مجله کنترل

نشریه علمی- پژوهشی
انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
جلد ۳، شماره ۲، تابستان ۱۳۸۸

مقالات بخش فارسی

مقالات بخش انگلیسی

www.isice.ir

مجله کنترل

نشریه علمی- پژوهشی، انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، جلد ۳، شماره ۲، تابستان ۱۳۸۸

پست الکترونیکی: control@isice.ir
صاحب امتیاز: انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران
مدیر مسئول: پروفسور ایرج گودرزنیا
سردبیر: پروفسور علی خاکی صدیق- تلفن: ۸۴۰۶۲۳۱۷ - پست الکترونیکی: sedigh@kntu.ac.ir
آدرس محل کار: خیابان دکتر شریعتی، پل سیدخندان، دانشکده برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
سمت: استاد دانشگاه
شورای سردبیری: پروفسور علی خاکی صدیق، دکتر حمید خالوزاده، دکتر علیرضا فاتحی
دبیر اجرایی: دکتر حمید خالوزاده

تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، خیابان عباس موسوی (فرصت)، پلاک ۲۷، طبقه دوم، اتاق ۲۴۱
صندوق پستی: ۱۵۸۱۵-۳۵۹۵ تلفن: ۸۸۸۱۳۰۰۲ فاکس: ۸۸۳۲۴۹۷۹
http://www.isice.ir

به نام خدا

مقالات بخش فارسی

مقالات بخش انگلیسی

مجله کنترل، مجله ای علمی – پژوهشی است که در برگیرنده تازه ترین نتایج تحقیقات نظری و کاربردی در علوم مختلف مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق میباشد. مقالات ارسالی به مجله کنترل می توانند به زبان فارسی و یا انگلیسی باشند. از میان مباحث مورد نظر این مجله میتوان به موارد زیر اشاره نمود:

۱) مدلسازی، شناسایی، شبیه سازی و بهینه سازی سیستمها.
۲) تحلیل و طراحی سیستم های کنترل پیشرفته همچون سیستم های کنترل خطی و غیرخطی، سیستمهای کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم و کنترل بهینه، سیستمهای کنترل هوشمند، سیستمهای کنترل تصادفی، سیستمهای کنترل گسسته پیشامد و ترکیبی، سیستمهای ابعاد وسیع.
۳) مکاترونیک و رباتیک.
۴) ابزار دقیق و سیستمهای ترکیب داده و اطلاعات سنسوری.
۵) اتوماسیون صنعتی همچون سیستمهای کنترل گسترده، رابط انسان – ماشین، سیستمهای ایمنی و تشخیص خطا، سیستمهای زمان حقیقی و سیستمهای کنترل سوپروایزری.

کاربردهای مورد علاقه این مجله، وسیع بوده و می تواند در برگیرنده موارد زیر با شد:

۱) سیستمهای هدایت و ناوبری
۲) فرآیندهای صنعتی شامل فرآیندهای شیمیایی و بیوتکنولوژی.
۳) فرآیندهای استخراج و فراوری موارد معدنی.
۴) سیستمهای حمل و نقل و خودروهای خودکار.
۵) تولید و توزیع نیروی برق.
۶) مهندسی محیط زیست و هواشناسی.
۷) مهندسی تکنولوژی تولید.
۸) سیستمهای اقتصادی و مالی.
۹) سیستمهای اطلاعاتی، مخابراتی و شبکه های صنعتی.
۱۰) مهندسی پزشکی.
۱۱) سیستمهای آموزش هوشمند.

از کلیه پژوهشگران و کارشناسان فعال در زمینه های مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق دعوت بعمل می آید تا مقالات و نتایج آخرین دستاوردهای علمی و پژوهشی خود را به این مجله ارسال نمایند. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی به آدرس control@isice.ir ارسال فرمایید. برای کسب اطلاعات بیشتر و دریافت نحوه تهیه و ارسال مقالات می توانید به سایت مجله با آدرس www.isice.ir مراجعه نمایید.

مجله کنترل
جلد ۳، شماره ۲، تابستان ۱۳۸۸، صفحه ۱۰-۱

تخمین فاصله و کنترل مد لغزشی فاصله و زاویه دو هواپیمای بدون سرنشین در یک ماموریت سوخت گیری هوایی به کمک اطلاعات دوربین

مهدی سیفی[۱]، علی اکبر جلالی[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، m.saeifi@ee.iust.ac.ir
[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، ajalali@iust.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۲/۲۸، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۸/۴/۱۲)

چکیده: در این مقاله مسئله سوخت‌گیری خودکار هوایی دو هواپیمای بدون‌سرنشین پیشرو و تعقیب‌کننده که در یک ارتفاع پرواز می کنند و همچنین از دوربین برای کسب آگاهی از موقعیت خود استفاده می‌کنند مورد بررسی قرار گرفته است. فرض شده است که هیچ گونه ابزار اضافی برای تعیین موقعیت نسبی دو هواپیما در دسترس نیست و تنها اطلاعات دوربین از هواپیمای پیشرو در اختیار است. ابعاد هواپیمای پیشرو ناشناخته است، از این رو فاصله دو هواپیما از تصاویر دوربین رویت‌ناپذیر خواهد بود. در مرحله اول این مقاله یک روش تحلیلی جدید برای تخمین فاصله دو هواپیما به کمک تصاویر دوربین، ارائه شده است. این روش بر قوانین فیزیکی ساده استوار است و برخلاف سایر روشهای تخمین موجود، نظیر کالمن، در برابر شتاب ناشناخته هواپیمای پیشرو عملکردی مطلوب و پیچیدگی کمتری دارد. در ادامه روش تخمین کالمن نیز با یک سری فرضیات ساده کننده، پیاده و شبیه‌سازی شده است. این روش تخمین در صورت حرکت شتابدار هواپیمای پیشرو با مشکل همگرایی مواجه شده است. ناشناخته بودن شتاب هواپیمای پیشرو و همچنین شتاب ناشی از باد عوامل برهم زننده کیفیت عملیات می‌باشند که کنترل‌کننده مدلغزشی طراحی شده در این مقاله برای ایجاد موقعیت مطلوب دو هواپیما، با وجود سادگی در طراحی، عملکرد مقاومی در برابر این عوامل دارد.

کلمات کلیدی: عملیات سوخت گیری هوایی، تخمین فاصله با اعمال مانور، تخمینگر کالمن، کنترل کننده مد لغزشی.

Abstract: In this paper, two methods for estimating the range of two Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) in a vision based aerial refueling is presented and also the sliding mode controller is designed and simulated to establish and maintain desired relative position between them. There is no communication between two UAVs, and only vision information from a camera mounted on the follower UAV, is available to extract range information. Leader length is unknown, so the range between them is unobservable from the camera's images. In this paper a theoretical method for range estimation is presented. Using this method, the leader length can be estimated and then the range would be computable from the images. Unlike other estimation methods based on Kalman filter, this method shows a good robustness against unknown leader acceleration. In the next section Kalman algorithm for range estimation is presented, which shows instability when leader accelerates. Leader acceleration and wind effects are uncertain factors for the control system. In spite of the simple design of a sliding mode controller in this paper, good robustness against these uncertainties can be achieved.

Keywords: Aerial Refueling, Own-Ship Maneuvering Algorithm, Kalman Estimator, Sliding Mode Controller.

۱- مقدمه

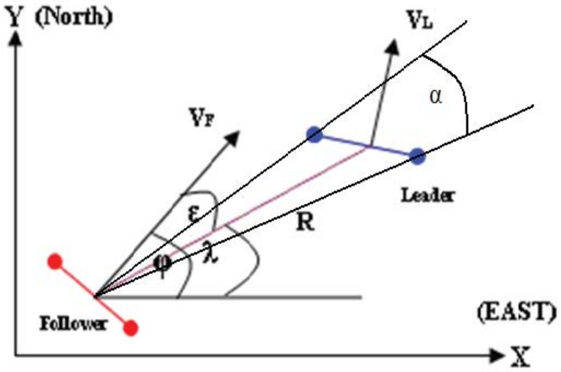
در دهه های اخیر تنظیم و کنترل فاصله و زاویه نسبی دو هواپیما به عنوان نمونه‌های تحقیقاتی بسیار مهمی در حوزه علوم نظامی و تجاری موردتوجه بوده‌اند. برای نمونه، به کارگیری اسکادران هوایی هواپیماهای بدون سرنشین، و همچنین سیستم سوخت‌رسانی خودکار هوایی، نیازمند دستیابی به یک تنظیم دقیق در موقعیت نسبی دو هواپیما می باشند.

