فراهم می‌آورد که با توجه به عدم قطعیت‌های ناشناخته مدل امکان تخمین حالت‌ها فراهم گردد. کنترل پسگام براساس تخمین پارامترها در [۱۴، ۱۵] طراحی شده‌است. که در آن سرعت‌ها و زوایا توسط رویتگر تخمین زده می‌شوند. همچنین در [۱۶] از خطی‌سازی پسخورد ورودی-خروجی در مسئله کنترل آرایش و ردیابی استفاده شده است. در سال‌های اخیر توجه زیادی به مد لغزشی برای کنترل آرایش و ردیابی شده‌است [۱۷]. سطح لغزش توزیع شده در [۱۸] بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های دینامیکی در نظر گرفته شده است. در [۱۹، ۲۰] از کنترل مد لغزشی برای مقابله با اغتشاشات دامنه محدود استفاده شده است. برای دست یابی به آرایش متغیر با زمان در[۲۰]، سطح لغزش دارای یک انتگرال‌گیر است. تخمین مدل با وجود عدم قطعیت های دینامیکی از یک متغیر مد لغزشی به همراه شبکه عصبی در [۲۱] مد نظر قرار گرفته است. در این مقاله، ردیابی آرایش برای سیستم چندعاملی رهبر پیرو نامطمئن مدنظر قرار گرفته است. فرض بر آن است که مسیر حرکت رهبر برای پیروها نامعلوم است و پیروها فقط رهبر را دنبال می کنند. همچنین عدم قطعیت در مدل هریک از عوامل وجود دارد. هدف، طراحی کنترل‌کننده‌ای است که ردیابی کنترل آرایش را برای سیستم چند عاملی محقق سازد و نسبت به عدم قطعیت‌های مربوط به دینامیک هر عامل مقاوم باشد. بدین منظور، یک کنترل‌کننده مدلغزشی هذلولی با زمان رسیدن محدود بر پایه رویتگر حالت طراحی شده است. رویتگر طراحی شده، رویتگر زنجبره انتگرالی مشتقگیر است. رویتگر به گونه‌ای طراحی شده که بتواند حالتهای سیستم را علیرغم عدم قطعیت‌های ناشناخته پارامتری مدل و تنها بر اساس اندازه‌گیری موقعیت عوامل، بطور مقاوم شناسایی کند. کنترل‌کننده نیز با بکارگیری یک سطح لغزش تانژانت هیپربولیکی، وظیفه ردیابی آرایش با ورودی نامعلوم را بر عهده دارد. بررسی تحلیلی و شبیه سازی انجام شده نشان می‌دهد که زمان رسیدن به سطح لغزش محدود و تابعی از پارامترهای کنترل‌کننده است. همچنین، ورودی کنترلی نیز محدود و ورودی و حالت‌ها فاقد چترینگ می باشد.

ساختار مقاله به اینصورت است که در بخش ۲ ابتدا مختصری تئوری گراف به همراه تعریف مسئله آمده است. در بخش ۳ طراحی کنترل‌کننده به‌همراه طراحی رویتگر و اثبات پایداری کنترل‌کننده آمده است. در بخش ۴ شبیه سازی‌هایی برای بررسی عملکرد الگوریتم کنترلی طراحی شده آورده شده است.

۲- تعریف مساله و مفاهیم

در این قسمت ابتدا بطور مختصر به مبانی نظریه گراف پرداخته شده است و سپس تعریف مسئله بیان می گردد.

۲-۱- تئوری گراف

گراف چگونگی تعامل و ارتباطات میان عوامل را در سیستم چندعاملی بیان می کند. تعداد عوامل برابر تعداد گره‌های گراف می‌باشد. اگر تعداد عوامل برابر N باشد، مجموعه گره‌ها به‌صورت $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_N\}$ بیان می‌شود.

$$G = (V(G), W(G), \varepsilon(G)) \qquad (۱)$$

در معادله (۱)، $\varepsilon(G) = \{\varepsilon_{ij}\}$ مبین مجموعه یالهای گراف است. هر یال در واقع گویای یک اتصال میان دو گره میباشد و لذا، ($\varepsilon_{ij} = (v_i, v_j); i, j \in \{1, 2, ..., N\}$) هر یک از یال‌ها می‌تواند وزن دار باشد. وزن یال‌ها با $W(G)$ نمایش داده می‌شود. اگر یال ε_{ij} موجود باشد در این صورت $\omega_{ij} \neq 0$ ؛ در غیر این صورت $\omega_{ij} = 0$ می‌باشد. اگر ($\omega_{ij} \neq \omega_{ji}; \forall i, j \in N$) برقرار باشد، آن‌گاه گراف جهت‌دار[1] و در غیر این صورت گراف بدون جهت[2] است. ماتریس وزنی $W(G)$ یک ماتریس $N \times N$ است که وزن میان هر گره با سایر گره‌ها را تعیین می کند. همسایگان گره (v_i) به‌صورت $N_i = \{v_i \in V(G) : \varepsilon_{ij} \in \varepsilon(G)\}$ تعریف می‌شود. رهبر عاملی است که هیچ همسایه‌ای ندارد ($N_L = \{0\}$). پیروها می‌توانند رهبر را در همسایگی خود داشته باشند که در این‌صورت $\omega_{il} \neq 0$ ؛ جایی که اندیس l مبین عامل رهبر می‌باشد. با این تعریف، وجود رهبر[3] سبب می‌شود که گراف، جهت‌دار گردد.

