



به کارگیری فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر در تلفیق سیستم ناوبری اینرسی و سیستم موقعیت یاب جهانی

محمد جواد رجبی^۱، سید محمد مهدی دهقان بنادکی^۲، سعید محمد حسینی^۳

^۱ دانشجوی دکتری برق، کنترل، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، mrajabi@mut.ac.ir

^۲ دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، smmd@mut.ac.ir

^۳ دانشیار، دانشکده الکتروسراام و مهندسی برق، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، sm_hoseini@iust.ac.ir

پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۳

ویرایش: ۱۴۰۲/۰۸/۲۹

دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۲۷

چکیده: استفاده از روش های مرسوم تلفیق سیستم ناوبری اینرسی با یک سیستم کمک ناوبری مانند سیستم ماهواره ای ناوبری جهانی به کمک فیلتر کالمن توسعه یافته نیازمند صرف زمان زیاد برای تعیین مقادیر اولیه نسبتاً دقیق در فرآیند ترازیابی اولیه است. این فیلتر در صورت وجود خطای اولیه بزرگ به دلیل وابستگی ژاکوبی ها به متغیرهای حالت، همگرایی کندی داشته و ممکن است واگرا گردد. فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر با تغییر روش تعریف خطای استفاده از تئوری تغییرناپذیری توانایی رفع این مشکل را داشته و همگرایی آن به خطای مقادیر اولیه وابستگی ندارد. در این مقاله با هدف حذف وابستگی ناوبری به ترازیابی اولیه، از این فیلتر برای تلفیق سیستم ناوبری اینرسی و سیستم موقعیت یاب جهانی استفاده شده است. بدین منظور با تعییه کردن متغیرهای ناوبری به عنوان یک گروه لی ماتریسی و تعریف خطای صورت ضرب ماتریسی، مستقل از حالت بودن دینامیک خطای اثبات و معادله آن ارائه می گردد. مقایسه نتایج تلفیق با استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر، فیلتر کالمن توسعه یافته استاندارد و توسعه یافته حالت خطای کمک داده های واقعی و تحت خطای اولیه مختلف بیانگر کار آبی قابل توجه فیلتر کالمن نامتغیر، توانایی آن برای رفع واگرایی یا همگرایی کند روشهای مرسوم و امکان کاهش زمان آماده کار سیستم با حذف ترازیابی اولیه است.

کلمات کلیدی: تلفیق، سیستم ناوبری اینرسی، سیستم موقعیت یاب جهانی، خطای ترازیابی اولیه بزرگ، فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر.

Using invariant extended Kalman filter to integrate inertial navigation system and global positioning system

M. J. Rajabi, S. M. M Dehghan, S. Mohammad-Hosseini

Abstract: Using the conventional methods to integrate the inertial navigation system and the global navigation satellite system by the extended Kalman filter depends on a time consuming algorithm to determine relatively accurate initial values. In the presence of large initial error, EKF will diverge or converge slowly due to the dependence of the Jacobians on the state variables values. The invariant extended Kalman filter has the ability to solve this problem by changing the error definition method and using the theory of invariance, in which the convergence does not depend on the error of the initial values. In this paper, in order to remove the initial alignment phase, the IEKF is used to integrate the inertial navigation system and the global positioning system. Considering the navigation variables as elements of a Lie group, the error dynamics can be presented in such a way that the Jacobians are independent of the state variables. The comparison of the integration results using the invariant extended Kalman filter, the standard extended Kalman filter and the error state extended Kalman filter with experimental data set in different initial errors shows the significant

performance of the invariant Kalman filter than the other filters and its ability to resolve the divergence or slow convergence problem of the conventional methods. The results show, the dependence of the integration method on the time consuming initial alignment can be removed using this filter.

Keywords: integration, inertial navigation system, global positioning system, large initial Alignment error, invariant Extended Kalman filter.

خطی برای سیستم و حسگرها کاربرد عملی بسیار محدودی دارد. فیلتر کالمن توسعه یافته^۷ (EKF) مرسم‌ترین گسترش از فیلتر کالمن برای سیستم‌های غیرخطی است. این فیلتر از تکنیک‌های خطی سازی بهره می‌برد و ساختاری نسبتاً ساده با کارایی مناسب دارد. با این وجود، نه تنها هیچ تضمینی برای بهینه بودن تخمین ارائه نمی‌دهد، بلکه خاصیت همگرایی سرتاسری^۸ نیز نداشته و تنها همگرایی محلی آن با فرض خطای اولیه کاملاً کوچک اثبات شده است[۷]. EKF به علت انجام خطی سازی سیستم حول تخمین لحظه فعلی، در سیستم‌هایی با رفتار غیرخطی شدید تخمینی غیرقابل اعتماد و در برخی موارد واگرا ارائه می‌دهد. همچنین در صورت وجود حالت غیرقابل مشاهده، این حالت‌ها را مشاهده‌پذیر کاذب^۹ می‌کند[۶،۸]. برای حل این مشکل که ناسازگاری^{۱۰} نامیده می‌شود، راه کارهایی از جمله EKF با مشاهده‌پذیری مقید ارائه شده است که پیچیدگی محاسباتی دارد و به طور کلی نمی‌توان از ناسازگاری اجتناب کرد[۹،۱۰]. فیلتر کالمن بی‌بو (UKF) نسخه‌ی غیرخطی دیگری از فیلتر کالمن است که برای مقابله با برخی از مشکلات EKF و بهبود عملکرد آن، به جای استفاده از ژاکوبی از مجموعه‌ی از نقاط وزن دار به نام نقاط سیگما^{۱۱} استفاده می‌کند. مشکل اصلی این فیلتر حجم زیاد محاسبات است[۱۱]. بهمنظور مقابله با معایب فیلترهای فوق، معمولاً نسخه‌های ترکیبی و ابتکاری از آن‌ها استفاده می‌شود. از جمله این ابتکارات استفاده از مفاهیم هندسه دیفرانسیل^{۱۲}، نظریه گروه^{۱۳} و نظریه نامتغیر^{۱۴} در مدل‌سازی سیستم و استخراج فیلتر کالمن است. مرجع [۱۲] با ارائه یافته‌ی متفاوت در مورد مسئله ناسازگاری، نشان داده است که علت اصلی ناسازگاری، فضایی است که تخمین در آن انجام می‌شود و ژاکوبی بیش از آنکه علت ناسازگاری باشد، معلوم آن است. در [۱۳] نوع جدیدی از EKF ارائه شده است که ریشه در تئوری طراحی رؤیت گر حفظ تقارن^{۱۵} یا نامتغیر دارد که در آن به جای تخمین در فضای اقلیدسی که در فرمول‌بندی استاندارد فیلتر کالمن استفاده می‌گردد، تخمین روی منيفولد انجام می‌شود و خطای تخمین تحت عمل یک گروه لی، نامتغیر است. این عدم تغییر^{۱۶} به عنوان یک تقارن^{۱۷} برای سیستم در نظر گرفته می‌شود. هرچند که تا قبل از سال ۲۰۰۲ از ویژگی عدم تغییر یا حفظ تقارن برای اهداف کنترلی استفاده شده

مقدمه

ناوبری فرآیند اندازه‌گیری و تعیین متغیرهای حرکت جسم شامل بردارهای موقعیت، سرعت و وضعیت است. وظیفه انجام ناوبری بر عهده سیستم ناوبری است که شامل انواع مختلفی از جمله سیستم ناوبری اینرسی^۱ (INS) است. INS به عنوان گرینه اصلی انجام ناوبری دقیق، متغیرهای حرکت را از حل معادلات دیفرانسیل ناوبری با استفاده از یک روش ناوبری کور^۲ تعیین می‌کند. ناوبری کور متغیرهای هر لحظه را با توجه به سرعت، موقعیت و وضعیت لحظه قبل تعیین می‌کند و نیازمند تعیین مقادیر اولیه قبل از شروع فرآیند ناوبری است. بنابراین تعیین دقیق مقادیر اولیه متغیرها امری حیاتی و بسیار تأثیرگذار در دقت خروجی ناوبری است. فرآیند تعیین مقادیر اولیه ناوبری، تنظیم اولیه^۳ نامیده می‌شود[۱-۳]. معمولاً تعیین مقادیر اولیه موقعیت و سرعت بدراحتی و به کمک یک منبع خارجی مانند سیستم موقعیت یاب جهانی^۴ (GPS) یا سرعت سنج دوپلر^۵ (DVL) انجام می‌شود. چالش اساسی، تعیین مقادیر اولیه وضعیت است که هم راستایی یا ترازیابی^۶ نامیده می‌شود[۴،۵]. ترازیابی اولیه دقیق معمولاً زمان‌بر است و باعث افزایش زمان آماده‌به کار و کاهش سرعت عملکرد سیستم می‌شود. به دلیل استفاده INS از ناوبری کور، خطای اندازه‌گیری حسگرها اینرسی، ناشی از فرآیند ساخت و کالیبراسیون و یا خطای مقادیر اولیه، باعث انشاش خطای در طول زمان و کاهش دقت مخصوصاً در زمان طولانی می‌شود. بهمنظور مقابله با این مشکل می‌توان INS را با یک سیستم کمک ناوبری تلفیق کرد[۲]. دسترسی آسان و ارزان به داده‌های GPS انگیزه‌های زیادی را برای تلفیق INS/GPS ایجاد می‌کند[۳]. همگرایی تلفیق و کاهش خطای آن نیازمند استفاده از یک فیلتر مناسب است. فیلتر کالمن یکی از تلاش‌های موفقیت‌آمیز در زمینه‌ی طراحی فیلتر برای سیستم‌های خطی است که به طور گسترده در حوزه‌های مختلف از جمله ناوبری استفاده می‌شود. این فیلتر که مدل‌آورترین الگوریتم تخمین حالت در زمان واقعی است، تخمین حداقل واریانس را برای سیستم‌های خطی با نویز گوسی فراهم می‌کند و از ویژگی‌های همگرایی مناسبی برخوردار است[۶]. در واقعیت اکثر سیستم‌ها و حسگرها رفتار غیرخطی دارند. فیلتر کالمن، با وجود ارائه یک تخمین بهینه، به دلیل استفاده از مدل