دستیابی به این هدف، نیازمند اندازه‌گیری دقیق از موقعیت نسبی دو هواپیما می‌باشد. دو ابزار بسیار قدرتمند GPS و رادار در تعیین موقعیت نسبی دو هواپیما برای کنترل موقعیت، به مراتب و به طور کامل بررسی شده‌اند [۱]، [۲]. در واقع استفاده از رادار و GPS محدودیت‌های عملیاتی زیادی را منجر می‌شود که با وجود تحمیل هزینه فراوان، قابلیت اطمینان سیستم ردیابی را خواهدکاست [۳] و [۴]. معایب دو ابزار فوق، علت گرایش رو به رشد در دهه اخیر به سمت تحقیق و استفاده از دوربین و الگوریتمهای پردازش تصویر را برای تشخیص فاصله و زاویه خط دید دو هواپیما، نمایان می‌کند. در واقع کامل ترین نوع اطلاعات برای ایجاد موقعیت نسبی مطلوب برای دو هواپیما اطلاعات تصویری خواهد بود. مهمترین دغدغه برای گسترش روشهای بصری، سرعت همگرایی الگوریتم‌های پردازش تصویر است. تحقیقات متعددی برای استفاده از روشهای جدید برای افزایش سرعت پردازش تصاویر دیجیتال در حال انجام است[۵]، [۶]. دغدغه دیگر برای گسترش روشهای بصری این است که در صورت ناشناخته بودن ابعاد هدف، فاصله بین دو هواپیما با نگاشت بر صفحه تصویر، قابل اندازه‌گیری نیست[۷]، [۸]، [۱۱]. البته به کمک دو دوربین که در انتهای دو بال هواپیما نصب می شوند، می توان بر این مشکل فائق آمد. ولی این کار برای داشتن هواپیماهای بدون سرنشین در ابعاد کوچک، قابل قبول نیست[۹]. مسئله ردیابی بصری برای ردیابی اهداف دارای مانور ناشناخته حاوی شتاب غیرصفر، حتی پیچیده‌تر خواهد بود. مقالات موجود در این زمینه، عمدتا هدف را با سرعت ثابت[۵]، [۷]، و یا حاوی شتاب گاوسی با میانگین-صفر در نظر می‌گیرند[۱۰]. با فرض شتاب ناشناخته و غیرصفر برای هواپیمای پیشرو، معمول‌ترین روشها برای تخمین فاصله، استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته[۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، فیلتر کالمن توسعه یافته اصلاح شده[۱۵] و یا تخمینگر تطبیقی مدل چندگانه است [۱۶]. استفاده از فیلتر کالمن به دلیل وجود مشکل همگرایی و زمان همگرایی آن، می تواند به ناپایداری پاسخ منجر شود. از این رو ایده یک روش تئوریک برای تخمین فاصله دو هواپیما، در برخی از مقالات ارائه شده است[۷]. به این صورت که یک دوره زمانی محدود را به عنوان فاز تخمین در نظر گرفته و در این فاز با اعمال مانور به هواپیمای تعقیب‌کننده و اندازه-گیری چندین مقدار متوالی زاویه دربرگیرنده هواپیمای پیشرو در زمانهای مشخص، ابعاد هدف تخمین زده می‌شود. با دراختیار داشتن ابعاد هدف، محاسبه فاصله در هرلحظه بدون نگرانی از مشکل زمان همگرایی، امکان‌پذیر خواهدبود [۷]، [۱۶]، [۱۷]. پس از تخمین فاصله و زاویه دو هواپیما از تصاویر دوربین، کنترل‌کننده می‌بایست سیگنال هدایت مناسب را در قالب شتاب هواپیمای تعقیب‌کننده، برای دستیابی به موقعیت نسبی مطلوب تولید کند. ولی دوربین قادر به اندازه‌گیری شتاب هواپیمای پیشرو نیست. و از آنجایی که شتاب هواپیمای پیشرو بخشی از سیگنال کنترل اعمال شده به هواپیمای تعقیب‌کننده را تشکیل می‌دهد، عدم آگاهی از آن منجر به تغییر ناخواسته سیگنال کنترل و نهایتا ناپایداری عملیات سوخت‌گیری خواهدشد [۹]، [۱۷]. برای حل این مشکل دو راهکار قابل بررسی خواهد بود. راهکار اول، تخمین شتاب هواپیمای پیشرو از تصاویر دوربین و اعمال آن در قالب سیگنال کنترل است. به این ترتیب، معمول‌ترین روشها برای تخمین شتاب، استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته[۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، فیلتر کالمن توسعه یافته اصلاح شده[۱۵] و یا تخمینگر تطبیقی مدل چندگانه است [۱۶]. راهکار دوم، در نظرگرفتن شتاب ناشناخته هواپیمای پیشرو به صورت اغتشاش متغیربازمان است. با این فرض کنترل‌کننده تطبیقی مقاوم برای مقابله با این اغتشاش طراحی و پیاده‌سازی شده‌است که با وجود پیچیدگی در طراحی، عملکرد ردیابی چندان خوبی به دست نداده-است[۹]. کنترل کننده غیرخطی خطی سازی فیدبک به همراه شبکه عصبی نتایج ردیابی خوبی داشته‌است ولی استفاده از شبکه عصبی منجر به حساسیت سیستم کنترلی نسبت به تغییر پارامترهای مدل شده است [۱۷]. الگوریتمهای تطبیقی به همراه شبکه عصبی، در چندین مورد دیگر نیز مورد بررسی و پیاده‌سازی قرار گرفته‌اند که عملکرد ردیابی خوبی داشته ولی به دلیل استفاده از شبکه عصبی، در برابر تغییر پارامترها عملکرد مطلوب ندارند [۱۰]، [۱۲]و [۱۸]. از این رو کنترل‌کننده‌ای که در عین سادگی در طراحی، بتواند در برابر نامعینی‌های ذاتی این سیستم عملکردی مقاوم و سرعت بالایی داشته باشد، از هر لحاظ ارجحیت دارد. این خصوصیات از مهمترین ویژگیهای کنترل‌کننده مدلغزشی می‌باشد که در این تحقیق به آن پرداخته شده است.

۲- تشریح صورت مسئله

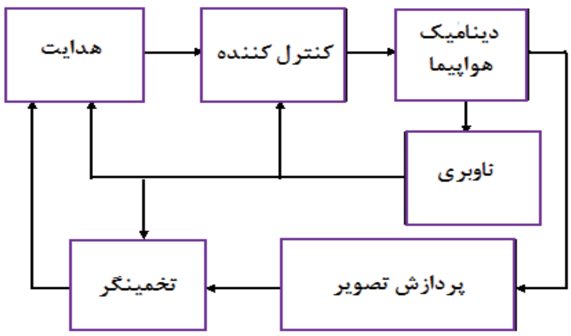
مسئله موردنظر شامل دو هواپیمای بدون سرنشین کوچک است که تحت عنوان پیشرو و تعقیب کننده نام‌گذاری شده‌اند. این دو هواپیما در یک ارتفاع پرواز می‌کنند و فرض می‌شود در طول عملیات، ارتفاع پرواز ثابت بماند. هواپیمای پیشرو یک مسیر ناشناخته را دنبال می‌کند که هواپیمای تعقیب‌کننده می‌بایست در یک موقعیت مطلوب از لحاظ فاصله و زاویه خط‌دید، آن را ردیابی کند. تنها اطلاعات در دسترس برای هواپیمای تعقیب‌کننده، اطلاعات سنسورهای ناوبری متصل به آن از موقعیت، سرعت و شتاب خود، و همچنین تصاویر دریافتی از

هواپیمای پیشرو توسط دوربین متصل به آن است. در شکل (۱) موقعیت دو هواپیما در دستگاه مختصات اینرسی زمین نشان داده شده است.