[1] Directed
[2] Undirected
[3] Leader

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

۲-۲- تعریف مسئله

سیستم چند عاملی با N پیرو و یک رهبر در این مقاله در نظر گرفته شده است. ارتباط پیروها با هم بدون جهت است. هدف این است که علی رغم وجود عدم قطعیت در دینامیک هریک از عوامل، آرایش حفظ گردد. رهبر عاملی است که هیچ همسایه‌ای ندارد اما پیروها می‌توانند رهبر را در همسایگی خود داشته باشند. پیروها از مسیر حرکت اطلاعی ندارند و فقط رهبرها را دنبال می‌کنند. برای دنبال کردن رهبر بدون اطلاع از ورودی رهبر (مسیر حرکت) از کنترل‌کننده مدلغزشی مبتنی بر رویتگر زنجیره انتگرالی مشتقگیر استفاده شده‌است [۲۲]. سطح لغزش بکار گرفته شده، یک سطح لغزش تانژانت هیپربولیکی است که مانع بزرگ شدن خطای ردیابی و محدود شدن زمان رسیدن به حالت نهایی میشود. الگوریتم کنترلی طراحی شده علاوه بر اینکه خاصیت ردیابی را برای پیروها ایجاد می‌کند، سیستم چند عاملی را در برابر نامعینی های دینامیکی هر عامل مقاوم می‌سازد. مدل دینامیکی رهبر (۲) و پیروها (۳) در هر یک ازجهت‌های x و yبراساس مدل ارائه شده در [۲۳] در نظر گرفته می‌شود که عبارتست از:

$$\begin{cases}\dot{x}_0 = v_0 \\ \dot{v}_0 = \alpha_x x_0 + \beta_v v_0 + u_0\end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases}\dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \alpha_x x_i + \beta_v v_i + u_i\end{cases} ; i = 1,...,N \quad (۳)$$

که در این روابط، x_i و x_o نشانگر موقعیت و v_i و v_o بیانگر سرعت هستند. u_i و u_o نیز ورودی کنترل و β_v و α_x، پارامترهای دارای عدم قطعیت مربوط به هر عامل میباشند.

۳- استراتژی کنترل آرایش

در صورتی‌که اجماع سرعت و موقعیت برای تمام عوامل ایجاد گردد آرایش سیستم چندعاملی حاصل می‌گردد. بردار موقعیت هر عامل نسبت به همسایگان باید به‌گونه‌ای باشد که آرایش در طول حرکت حفظ شود. اجماع سرعت و موقعیت باید نسبت به سیگنال مرجع صورت پذیرد. اجماع بردار سرعت و موقعیت به صورت معادلات (۴) بیان می‌گردد[۲۴]:

$$\begin{cases}\lim_{t\to\infty}(\dot{x}_L(t) - \dot{x}_i(t)) = \dot{x}_{i_d}(t) \\ \lim_{t\to\infty}(x_L(t) - x_i(t)) = x_{i_d}(t)\end{cases} \quad (۴)$$

در صورتی‌که آرایش در طول حرکت ثابت باشد مقدار ($\dot{x}_{i_d}(t)$) برابر صفر می‌باشد و اگر آرایش متغیر با زمان باشد اختلاف بردار سرعت هر عامل با رهبر را بیان می‌کند. همچنین مقدار ($x_{i_d}(t)$) بردار فاصله مطلوب هر عامل با رهبر را نمایش می‌دهد. دینامیک عوامل در این مقاله به‌صورت (۲) و (۳) می‌باشد. آنچه که در کنترل آرایش مورد توجه است موقعیت و سرعت عوامل است لذا ورودی های کنترل کننده هریک از عوامل باید به گونه ای باشد که موقعیت و سرعت مطلوب را برای دینامیک هر عامل ایجاد کند. ممکن است دینامیک هریک از عوامل دارای عدم قطعیت باشد لذا کنترل کننده مدلغزشی هذلولی برای سیستم طراحی می‌شود که توانایی مقاومت در برابر عدم قطعیت را داشته باشد. برای طراحی کنترل کننده ابتدا یک رویتگر حالت زنجیره انتگرالی مشتقگیر طراحی می‌گردد.

۳-۱- طراحی رویتگر حالت زنجیره انتگرالی مشتقگیر

جهت طراحی رویتگر حالت زنجیره انتگرالی مشتقگیر دینامیک سیستم با توجه (۲) و (۳) به صورت (۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases}\dot{x}_G = v_G \\ \dot{v}_G = f_G(x_G, v_G) + u_G\end{cases} ; G = \{0,1,...,N\} \quad (۵)$$

قسمتهایی که دارای عدم قطعیت هستند با $f_G(x_G, v_G)$ نمایش داده شده اند. در طراحی کنترل کننده مد لغزشی $f_G(x_G, v_G)$ به صورت نامعلوم در نظر گرفته می‌شوند. برای (۵) رویتگر به‌صورت معادله (۶) طراحی می‌گردد[۲۲]:

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_G = \hat{v}_G \\ \dot{\hat{v}}_G = \hat{a}_G \\ \dot{\hat{a}}_G = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon_r^3}(\hat{x}_G - x_G) - \frac{\alpha_2}{\varepsilon_r^2}\hat{v}_G - \frac{\alpha_3}{\varepsilon_r}\hat{a}_G\end{cases} ; \varepsilon_r \ll 1 \quad (۶)$$