^۹ False Observability

^{۱۰} Inconsistency

^{۱۱} Sigma Points

^{۱۲} Differential Geometry

^{۱۳} Group Theory

^{۱۴} Invariant Theory

^{۱۵} Symmetry-Preserving Observers

^{۱۶} Invariance

^{۱۷} Symmetry

^۱ Inertial Navigation System

^۲ Dead Reckoning

^۳ Initialization

^۴ Global Positioning System

^۵ Doppler Velocity Log

^۶ Alignment

^۷ Extended Kalman Filter

^۸ Global

5G/SINS پیشنهاد شده است.^{۲۲} [۲۲] تخمین زاویه لغزش جانبی یک وسیله نقلیه را به کمک تلفیق اطلاعات حسگرهای سرعت، واحد اندازه گیری اینرسی^۷ (IMU) و سیستم ماهواره‌ای ناوبری جهانی^۸ (GNSS) با استفاده از EKF انجام داده است. مرجع [۲۳] به مقایسه نتایج تلفیق DVL/IMU با استفاده از EKF و EKF مبتنی بر کواترنیون در مکان‌یابی زیرآب پرداخته است. در [۲۴] موقعیت یابی یک خودرو به کمک تلفیق INS/GNSS مبتنی بر EKF و بدون در نظر گرفتن رانش و سوگیری حسگرهای انجام شده است. کار مشابهی نیز در [۲۵] با استفاده از یک مجموعه داده به منظور موقعیت یابی یک پرنده بدون سرنوشنی ارائه شده است. مرجع [۲۶] نیز مدل خطای ترازیابی SINS را با استفاده از تعریف خطای خودمختار و قضايای ارائه شده برای آن استخراج و از فیلتر کالمن خطی برای ترازیابی SINS تحت خطای اولیه بزرگ استفاده کرده است. مقاله حاضر، به منظور کاهش زمان آماده‌بکار سیستم ناوبری، به دنبال حذف مرحله ترازیابی اولیه است. با این هدف و بر اساس ویژگی‌های فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر از IEKF برای تلفیق GPS/INS استفاده می‌شود. بدین منظور در ادامه مقاله، در بخش دوم مبانی نظری موردنیاز بیان شده است. این بخش به توصیف سیستم‌های دارای ویژگی خطای خودمختار و ارائه معادلات فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر اختصاص داده شده است. در بخش سوم با تعییه کردن حالات‌ها به عنوان عناصر گروه لی ماتریسی، معادله دینامیک آن بررسی و ضمن اثبات مستقل از حالت خطای نامتغیر، معادله دینامیک IEKF برای ارائه شده است. در ادامه با استفاده از مدل ارائه شده، معادلات INS/GPS ارائه شده است. در بخش چهارم عملکرد سیستم ناوبری تلفیقی ارائه شده به کمک مجموعه داده‌های واقعی حاصل از آزمون خودرویی مرجع و تحت خطای هم‌راستایی اولیه مختلف ارزیابی و با فیلتر کالمن توسعه یافته استاندارد و فیلتر کالمن توسعه یافته حالت خطای مقایسه می‌شود. در انتهای مقاله با جمع‌بندی و نتیجه‌گیری به پایان رسانده می‌شود.

۲- مبانی نظری

۲-۱- معرفی گروه و جبر لی

فضای توپولوژیکی که به طور موضعی اقیادسی است، منیفولد^۹ نامیده می‌شود. گروه نیز مجموعه‌ای به همراه یک عمل ترکیب است که دارای خواص بسته بودن، شرکت‌پذیری، عضو خنثی و عضو وارون می‌باشد. منیفولد دیفرانسیل پذیری که دارای ساختار گروه باشد و برای آن دو نگاشت ضرب و نگاشت وارون قابل تعریف باشد، یک گروه لی تشکیل می‌دهد. متناظر با هر گروه لی یک فضای برداری مجهز به یک عملگر برآکت لی وجود دارد که جبر لی نامیده می‌شود. همچنین گروه ماتریسی زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌های مربعی است که با عمل ضرب ماتریسی یک گروه را تشکیل می‌دهند. یک گروه لی که هم‌زمان یک گروه ماتریسی

بود^{۱۴}، اما توجه به تقارن‌های سیستم برای طراحی رؤیت‌گر، اولین بار در این سال با ایده استفاده از یک خطای نامتغیر^۱ در [۱۵] شروع شد. این مرجع به طراحی رؤیت‌گر برای یک فرآیند شیمیابی که خروجی آن نسبت غلظت‌ها است و بنابراین تحت تبدیل مقیاس گذاری^۲ نامتغیر است، پرداخته است که منجر به ایجاد رؤیت‌گر نامتغیر شد. یک چارچوب کلی برای طراحی رؤیت‌گر حفظ تقارن در [۱۶] ارائه شده است. این رویکرد، به دلیل استفاده از یک خطای نامتغیر، یک چارچوب هندسی برای طراحی رؤیت‌گر غیرخطی با خواص همگرایی جالب ارائه می‌دهد. از ویژگی‌های این نوع رؤیت‌گرها می‌توان به عدم وابستگی به اطلاعات نویز حسگر، امکان تنظیم پارامترها با الگوریتم پایداری لیپانوف، مقاومت بالا نسبت به خطای تخمین اولیه و پیچیدگی^۳ کمتر اشاره کرد. استفاده از این دسته رؤیت‌گرها این مزیت را دارد که معادلات خطای مستقل از مسیر حالت سیستم و تخمین آن یا اصطلاحاً خودمختار^۴ شده و بررسی همگرایی می‌تواند با سهولت یشتری انجام پذیرد. به منظور بهره‌برداری از ویژگی همگرایی فیلتر کالمن خطی، [۱۸] با استفاده از ایده رؤیت‌گر حفظ تقارن، رؤیت‌گر EKF حفظ تقارن^۵ را ارائه کرده است که در مقایسه با رؤیت‌گر EKF از خطی سازی مستقیم مدل فرایند غیرخطی و مدل اندازه گیری استفاده نمی‌کند و دارای چندین ویژگی‌هایی بر جسته، از جمله حفظ تقارن و امکان همگرایی در بسیاری از شرایط است [۱۸-۲۰]. موقیت EKF حفظ تقارن منجر به ادامه تحقیقات در مورد استفاده از ویژگی تقارن سیستم‌های غیرخطی و نحوه بهره‌برداری از آن‌ها برای طراحی فیلتر شده است [۱۲، ۱۳]. مرجع [۱۳] با استفاده از ابزارهای هندسه دیفرانسیل، فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر^۶ (IEKF) را پیشنهاد کرده است. ایده اصلی IEKF تغییر روش تعریف خطای و استفاده از تئوری تغییرناپذیری برای ارائه معادله دیفرانسیل خطای است. این مرجع نشان می‌دهد که اگر حالت بر روی یک گروه لی تعریف و دینامیک سیستم ویژگی گروه لی^۷ را برآورده کند، خطای تخمین که به صورت ضرب ماتریسی دو عنصر در فضای گروه لی تعریف می‌شود، تحت عمل گروه نامتغیر و دارای یک معادله دیفرانسیل خودمختار است که لگاریتم لی آن از یک رابطه خطی تبعیت می‌کند. به عبارت دیگر، خطی شدن سیستم به حالت‌های تخمینی بستگی ندارد. خطای تخمین خودمختار نتیجه اصلی تغییرناپذیری خطای تخمین تحت عمل گروه است که به عنوان تقارن سیستم در نظر گرفته می‌شود. این تقارن منجر به خطی شدن با حداقل خطای تقریب، عدم وابستگی به تخمین حالت و همگرایی سریع و دقت مناسب می‌شود و بر بسیاری از کاستی‌های خطی سازی مبتنی بر ژاکوبی که در EKF استفاده می‌شود، غلبه می‌کند. اخیراً برخی از مراجع به دنبال استفاده از IEKF به منظور تلفیق مبتنی بر INS^۸ بوده‌اند. در [۲۱] به منظور مقابله با دقت ضعیف و همگرایی کند EKF تحت خطای ترازیابی اولیه بزرگ، استفاده از IEKF برای سیستم ناوبری

⁶ Group Affine

⁷ Inertial Measurement Unit

⁸ Global Navigation Satellite System

⁹ Manifold

¹ Invariant Error

² Scaling

³ Autonomous

⁴ Symmetry Preserving EKF

⁵ Invariant EKF

$$\frac{d}{dt} \chi_t = f_{u_t}(\chi_t) \quad (5)$$

که $\chi \in G$ بیانگر متغیرهای حالت و u_t ورودی سیستم است. خطای بین دو مسیر متمایز χ_t و $\bar{\chi}_t$ از حالت‌های سیستم (5) را می‌توان با استفاده از ضرب آن‌ها تعریف کرد. در این صورت خطاهای چپ نامتغیر^۱ و راست نامتغیر^۲ به ترتیب به صورت (6) و (7) تعریف می‌شود.

$$\eta_t^L = \chi_t^{-1} \bar{\chi}_t \quad (6)$$

$$\eta_t^R = \bar{\chi}_t \chi_t^{-1} \quad (7)$$

اصطلاح خطای نامتغیر به عدم تغییر خطا (تقارن) در اثر ضرب (از چپ یا از راست) یک عنصر از گروه در مسیر حالت اشاره دارد. در صورتی که $\frac{d}{dt} \eta_t = g_{u_t}(\eta_t)$ فرم (6) و (7) بیرونی کند، دارای انتشار خودمنختار^۳ یا مستقل از مسیر حالت نامیده می‌شود. به طور کلی مشتق زمانی η_t تابعی پیچیده از $u_t, \chi_t, \bar{\chi}_t$ است که به سادگی در تابعی از η_t خلاصه نمی‌شود و بنابراین بررسی خودمنختار بودن خطا، کار مشکلی است. مرجع [۱۳] به منظور حل این مشکل قضیه ۱ را که در ادامه معرفی می‌گردد، ارائه کرده است.

۴-۲- قضیه ۱- شرط گروه افاین

سیستم (5) دارای خطای چپ یا راست نامتغیر خودمنختار است، اگر برای $t > 0$ و $a, b \in G$ شرط زیر را برقرار سازد [۱۳].

$$f_{u_t}(ab) = f_{u_t}(a)b + af_{u_t}(b) - af_{u_t}(I_d)b \quad (8)$$

این شرط، شرط گروه افاین نامیده می‌شود. در این صورت دینامیک خطاهای خودمنختار چپ و راست نامتغیر به صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt} \eta_t^L = g_{u_t}^L(\eta_t^L), g_{u_t}^L(\eta) = f_{u_t}(\eta) - f_{u_t}(I_d)\eta \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \eta_t^R = g_{u_t}^R(\eta_t^R), g_{u_t}^R(\eta) = f_{u_t}(\eta) - \eta f_{u_t}(I_d) \quad (10)$$

سیستم‌های به فرم (5) که ویژگی گروه افاین (8) را برقرار می‌سازند، خصوصیات قابل توجهی دارند که سیستم‌های خطی را در حوزه گروه و جبر لی تعیین می‌دهد. یکی از این ویژگی‌ها، ویژگی لگاریتم خطی خطا است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳].

۵-۲- قضیه ۲- خطی بودن لگاریتم خط

خطای چپ یا راست نامتغیر η بین دو مسیر از حالت‌های سیستم (5) را در نظر بگیرید. فرض شود $\eta \in \mathbb{R}^{\dim g}$ به گونه‌ای است که $\dim g \times \dim g$ است که $A \cdot \exp(\zeta_0^\wedge) = \eta_0$. رابطه $(A(\zeta_0^\wedge)^2 + O(\|A\|^2)) = (A(\zeta_0^\wedge) + O(\|\zeta_0^\wedge\|^2))$ را برقرار می‌کند. در این صورت اگر t برای $0 < t$ با معادله دیفرانسیل خطی زیر در $\mathbb{R}^{\dim g}$ مشخص می‌شود [۱۳].

نیز باشد، گروه لی ماتریسی است که جبر لی آن فضای مماس حول عنصر همانی می‌باشد [۱-۳]. نگاشت بین عناصر گروه لی ماتریسی $G \subset \mathbb{R}^{N \times N}$ و جبر لی متناظر با آن از مرتبه $\dim g$ و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{\dim g}$ توسط عملکردهای زیر انجام می‌شود.