شکل ۱: پیکره بندی دو هواپیما در دستگاه اینرسی

دیاگرام جعبه ای کنترلی حلقه‌بسته کلی در شکل (۲) آورده شده است.



شکل ۲: دیاگرام جعبه ای کنترلی برای ایجاد موقعیت نسبی

بلوک پردازش‌تصویر، اندازه‌گیری های بدست آمده از تصویر دوربین را در اختیار تخمینگر خواهد گذاشت. این اندازه‌گیری ها در واقع دو زاویه خواهد بود که از تصویر گرفته شده از دوربین، توسط الگوریتم کانتور فعال (Active Contour) محاسبه خواهد بود.[۵] و [۶]. دو زاویه موردنظر عبارتند از ε، که زاویه بین راستای سرعت هواپیمای تعقیب‌کننده با خط‌دید دوربین از هواپیمای پیشرو است و دیگری زاویه α، که زاویه دربرگیرنده دو بال هواپیمای پیشرو توسط دوربین است. در بلوک تخمین، فاصله نسبی، R، زاویه خط‌دید، λ، به دست خواهد آمد. این پارامترها در بلوک هدایت، برای تولید سیگنالهای هدایت در قالب شتاب و یا سرعت هواپیمای تعقیب‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند. بلوک ناوبری معرفی شده در این بلوک دیاگرام، اطلاعات لازم از موقعیت، سرعت و شتاب هواپیمای تعقیب‌کننده را به کمک سنسورهای ناوبری شامل ژیروسکوپ و شتاب‌سنج متصل به آن به دست می‌دهد. سیگنال شتاب و یا سرعت تولیدشده در بلوک هدایت، توسط بلوک کنترل‌کننده و دینامیک هواپیما به نحو مناسبی به بالکهای هواپیما فرماندهی می‌شود. در این تحقیق، کنترل کننده در بلوک هدایت و همچنین عملکرد بلوک تخمینگر مورد بررسی قرار می‌گیرد و سایر قسمت‌های این بلوک دیاگرام، ایده ال فرض می‌شوند.

۳- تخمین فاصله و زاویه از تصاویر دوربین با اعمال مانور به هواپیمای تعقیب کننده

اطلاعات دوربین، شامل دو زاویه α و ε خواهدبود که با استفاده از این زوایا، فاصله و زاویه خط‌دید دو هواپیما از روابط (۱) و (۲) محاسبه می‌شوند. در رابطه (۱) R فاصله دو هواپیما و L طول واقعی دو بال هواپیماست.

$$R=\frac{L}{2\tan(\alpha/2)} \qquad (۱)$$

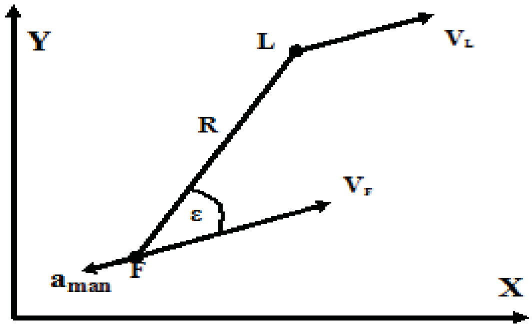
$$\lambda=\varepsilon+\varphi \qquad (۲)$$

در رابطه (۲)، λ زاویه خط‌دید دو هواپیما با محور X دستگاه مختصات اینرسی، و φ زاویه بین بردار سرعت هواپیمای تعقیب‌کننده با محور X دستگاه مختصات اینرسی است. اندازه‌گیری زاویه φ توسط سنسورهای اینرسی متصل به بدنه هواپیمای تعقیب‌کننده انجام می‌گیرد و بنابراین زاویه λ به کمک رابطه (۲) قابل محاسبه است. ولی محاسبه فاصله، با فرض ناشناخته‌بودن پارامتر L، از رابطه (۱) امکان‌پذیر نخواهد بود. لذا می‌بایست ابعاد هواپیمای پیشرو، به نحوی تخمین زده‌شود. در روش تخمین بررسی شده، با انجام مانور توسط هواپیمای تعقیب‌کننده و اندازه‌گیری چندین مقدار متوالی α و ε، ابعاد هواپیمای پیشرو، L تخمین زده می‌شود. پس از اجرای موفقیت‌آمیز فاز تخمین در یک بازه کوچک، حرکت شتابدار هواپیمای پیشرو تاثیری در عملکرد تخمینگر نخواهد داشت. در واقع، ایده مطرح شده با مشتق گیری از رابطه (۱) آشکار می‌گردد.

$$R=\frac{-\dot{R}}{\dot{\alpha}}Sin(\alpha) \qquad (۳)$$

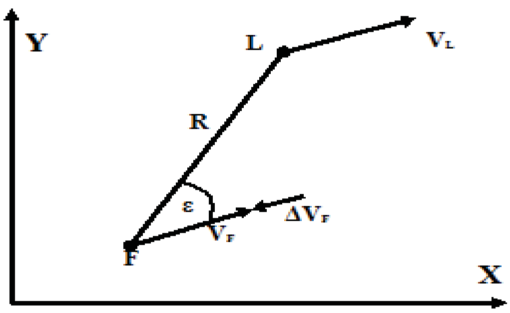
از رابطه (۳) برمی آید که اگر بتوان به نحوی مقادیر $\dot{R}$، $\dot{\alpha}$ و α را از اطلاعات دوربین و موقعیت هواپیماها اندازه‌گیری کرد، مقدار R قابل محاسبه است. محاسبه $\dot{\alpha}$، با اندازه‌گیری چندین مقدار متوالی α در زمان‌های مشخص امکان‌پذیر است ولی محاسبه $\dot{R}$ به کمک اطلاعات دوربین امکان پذیر نیست. راه حل ارائه شده، اعمال چندین

مانور ازپیش تعیین شده در قالب شتاب به هواپیمای تعقیب‌کننده و محاسبه مقدار $\dot{R}$ از این مقدار شتاب است. با هر کدام از این مانورها می‌توان یک تخمین از ابعاد هواپیمای پیشرو به دست آورد. این مانور در جهات متعدد می‌تواند باشد. به عنوان نمونه می‌تواند در جهت خط واصل دو هواپیما، یا در جهت بردار سرعت هواپیمای تعقیب‌کننده باشد. در شبیه‌سازی انجام‌گرفته در این تحقیق، این مانور مطابق شکل (۳)، در جهت بردار سرعت هواپیمای تعقیب‌کننده و به صورت شتاب ثابت منفی به آن اعمال شده‌است.



شکل ۳: اعمال شتاب منفی به هواپیمای تعقیب کننده

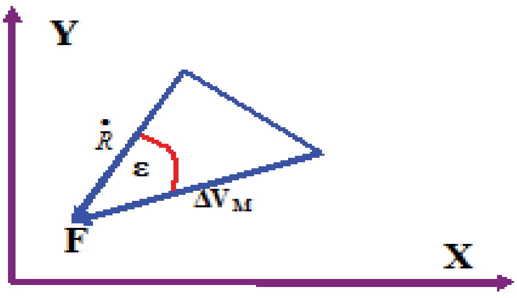
در شکل (۳) بردار سرعت هواپیمای تعقیب‌کننده به همراه خط واصل آن با هواپیمای پیشرو نشان داده شده است. با اعمال شتاب a_{man} به هواپیمای تعقیب‌کننده، بردار سرعت آن به صورت شکل (۴) تغییر خواهدکرد. بردار ΔV_F از رابطه (۴) قابل محاسبه خواهد بود.



شکل ۴: تغییربردار سرعت هواپیمای تعقیب‌کننده در اثر اعمال شتاب به آن

$$\Delta V_M = a_M . t_{acc} \qquad (۴)$$

مقدار $\dot{R}$ با توجه به شکل (۵)، از رابطه (۵) قابل محاسبه است، که در آن a_{man} شتاب مانور اعمال‌شده به هواپیمای تعقیب‌کننده، t مدت زمان اعمال شتاب ثابت به آن و ε زاویه انحراف در لحظه مانور است.