تقریب $f_G(x_G, v_G)$ بر اساس پارامترهای نامی مدل حاصل می‌گردد. لازم به ذکر است ε_r پارامتر تنظیم رویتگر می‌باشد و همانگونه که در پیوست ۱ نشان داده شده تنظیم معادله مشخصه دینامیکی رویتگر و در نتیجه همگرایی آن از طریق انتخاب این پارامتر انجام می‌شود. با توجه به اثبات همگرایی رویتگر که در پیوست ۱ آورده شده، معادله مشخصه دینامیک رویتگر عبارتست از:

$$(s^3 + \frac{a_3}{\varepsilon_r}s^2 + \frac{a_2}{\varepsilon_r^2}s + \frac{a_1}{\varepsilon_r^3}) = 0 \quad (۷\text{-الف})$$

با توجه به [۲۵]، (۷-الف) هورویتز است اگر و فقط اگر چند جمله‌ای (۷-ب) هورویتز باشد.

$$s^3 + \alpha_3 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1 = 0 \quad (۷\text{-ب})$$

لذا، در صورتی‌که چند جمله‌ای (۷-ب) هرویتز باشند آنگاه (۸) برقرار است.

$$\begin{cases}\lim_{\varepsilon\to 0}\hat{x}_G = x_G \\ \lim_{\varepsilon\to 0}\hat{v}_G = v_G \\ \lim_{\varepsilon\to 0}\hat{a}_G = f_G(x_G, v_G) + u_G\end{cases} \quad (۸)$$

با توجه به مسائل مطرح شده دینامیک خطا و دینامیک خطای حاصل از تخمین برای سیستم چند عاملی به‌ترتیب در(۹) و (۱۰) بیان می‌گردد.

$$\begin{cases}\dot{e}_{1_G} = e_{2_G}; e_{1_G} = X_G \\ \dot{e}_{2_G} = f_G(x_G, v_G) + u_G - \ddot{x}_{G_d}; e_{2_G} = \dot{X}_{Gb}\end{cases} \quad (۹)$$
$$G = 0,1,2,...,N$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

$$\begin{cases}\hat{e}_1 = \hat{X}_G \\ \hat{e}_2 = \dot{\hat{X}}_G\end{cases} \quad (۱۰)$$

که:

$$\begin{cases}\hat{X}_G = [\hat{X}_0, \hat{X}_1, \hat{X}_2, ..., \hat{X}_N] \\ \hat{X}_0 = x_0(t) - x_l(t) \\ \hat{X}_i = A + B \end{cases}$$
$$A = \sum_{j=1, i\neq j}^{j=N} \omega_{ij}[(\hat{x}_i(t) - x_{i_d}(t)) - (x_j(t) - x_{j_d}(t))] \quad (۱۱)$$
$$B = \sum_{j=1, i\neq j}^{j=N} \omega_{il}[(\hat{x}_i(t) - x_{i_d}(t)) - (x_0(t))]$$
$$i = 1, ..., N$$

در معادله (۱۱) مسیر حرکت رهبر با x_t نمایش داده شده است.

۳-۲- طراحی کنترل کننده مد لغزشی هذلولی بر اساس رویتگر حالت

همانگونه که گفته شد، جهت کنترل آرایش سیستم چند عاملی معرفی شده، باید کنترل کننده‌ای طراحی گردد که علیرغم وجود عدم قطعیت در مدل عوامل، توانایی دنبال کردن سیگنال مرجع را داشته باشد. استفاده از کنترل مدل لغزشی براساس رویتگر حالت زنجیره انتگرالی مشتقگیر می‌تواند کنترل ردیابی را با توجه به عدم قطعیت های مدل برای سیستم فراهم کند[۲۲]. از آنجا که سطح لغزش (۱۲) شامل تانژانت هیپربولیک و جمله تناسبی- مشتقی خطا می‌باشد، کنترل کننده حاصل خطای محدود نرخ همگرایی بالایی دارد[۲۳]. همچنین تخمین سطوح لغزشی براساس تخمین حالت‌ها نیز به فرم (۱۳) بدست می‌آید. با توجه تخمین‌های حالت‌ها و f_G در صورتی که هریک در دسترس نباشد و یا با عدم قطعیت همراه باشد قانون کنترل به فرم (۱۴) در نظر گرفته می‌شود. مقدار نامی f_G براساس معادلات سیستم محاسبه می‌گردد.

$$s_G = e_{2_G} + \lambda_1 e_{1_G} + \lambda_2 \tanh(\int e_{1_G}) \quad (۱۲)$$

$$\hat{s}_G = \hat{e}_{2_G} + \lambda_1 \hat{e}_{1_G} + \lambda_2 \tanh(\int \hat{e}_{1_G}) \quad (۱۳)$$

$$u_G = (-\hat{f}_G(x_G, v_G) + \ddot{x}_{G_d} - \lambda_1 \hat{e}_{2_G} - \lambda_2 \hat{e}_{1_G}(1 - (\tanh(\int \hat{e}_{1_G}))^2 - k_1 \operatorname{sgn}(\hat{s}_{x_G})) \quad (۱۴)$$

۳-۳- اثبات پایداری

تابع کاندیدای لیاپانوف به فرم (۱۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (۱۵)$$

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(\dot{e}_{2_G} + \lambda_1 e_{2_G} + \lambda_2 e_{1_G}(1 - (\tanh \int \hat{e}_{1_G})^2) \quad (۱۶)$$

با قرار دادن $\dot{e}_2$ معادله (۹) در (۱۶) معادله (۱۷) حاصل می‌شود.

$$\dot{V} = s(f_G(x_G, v_G) + u_G - x_d^{(2)} + \lambda_1 e_{2_G} + \lambda_2 e_{1_G}(1 - (\tanh \int \hat{e}_{1_G})^2) \quad (۱۷)$$

در صورتی‌که قانون کنترل (۱۴) در (۱۷) قرار داده شود معادله (۱۸) حاصل می‌شود.