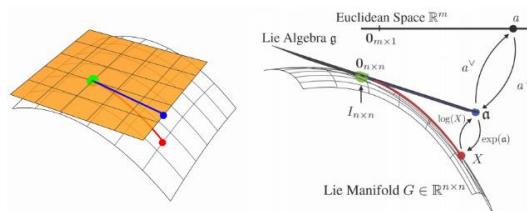
$$(0)^\wedge : \mathbb{R}^{\dim g} \rightarrow g \quad (1)$$

$$(0)^\vee : g \rightarrow \mathbb{R}^{\dim g} \quad (2)$$

$$\exp : g \rightarrow G \quad (3)$$

$$\log : G \rightarrow g \quad (4)$$

نگاشت نمایی (۳) که یک عنصر از جبر لی را دقیقاً به عنصر متناظر در گروه لی نگاشت می‌کند، برای گروه‌های لی ماتریسی همان ماتریس نمایی است. ارتباط گروه لی، جبر لی و فضای اقلیدسی در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱- ارتباط گروه لی، جبر لی و فضای اقلیدسی [۴]

در نظر گرفتن متغیرهای حالت سیستم به عنوان عناصر گروه لی ماتریسی، معادلات دینامیک خطای را به گونه‌ای ارائه می‌دهد که ویژگی‌های حرکتی جسم را به صورت دقیق‌تر توصیف می‌کند، لیکن انجام محاسبات بر روی گروه لی با پیچیدگی همراه است. به منظور حل این پیچیدگی می‌توان از ارتباط گروه و جبر لی بهره برد و محاسبات را در فضای جبر لی انجام داد.

۲-۲- تقارن

در فیزیک و ریاضیات، عدم تغییر بعضی از خواص یک سیستم دینامیکی تحت اثر مجموعه معینی از اعمال تقارن نامایه شده است. رؤیت گر نامتغیر با استفاده از تقارن به دنبال بهبود عملکرد تخمین است. به عنوان مثال فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر از خطای نامتغیر است که تحت عمل یک گروه لی تقارن دارد و به همین دلیل مدل دینامیکی آن مستقل از حالت است. در ادامه به منظور بهره گیری از تقارن برای طراحی فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر، خطای خودمنختار تعریف و دو قضیه اساسی نیز معرفی می‌گردد [۵].

۳-۲- خطای خودمنختار

گروه لی ماتریسی $G \subset \mathbb{R}^{N \times N}$ با جبر لی متناظر g از مرتبه $\dim g$ و عضو خوشی (I_d) را در نظر بگیرید. I_d ، ماتریس همانی با ابعاد $N \times N$ است. یک کلاس از سیستم‌های دینامیکی گروه لی را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت [۱۳].

³ Autonomous Propagation

¹ Left Invariant

² Right Invariant

$$\frac{d}{dt} \eta_t^L = g_{u_t}^L(\eta_t^L) - w_t \eta_t^L \quad (16)$$

همانند EKF معمولی، با فرض کوچک بودن خطای می‌توان بهره L_n را به کمک خطی سازی خطای محسوبه کرد. طبق تعریف، جبر لی نشانده‌نهاده تغییرات بین‌نهایت کوچک یک عنصر گروه حول عضو ختنی گروه است. بنابراین مطابق قضیه ۲ روش تعریف یک متغیر خطای ξ_t در $\mathbb{R}^{\text{dim } g}$ به صورت زیر است.

$$\eta_t = \exp(\xi_t^\wedge) \quad (17)$$

با تعریف $(\hat{w}_t)^\wedge = -w_t$ ، $\hat{w}_t \in \mathbb{R}^{\text{dim } g}$ ، معادله خطای خطای در $\mathbb{R}^{\text{dim } g}$ به صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt} \xi_t = A \xi_t + \hat{w}_t \quad (18)$$

که توسط $A = (A \xi)^\wedge + O(\|\xi\|_2^2)$ تعریف و از جملات مرتبه بالا صرف نظر شده است. در EKF نیز با فرض \hat{w}_t به عنوان \hat{w}_t نویز سفید از تقریب مشابه استفاده شده است. طبق قضیه ۲ با فرض ξ_t به عنوان یک حل برای سیستم خطی (۱۸) و η_t به عنوان یک حل برای معادله خطای غیرخطی (۱۶)، اگر در زمان t_{n-1} رابطه $\eta_{t_{n-1}} = \exp(\xi_{t_{n-1}}^\wedge)$ برقرار باشد، آنگاه تساوی $\eta_t = \exp(\xi_t^\wedge)$ در هر زمان $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ و برای خطای اولیه دلخواه به صورت دقیق و نه تقریبی برقرار است. جمله ابداع^۳ (خطای پیش‌بینی خروجی) فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر متناسب با مشاهدات چپ نامتغیر به صورت زیر است.

$$Z_{t_n}^L = \hat{\chi}_{t_n}^{-1} (Y_{t_n} - \hat{Y}_{t_n}) \quad (19)$$

که \hat{Y}_{t_n} تخمین اندازه‌گیری با استفاده از تخمین حالت و Z_{t_n} ابداع است. با استفاده از (۱۷) به روزرسانی خطای چپ نامتغیر، برای مشاهدات چپ نامتغیر نویزی به کمک رابطه (۱۹) به صورت زیر است.

$$(\eta_{t_n}^L)^+ = \chi_{t_n}^{-1} \hat{\chi}_{t_n}^+ = \quad (20)$$

$$\eta_{t_n}^L \exp\left(L_n \left((\eta_{t_n}^L)^{-1} d - d + (\eta_{t_n}^L)^{-1} v_{t_n}\right)\right)$$

برای خطی سازی آرگومان تابع نمایی رابطه (۲۰) با استفاده از بسط $\exp(\xi_{t_n}^\wedge) = I_d + \xi_{t_n}^\wedge$ به صورت زیر عمل می‌شود.

$$(\eta_{t_n}^L)^{-1} d - d + (\eta_{t_n}^L)^{-1} v_{t_n} = \exp(\xi_{t_n}^\wedge)^{-1} (d + v_{t_n}) - d =$$

$$(I_d - \xi_{t_n}^\wedge) (d + v_{t_n}) - d + O(\|\xi_{t_n}\|_2^2) =$$

$$-\xi_{t_n}^\wedge d + v_{t_n} + O(\|\xi_{t_n}\|_2^2) + O(\|\xi_{t_n}\|_2 \|v_{t_n}\|)$$

با کمک رابطه (۲۱) و استفاده از بسط تیلور مرتبه اول ماتریس نمایی، معادله (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{d}{dt} \xi_t = A \xi_t \quad (11)$$

آنگاه برای خطای غیرخطی واقعی η ، در همه زمان‌ها و به ازای خطاهای به اندازه دلخواه بزرگ، رابطه زیر برقرار است.

$$\forall t \geq 0 \quad \eta_t = \exp(\xi_t^\wedge) \quad (12)$$

این نتیجه بیان می‌کند که بسیاری از مسائل غیرخطی با انتخاب مناسب متغیر خطی، منجر به معادلات خطی برای خطای می‌شوند.

۶-۲- فیلتر کالمن توسعه یافته چپ نامتغیر

برای سیستم‌های به فرم (۵) با ویژگی گروه افاین (۸)، دو نوع مشاهده مختلف چپ نامتغیر و راست نامتغیر تعریف می‌شود که به ازای مشاهدات چپ نامتغیر، فیلتر کالمن توسعه یافته چپ نامتغیر^۱ (LIEKF) و برای مشاهدات راست نامتغیر، فیلتر کالمن توسعه یافته راست نامتغیر^۲ (RIEKF) ارائه شده است[۱۳]. در ناوبری نیز از دو نوع اندازه‌گیری محلی و جهانی استفاده می‌شود. اندازه‌گیری محلی مانند اندازه‌گیری‌های اینرسی، بینایی و کیلومتر شمار مربوط به دستگاه بدنه و قابل‌بیان به صورت راست نامتغیر است. اندازه‌گیری جهانی مانند GPS نیز که اطلاعاتی در مورد دستگاه جهانی (دستگاه اینرسی) ارائه می‌کند، قابل‌بیان به صورت چپ نامتغیر است[۳۰]. بنابراین فیلتر نامتغیر مناسب برای تلفیق GPS/INS/GPS است LIEKF. بینین منظور فرض می‌شود که یک گروه لی ماتریسی با جبر لی متناظر g از مرتبه $\text{dim } g$ و عنصر ختنی I_d است. یک کلاس از سیستم‌های دینامیکی به فرم زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d}{dt} \chi_t = f_{u_t}(\chi_t) + \chi_t w_t \quad (13)$$

که $\chi \in G$ متغیرهای حالت، u_t ورودی سیستم و $w_t \in g$ نویز سفید با ماتریس کوواریانس Q است. مشاهدات چپ نامتغیر نویزی نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Y_{t_n} = \chi_{t_n} d + v \quad (14)$$

که d برداری شناخته شده و v نویز با مشخصات شناخته شده است.

۶-۲-۱- مرحله پیش‌بینی

با توجه به رابطه (۱۳)، مرحله پیش‌بینی در فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر به صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt} \hat{\chi}_t = f_{u_t}(\hat{\chi}_t) \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n \quad (15)$$

۶-۲-۲- مرحله بروز رسانی

در صورتی که سیستم (۱۳) شرط گروه افاین را برقرار سازد، خطای چپ نامتغیر بین حالت واقعی χ_t و حالت تخمینی $\hat{\chi}_t$ مستقل از مسیر حالت است و دینامیک آن به صورت رابطه (۱۶) می‌باشد.

³ Innovation

¹ Left-Invariant Extended Kalman Filter

² Right-Invariant Extended Kalman Filter

$$\tilde{\omega}_t = \omega_t + b_t^s + w_t^s \quad (27)$$

$$\tilde{a}_t = a_t + b_t^a + w_t^a$$

که a_t و ω_t نرخ دوران و شتاب ورودی، $\tilde{\omega}_t$ و \tilde{a}_t خروجی حسگرهای b_t^a و w_t^a بردار نویز سفید ژیروسکوپ و شتاب سنج و b_t^s و w_t^s نویز بردار رانش ژیروسکوپ و سوگیری^۲ شتاب سنج می‌باشد که به صورت زیر مدل شده است.

$$\dot{b}_t^s = w_t^{bg} \quad (28)$$

$$\dot{b}_t^a = w_t^{ba}$$

که w_t^{bg} و w_t^{ba} بردارهای نویز سفید است. در این صورت معادله دیفرانسیل وضعیت به صورت زیر است.

$$\dot{C}_b^i(t) = C_b^i(t) \left(\omega_{ib}^b(t) + w_t^s(t) \right) \quad (29)$$

که $\times (.)$ ماتریس پادمتقارن یک بردار سه بعدی و ω_{ib}^b سرعت دوران دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی است و توسط ژیروسکوپها اندازه گیری می‌شود. معادله دیفرانسیل موقعیت و سرعت نیز به صورت زیر است.

$$\dot{v}_{ib}^i(t) = C_b^i(t) (a(t) + w_t^a) + g(t) \quad (30)$$

$$\dot{p}_{ib}^i(t) = v_b^i(t)$$

که g بردار گرانش و a نیز شتاب وارد بر جسم است که توسط شتاب سنج ها اندازه گیری می‌شود.