شکل ۵: تجزیه بردار ΔV_F برای محاسبه پارامتر مجهول $\dot{R}$

$$\dot{R} = \Delta V_F \cdot Cos(\varepsilon) = a_{man} \cdot t \cdot Cos(\varepsilon) \qquad (۵)$$

قبل از اجرای عملیات تخمین با اندازه گیری چندین نمونه از پارامترهای α و ε و عدم تغییر قابل ملاحظه در آنها از عدم شتاب هواپیمای پیشرو مطمئن خواهیم شد. در واقع اجرای فاز تخمین در صورت عدم شتاب هواپیمای پیشرو امکان پذیر خواهد بود. با در دست داشتن پارامتر $\dot{R}$ یک زمان نمونه برداری مناسب انتخاب می شود و چندین نمونه از مقادیر سایر پارامترها اندازه گیری می‌شود. به این ترتیب از رابطه (۶)، i امین تخمین از فاصله دو هواپیما به دست می‌آید. با در دست داشتن i امین تخمین از فاصله دو هواپیما، i امین تخمین از ابعاد هواپیما از رابطه (۷) محاسبه خواهد شد که مقادیر $\dot{\alpha}_i$ و $\overline{\alpha}_i$ از رابطه (۸) محاسبه خواهد شد.

$$R_{Est,i} = \frac{-\dot{R}}{\dot{\alpha}_i} Sin(\overline{\alpha_i}) \qquad (۶)$$

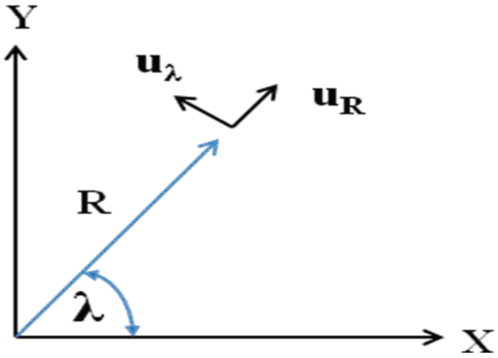
$$L_{Est,i} = 2R_{Est,i}.\tan(\overline{\alpha}_i / 2) \qquad (۷)$$

$$\overline{\alpha_i} = (\alpha_{t,i+1} + \alpha_{t,i})/2$$
$$\overline{\dot{\alpha}}_i = (\alpha_{t,i+1} - \alpha_{t,i})/(t_{i+1} - t_i) \qquad (۸)$$

با استخراج سه نمونه در هر مانور، دو مقدار از ابعاد هواپیمای پیشرو به دست خواهد آمد. اگر این مقادیر حاوی اختلاف ناچیز باشند، مانور موفقیت‌آمیز بوده و ابعاد واقعی، میانگین این دو مقدار خواهدبود. در غیر این صورت، مانور ناموفق بوده و نیاز به مانور دیگری برای تخمین ابعاد پیشرو خواهد بود.

٤- مدل سینماتیکی برای هندسه نسبی دو هواپیما

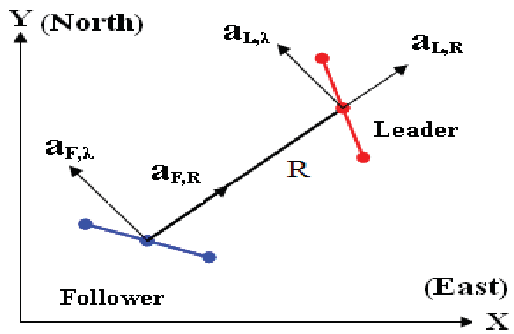
اگر بردار R مطابق شکل (۶) بردار موقعیت یک ذره در دستگاه مختصات قطبی باشد، رابطه آشنای (۹)، معادله شتاب آن ذره را به دست خواهدداد.



شکل ۶: نمایش بردار موقعیت یک ذره در مختصات قطبی

$$a=\left(\ddot{R}-R\dot{\lambda}^{2}\right)u_R+\left(2\dot{R}\dot{\lambda}+R\ddot{\lambda}\right)u_\lambda \quad (۹)$$

رابطه (۹) بیانگر این مطلب است که سیگنال شتاب، بر روی دو بردار $\vec{u}_R$ و $\vec{u}_\lambda$ قابل تجزیه خواهدبود. اگر چنانچه بخشی از سیگنال شتاب که بر u_R تاثیر می‌گذارد را a_R بنامیم و بخشی از آن را که بر u_λ تاثیر می‌گذارد a_λ بنامیم، رابطه (۱۰) به دست خواهد آمد. حال اگر مطابق شکل (۷) بردار R، بردار فاصله دو هواپیمای پیشرو و تعقیب‌کننده باشد، رابطه (۱۰) معادلات حالت سینماتیکی مربوط به هندسه نسبی دو هواپیما در دو بعد را نشان خواهدداد. متغیرهای حالت مربوط به ارتباط شتابهای ورودی با فاصله و زاویه دو هواپیما، به عنوان خروجی های سیستم، در رابطه (۱۱) آورده شده است. با فرض متغیرهای حالت رابطه (۱۱)، معادلات حالت به صورت رابطه (۱۲) قابل‌بیان خواهدبود. متغیرهای حالت مربوط به مولفه‌های سرعت و موقعیت هواپیمای تعقیب‌کننده در دستگاه مختصات اینرسی درنظر گرفته می‌شود. این متغیرهای حالت در رابطه (۱۳) آورده شده‌اند و معادلات حالت مربوط به این متغیرها در رابطه (۱۴) ارائه شده‌است.



شکل ۷: نمایش بردار شتاب دو هواپیما

$$\ddot{R}=a_R+R\dot{\lambda}^{2} \qquad (۱۰)$$
$$\ddot{\lambda}=\frac{1}{R}a_\lambda-\frac{2\dot{R}}{R}\dot{\lambda}$$

$$x_1=R, x_2=\dot{R}, x_3=\lambda, x_4=\dot{\lambda}, u_1=a_R, u_2=a_\lambda \quad (۱۱)$$
$$a_R=a_{L,R}-a_{F,R} \qquad a_\lambda=a_{L,\lambda}-a_{F,\lambda}$$

$$\begin{cases}\dot{X}_1=X_2\\ \dot{X}_2=X_1X_4^2+u_1\\ \dot{X}_3=X_4\\ \dot{X}_4=\dfrac{1}{X_1}u_2-\dfrac{2X_2}{X_1}X_3\end{cases} \quad (۱۲)$$

$$X_5=X_F \quad X_6=V_{X,F} \quad X_7=Y_F \quad X_8=V_{y,F} \quad (۱۳)$$

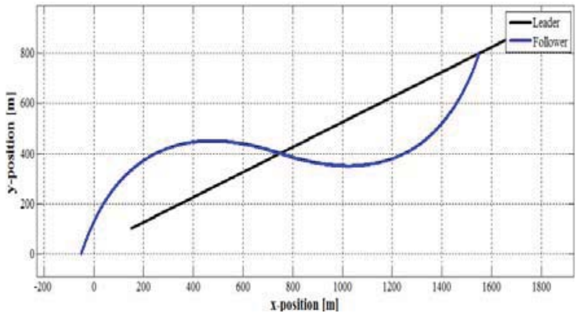
$$\begin{cases}\dot{X}_5=X_6\\ \dot{X}_6=-Sin\lambda.a_\lambda+Cos\lambda.a_R\\ \dot{X}_7=X_8\\ \dot{X}_8=Cos\lambda.a_\lambda+Sin\lambda a_R\end{cases} \quad (۱۴)$$

.