$$\dot{V} = s(f_G(x_G, v_G) + [-\hat{f}_G(x_G, v_G) + x_d^{(2)} - \lambda_1 \hat{e}_{2_G} - \lambda_2 \hat{e}_{1_G}(1 - (\tanh(\int \hat{e}_{1_G}))^2 - k \operatorname{sgn}(\hat{s})] - x_d^{(2)} + \lambda_1 e_{2_G} + \lambda_2 e_{1_G}(1 - (\tanh \int \hat{e}_{1_G})^2) \quad (۱۸)$$

$$\dot{V} = s((f_G(x_G, v_G) - \hat{f}_G(x_G, v_G)) - \lambda_1(\hat{e}_{2_G} - e_{2_G}) - \lambda_2(\hat{e}_{1_G}(1 - (\tanh \int \hat{e}_{1_G})^2) - e_{1_G}(1 - (\tanh \int \hat{e}_{1_G})^2)) - k \operatorname{sgn}(\hat{s})) \quad (۱۹)$$

در صورتی‌که ε_r به مقدار کافی کوچک باشد آنگاه (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) برقرار است.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{e}_{1_G} = e_{1_G} \quad (۲۰)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{e}_{2_G} = e_{2_G} \quad (۲۱)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f_G(x_G, v_G) - \hat{f}_G(x_G, v_G)(x)) = 0 \quad (۲۲)$$

با توجه به (۱۶)-(۲۲) می‌توان نتیجه گرفت که $\dot{V} \leq -k|s_1| < 0$ و در نتیجه پایداری مجانبی برقرار است. همچنین داریم:

$$\dot{V} \leq -k|s_1| = -k\frac{\sqrt{2}}{2} V^{\frac{1}{2}} \quad (۲۳)$$

با ساده‌سازی رابطه (۲۳)، خواهیم داشت:

$$dt \leq -\frac{\sqrt{2}}{k} V^{-\frac{1}{2}} dV \quad (۲۴)$$

با انتگرالگیری از رابطه (۲۴)، خواهیم داشت:

$$t_r \leq t_0 + \frac{2\sqrt{2}}{k} V(t_0) \quad (۲۵)$$

که در آن، tr زمان رسیدن به سطح لغزش میباشد ولذا با تعریف $T_1(t_0)=t_r-t_0$ خواهیم داشت:

$$T_1(t_0) \leq \frac{2\sqrt{2}}{k} V(t_0) \quad (۲۶)$$

٤- شبیه سازی

در این بخش، نتایج شبیه سازی برای مسئله کنترل آرایش برای یک سیستم چند عاملی آمده است. یک رهبر به همراه چهار پیرو برای شبیه سازی در نظر گرفته شده‌اند. آرایش در این مقاله متغیر بازمان است و دینامیک هریک از عوامل دارای عدم قطعیت می‌باشد. کنترل کننده طراحی شده رفتار مطلوب کنترلی که همان آرایش متغیر با زمان با وجود عدم قطعیت‌های هر یک از عوامل را فراهم می‌کند. کنترل آرایش در صفحه xy مورد بررسی قرار می‌گیرد. مسیر حرکت که رهبر فقط از آن اطلاع دارد در (۲۷) معرفی شده است. همچنین مسیر مطلوب پیروها که در (۴) مد نظر قرار گرفته برای هریک از پیروها در (۲۸) بیان شده است.

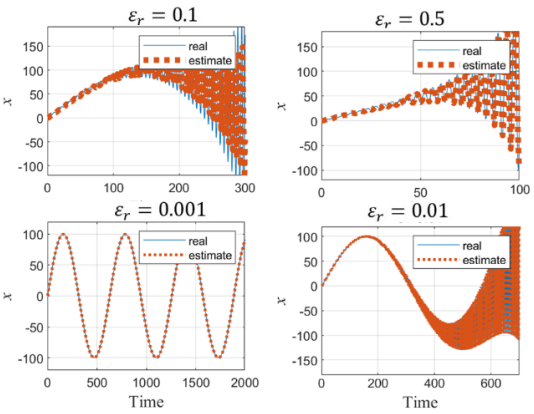
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

$$\begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \\ y_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\sin(0.01t) \\ \cos(0.01t) \\ 100\cos(0.01t) \\ -\sin(0.01t) \end{bmatrix} \quad (۲۷)$$

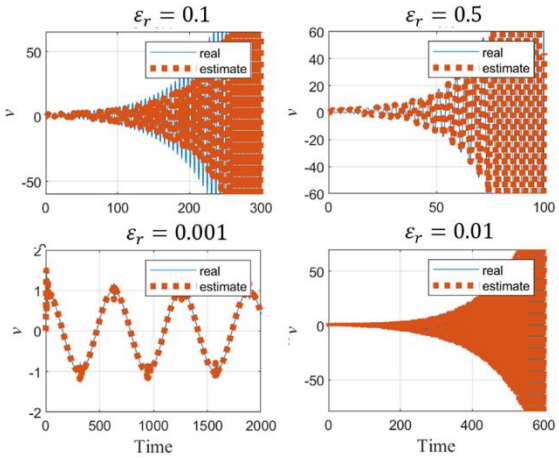
$$\begin{bmatrix} x_{i_d} \\ \dot{x}_{i_d} \\ y_{i_d} \\ \dot{y}_{i_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\sin(.1t+\frac{\pi(i-1)}{N}) \\ \cos(.1t+\frac{\pi(i-1)}{N}) \\ 10\cos(.1t+\frac{\pi(i-1)}{N}) \\ -\sin(.1t+\frac{\pi(i-1)}{N}) \end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