۳-۲-۳- استخراج مدل نامتغیر

با توجه به معادلات (۳۰) و (۳۱)، χ_t ماتریس حالت سیستم به عنوان عنصری از گروه لی ماتریس $SE_2(3)$ که در پیوست الف معرفی شده است، به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\chi_t = \begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

مطابق پیوست ب معادله دیفرانسیل ماتریس حالت (۳۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{d}{dt} \chi_t = f_{u_t}(\chi_t) + \chi_t w_t \quad (32)$$

که

$$f_{u_t}(\chi_t) = \begin{bmatrix} C_b^i(t) (\omega_{ib}^b(t))_x & C_b^i(t) (a(t)) + g(t) & v_b^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین در پیوست ب با استفاده از شرط گروه افاین اثبات شده است که (۳۲) دارای خطای نامتغیر خودمختار است. در ادامه بر اساس هدف این مقاله که تلفیق GPS/SINS است و با توجه به اینکه مدل اندازه گیری

$$I_d + (\xi_{t_n}^+)^{\wedge} = I_d + \left(L_n \left(-(\xi_{t_n}^{\wedge}) d + v_{t_n} \right) \right)^{\wedge} \quad (22)$$

$$+ O(\|\xi_{t_n}\|^2) + O(\|\xi_{t_n}\| \|v_{t_n}\|) + O(\|\xi_{t_n}\|^2) + O(\|\xi_{t_n}\| \|v_{t_n}\|), \text{ درنهایت}$$

با صرف نظر از جملات معادله خطی خطا در $\mathbb{R}^{\dim g}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\xi_{t_n}^+ = \xi_{t_n} + L_n(H\xi_{t_n} + v_{t_n}) \quad (23)$$

که H به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که رابطه زیر برقرار گردد.

$$H\xi_{t_n} = -(\xi_{t_n}^{\wedge})d \quad (24)$$

با توجه به اینکه معادلات (۱۸) و (۲۳) همانند فیلتر کالمن برای سیستم

$$\frac{d}{dt} x_t = A_{u_t} x_t + \hat{w}_t \quad \text{با اندازه گیری‌های گستته}$$

$y_n = Hx_{t_n} + v_{t_n}$ طراحی شده است، بهره L_n را می‌توان از طریق معادله ریکاتی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d}{dt} P_t = A_{u_t} P_t + P_t A_{u_t}^T + \hat{Q}_t$$

$$P_{t_n}^+ = (I - L_n H) P_{t_n} \quad (25)$$

$$S_n = H P_{t_n} H^T + \hat{N}_n$$

$$L_n = P_{t_n} H^T S^{-1}$$

که \hat{Q}_t کوواریانس نویز \hat{W}_t و \hat{N}_n کوواریانس نویز اندازه گیری است. در این صورت، به روزرسانی ماتریس حالت توسط فیلتر کالمن توسعه یافته چپ نامتغیر به صورت زیر است.

$$\hat{\chi}_{t_n}^+ = \hat{\chi}_{t_n} \exp(L_n (\hat{\chi}_{t_n}^{-1} Y_{t_n} - d)) \quad (26)$$

در ادامه مستله GPS/INS در چارچوب اینرسی زمین مرکز^۱ (ECI) مدنظر قرار گرفته است [۲].

۳- تلفیق INS/GPS در چارچوب ECI با IEKF

در این بخش ضمن ارائه معادلات دیفرانسیل ناوبری در چارچوب ECI، گروه لی مناسب معرفی و خطای نامتغیر محاسبه می‌شود. همچنین با برقراری شرط گروه افاین، خودمختار بودن خطای اثبات و معادله دینامیکی خطای نامتغیر و مدل مشاهدات نامتغیر ارائه می‌گردد. در ادامه مراحل پیش‌بینی و بروز رسانی IEKF برای INS/GPS ارائه شده است.

۳-۱- معادلات دیفرانسیل ناوبری [۳-۱]

به منظور تسهیل بیان کمیت‌های فیزیکی مانند وضعیت، سرعت و موقعیت چارچوب اینرسی زمین-مرکز به عنوان دستگاه اینرسی و چارچوب جلو-راست-پایین به عنوان دستگاه بدنی در نظر گرفته شده است. C_b^i بیانگر ماتریس وضعیت، v_{ib}^i بیانگر بردار سرعت و p_{ib}^i بیانگر بردار موقعیت دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی است. مدل ژیروسکوپ و شتاب سنج نیز به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

² Drift

³ Bias

¹ Earth-Centered Earth-Fixed Coordinate System

نکته قابل توجه در مورد سوگیری و رانش حسگرهای این است که در نظر گرفتن آنها به عنوان عناصر ماتریس حالت شرط گروه افاین را نقض و بسیاری از ویژگی‌های EKF را غیرقابل استفاده می‌کند [۳۳]. به منظور حل این مشکل می‌توان سوگیری و رانش را از روش EKF استاندارد تخمین زد. در این صورت یک فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر ناقص^۱ حاصل می‌گردد که همچنان عملکرد بهتری نسبت به EKF استاندارد دارد [۳۴]. بدین منظور بردار γ شامل سوگیری شتاب سنجها و رانش ژیروسکوپ‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۵].

$$\gamma_t \triangleq \begin{bmatrix} b_t^g \\ b_t^a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (37)$$

در این صورت حالت جدید شامل ماتریس حالت سیستم که از قبل تعریف شده است و بردار پارامترهای سوگیری و رانش است و به صورت $(\chi_t, \gamma_t) \in SE_2(3) \times \mathbb{R}^6$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین خطای نیز به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$e_t^l \triangleq (\chi_t^{-1} \hat{\chi}_t, \hat{\gamma}_t - \gamma_t) \triangleq (\eta_t^l, \xi_t) \quad (38)$$

که بردار ξ_t به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\xi_t \triangleq \begin{bmatrix} \hat{b}_t^g - b_t^g \\ \hat{b}_t^a - b_t^a \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_t^g \\ \xi_t^a \end{bmatrix} \quad (39)$$

مطابق پیوست د، با صرف نظر از جملات مرتبه دوم، معادله دیفرانسیل خطای حالت‌های (۳۵) را می‌توان به صورت زیر را نوشت [۳۱].

$$\frac{d}{dt} (\xi_t^C) \approx -\xi_t^g + w_t^g - (\tilde{\omega}_t)_x (\xi_t^C) \quad (40)$$

$$\frac{d}{dt} \xi_t^v \approx -(\tilde{\omega}_t)_x \xi_t^v - (\tilde{a}_t)_x \xi_t^C + (\xi_t^a - w_t^a) \quad (41)$$

$$\frac{d}{dt} \xi_t^p \approx -(\tilde{\omega}_t)_x \xi_t^p + \xi_t^v \quad (42)$$

نکته قابل توجه این است که صرف نظر کردن از جملات مرتبه دوم، آسیبی به کلیت مسئله نمی‌رساند و خطای غیرخطی چپ نامتغیر را می‌توان به صورت دقیق از معادله دیفرانسیل خطای حالت متغیر بازمان بازیابی کرد [۳۶]. فرم ماتریسی معادلات خطای فوق را می‌توان به صورت رابطه زیر بیان کرد [۳۱].

$$\frac{d}{dt} \xi = A\xi + Gw \quad (43)$$

که ξ بردار حالت خطای سیستم ناوبری اینرسی، A ماتریس سیستم، G ماتریس نویز و w نیز بردار نویز سفید گاووسی با ماتریس کوواریانس $Q = E[ww^T]$ است و به شرح زیر تعریف می‌شوند.

$$\xi = \left[(\xi^C)^T \quad (\xi^v)^T \quad (\xi^p)^T \quad (\xi^g)^T \quad (\xi^a)^T \right]^T$$

$$w = \left[(w_t^g)^T, (w_t^a)^T, 0_{1 \times 3}, (w_t^{bg})^T, (w_t^{ba})^T \right]^T$$

چپ نامتغیر است، خطای حالت چپ نامتغیر به صورت (۳۳) قابل بیان خواهد بود. جزئیات این رابطه در پیوست ج ارائه شده است.

$$\eta_t^L = \begin{bmatrix} C_i^b(t) \hat{C}_b(t) & C_i^b(t) \hat{v}_{ib}^i(t) - C_i^b(t) v_{ib}^i(t) & C_i^b(t) \hat{p}_{ib}^i(t) - C_i^b(t) p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

با جایگذاری معادله (۳۳) در (۹) معادله دیفرانسیل خطای چپ نامتغیر به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \eta_t^L &= f_{u_t}(\eta_t^L) - f_{u_t}(I_d) \eta_t^L \\ &= \eta_t^L W_1 + W_2 \eta_t^L - (W_1 + W_2) \eta_t^L = \eta_t^L W_1 - W_1 \eta_t^L \\ &\cdot W_1 = \begin{bmatrix} (\omega_{ib}^b(t))_x & a(t) & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & g(t) & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 1 & -1 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

برقراری شرط گروه افاین برای ماتریس حالت (۳۱) بیانگر مستقل از مسیر بودن خطای نامتغیر آن است که معادله دینامیک این خطای در رابطه (۳۴) بیان شده است. در واقع این رابطه به این معنی است که حتی اگر تغییر حالت خطای غیرخطی باشد، انتشار آن خطی می‌ماند. در ادامه و به منظور طراحی EKF نیاز به محاسبه دینامیک خطی شده خطای نامتغیر است. در مورد خطای چپ نامتغیر (۳۳)، خطای مربوط به حالت‌های وضعیت، سرعت و موقعیت در گروه لی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۳۱].

$$\begin{aligned} C_i^b(t) \hat{C}_b(t) &= \exp\left(\left(\zeta_t^C\right)_x\right) \approx I + \left(\zeta_t^C\right)_x \\ \zeta_t^v &= C_i^b(t) \hat{v}_{ib}^i(t) - C_i^b(t) v_{ib}^i(t) \\ &= C_i^b(t) (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) \\ \zeta_t^p &= C_i^b(t) \hat{p}_{ib}^i(t) - C_i^b(t) p_{ib}^i(t) \\ &= C_i^b(t) (\hat{p}_{ib}^i(t) - p_{ib}^i(t)) \end{aligned} \quad (35)$$

که ζ_t^C خطای وضعیت بین دستگاه بدنی و دستگاه اینرسی، ζ_t^v خطای جدید سرعت، ζ_t^p خطای جدید موقعیت و \exp نیز نگاشت نمایی ماتریسی از جبر لی به گروه لی است. در مقایسه با تعریف مرسوم خطای تفاوت مستقیم بردارها در مختصات محاسباتی و مختصات واقعی است، خطاهای جدید در یک چارچوب مختصات مشترک تعریف می‌شود و هم‌زمان تفاوت بزرگی و تفاوت جهت دو بردار را در نظر می‌گیرد. این نحوه تعریف خطای ضمن توصیف دقیق تر ویژگی‌های حرکت، به همگرایی قابل اثبات فیلتر کالمن منجر می‌شود [۳۲]. با توجه به رابطه (۳۵)، خطای چپ نامتغیر η^L را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\eta_t^L = \begin{bmatrix} \exp\left(\left(\zeta_t^C\right)_x\right) & \zeta_t^v & \zeta_t^p \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

^۱ Imperfect Invariant Extended Kalman Filter

$$\begin{aligned} Z &= \hat{\chi}^{-1}(Y - \hat{Y}) = \hat{\chi}^{-1}Y - \hat{\chi}^{-1}\hat{Y} = \\ &\hat{\chi}^{-1}(\chi d + v) - \hat{\chi}^{-1}(\hat{\chi}d) \\ &= \hat{\chi}^{-1}\chi d + \hat{\chi}^{-1}v - \hat{\chi}^{-1}\hat{\chi}d = \\ &\eta d + \hat{\chi}^{-1}v - d = \exp(\zeta)d + \hat{\chi}^{-1}v - d \\ &\approx (I + \zeta^+)d + \tilde{\chi}^{-1}v - d = \end{aligned} \quad (46)$$

$$\zeta^+ d + \hat{\chi}^{-1}v = H\zeta + \hat{v}$$

که H ماتریس ژاکوبی اندازه گیری به صورت زیر است.

$$H = \begin{bmatrix} -(l_{IA}^b)_x & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ -((w_{ib}^b)_x l_{IA}^b)_x & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (47)$$

واضح است که H به حالت های تخمینی بستگی ندارد و به همین دلیل نسبت به عدم قطعیت حالت ها حساس نیست.