۵- تخمین فاصله دو هواپیما به کمک الگوریتم کالمن

فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF) یک مدل دقیق غیرخطی از سیستم را در نظر می گیرد و در هر مرحله زمانی توسط تخمین بردار حالت فعلی، مدل را خطی می کند. به این ترتیب، فیلتر کالمن قادر خواهد بود تا کمبود اطلاعات در مورد فاصله دو هواپیما را که مسئله جدی برای رویتگر خطی معمولی است جبران نماید. تحت شرایط مطلوب (به عنوان نمونه شتاب ثابت هواپیمای پیشرو) تنها اندازه گیری یک نمونه از λ برای تخمین فاصله کفایت می کند. اما با اندازه گیری α امکان بهبود کیفیت تخمین فراهم خواهد شد، زیرا اطلاعات اضافی از جابجایی مسیر خط دید دو هواپیما با این اندازه گیری فراهم خواهد شد. در [۵] و [۲۱] نشان داده شده است که حتی استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته می تواند منجر به خطای ردیابی بزرگ گردد، اما به کمک اطلاعات α مشکل واگرایی حل شده و زمان همگرایی می تواند بهبود یابد. در این مسئله هواپیمای پیشرو بدون شتاب بوده و هواپیمای تعقیب کننده در حین عملیات تخمین تنها یک مانور به صورت موجی حول مسیر حرکت هواپیمای پیشرو انجام خواهد داد. مسیر حرکت دو هواپیما

در شکل (۸) آورده شده است. برای اعمال فیلتر کالمن، مدل سینماتیکی معکوس با توجه به معادلات (۱۰) در نظر گرفته می شود.



شکل ۸: مسیر حرکت دو هواپیما در طول عملیات تخمین

حالت های اینرسی برای اجرای الگوریتم کالمن ضروری نیستند. بنابراین معادلات حالت سیستم به صورت رابطه (۱۵) خواهند بود.

$$x=[\dot{\lambda} \quad \dot{R}/R \quad \lambda \quad 1/R \quad \alpha]^T, u=\begin{bmatrix} a_{\lambda,F} \\ a_{R,F} \end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$
$$z=Hx=\begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad H=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب معادلات حالت به صورت رابطه (۱۶) خواهد بود.

(۱۶)

$$\dot{x}=f(x,u)=\begin{bmatrix} -2\dot{\lambda}(\dot{R}/R)+(1/R).a_{\lambda} \\ \dot{\lambda}^2-(\dot{R}/R)^2+(1/R).a_R \\ \dot{\lambda} \\ (\dot{R}/R).(1/R) \\ (\dot{R}/R).\sin(\alpha) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2x_1x_2-x_4u_1 \\ x_1^2-x_2^2-x_4u_2 \\ x_1 \\ -x_2x_4 \\ -x_2\sin(x_{5)} \end{bmatrix}$$

ممکن است این سوال پیش آید که چرا در این قسمت برای مدلسازی سیستم از معادلات حالت به فرم معکوس استفاده شده است. در واقع این سوال یک دلیل ساده دارد که به ایده مطرح شده در [۷] برمی گردد. به طور کلی استفاده از مدل معکوس منجر به رویت پذیری فاصله نخواهد شد، بلکه منجر به عدم واگرایی فیلتر کالمن خواهد شد. الگوریتم کالمن را می توان به دو مرحله مجزا تقسیم کرد: به روز رسانی زمانی و به روز رسانی اندازه گیری. در طول مرحله آپدیت زمانی، فیلتر کالمن به کمک مدل داخلی سیستم بردار حالت را پیش بینی می کند. در طول مرحله آپدیت اندازه گیری، فیلتر کالمن مقدار پیش بینی شده را با مقدار اندازه گیری شده جدید مقایسه می کند و به کمک معادلات ریکاتی بردار حالت جدید را تخمین می زند. اولین قدم برای طراحی فیلتر کالمن توسعه یافته، خطی سازی معادلات مدل است تا بتوان یک ماتریس سیستم خطی به دست آورد. با داشتن یک سیستم خطی امکان پیش بینی ماتریس کوواریانس فراهم خواهد شد. خطی سازی ماتریس سیستم می بایست تنها به کمک ماتریس ژاکوبی $\partial f/\partial x_i$ صورت گیرد. در ابتدای الگوریتم کالمن تخمین اولیه می بایست تعریف شود. این تخمین اولیه لزوما نباید به مقادیر واقعی نزدیک باشد ولی تخمین اولیه خوب می تواند زمان همگرایی الگوریتم را کاهش دهد. اکنون الگوریتم تخمین کالمن با آپدیت زمانی و پیش بینی حالت فعلی شروع می شود و در ادامه ماتریس کوواریانس با استفاده از نتایج آخرین مرحله زمانی پیش بینی می شود. برای تکرار اول، مقادیر اولیه مورد استفاده قرار می گیرند. گام زمانی که با T_s نشان می دهیم (برای زمان نمونه برداری) باید مقدار کوچکی داشته باشد. هر چه زمان نمونه برداری کوچکتر باشد تخمین بهتر با زمان همگرایی کمتری خواهیم داشت ولی با محاسبات سنگینتر با زمان بیشتر مواجه خواهیم شد. پیش بینی حالت طبق معادله (۱۷) انجام می گیرد.

$$\overline{X}_k=\hat{X}_{k-1}+\dot{\hat{X}}_{k-1}T_s \qquad \dot{\hat{X}}_{k-1}=f(\hat{X}_{k-1},U_{k-1}) \qquad (۱۷)$$

ماتریس کوواریانس توسط دومین معادله ریکاتی طبق رابطه (۱۸) پیش بینی می شود. ماتریس اساسی به صورت (۱۹) تعریف می شود.

$$\overline{P}_k=\phi_k P_{k-1}\phi_k^T+Q_k \qquad (۱۸)$$

$$\phi_k=I_{5\times5}+F_kT_s \qquad (۱۹)$$

بعد از این پیش بینی که بر مبنای آخرین تکرار صورت می گیرد، فیلتر کالمن به کمک آپدیت اندازه گیری عملیات تخمین را تصحیح می کند. برای این منظور بهره کالمن بهینه را توسط اولین معادله ریکاتی طبق رابطه (۲۰) محاسبه می کند.

$$K_k=\overline{P}_kH^T.(H\overline{P}_k.H^T+R_k)^{-1} \qquad (۲۰)$$

در مرحله بعدی ماتریس کوواریانس جدید توسط سومین معادله ریکاتی طبق رابطه (۲۱) حاصل خواهد شد.

$$P_{k-1}=(I-K_{k-1}).\overline{P}_{k-1} \qquad (۲۱)$$

ماتریس کوواریانس به دست آمده در این مرحله برای پیش بینی مقدار جدید حالت در مرحله بعدی ضروری است و همچنین برای محاسبه بهره کالمن بعدی مورد نیاز خواهد بود. برای بهره کالمن فعلی، تخمین حالت جدید می تواند از رابطه (۲۲) محاسبه گردد.

$$\hat{X}_k=\overline{X}_k+K_k(z_k-h(\hat{X}_k)) \qquad (۲۲)$$

ماتریس اندازه گیری h و اندازه گیری های واقعی z_k در معادلات (۱۵) آورده شده است. با این نتایج به دست آمده، این تکرار به پایان می رسد و فیلتر کالمن می تواند تکرار بعدی را شروع کند.

٦- طراحی کنترل کننده مد لغزشی MIMO برای تنظیم موقعیت نسبی دو هواپیما

با توجه به معادلات حالت به دست آمده در بخش پیش، سیگنالهای کنترل u_1 و u_2 به صورت تفاضل شتابهای هواپیماهای پیشرو و تعقیب کننده می باشد. شتاب هواپیمای پیشرو ناشناخته است، بنابراین نامعینی حاصل از آن در قالب سیگنال کنترل مدنظر قرار می گیرد. کنترل کننده *MIMO* مدلغزشی به عنوان یک کنترل کننده مقاوم غیر خطی با سرعت بالا برای دفع اثر شتاب ناشناخته هواپیمای پیشرو، طراحی شده است. معادلات مربوط به هندسه نسبی دو هواپیما در رابطه (۱۰) آورده شده‌است. فرم معمول معادله حالت برای طراحی کنترل کننده مدلغزشی *MIMO* به صورت رابطه (۲۳) است.[۲۲].

$$X_i^{(ni)} = f_i(X) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x)u_j \qquad (۲۳)$$

$$y = X$$

تابع f و b در معادله حالت فوق، محدود بوده اما به طور دقیق مشخص نیستند. سیگنال کنترلی $u(t)$ به گونه ای محاسبه شده است که سیستم حلقه بسته به سطح لغزش $s(t)$ رسیده و بر روی آن باقی بماند. سیگنال کنترلی $u(t)$ مورد نیاز سیستم برای باقی ماندن روی این سطح را $\hat{u}(t)$ می نامیم. سطح لغزش به صورت رابطه (۲۴) تعریف می شود که در آن $\widetilde{x}$ به عنوان خطای حالت، و λ به عنوان یک مقدار ثابت با علامت مثبت تعریف می شود. بردار سیگنال کنترلی موردنظر به صورت رابطه (۲۵) بدست می آید.