سرعت و موقعیت در راستای محور x و y با هم ۹۰ درجه اختلاف فاز دارند. در رابطه (۲۸)، N بیانگذ تعداد پیروها که در اینجا همان ۴ می‌باشد، همچنین هر پیرو دارای شماره می‌باشد که i شماره هر عامل را بیان می‌کند. زمانی در کنترل آرایش موفقیت حاصل می‌شود که هر پیرو آرایش مطلوب نسبت به سایر همسایگان (رهبر و سایر پیروها) و مقادیر مطلوب خود را دنبال کند[۱۱]. در سناریوی طراحی شده مسیر عاملها به گونه ای طراحی شده که عاملها با اختلاف فاز تعیین شده، حول مسیر رهبر نوسان کنند و با هم برخوردی نداشته باشند. در این صورت علاوه براین‌که پیروها با هم برخوردی ندارند رهبر را نیز دنبال می‌کنند. در این شبیه سازی پیرو شماره ۱ و شماره ۴ به موقعیت و سرعت رهبر دسترسی دارند. همچنین پیرو ۱(با پیرو ۲ و پیرو ۴)، پیرو ۲(با پیرو ۱ و پیرو ۳)، پیرو ۳(با پیرو ۲ و پیرو ۴) و پیرو ۴(با پیرو ۱ و پیرو ۳) همسایه می‌باشند.

مقادیر نامی پارامترهای دینامیک هریک از عوامل در دو راست x و y با هم برابر فرض شده و به‌صورت ($\alpha_x = -1, \beta_v = -1.2$) در نظر گرفته می‌شوند. به منظور تنظیم رویتگر، تخمین موقعیت و سرعت رهبر با توجه به مقادیر مختلف (ε_r) در حالتی‌که ($\alpha_x = -1.5, \beta_v = -0.8$) باشند، به ترتیب در شکلهای ۱ و ۲ آمده است. همانگونه که در با توجه به آنکه دینامیک راستای x و y با هم مشابه (با ۹۰درجه اختلاف فاز) هستند، دراینجا برای صرفه‌جویی در فضا، تنها نتایج دراستای محور x نمایش داده شده است.



شکل ۱: بررسی اثر انتخاب مقادیر مختلف ε_r برتخمین موقعیت رهبر در راستای محور x در سیستم حلقه بسته.



شکل ۲: بررسی اثر انتخاب مقادیر مختلف ε_r برتخمین سرعت رهبر در راستای محور x در سیستم حلقه بسته.

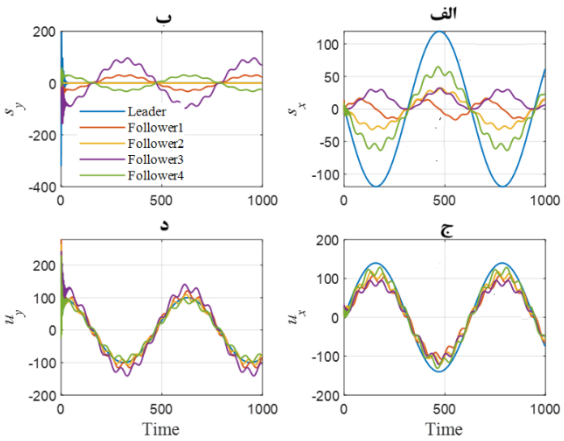
در شکلهای ۱ و ۲، به ترتیب موقعیت و سرعت خود سیستم با خط توپر و برچسب real و موقعیت و سرعت مربوط به تخمینگر با خط‌چین و برچسب estimate مشخص شده است. همان‌گونه که در شکل‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌گردد هرچه مقدار ε_r کاهش یابد هم تخمین بهتری از پارامترها حاصل می‌گردد و هم الگوریتم کنترل عملکرد بهتر خواهد داشت. در اینجا ذکر این نکته ضروری است توجیه رفتار مشاهده شده در شکلهای ۱ و ۲ را می‌توان با توجه به معادله مشخصه رویتگر (معادله (۷–الف) انجام داد. همانگونه که از این معادله مشخص است مکان ریشه‌های معادله مشخصه رویتگر به ε_r بستگی دارد و لذا می‌توان نشان داد که کاهش ε_r به افزایش پایداری رویتگر منجر می‌گردد. بنابراین، در ادامه $\varepsilon_r = 0.001$ را قرار داده می‌شود. هریک از α_x, β_v دارای عدم قطعیت می‌باشند در جدول ۱ مقادیر واقعی (α_x, β_v) برای هریک از عوامل بیان شده است.

جدول ۱: عدم قطعیت‌های هریک از عوامل

	Leader	Follower1	Follower2	Follower3	Follower4
α_x for x	-1.4	-1+C_1	-1.1	-1+C_2	-1.2
β_v for x	-1.2	-1.2+C_2	-1	-1.2	-1
α_x for y	-1	-1	-1	-1.3	-0.9
β_v for y	-1.1	-1.1	-1.2-C_2	-1	-1.3

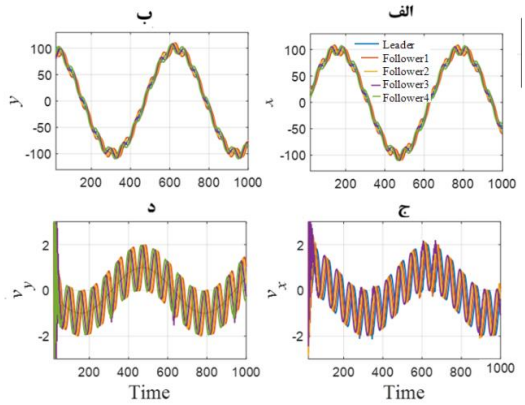
در جدول ۱ (C1=0.1cos(0.01t))، (C2=0.1sin(0.01t)) می‌باشد. برای هر عامل دو سطح لغزش در نظر گرفته شد است. سطح لغزش هریک از عامل‌ها در راستای محور x و y به‌ترتیب در شکل ۳ (الف) و شکل ۳ (ب) نمایش داده شده است. همچنین ورودی کنترلی هریک از عامل‌ها در شکل ۳ (ج) و (د) نمایش داده شده است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