۳-۴- خلاصه روابط تلفیق INS/GPS با استفاده از IEKF

اگرچه در نظر گرفتن سوگیری و رانش حس گردها، ویژگی گروه افاین را نقض می کند و سیستم دیگر خاصیت خطای خودمختار را ندارد، اما هنوز هم می توان ثابت کرد که IEKF ناقص، مزایای اصلی EKF را حفظ کرده و دارای استحکام بیشتر و همگرایی سریع تری نسبت به EKF است [۱۳]. بنابراین، با گسته سازی مدل ارائه شده در رابطه (۴۳) مراحل پیش بینی و به روزرسانی فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر ناقص به منظور تلفیق SINS/GPS را می توان به صورت زیر انجام داد.

مرحله پیش بینی
$\frac{d}{dt} \hat{\chi} = f_{u_i}(\hat{\chi})$
$\frac{d}{dt} \hat{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \hat{b}^g = 0 \\ \frac{d}{dt} \hat{b}^a = 0 \end{bmatrix}$
$P = \Phi P \Phi^T + \Phi Q \Phi^T \Delta t, \Phi = \exp(A \Delta t)$
مرحله به روزرسانی
$L = P H^T (H P H^T + N)^{-1}$
$N = \text{cov}(\hat{v}) = \hat{\chi}^{-1} \text{cov}(v) \hat{\chi}^{-T}$
$\zeta^+ = L \times Z = \begin{bmatrix} \zeta^{C+} & \zeta^{v+} & \zeta^{p+} & \zeta^{g+} & \zeta^{a+} \end{bmatrix}$
$\hat{\chi}^+ = \hat{\chi} \exp \left(\begin{bmatrix} \zeta^{C+} & \zeta^{v+} & \zeta^{p+} \end{bmatrix}^T \right)$
$\hat{\gamma}^+ = \begin{bmatrix} \hat{b}^{g+} \\ \hat{b}^{a+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}^g + \xi^{g+} \\ \hat{b}^a + \xi^{a+} \end{bmatrix}$
$P^+ = (I - LH)P(I - LH)^T + LNL^T$

$$A = \begin{bmatrix} -(\tilde{a}_t)_x & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ -(\tilde{a}_t)_x & -(\tilde{a}_t)_x & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & -(\tilde{a}_t)_x & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

مشاهده می شود که A به حالت های تخمین زده شده بستگی ندارد، بلکه فقط به ورودی سیستم مربوط می شود.

۳- مدل مشاهدات

در این بخش سرعت و موقعیت اندازه گیری شده توسط GPS به منظور استفاده در INS/GPS به صورت چه نامتغیر مدل می شود [۲۲]. این مدل سازی با در نظر گرفتن بازوی اهرم^۱ انجام می گردد. در عمل GPS موقعیت و سرعت مربوط به مرکز آنتن و INS نتایج ناوبری مرکز IMU را ارائه می دهد که از نظر فیزیکی منطبق نیستند. فاصله بین مرکز آنتن GPS و مرکز IMU با عنوان بازوی اهرم شناخته می شود که در نظر نگرفتن آن موجب کاهش دقت ناوبری تلفیقی می شود. اندازه گیری های سرعت و موقعیت را می توان با در نظر گرفتن بازوی اهرم به صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned} p_{gps}^i(t) &= p_{ib}^i + l_{IA}^i + w_{Gp} \\ &= p_{ib}^i + C_b^i(t) l_{IA}^b + w_{Gp} \end{aligned} \quad (44)$$

$$v_{gps}^i(t) = v_{ib}^i + C_b^i(t) (w_{ib}^b \times l_{IA}^b) + w_{Gv}$$

که p_{gps}^i و v_{gps}^i سرعت و موقعیت محاسبه شده توسط GPS است که در دستگاه اینرسی بیان می شود. l_{IA}^b بردار بازوی اهرم بیان شده در دستگاه بدنی و w_{Gp} و w_{Gv} نویز اندازه گیری سرعت و موقعیت GPS است. نمایش ماتریسی مدل های اندازه گیری موقعیت و سرعت در فرم چه نامتغیر (۱۴) را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned} Y &= \begin{bmatrix} p_g^i & v_g^i \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{IA}^b & (w_{ib}^b)_x l_{IA}^b \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} w_{Gp} & w_{Gv} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

با توجه به رابطه (۱۹)، ابداع LIEKF یعنی خطای بین اندازه گیری GPS و تخمین آن را می توان به صورت زیر به دست آورد.

^۱ Lever Arm

فرکانس خروجی حسگرهای اینرسی 10° هرتز و GPS نیز 10° هرتز در نظر گرفته شده است. سرعت و موقعیت اولیه به طور مستقیم با استفاده از اندازه گیری های GPS تنظیم می شود. با توجه به اینکه معمولاً چالش اساسی ترازیابی در تعیین زاویه سمت است، به منظور ارزیابی الگوریتم ها، خطای اولیه زوایای غلت و فراز به صورت ثابت و معادل 5° فرض شده است. خطای اولیه زاویه سمت مختلف نیز به صورت $[0^{\circ} \ 30^{\circ} \ 60^{\circ} \ 90^{\circ}]$ در نظر گرفته شده است. مقادیر مورد استفاده در شبیه سازی به صورت زیر است.

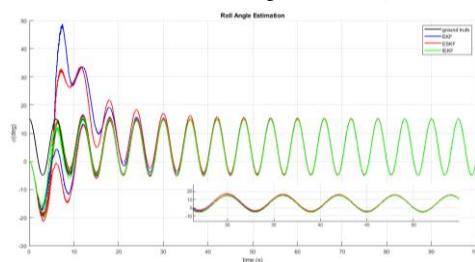
$$R = blkdiag \left(5^2 \times I_{3 \times 3} \right), \varphi_0 = 0^{\circ}, \theta_0 = 0^{\circ}, \psi_0 = 0^{\circ}$$

$$v_0 = v_{0,GPS}, x_0 = x_{0,GPS}, b^s = b^a = [0, 0, 0]$$

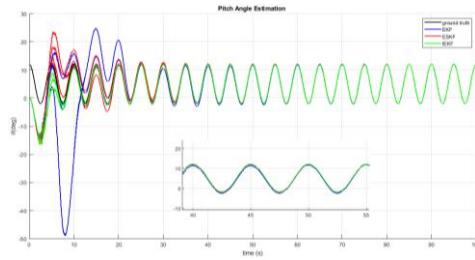
$$Q = diag \left([0.001 / \sqrt{h} \times I_{3 \times 3}, 0.03 / \sqrt{h} \times I_{3 \times 3}, 0_{9 \times 9}]^T \right) * 0.01^2$$

$$P_0 = diag \left([diag[\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{90}{3}], 1.5 / \sqrt{h} \times I_{3 \times 3}, 2.5m \times I_{3 \times 3}, 0.01 / h \times I_{3 \times 3}, 50 \mu g \times I_{3 \times 3}]^T \right)^2$$

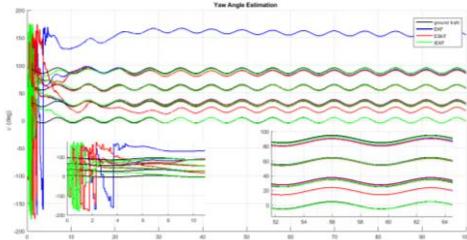
که منظور از $blkdiag$ ماتریس قطری بلوکی است. نتیجه تخمین زوایا اوپلر و نیز خطای تخمین آنها در شکل های زیر نشان داده شده است.



شکل ۲- تخمین زاویه غلت به ازای زاویه ناهمراستایی اولیه غلت و فراز 5°
درجه و ناهمراستایی های اولیه مختلف زاویه سمت



شکل ۳- تخمین زاویه فراز به ازای زاویه ناهمراستایی اولیه غلت و فراز 5°
درجه و ناهمراستایی های اولیه مختلف زاویه سمت



شکل ۴- تخمین زاویه سمت به ازای زاویه ناهمراستایی اولیه غلت و فراز 5°
درجه و ناهمراستایی های اولیه مختلف زاویه سمت

همان گونه که مشاهده می شود، در مرحله به روزرسانی خطای حسگرهای طبق روش EKF سنتی به روزرسانی می شوند. اما وضعیت، سرعت و موقعیت با توجه به ابداع LIEKF به روز می شوند. ذکر این نکته ضروری است که روش ارائه شده برای سیستم هایی که زمان عملکرد کوتاهی دارند و محدودیت های دینامیکی در مانورهای موردنیاز برای جبران سازی خطای زیرسیستم هدایت و کنترل به دلیل ناترازی اولیه نباشد، احتمالاً مناسب نیست. در ادامه کارایی INS/GPS مبتنی بر LIEKF ارزیابی می شود.

۴- ارزیابی با استفاده از شبیه سازی و داده های

تجربی

در این بخش، ابتدا به منظور نشان دادن توانایی فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر در مقابل با ناهمراستایی زاویه ای اولیه بزرگ، به کمک داده های حاصل از شبیه سازی، عملکرد EKF با عملکرد EKF استاندارد و فیلتر کالمن توسعه یافته حالت خطای^۱ (ESKF)، بازی خطای زاویه ای اولیه مختلف مقایسه می شود. بدین منظور حرکت یک کشتی در اثر امواج متلاطم دریا شبیه سازی شده است. فرض می شود که حرکت دورانی به دلیل تغییرات زوایای غلت، فراز و سمت ناشی از امواج دریا به صورت زیر است.

$$\phi = 10^{\circ} \cos(\frac{2\pi}{6} t)$$

$$\theta = 7^{\circ} \cos(\frac{2\pi}{5} t) \quad (53)$$

$$\psi = 5^{\circ} \cos(\frac{2\pi}{7} t)$$

که ψ, θ, ϕ زوایای غلت، فراز و سمت است. همچنین فرض می گردد حرکت انتقالی ناشی از تغییرات سرعت به صورت زیر است.

$$V_i = A_i \sin(\frac{2\pi}{T_i} t), \quad i = x, y, z \quad (54)$$

$$A_x = 10m/s, A_y = 10m/s, A_z = 1m/s$$

$$T_x = 7s, T_y = 6s, T_z = 8s$$

مشخصات IMU و گیرنده GPS مورد استفاده، مطابق جدول ۱ است.