$$s_i = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_i\right)^{(n_i-1)} \widetilde{x}_i \qquad (۲۴)$$

$$\hat{u} = \hat{B}^{-1}\left(-\hat{f} + \ddot{x}_d - 2\lambda\dot{\widetilde{x}} - \lambda^2\widetilde{x}\right) = \hat{B}^{-1}\widetilde{u} \qquad (۲۵)$$

$\hat{B}$ ماتریس در بر گیرنده b_{ij} است. در خارج از $s(t)$ شرایط رسیدن به سطح لغزش و پایداری آن می بایست مشخص شوند. از طرفی برای رفع مشکل پدیده *Chattering* یک تخمین پیوسته از قانون کنترلی سوئیچینگ از طریق هموار کردن ناپیوستگی ها در یک محدوده Φ، در نظر گرفته می شود و تابع علامت که به طور معمول به کار می رود، با تابع اشباع جایگزین شده است[۲۲]. و لذا قانون کنترلی به صورت رابطه (۲۷) اصلاح می‌شود. با در نظر گرفتن نامساوی رابطه (۲۸)، شرط لغزش، (۲۶)، بر آورده خواهد شد.

$$\dot{s}s \le -\eta|s| \qquad (۲۶)$$

$$u = \hat{B}^{-1}\left(\widetilde{u} - ksat\left(\frac{s}{\Phi}\right)\right) \qquad (۲۷)$$

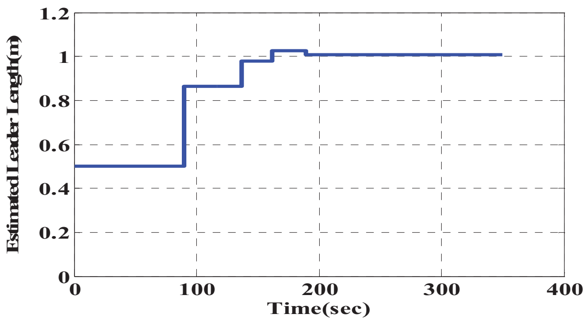
$$k \ge \beta(F + \eta) + (\beta - 1)|\hat{u}| \qquad (۲۸)$$

روابط محاسبه شده برای سطح لغزش و سیگنال کنترل برای مدل موردنظر این تحقیق، به صورت رابطه (۲۹) خواهدبود.

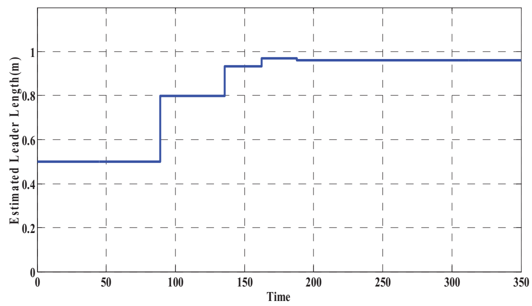
$$\begin{aligned} S_1 &= \lambda_1 X_1 + X_2 - \lambda_1 R_{COM} \\ S_2 &= \lambda_2 X_3 + X_4 - \lambda_2 \lambda_{COM} \\ u_1 &= a_{F,R} = -k_1 sat(s_1/\phi_1) - \lambda_1 x_2 - x_1 x_4 \\ u_2 &= a_{F,\lambda} = -k_2 sat(s_2/\phi_2) - \lambda_2 x_4 x_1 + 2x_2 x_4 \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

۷- نتایج شبیه سازی

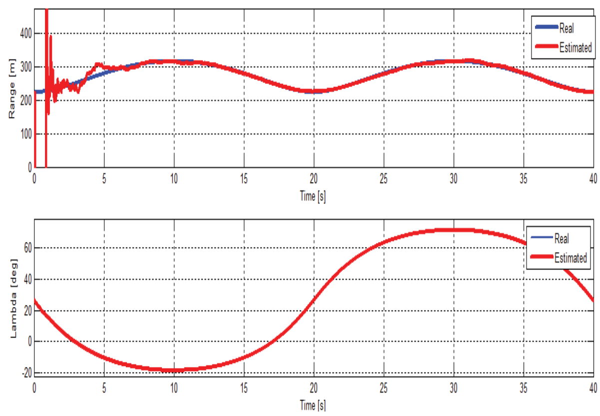
نتایج شبیه‌سازی های انجام‌گرفته برای تخمین و کنترل موقعیت نسبی دو هواپیما، در این بخش مورد توجه قرار گرفته است. در ابتدا عملکرد تخمینگر با اعمال مانور، به طور مجزا مورد بررسی قرار گرفته است. ابعاد واقعی هواپیمای پیشرو در این شبیه‌سازی‌ها، ۱ متر در نظر گرفته شده است و مقدار تخمین اولیه از آن، ۰.۵ متر فرض شده‌است. در ابتدا هواپیمای پیشرو بدون شتاب در نظر گرفته شده است. با این فرض، شتاب مانور 2m/s^2- در نظر گرفته شده است. این الگوریتم برای تخمین ابعاد هواپیمای پیشرو، شش مانور انجام داده است. که با چهار مانور موفق، ابعاد هواپیمای پیشرو با توجه به شکل (۹)، به اندازه ۱.۰۱ متر تخمین زده شده است. در ادامه عملکرد تخمینگر برای تخمین ابعاد هواپیمای پیشرو با شتاب ثابت غیرصفر در شکل (۱۰) نشان داده شده‌است که با انجام چهار مانور موفق از شش مانور انجام گرفته، ابعاد هواپیمای پیشرو ۰.۹۶ متر تخمین زده شده است. عملکرد تخمینگر کالمن نیز با شبیه سازی انجام گرفته با زمان نمونه برداری ۰.۰۱ ثانیه بررسی شده است. در این شبیه سازی هواپیمای پیشرو مطابق شکل (۸) در حرکت است. در شکل (۱۱) مقادیر واقعی فاصله و زاویه به همراه مقادیر تخمین زده شده آنها توسط فیلتر کالمن آورده شده است و شکل (۱۲) مقدار خطای تخمین را نشان می دهد.



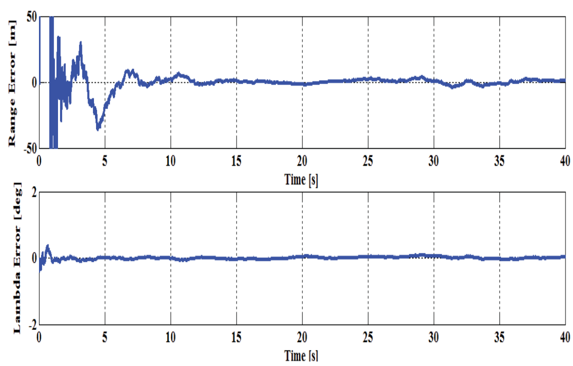
شکل ۹: تخمین ابعاد هواپیمای پیشرو با انجام ۴ مانور موفق