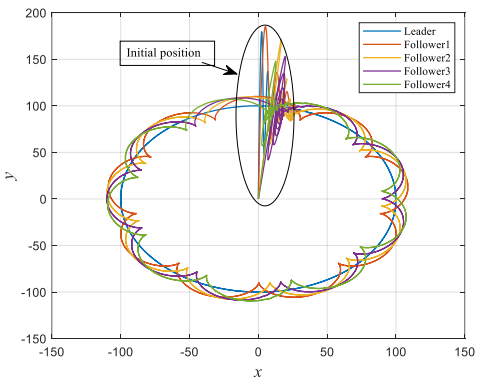


شکل ۳: سطح لغزش و ورودی کنترلی عامل‌ها در راستای محور x و y

موقعیت عامل‌ها در راستای محور x در شکل ۴ (الف) و سرعت در راستای محور x در شکل ۴ (ج) نمایش داده شده است. موقعیت و سرعت در راستای محور y نیز به ترتیب در شکل ۴ (ب) و شکل ۴ (د) نمایش داده شده است. بررسی قانون اجماع که در معادله (۴) بیان شده از شکل (۴) صورت می‌پذیرد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود اجماع به‌درستی تحقق یافته است. ورودی کنترلی محدود و بدون چترینگ بوده و سطح لغزش نیز تغییرات مناسبی دارد.

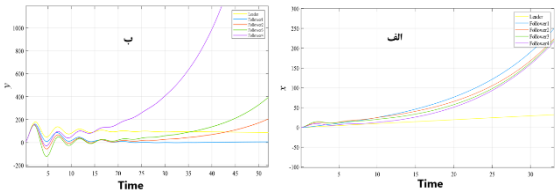


شکل ۴: بررسی قانون اجماع موقعیت و سرعت پیروها.



شکل ۵: کنترل آرایش و ردیابی در صفحه xy

حرکت در صفحه xy که کنترل آرایش و ردیابی را بیان میکند در شکل (۵) نمایش داده شده است. با توجه شکلهای(۴) و (۵) هم دنبال کردن رهبر به خوبی صورت گرفته و هم کنترل آرایش بدون برخورد عوامل با هم حاصل شده است. در پایان، به منظور مقایسه عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده با مراجع، کنترل کننده با سطح لغزش مرجع [۲۶] شبیه سازی و نتایج در شکل ۶ آورده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، با بکارگیری سطح لغزش مزبور، نه آرایش شکل می‌گیرد و نه دنبال کردن رهبر به درستی صورت می‌پذیرد.



شکل ۶: بررسی عملکرد کنترل‌کننده با استفاده از سطح لغزش مرجع [۲۶] برای کنترل آرایش و ردیابی برای سناریوی در نظر گرفته شده.

۵-نتیجه‌گیری

این مقاله برای مقابله با عدم قطعیت‌های ناشناخته مدل برای مسئله ردیابی آرایش در نظر گرفته شده است. اجماع در این مقاله براساس ساختار رهبر-پیرو برای مساله ردیابی آرایش در نظر گرفته شده است. مدل نامی هر عامل در دسترس است لذا با در نظر گرفتن مدل نامی قانون کنترل بر اساس مد لغزشی هذلولی با زمان رسیدن محدود طراحی شده است. استفاده از سطح لغزش تانژانت هیپربولیکی باعث محدود شدن خطا و افزایش سرعت پاسخ می‌شود. در ادامه، استفاده از یک الگوریتم بهینه سازی برای تنظیم رویتگر و نیز تعمیم این روش برای مساله عدم برخورد با مانع برای توسعه این پژوهش پیشنهاد می گردد.

بنابراین :

$$\lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{v}_G(s) = s x_G(s) \qquad \text{(A7)}$$

$$\lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{a}_G(s) = s^2 x_G(s) \qquad \text{(A8)}$$

معادل زمانی (A4)، (A7) و (A8) به صورت زیر بیان می شود:

$$\lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{x}_G(t) = x_G(s) \qquad \text{(A9)}$$

$$\lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{v}_G(t) = \dot{x}_G(t) = v_G(t) \qquad \text{(A10)}$$

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{a}_G(t) = \ddot{x}_G(t) = f_G(x_G, v_G) + u_G \\ or \\ f_G(x_G, v_G) = \lim_{\varepsilon_r \to 0} (\hat{a}_G(t) - u_G) \end{cases} \qquad \text{(A11)}$$

لازم به ذکر است که تابع تبدیل رویتگر به صورت زیر است:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

$$\frac{\hat{x}_G(s)}{x_G(s)} = \frac{\frac{a_1}{\varepsilon_r^3}}{(s^3 + \frac{a_3}{\varepsilon_r}s^2 + \frac{a_2}{\varepsilon_r^2}s + \frac{a_1}{\varepsilon_r^3})} \quad (A12)$$

بنابراین، فیلتر همگرا می شود اگر و تنها در صورتی که معادله مشخصه تابع انتقال (A12) هورویتز باشد. در [۲۵]، نشان داده شده است که برای $\varepsilon_r \in (0,1)$ چند جمله‌ای $(s^3 + \frac{a_3}{\varepsilon_r}s^2 + \frac{a_2}{\varepsilon_r^2}s + \frac{a_1}{\varepsilon_r^3})$ هورویتز است اگر و فقط اگر چند جمله‌ای $(s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1)$ هورویتز باشد. لذا با انتخاب مناسب ε_r می‌توان سرعت همگرایی رویتگر را به اندازه کافی کوچکتر از ثابت زمانی سیستم حلقه بسته کنترلی تنظیم نمود و بنابراین رابطه (۸) برقرار می‌گردد. همین رویه را می توان به راحتی در راستای y تکرار کرد.