جدول ۱- مشخصات حسگرهای مورد استفاده برای شبیه سازی

شتای سنج ها	
$50 \mu g$	سوگیری ثابت
$0.03 \frac{m}{s\sqrt{h}}$	گام تصادفی سرعت
$0.01 \frac{1}{h}$	رانش ثابت
$0.001 \frac{1}{\sqrt{h}}$	گام تصادفی زاویه ای
$2.5 m$	دقیق موقعیت
$5 \frac{m}{s}$	دقیق سرعت

¹ Error State Extended Kalman Filter

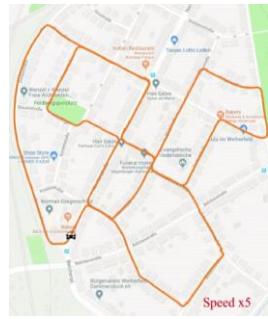
جدول ۲- مشخصات کلی حسگر

IMU Update rate	100 Hz
Gyro Bias Stability	2 %/hr
Gyro Random Walk	0.2 %/ $\sqrt{\text{hr}}$
Accelerometer Bias Stability	2 μg
Accelerometer Random Walk	0.005 $\text{m}/\text{s}\sqrt{\text{hr}}$
GPS Update rate	10 Hz
GPS Velocity Accuracy	0.05 km/hr
GPS Position Accuracy	0.01 m

در ادامه داده‌های 2011_10_03_drive_0027_sync از مجموعه KITTI استفاده شده است. این آزمایش در مدت زمان ۴۶۹ ثانیه با پیمایش مسیر نشان داده شده در

شکل ۸ انجام شده است. در این مجموعه داده، به منظور انجام شبیه‌سازی داده‌های GPS با نرخ ۱ هرتز در اختیار است. نتایج تخمین حالت‌های ناوبری به ازای خطای ناهمراستایی اولیه صفر و مقادیر واقعی متناظر آن‌ها در

شکل ۸ تا شکل ۱۴ مقایسه شده است.



شکل ۸- مسیر پیمایش شده [۴۰]

ماتریس‌های کوواریانس نویز مدل دینامیکی و اندازه‌گیری که معمولاً با توجه به دقت حسگرهای اینرسی و اندازه‌گیری‌های خارجی تعیین می‌شوند و نیز حدس اولیه مورداستفاده در انجام شبیه‌سازی‌ها به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$R = blkdiag(0.01^2 \times I_{3 \times 3})$$

$$\varphi_0 = 0.9067^\circ, \theta_0 = 0.0463^\circ, \psi_0 = 61.6036^\circ$$

$$v_0 = [0, 0, 0] \frac{\text{m}}{\text{s}}, x_0 = [1.0811, 1.3375, 0.7956] \text{m}$$

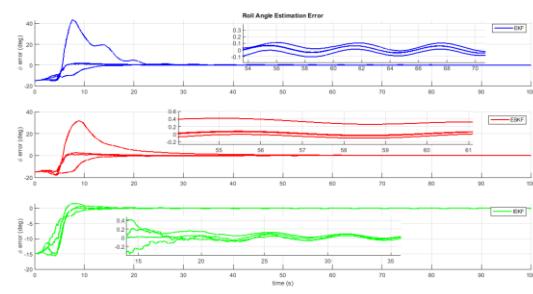
$$b^s = b^a = [0, 0, 0]$$

$$Q = diag([0.2 / \sqrt{\text{hr}} \times I_{3 \times 3}, 0.005 / \sqrt{\text{hr}} \times I_{3 \times 3}, 0_{9 \times 9}])^2 * 0.01^2$$

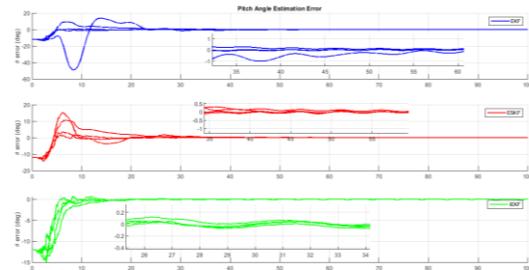
$$P_0 = diag([diag([\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, (\frac{90}{3})]), 0.05 / \sqrt{\text{hr}} \times I_{3 \times 3}, 0.01 \text{m} \times I_{3 \times 3}, 2 / \sqrt{\text{hr}} \times I_{3 \times 3}, 2 \mu\text{g} \times I_{3 \times 3}])^2$$

در

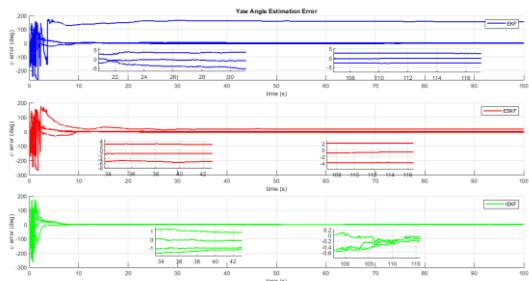
شکل ۹ و شکل ۱۰ به ترتیب نتایج تخمین مسیر پیمایش شده در صفحه-X و تخمین موقعیت در راستای محورهای ECI نشان داده شده است.



شکل ۵- خطای تعیین زاویه غلت در ستاریوهای شبیه‌سازی شده



شکل ۶- خطای تعیین زاویه فراز در ستاریوهای شبیه‌سازی شده



شکل ۷- خطای تعیین زاویه سمت در ستاریوهای شبیه‌سازی شده

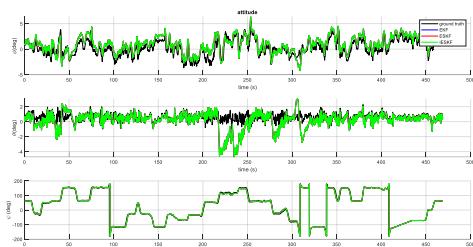
همانگونه که مشخص است IEKF از نظر دقت و سرعت همگرایی عملکرد بهتری را نسبت به EKF و ESKF دارد. این برتری در حضور ناهمراستایی اولیه زیاد، محسوس تراست. در ادامه این بخش تلفیق INS/GPS با استفاده از داده‌های واقعی بررسی می‌شود. با توجه به اینکه به دلیل ماهیت نویزی حسگرهای و اغتشاشات محیط، استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده، نتایج منصفانه‌ای را ارائه نمی‌دهد. به همین دلیل از یک مجموعه داده واقعی با عنوان KITTI که کاربرد گسترده‌ای در کیلومتر شماری بصری^۲ INS/GPS و INS/VO^۳ دارد، استفاده می‌شود [۳۷، ۳۸]. این مجموعه داده با استفاده از حسگرهای نصب شده بر روی یک خودرو شامل دوربین، GPS/IMU و LiDAR جمع‌آوری شده است. داده‌ها شامل خروجی خام حسگرهای و داده‌های واقعیت زمینی^۴ است که با ترکیب GPS/IMU و GPS/IMU و GPS محاسبه شده است. حسگر از نوع OXTS RT 3003 GPS/IMU است که مشخصات آن مطابق دفترچه راهنمای در جدول ۲ ارائه شده است [۳۹].

² Visual Odometry

³ Ground Truth

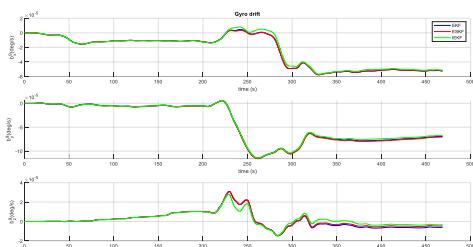
¹ Karlsruhe Institute of Technology and Toyota Technological Institute

شیوه‌سازی می‌توان بیان داشت که در طول مسیر طی شده، زوایا مشاهده‌پذیر هستند.

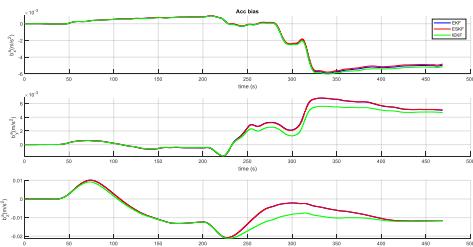


شکل ۱۲- تخمین زاویه غلت، فراز و سمت

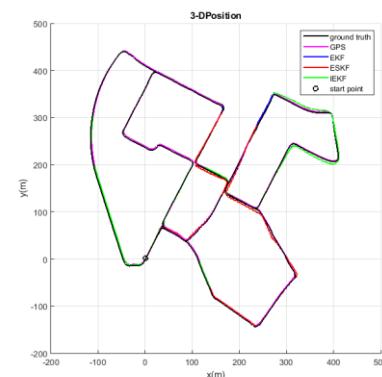
شکل ۱۳ و شکل ۱۴ نیز به ترتیب بیانگر نتایج تخمین رانش ژیروسکوپ‌ها و سوگیری شتاب سنج ها در راستای محورهای دستگاه ECI است.



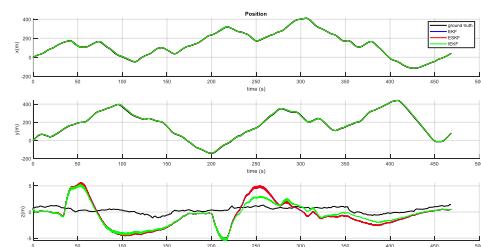
شکل ۱۳- تخمین رانش ژیروسکوپ‌ها در راستای محورهای دستگاه ECI



شکل ۱۴- تخمین سوگیری شتاب سنج ها در راستای محورهای دستگاه ECI همچنین مجلو میانگین مربعات خطای تخمین^۱ (RMSE) حالت های ناوبری برای روش های EKF، IEKF و ESKF در جدول ۳ ارائه شده است. این نتایج فوق با فرض معلوم بودن شرایط اولیه به صورت دقیق بدست آمده است که بیانگر عملکرد یکسان فیلترها در تلفیق INS/GPS می باشد. بر اساس داده های حقیقت زمین، زوایای اولیه واقعی به ترتیب برابر $\varphi = 0.9067^\circ$ ، $\theta = 0.0463^\circ$ و $\psi = 61.6036^\circ$ است. در ادامه به منظور ارزیابی کار آئی IEKF و مقایسه با EKF و ESKF، اثر خطای ناهمراستایی زاویه ای اولیه بر دقت خروجی بررسی شده است. خطای موقعیت یابی این فیلترها تحت زوایای ناهمراستایی اولیه مختلف در جدول ۴ ارائه شده است. همان گونه که مشاهده می شود، در صورت عدم وجود زاویه ناهمراستایی، هر سه فیلتر دقت موقعیت یابی نسبتاً بالا دارند و تفاوت کمی بین آنها وجود دارد. با افزایش زاویه ناهمراستایی، خطای موقعیت یابی هر سه افزایش می باید. با این حال، IEKF دقت موقعیت یابی بالاتری از EKF و ESKF دارد و هر چه زاویه ناهمراستایی بیشتر باشد، مزیت



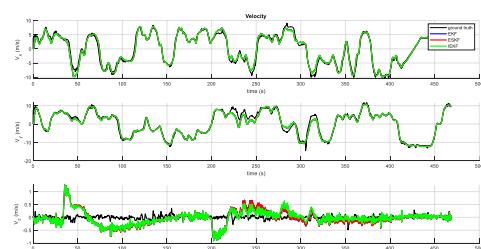
شکل ۹- تخمین مسیر پیمایش شده در صفحه x-y دستگاه ECI



شکل ۱۰- تخمین موقعیت در راستای x و z دستگاه ECI

در

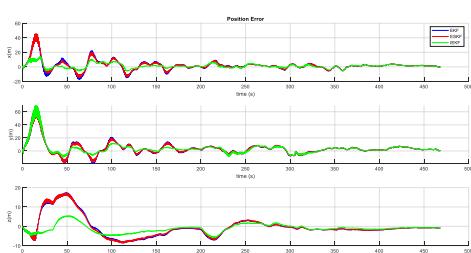
شکل ۱۱ نیز تخمین سرعت در راستای محورهای دستگاه ECI نشان داده شده است.