شکل ۱۰: تخمین ابعاد هواپیمای پیشرو با شتاب ثابت ۰.۵m/s^2

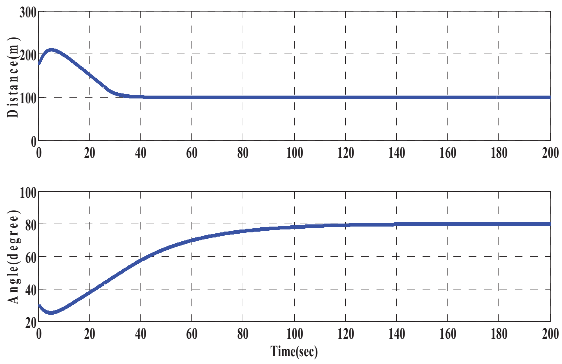


شکل ۱۱: نمایش مقادیر واقعی فاصله و زاویه و مقادیرتخمین زده شده توسط فیلتر کالمن

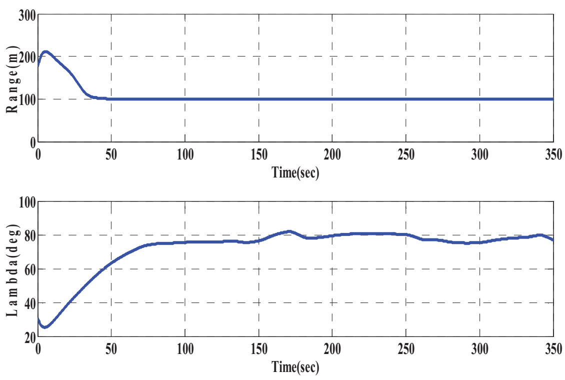


شکل ۱۲: نمایش خطای تخمین فیلتر کالمن برای فاصله و زاویه

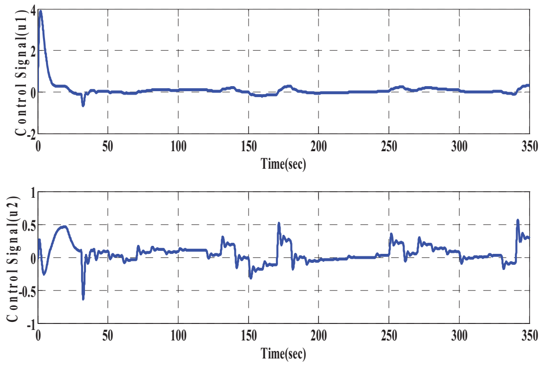
با فرض ایده‌ال بودن فرایند تخمین فاصله و زاویه و عدم شتاب هواپیمای پیشرو، عملکرد کنترل‌کننده مدلغزشی برای دستیابی به فاصله ۱۰۰ متر و زاویه خط دید ۸۰ درجه در شکل (۱۳) نشان داده شده است. شتاب ثابت‌m/s^2 ۰.۵ به عنوان شتاب ناشناخته هواپیمای پیشرو، به همراه شتاب در قالب نویز سفید گاوسی به عنوان تاثیر باد، به حلقه کنترل اضافه شده‌است و عملکرد کنترل‌کننده با فرض تخمین ایده‌ال فاصله، شبیه سازی شده‌است. عملکرد کنترل‌کننده در ردیابی فاصله و زاویه با اعمال این شتاب، در شکل (۱۴) نشان داده شده‌است. سیگنال کنترل در قالب شتاب پیشران و دورانی برای هواپیمای تعقیب کننده در شکل (۱۵) نشان داده شده است و همانطور که از شکل بر می‌آید، سیگنال کنترل کاملا هموار با دامنه کم از نتایج این کنترلر می‌باشد. شکل (۱۶) نمایش همزمان سرعت دو هواپیما در راستای محور x در این حالت آورده شده‌است. نتایج فوق نشان می‌دهد که کنترل‌کننده مدلغزشی طراحی شده در این مقاله، اهداف ردیابی را به خوبی برآورده کرده است.



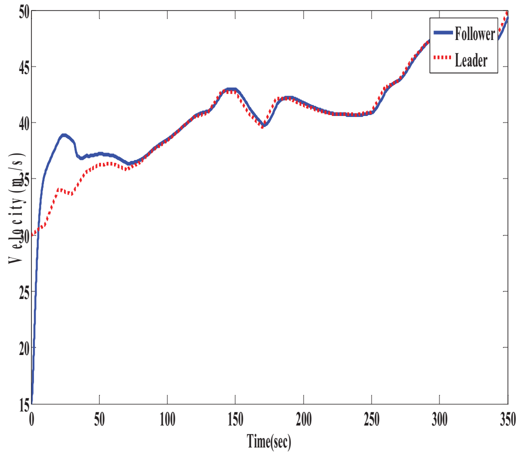
شکل ۱۳: عملکرد کنترل کننده در ردیابی فاصله و زاویه دو هواپیما، با فرض تخمین ایده ئال فاصله و عدم شتاب هواپیمای پیشرو



شکل ۱۴: عملکرد ردیابی فاصله و زاویه با فرض تخمین ایده ئال فاصله و حرکت شتابدار هواپیمای پیشرو به همراه تاثیر باد.



شکل ۱۵: سیگنال کنترل در قالب شتاب پیشران و دورانی هواپیمای تعقیب-کننده



شکل ۱۶: نمایش سرعت دو هواپیما

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای مشکل رویت‌ناپذیری فاصله دو هواپیما از تصاویر دوربین در موارد ناشناخته‌بودن ابعاد هواپیمای پیشرو، الگوریتمی ارائه شده است که با اعمال مانور در قالب شتاب مشخص به هواپیمای تعقیب‌کننده، ابعاد هواپیمای پیشرو را تخمین می‌زند. با در اختیار داشتن ابعاد هواپیمای پیشرو، محاسبه فاصله دو هواپیما از تصاویر دوربین، به سادگی امکان‌پذیر خواهد بود. این روش برای اهداف شتابدار نیز تخمین مناسبی از فاصله به دست داده است. در ادامه الگوریتم تخمین کالمن به عنوان یک الگوریتم بر مبنای رویتگر با فرضیات ساده، فاصله دو هواپیما را به خوبی تخمین زد. این الگوریتم با فرض شتاب برای هواپیمای پیشرو با مشکل همگرایی مواجه می‌شود. مشکل ناشناخته‌بودن شتاب هواپیمای پیشرو از تصاویر دوربین و همچنین تاثیرات نامطلوب باد به کمک کنترل‌کننده مدلغزشی طراحی شده در این مقاله برطرف شده است. این کنترل‌کننده برخلاف سایر کنترل‌کننده‌های مورد استفاده در بررسی‌های مشابه، در عین سادگی در طراحی، عملکردی مقاوم در برابر شتاب ناشناخته هواپیمای پیشرو و اثرات نامطلوب باد، از خود نشان داده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که کنترل‌کننده مدلغزشی طراحی شده در این مقاله، توانسته‌است اهداف ردیابی را با سیگنال کنترل هموار با انرژی کم، برآورده کند.

مراجع

[1] Williamson, W.R,, Abdel Hafez, M.F., Rhee, I., Song, E. J., January 2007, "An Instrumentation System Applied to Formation Flight", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.

[2] Bishop, A. N., Pathirana, P. N., Savkin, A.V., December 2007, "Radar Target Tracking Via Robust Linear Filtering", *IEEE Signal Processing Letters*, 12.

[3] Parkash Singh, J., 2005, "Evolution of The Radar Target Tracking Algorithms: A Move Towards Knowledge Based Multi Sensor Adaptive Processing", Instrument Research & Development Establishment, *Dehra Dun, India, IEEE*.

[4] Ronnback, S., 2000, "Development of a INS/GPS Navigation loop for a UAV", *Master's Thesis, Lulea University of Technology, Dept of Computer Science and Electrical Engineering*.

[5] Betser, A., Vela, P., Tanenbaum, A., December 2004, "Automatic Tracking of Flying Vehicles Using Geodesic Snakes and Kalman Filtering",*43rd IEEE Conf on Decision and Control*.

[6] Kumar Ayezzi, A., Kichenassamy, S., Olver, P., Tannenboum, A., 1995, "Active Contours for Visual Tracking", *IEEE Conference on Decision and Control*.

[7] Aidala, V. J., Hammel, S. E., 1983, "Utilization of Modified Polar Coordinates for Bearing-Only Tracking", *IEEE Trans,Automation and Control* ,28, 283-294.

[8] Avidan, S., Shashua, A., 2000, "Trajectory Triangulation: 3D Reconstruction of Moving Points From a Monocular Image Sequence", *IEEE Transaction. Patt. anal. Mach. Int*, 22, 4, 348-357.

[9] Stepanyan, V., 2006, "Vision Based Guidance and Flight Control in Problem of Aerial Tracking," *Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in Aerospace Engineering*, Virginia.

[10] Stepanian, V., Hovakimian, N., June 2006, "A Guidance Law For Visual Tracking of Maneuvering Target", *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, Minnesota, USA, 14-16.