پیوست: اثبات همگرایی سیستم حلقه بسته با وجود رویتگر

قضیه ۱: برای سیستم (۵)، رویتگر حالت زنجیره انتگرالی مشتقگیر (۶) را برای تقریب $f_G(x_G, v_G)$ و تخمین v_G از خروجی x_G و v ورودی سیستم طراحی می کنیم. در صورتی‌که پارامتر اغتشاش $\varepsilon_r > 0$ به اندازه کافی کوچک بوده و معادلات مشخصه (۷-الف) هورویتز باشد، معادله (۸) برآورده می شود.

اثبات:

برای سادگی روابط و با توجه به یکسان بودن دینامیک در راستای x و y اثبات تنها برای راستای x در نظر گرفته می‌شود که قابل تعمیم برای راستای y می‌باشد. معادلات حالت ناظر را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_G = \hat{v}_G \\ \dot{\hat{v}}_G = \hat{a}_G \\ \dot{\hat{a}}_G = L_1 - L_2 - L_3 \end{cases} ;\varepsilon_r \ll 1$$
$$L_1 = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon_r^3}(\hat{x}_G - x_G) \quad (A1)$$
$$L_2 = \frac{\alpha_2}{\varepsilon_r^2}\hat{v}_G$$
$$L_3 = \frac{\alpha_3}{\varepsilon_r}\hat{a}_G$$

تبدیل لاپلاس معادلات حالت رویتگر به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \hat{x}_G(s) = \frac{\hat{v}_G(s)}{s} \\ \hat{v}_G(s) = \frac{\hat{a}_G(s)}{s} \\ s\hat{a}_G(s) = L_1(s) - L_2(s) - L_3(s) \end{cases} ;\varepsilon_r \ll 1 \quad (A2)$$
$$L_1(s) = -\frac{\alpha_1}{\varepsilon_r^3}(\hat{x}_G(s) - x_G(s))$$
$$L_2(s) = \frac{\alpha_2}{\varepsilon_r^2}\hat{v}_G(s)$$
$$L_3(s) = \frac{\alpha_3}{\varepsilon_r}\hat{a}_G(s)$$

با ساده کردن معادله (A2)، ما داریم:

$$\hat{x}_G(s)(s^3 + \frac{\alpha_3}{\varepsilon_r}s^2 + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_r^2}s + \frac{\alpha_1}{\varepsilon_r^3}) = \frac{\alpha_1}{\varepsilon_r^3}x_G(s) \quad (A3)$$

همچنین:

$$\lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{x}_G(s) = x_G(s) \quad (A4)$$

علاوه بر این، از (A2) می توان نتیجه گرفت که:

$$\hat{v}_G(s)(s^2 + \frac{\alpha_3}{\varepsilon_r}s + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_r^2} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon_r^3 s}) = \frac{a_1}{\varepsilon_r^3}x_G(s) \quad (A5)$$

$$\hat{a}_G(s)(s + \frac{\alpha_3}{\varepsilon_r} + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_r^2 s} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon_r^3 s^2}) = \frac{a_1}{\varepsilon_r^3}x_G(s) \quad (A6)$$

بنابراین :

$$\lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{v}_G(s) = sx_G(s) \quad (A7)$$

$$\lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{a}_G(s) = s^2 x_G(s) \quad (A8)$$

معادل زمانی (A4)، (A7) و (A8) به صورت زیر بیان می شود:

$$\lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{x}_G(t) = x_G(s) \quad (A9)$$

$$\lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{v}_G(t) = \dot{x}_G(t) = v_G(t) \quad (A10)$$

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon_r \to 0} \hat{a}_G(t) = \ddot{x}_G(t) = f_G(x_G, v_G) + u_G \\ or \\ f_G(x_G, v_G) = \lim_{\varepsilon_r \to 0}(\hat{a}_G(t) - u_G) \end{cases} \quad (A11)$$

لازم به ذکر است که تابع تبدیل رویتگر به صورت زیر است:

$$\frac{\hat{x}_G(s)}{x_G(s)} = \frac{\frac{a_1}{\varepsilon_r^3}}{(s^3 + \frac{a_3}{\varepsilon_r}s^2 + \frac{a_2}{\varepsilon_r^2}s + \frac{a_1}{\varepsilon_r^3})} \quad (A12)$$

بنابراین، فیلتر همگرا می شود اگر و تنها در صورتی که معادله مشخصه تابع انتقال (A12) هورویتز باشد. در [۲۵]، نشان داده شده است که برای $\varepsilon_r \in (0,1)$ چند جمله‌ای $(s^3 + \frac{a_3}{\varepsilon_r}s^2 + \frac{a_2}{\varepsilon_r^2}s + \frac{a_1}{\varepsilon_r^3})$ هورویتز است اگر و فقط اگر چند جمله‌ای $(s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1)$ هورویتز باشد. لذا با انتخاب مناسب ε_r می‌توان سرعت همگرایی رویتگر را به اندازه کافی کوچکتر از ثابت زمانی سیستم حلقه بسته کنترلی تنظیم نمود و بنابراین رابطه (۸) برقرار می‌گردد. همین رویه را می توان به راحتی در راستای y تکرار کرد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

مراجع

[1]Wang, J., Yan, Y., Liu, Z., Chen, C. P., Zhang, C., & Chen, K. (2023).” Finite-time consensus control for multi-agent systems with full-state constraints and actuator failures”. Neural Networks, 157, 350-363.