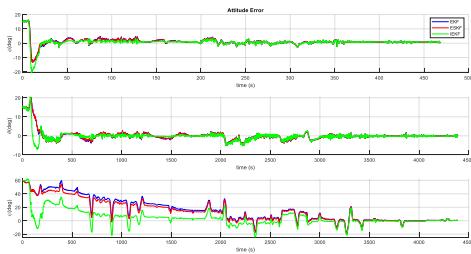
شکل ۱۱- تخمین سرعت در راستای x, y و z دستگاه ECI

شکل ۱۲ نیز نشان دهنده تخمین زوایا اویلر است. نکته قابل توجه اینکه، در ناوبری وسایل نقلیه جاده ای، به دلیل اینکه سطح جاده ها نسبتاً صاف است، تخمین زاویه سمت، بیشتر مورد توجه قرار می گیرد. همچنین در فرایند تلفیق به دلیل وجود خطاهایی مانند بایاس سنسورها، سعی می گردد با تخمین و جبران این خطاهای دقت بهبود داده شود. در نظر گرفتن خطای حس گرها به عنوان حالت های سیستم منجر به عدم مشاهده پذیری کامل سیستم در حالت سکون می شود[۴۱]. اما نکته قابل توجه این است که مانور وسیله حامل بر روی مشاهده پذیری حالت ها اثر گذار است. با توجه به نتایج

^۱ Root Mean Square Error



شکل ۱۵- خطای موقعیت یابی تحت زاویه ناهمراستایی ۱۵ درجه در زوایای غلت و فراز و ۶۰ درجه در زاویه سمت



شکل ۱۶- خطای تخمین وضعیت تحت زاویه ناهمراستایی ۱۵ درجه در زوایای غلت و فراز و ناهمراستایی ۶۰ درجه در زاویه سمت

IEKF آشکارتر است. شکل ۱۵ خطای موقعیت یابی تحت زاویه ناهمراستایی ۱۵ درجه در زوایای غلت و فراز و ناهمراستایی ۶۰ درجه در زاویه سمت را نشان می‌دهد. همچنین خطای تعیین وضعیت در این شرایط در شکل ۱۶ نشان داده شده است. می‌توان دریافت که IEKF هم از نظر سرعت همگرایی و هم از نظر دقیقت موقعیت یابی نسبت به EKF و ESKF برتر است.

جدول ۳- مجدور میانگین مربعات خطای تخمین حالت‌های ناوبری

متغیر	RMSE IEKF	RMSE ESKF	RMSE EKF
$\varphi(\circ)$	۱,۰۳	۱,۰۳	۱,۰۳
$\theta(\circ)$	۱,۰۸	۱,۰۸	۱,۰۸
$\psi(\circ)$	۵,۹	۵,۹	۵,۹
$V_x(m/s)$	۰,۸۱۷	۰,۸۱۹	۰,۸۱۶
$V_y(m/s)$	۱,۱۹	۱,۲	۱,۲
$V_z(m/s)$	۰,۲۶	۰,۲۷	۰,۲۷
$x(m)$	۲,۵۶	۲,۵۷	۲,۵۷
$y(m)$	۴,۱۲	۴,۱۴	۴,۱۴
$z(m)$	۲,۱۸	۲,۴	۲,۴

جدول ۴- RMSE موقعیت یابی تحت خطای ناهمراستایی زوایه‌ای اولیه مختلف

$[\delta\varphi_0 \quad \delta\theta_0 \quad \delta\psi_0]$												زاویه ناهمراستایی اولیه
$[0^\circ \quad 0^\circ \quad 0^\circ]$			$[5^\circ \quad 5^\circ \quad 5^\circ]$			$[10^\circ \quad 10^\circ \quad 30^\circ]$			$[15^\circ \quad 15^\circ \quad 60^\circ]$			
x(m)	y(m)	z(m)	x(m)	y(m)	z(m)	x(m)	y(m)	z(m)	x(m)	y(m)	z(m)	
۲,۵	۴,۱	۲,۴	۴	۴,۲	۳,۱	۶,۳	۵,۱	۳,۵	۷,۱	۱۰,۶	۵,۳	RMSE EKF
۲,۵	۴,۱	۲,۴	۴	۴,۲	۳,۱	۶,۴	۴,۷	۳,۶	۶,۹	۱۰,۳	۵,۳	RMSE ESKF
۲,۵	۴,۱	۲,۱	۳,۵	۴,۵	۲	۴,۴	۶,۵	۲,۲	۳,۳	۱۰,۱	۲,۳	RMSE IEKF

استفاده شده است. به کمک داده‌های شبیه سازی شده و نیز داده‌های واقعی روش پیشنهادی با تلفیق INS/GPS مبتنی بر دو الگوریتم ESKF و EKF مقایسه شده است. نتایج بیانگر آن است که IEKF توانایی غلبه بر بسیاری از کاستی‌های EKF از جمله واستگی ژاکوبی‌ها به متغیرهای حالت را دارد. یکی دیگر از مزیت‌های IEKF، امکان استفاده از آن در صورت وجود زاویه ناهمراستایی اولیه بزرگ است. نتایج ارزیابی نشان می‌دهد که برخلاف دو روش دیگر که ممکن است با زاویه ناهمراستایی اولیه بزرگ واگرا شوند، از مزیت هم‌گرایی سریع برخوردار است. با این قابلیت IEKF می‌توان مرحله ترازیابی اولیه را حذف و زمان لازم برای شروع فرآیند ناوبری را کاهش داد. در پژوهش‌های آتی می‌توان خطای سوگیری و رانش را به عنوان عناصر گروه به گونه‌ای در نظر گرفت که شرط گروه افاین نقض نشده و تلفیق INS/GPS و نیز ترازیابی اولیه را به صورت کامل

نتایج فوق مؤید این نکته است که دقت خروجی EKF و ESKF، به دلیل وابستگی مدل خطی سازی شده مورد استفاده این فیلترها به حالت‌ها، در اثر تغییر خطای اولیه تغییر می‌کند، اما دقت نتایج IEKF تحت خطای زاویه‌ای تفاوت چندانی نمی‌کند. به همین دلیل می‌توان ادعا کرد که IEKF تحت خطای اولیه زاویه‌ای بزرگ مقاوم است و حتی می‌تواند نیاز به ترازیابی اولیه دقیق را برطرف کند.

۸- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با تعبیه کردن وضعیت، سرعت و موقعیت جسم متحرک به عنوان عناصر یک گروه لی ماتریسی، مدل دینامیکی خطای مستقل از حالت برای تلفیق INS/GPS ارائه شده است. در ادامه به کمک مدل ارائه شده، از فیلتر کالمن توسعه یافته چپ نامغایر برای تلفیق INS/GPS

- [15] N. Aghannan and P. Rouchon, "On invariant asymptotic observers," in *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002, vol. 2, pp. 1479-1484: IEEE.
- [16] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon, "Symmetry-preserving observers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 11, pp. 2514-2526, 2008.
- [17] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon, "Non-linear symmetry-preserving observers on Lie groups," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1709-1713, 2009.
- [18] S. Bonnabel, P. Martin, and E. Salaün, "Invariant extended Kalman filter: theory and application to a velocity-aided attitude estimation problem," in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, 2009, pp. 1297-1304: IEEE.
- [19] P. Martin and E. Salaün, "Generalized Multiplicative Extended Kalman Filter for Aided Attitude and Heading Reference System," in *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2010.
- [20] S. Bonnabel, "Left-invariant extended Kalman filter and attitude estimation," in *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, 2007, pp. 1027-1032: IEEE.
- [21] Y. Luo, M. Wang, C. Guo, and W. Guo, "Research on Invariant Extended Kalman Filter Based 5G/SINS Integrated Navigation Simulation," in *China Satellite Navigation Conference*, 2021, pp. 455-466: Springer.
- [22] Z. Zhang, J. Zhao, C. Huang, and L. Li, "Precise and robust sideslip angle estimation based on INS/GNSS integration using invariant extended Kalman filter," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 2022.
- [23] E. R. Potokar, K. Norman, and J. G. Mangelson, "Invariant extended kalman filtering for underwater navigation," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 5792-5799, 2021.
- [24] A. Ibrahim, A. Abosekeen, A. Azouz, and A. Noureddin, "Enhanced Autonomous Vehicle Positioning Using a Loosely Coupled INS/GNSS-Based Invariant-EKF Integration," *Sensors*, vol. 23, no. 13, p. 6097, 2023.
- [25] X. Zhou, Y. Chen, Y. Liu, and J. Hu, "A Novel Sensor Fusion Method Based on Invariant Extended Kalman Filter for Unmanned Aerial Vehicle," in *2021 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2021, pp. 1111-1116: IEEE.
- [26] L. Chang, F. Qin, and J. Xu, "Strapdown inertial navigation system initial alignment based on group of double direct spatial isometries," *IEEE Sensors Journal*, vol. 22, no. 1, pp. 803-818, 2021.

از طریق LIEKF انجام داد. همچنین تحلیل مشاهده‌بندبری موضوع دیگری است که می‌تواند در پژوهش‌های آتی مورد توجه قرار گیرد.

مراجع

- [1] D. H. Titterton and J. L. Weston, *Strapdown inertial navigation technology*. Institution of Engineering and Technology, 2004.
- [2] A. Noureddin, T. B. Karamat, and J. Georgy, *Fundamentals of inertial navigation, satellite-based positioning and their integration*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] M. S. Grewal, A. P. Andrews, and C. G. Bartone, *Global navigation satellite systems, inertial navigation, and integration*. John Wiley & Sons, 2020.
- [4] P. G. Savage, *Strapdown analytics*. Strapdown Associates, 2000.
- [5] R. M. Rogers, *Applied mathematics in integrated navigation systems*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007.
- [6] S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox, *Probabilistic robotics*. The MIT Press, 2005.
- [7] A. J. Krener, "The convergence of the extended Kalman filter," in *Directions in mathematical systems theory and optimization*: Springer, 2003, pp. 173-182.
- [8] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞, and Nonlinear Approaches*. John Wiley and Sons, 2006.
- [9] G. P. Huang, A. I. Mourikis, and S. I. Roumeliotis, "Observability-based rules for designing consistent EKF SLAM estimators," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 29, no. 5, pp. 502-528, 2010.
- [10] G. P. Huang, A. I. Mourikis, and S. I. Roumeliotis, "A quadratic-complexity observability-constrained unscented Kalman filter for SLAM," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 29, no. 5, pp. 1226-1243, 2013.
- [11] M. Raitoharju and R. Piché, "On computational complexity reduction methods for Kalman filter extensions," *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 34, no. 10, pp. 2-19, 2019.
- [12] A. Barrau and S. Bonnabel, "An EKF-SLAM algorithm with consistency properties," *arXiv:1510.06263*, 2015.
- [13] A. Barrau and S. Bonnabel, "The invariant extended Kalman filter as a stable observer," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 4, pp. 1797-1812, 2016.
- [14] P. Rouchon and J. Rudolph, "Invariant tracking and stabilization: problem formulation and examples," in *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, vol. 246: Springer, 2000, pp. 261-273.

- filtering for robot state estimation," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 39, no. 4, pp. 402-430, 2020.
- [36] L. Chang and Y. Luo, "Log-linear Error State Model Derivation without Approximation for INS," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022.
- [37] A. Geiger, P. Lenz, and R. Urtasun, "Are we ready for autonomous driving? the kitti vision benchmark suite," in *2012 IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2012, pp. 3354-3361: IEEE.
- [38] A. Geiger, P. Lenz, C. Stiller, and R. Urtasun, "Vision meets robotics: The kitti dataset," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 32, no. 11, pp. 1231-1237, 2013.
- [39] OxTS, "RTv2 GNSS-aided Inertial Measurement Systems User Manual," [Online]. Available: www.oxts.com/app/uploads/2018/02/rtman.pdf, 2018.
- [40] T. Qin, P. Li, and S. Shen, "Vins-mono: A robust and versatile monocular visual-inertial state estimator," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 34, no. 4, pp. 1004-1020, 2018.
- [41] Y. F. Jiang and Y. P. Lin, "Error estimation of INS ground alignment through observability analysis," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, vol. 28, no. 1, pp. 92-97, 1992.
- [27] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [28] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic press, 2003.
- [29] G. S. Chirikjian, *Stochastic models, information theory, and Lie groups, volume 2: Analytic methods and modern applications*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [30] S. C. Hsiung, "Toward Invariant Visual-Inertial State Estimation using Information Sparsification," Master's thesis, Carnegie Mellon University, 2018.
- [31] Y. Luo, C. Guo, S. You, J. Hu, and J. Liu, "SE2(3) based Extended Kalman Filtering and Smoothing Framework for Inertial-Integrated Navigation," *arXiv preprint arXiv:2102.12897*, 2021.
- [32] M. S. Andrlé and J. L. Crassidis, "Attitude estimation employing common frame error representations," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 38, no. 9, pp. 1614-1624, 2015.
- [33] A. Barrau, "Non-linear state error based extended Kalman filters with applications to navigation," Doctoral thesis, Mines ParisTech, 2015.
- [34] A. Barrau and S. Bonnabel, "The geometry of navigation problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 68, no. 2, pp. 689-704, 2022.
- [35] R. Hartley, M. Ghaffari, R. M. Eustice, and J. W. Grizzle, "Contact-aided invariant extended Kalman



۶- پیوست‌ها

۶-۱- پیوست الف: گروه ایزو متری‌های دوتایی مستقیم

گروه ایزو متری‌های دوتایی مستقیم^۱ که با (۳) نمایش داده می‌شود، برای مدل‌سازی حالت‌های اینرسی به صورت زیر ارائه شده است [۱۳].

$$SE_2(3)=\left\{ T=\begin{bmatrix} C & v & p \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5} \mid C \in SO(3), v, p \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (55)$$

که (۳) گروه متعامد و بیزه است. جبر لی متناظر گروه $SE_2(3)$ توسط $se_2(3)$ نشان داده می‌شود و برای هر بردار $\xi \triangleq \text{vec}(\phi, \vartheta, \rho) \in \mathbb{R}^9$ به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\xi^\wedge \triangleq \begin{bmatrix} \phi_x & \vartheta & \rho \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5} \quad (56)$$

نگاشت نهایی از (۳) به $se_2(3)$ به صورت زیر است.

$$\exp(\xi^\wedge) = \begin{bmatrix} \exp(\phi_x) & J\vartheta & J\rho \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = I + \frac{1 - \cos\|\phi\|}{\|\phi\|^2} \phi_x + \frac{\|\phi\| - \sin\|\phi\|}{\|\phi\|^3} \phi_x^2 \quad (57)$$

۶-۲- پیوست ب: اثبات برقراری شرط گروه افاین برای ماتریس حالت (۳۱)

معادله دیفرانسیل ماتریس حالت (۳۱) را می‌توان بر اساس روابط (۴۹) و (۳۰) به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \chi_t &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_b^i(t) \left(\omega_{ib}^b(t) + w_t^s \right)_x & C_b^i(t) \left(a(t) + w_t^a \right) + g(t) & v_b^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_b^i(t) \left(\omega_{ib}^b(t) \right)_x & C_b^i(t) \left(a(t) \right) + g(t) & v_b^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(w_t^g \right)_x & w_t^a & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= f_{u_t}(\chi_t) - \chi_t \left(w_t \right)^\wedge \end{aligned} \quad (58)$$

$f_{u_t}(\chi_t)$ قسمت قطعی دینامیک را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} f_{u_t}(\chi_t) &= \begin{bmatrix} C_b^i(t) \left(\omega_{ib}^b(t) \right)_x & C_b^i(t) \left(a(t) \right) + g(t) & v_b^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \chi_t W_1 + W_2 \chi_t \\ &\quad . W_1 = \begin{bmatrix} \left(\omega_{ib}^b(t) \right)_x & a(t) & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & g(t) & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 1 & -1 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

¹ double direct isometries

با استفاده از (۵۹) روابط $f_{u_t}(I_d) = W_1 + W_2$ و $f_{u_t}(\chi_A \chi_B) = \chi_A \chi_B W_1 + W_2 \chi_A \chi_B$ شرط گروه افاین را می‌توان به صورت زیر بررسی کرد.

$$\begin{aligned}
 & f_{u_t}(\chi_A) \chi_B + \chi_A f_{u_t}(\chi_B) - \chi_A f_{u_t}(I_d) \chi_B \\
 &= \chi_A W_1 \chi_B + W_2 \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_B W_1 + \chi_A W_2 \chi_B - \chi_A (W_1 + W_2) \chi_B \\
 &= \chi_A \chi_B W_1 + W_2 \chi_A \chi_B \\
 &= f_{u_t}(\chi_A \chi_B)
 \end{aligned} \tag{۶۰}$$

پس ماتریس حالت (۳۱) شرط گروه افاین (۸) را برآورده می‌کند و دارای خطای نامتغیر مستقل از حالت است.

۳-۶-پیوست ج: خطای چپ نامتغیر برای ماتریس حالت (۳۱)

$$\begin{aligned}
 \chi_t^{-1} &= \begin{bmatrix} C_i^b(t) & -C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & -C_i^b(t)p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\chi}_t = \begin{bmatrix} \hat{C}_b^i(t) & \hat{v}_{ib}^i(t) & \hat{p}_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \eta_t^L &= \chi_t^{-1} \hat{\chi}_t = \begin{bmatrix} C_i^b(t) & -C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & -C_i^b(t)p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_b^i(t) & \hat{v}_{ib}^i(t) & \hat{p}_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \eta_t^L &= \begin{bmatrix} C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t) & C_i^b(t)\hat{v}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & C_i^b(t)\hat{p}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{۶۱}$$

۴-۶-پیوست د: محاسبه روابط (۴۰) تا (۴۲)

معادله دیفرانسیل خطای وضعیت به کمک تقریب مرتبه اول بصورت زیر قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (C_i^b(t) \hat{C}_b^i(t)) &\approx \frac{d}{dt} (I + (\zeta_t^C)_x) = \frac{d}{dt} (\zeta_t^C)_x \\
 \frac{d}{dt} (C_i^b(t) \hat{C}_b^i(t)) &= \dot{C}_i^b(t) \hat{C}_b^i(t) + C_i^b(t) \dot{\hat{C}}_b^i(t) \\
 &= -(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g)_x C_i^b(t) \hat{C}_b^i(t) + C_i^b(t) \hat{C}_b^i(t) (\tilde{\omega}_t - \hat{b}_t^g)_x \\
 &\approx -(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g)_x (I + (\zeta_t^C)_x) + (I + (\zeta_t^C)_x) (\tilde{\omega}_t - \hat{b}_t^g)_x \\
 &= -(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g)_x - (\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g)_x (\zeta_t^C)_x + (\tilde{\omega}_t - \hat{b}_t^g)_x + (\zeta_t^C)_x (\tilde{\omega}_t - \hat{b}_t^g)_x \\
 &= (b_t^g - \hat{b}_t^g + w_t^g)_x - (\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g)_x (\zeta_t^C)_x + (\zeta_t^C)_x (\tilde{\omega}_t - \hat{b}_t^g)_x \\
 &= (-\xi_t^g + w_t^g)_x - (\tilde{\omega}_t - \xi_t^g)_x (\zeta_t^C)_x - (\xi_t^g)_x (\zeta_t^C)_x + (b_t^g)_x (\zeta_t^C)_x \\
 &\quad + (w_t^g)_x (\zeta_t^C)_x + (\zeta_t^C)_x (\tilde{\omega}_t - \xi_t^g)_x - (\zeta_t^C)_x (b_t^g)_x \\
 &= (-\xi_t^g + w_t^g)_x + (-(\tilde{\omega}_t - \xi_t^g)_x (\zeta_t^C))_x - (\xi_t^g)_x (\zeta_t^C)_x + ((b_t^g)_x (\zeta_t^C))_x + (w_t^g)_x (\zeta_t^C)_x
 \end{aligned} \tag{۶۲}$$

معادله دیفرانسیل خطای جدید سرعت نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \zeta_t^v &= \frac{d}{dt} \left(C_i^b(t) (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) \right) = \dot{C}_i^b(t) (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) + C_i^b(t) (\dot{\hat{v}}_{ib}^i(t) - \dot{v}_{ib}^i(t)) \\
 &= - \left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_x C_i^b(t) (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) + C_i^b(t) (\hat{C}_b^i(t) (\tilde{a}_t - \hat{b}_t^a) + g - C_b^i(t) (\tilde{a}_t - b_t^a - w_t^a) - g) \\
 &= - \left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_x C_i^b(t) (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) + C_i^b(t) \hat{C}_b^i(t) (\tilde{a}_t - \hat{b}_t^a) - C_i^b(t) C_b^i(t) (\tilde{a}_t - b_t^a - w_t^a) \\
 &= - \left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_x \zeta_t^v + \left(I + \left(\zeta_t^C \right)_x \right) (\tilde{a}_t - \hat{b}_t^a) - (\tilde{a}_t - b_t^a - w_t^a) \\
 &= - \left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_x \zeta_t^v + \left(\zeta_t^C \right)_x (\tilde{a}_t - \hat{b}_t^a) + (b_t^a - \hat{b}_t^a + w_t^a) \\
 &= - \left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_x \zeta_t^v - (\tilde{a}_t - \hat{b}_t^a) \zeta_t^C + (-\xi_t^a + w_t^a)
 \end{aligned} \tag{۶۳}$$

معادله دیفرانسیل خطای جدید موقعیت نیز به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \zeta_t^p &= \frac{d}{dt} \left(C_i^b(t) (\hat{p}_{ib}^i(t) - p_{ib}^b(t)) \right) = \dot{C}_i^b (\hat{p}_{ib}^i(t) - p_{ib}^b(t)) + C_i^b (\dot{\hat{p}}_{ib}^i(t) - \dot{p}_{ib}^b(t)) \\
 &= - \left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_x C_i^b (\hat{p}_{ib}^i(t) - p_{ib}^b(t)) + C_i^b (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^b(t)) = - \left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_x \zeta_t^p + \zeta_t^v
 \end{aligned} \tag{۶۴}$$