[2]Amirkhani, A., & Barshooi, A. H. (2022). “Consensus in multi-agent systems: a review”. Artificial Intelligence Review, 55(5), 3897-3935.

[3]Shi-Cai, L. I. U., Da-Long, T. A. N., & Guang-Jun, L. I. U. (2007). “Robust leader-follower formation control of mobile robots based on a second order kinematics model”. Acta Automatica Sinica, 33(9), 947-955.

[4]Lewis, M. A., & Tan, K. H. (1997). “High precision formation control of mobile robots using virtual structures”. Autonomous robots, 4, 387-403.

[5]Balch, T., & Arkin, R. C. (1998). “Behavior-based formation control for multirobot teams”. IEEE transactions on robotics and automation, 14(6), 926-939.

[6]Xiong, T., Pu, Z., & Yi, J. (2017). “Time-varying formation finite-time tracking control for multi-UAV systems under jointly connected topologies”. International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics, 10(4), 478-490.

[7]Wang, R., Dong, X., Li, Q., & Ren, Z. (2019). “Distributed time-varying formation control for multiagent systems with directed topology using an adaptive output-feedback approach”. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 15(8), 4676-4685

[8]Wang, R., Dong, X., Li, Q., & Ren, Z. (2018). “Distributed time-varying output formation control for general linear multiagent systems with directed topology”. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 6(2), 609-620.

[9]Zuo, Z. (2015). “Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks”. Automatica, 54, 305-309.

[10]Ni, J., Tang, Y., & Shi, P. (2019). “A new fixed-time consensus tracking approach for second-order multiagent systems under directed communication topology”. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 51(4), 2488-2500.

[11]Zuo, Z., Tian, B., Defoort, M., & Ding, Z. (2017). “Fixed-time consensus tracking for multiagent systems with high-order integrator dynamics”. IEEE Transactions on Automatic Control, 63(2), 563-570.

[12]Chu, X., Peng, Z., Wen, G., & Rahmani, A. (2018). “Distributed fixed-time formation tracking of multi-robot systems with nonholonomic constraints”. Neurocomputing, 313, 167-174.

[13]Gao, Z., & Guo, G. (2018). “Fixed-time leader-follower formation control of autonomous underwater vehicles with event-triggered intermittent communications”. IEEE access, 6, 27902-27911.

[14]Chen, Y. Y., Zhang, Y., & Wang, Z. Z. (2017). “An adaptive backstepping design for formation tracking motion in an unknown Eulerian specification flowfield”. Journal of the Franklin Institute, 354(14), 6217-6233.

[15]Rosaldo-Serrano, M. A., Santiaguillo-Salinas, J., & Aranda-Bricaire, E. (2019). “Observer-based time-varying backstepping control for a quadrotor multi-agent system”. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 93, 135-150.

[16]Xie, W., Ma, B., Fernando, T., & Iu, H. H. C. (2018). “A new formation control of multiple underactuated surface vessels”. International Journal of Control, 91(5), 1011-1022.

[17]Wang, X., Yu, Y., & Li, Z. (2021). “Distributed sliding mode control for leader-follower formation flight of fixed-wing unmanned aerial vehicles subject to velocity constraints”. International journal of robust and nonlinear control, 31(6), 2110-2125.

[18]Wang, J., Han, L., Dong, X., Li, Q., & Ren, Z. (2021). “Distributed sliding mode control for time-varying formation tracking of multi-UAV system with a dynamic leader”. Aerospace Science and Technology, 111, 106549.

[19]González-Sierra, J., Ríos, H., & Dzul, A. (2020). “Quad-rotor robust time-varying formation control: a continuous sliding-mode control approach”. International Journal of Control, 93(7), 1659-1676.

[20]Wang, J., Xu, Y., Xu, Y., & Yang, D. (2019). “Time-varying formation for high-order multi-agent systems with external disturbances by event-triggered integral sliding mode control”. Applied Mathematics and Computation, 359, 333-343.

[21]Fei, Y., Shi, P., & Lim, C. C. (2020). “Neural network adaptive dynamic sliding mode formation control of multi-agent systems”. International Journal of Systems Science, 51(11), 2025-2040.

[22]Alemu, A. E., & Fu, Y. (2017, May). “Sliding mode control of electro-hydrostatic actuator based on extended state observer”. In 2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC) (pp. 758-763). IEEE.

[23]Dong, X., Zhou, Y., Ren, Z., & Zhong, Y. (2016). “Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying”. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 64(6), 5014-5024.

[24]Olfati-Saber, R., Fax, J. A., & Murray, R. M.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

(2007). “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems”. Proceedings of the IEEE, 95(1), 215-233.

[25]Wang, X., & Cai, L. (2017). “Aircraft navigation based on differentiation–integration observer”. Aerospace Science and Technology, 68, 109-122.

[26]Yao, D., Li, H., Lu, R., & Shi, Y. (2020). “Distributed sliding-mode tracking control of second-order nonlinear multiagent systems: An event-triggered approach”. IEEE Transactions on Cybernetics, 50(9), 3892-3902.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]