[11] Watanabe, Y., Johnson, E. A., Calise, A. J., Aug 2004, "Optimal 3D Guidance from a 2D Vision Sensor", *In Procc of the AIAA Guidance Navigation and Control Conference*, 16-19.

[12] Wu, X., Sun, F., Wang, W., Li Q., Chi, H., June 2006, "Adaptive Algorithm for Tracking Maneuvering Target Using Rate of Acceleration," *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 21-23, Dallian, China.

[13] Hashirao, M., Kawase, T., Sasase, I., 2000, "A Variable γ H∞ Filter for a Maneuvering Target Tracking Using Acceleration Estimate", *IEEE Radar Conference*, Japan.

[14] Hashirao, M., Kawase T., Sasase, I., 2001, " Maneuvering Target Tracking With Acceleration Estimation Using Target Past Positions," *Department of Information and Computer Science*, Keio University 3-14-1 Hiyoshi, Yokohama, 223-8522 Japan.

[15] Hepner S.A.R., Geering, H.P., 1991, "Adaptive Two Time-Scale Tracking Filter for Target Acceleration Estimation", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 14, 3, 581-588.

[16] Oshman, Y., Shinar, J., 1999, "Using A Multiple Model Adaptive Estimator in a Random Evasion Missile/Aircraft Estimation", *In Proc of the AIAA Guidance Navigation and Control Conf.*

[17] Herrnberger, M., October 2004, "Adaptive control and State Estimation for Vision-based Formation Flight of Unmanned Aerial Vehicles", *MS Thesis, Institute of Flight Mechanics and Flight Control, Technical University of Munich*.

[18] Anthony, J., Calise, E., Johnson, N., Sattigeri, R., Watanabe, Y., Madyashta, V., 2005, "Estimation and Guidance Strategies for Vision-Based Target Tracking," *American Control Conference* June 8-10,. Portland, OR, USA.

[19] Metni, N., Hamel, T., Derkx, F., 2005, "Visual Tracking of Aerial Robotic Systems with Adaptive Depth Estimation", *Proceedings of the 44th IEEE Conference on decision and Control*, Seville, Spain, December 12-15.

[20] Tannenboum, *Three Snippets of Curve Evolution Theory in Computer Vision*, University of Minnesota, 1995.

[21] Webb, T., Kurdila, A., Prazenica, R., 2004, "Vision-Based Implicit Kalman Filtering for Aerospace Vehicles Using the Epipolar Constraint", *University of Florida*.

[22] Slotine J.J.E., Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Massachusetts Institute of Technology, 1991.

مجله کنترل
جلد ۳، شماره ۲، تابستان ۱۳۸۸، صفحه ۲۴-۱۱

تعیین مکان صفرهای معادلات دیفرانسیل خطی دارای تاخیر زمان با استفاده از پاسخ فرکانسی

منصوره اسماعیلی[۱]، منصور شیروانی[۲]

[۱] دانشجوی دکترا کنترل فرآیندها دانشگاه علم و صنعت ایران، m.esmaeli@nipc.net
[۲] دانشیار گروه کنترل و شبیه سازی فرآیندها دانشگاه علم و صنعت ایران ، shirvani.m@iust.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۳/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۸/۶/۲۴)

چکیده: در این مقاله با استفاده از مفهوم بهره برتر و پاسخ فرکانسی، روشی ساده برای تعیین مکان صفرهای ناشی از پارامترهای تاخیر زمان معادلات دیفرانسیل دارای تاخیر زمان ارائه خواهد شد. مفهوم بهره برتر بیان می کند که در توابع شبه چند جمله ای دارای تاخیر زمان، رفتار کلی تابع در هر بازه فرکانسی، همواره تحت تاثیر رفتار تابع با بهره برتر در آن بازه فرکانسی قرار دارد. اگر این رفتار غیر مینیمم فاز باشد، تابع کلی در آن بازه فرکانسی رفتار غیر مینیم فاز گرفته که این به مفهوم وجود صفرهای سمت راست است و اگر مینیمم فاز باشد تابع کلی در آن بازه فرکانسی دارای رفتار مینیمم فاز خواهد شد که به مفهوم قرار گرفتن صفرها در سمت چپ محور مختصات است. با توجه به اینکه مفهوم بهره برتر کلیت دارد بنابراین برای معادلات دیفرانسیل خطی دارای تاخیر زمان نیز قابلیت کاربرد داشته و با استفاده از آن به راحتی می توان مکان صفرهای این گونه معادلات را در هر محدوده فرکانسی تشخیص داد.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل خطی دارای تاخیر زمان، مفهوم بهره برتر، تئوری مکان مجانبی صفرها، صفر سمت راست.

Abstract: In this paper, by using dominant gain concept and frequency response, a simple method is presented to recognize zeros locations resulting of time delay parameters of the differential-diffrence equations. The concept of dominant gain states that, in a specific frequency band, the dynamic behavior of a Quasi-Rational Distributed System traces the dynamics of that term in the model which dominates in its gain with respect to the other term. If this behavior is nonminimum phase, total function is nonminimum phase in that frequency ranges and that means Right Half Plane (RHP) zeros exist and if it is minimum phase total function behavior is minimum phas and that means all of zeros locate in Left Half Plane (LHP) in that frequency ranges. Because dominant gain is a comprehensive concept then it capable to use for differential-diffrence equation and by using it, zeros location could be recognized in all of frequency ranges.

Keywords: Diffrential-Diffrence Equations, Dominant Gain Concept, Assymptotic Location of Zeros, Right Half Plane (RHP) Zeros.

۱- مقدمه

معادلات دیفراسیل خطی دارای تاخیر زمان همانند معادله ۱ در ریاضیات کاربردی از اهمیت ویژه ای برخوردارند چرا که بسیاری از فرآیندها در نهایت به چنین معادلاتی ختم می شوند.

$$\dot{x}(t) = Ax(t-\tau) \qquad (۱)$$

در معادله بالا A یک ماتریس $n \times n$ می باشد. معادله مشخصه معادله بالا ، معادله ۲ می شود.

$$\Delta(s) = \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} a_{mn} s^m e^{ns} \qquad (۲)$$

معادله ۲ یک معادله شبه چند جمله ای بوده که با توجه به اینکه در مسائل کنترل فرآیندها اشکال ساده ای از آن به عنوان معادله مشخصه

مطرح است، تعیین مکان صفرهای این معادله و اشکال ساده تر آن، نه تنها در حوزه ریاضیات [۱-۳]، بلکه در حوزه مهندسی کنترل [۴-۶] نیز زمینه تحقیق بسیاری از محققین بوده است. چرا که همانطور که می دانیم تئوری هرمیت بهلر[1] تنها برا ی چند جمله ایهای هورویتز[2] قابل کاربرد بوده و برا ی توابع شبه چند جمله ای قابل کاربرد نیست [۷-۸].

از قدیمی ترین تحقیقات در این ارتباط می توان به کار پونتری اگین[3] اشاره نمود [۱]. پونتری اگین راه حلی کلی برای تعیین موقعیت صفرهای معادله ۲ ارائه داده است. بعدها براساس کار او تئوری هرمیت بهلر برای اشکال خاصی از شبه چند جمله ایهای ۲ بسط داده شد [۲و۸]. در سالهای اخیر نیز تحقیقات بسیاری در جهت تعیین شرایط پایداری که عبارت است از قرار گرفتن کلیه صفرهای معادله ۲ در سمت چپ محور موهومی برای پارامترها و درجات مختلف آن، با ارائه راه حلی جبری برای تعیین محدوده پارامترهای سیستمهای مختلف با درجات متفاوت که در ناحیه پایداری قرار دارند، انجام شده است[۹-۱۳].

در [۱۴-۱۶] برای بدست آوردن مدلی ساده برای سیستمهای فرآیندی دارای تاخیر زمان، پاسخ فرکانسی این سیستمها مورد بررسی قرار گرفته شده و رفتار کلی این سیستمها در چندین دسته تقسیم بندی شده است. در این مقاله اثبات خواهد شد که رفتار کلی این سیستمها را می توان به راحتی در مفهوم بهره برتر خلاصه کرد. این مفهوم در بررسی رفتار این سیستمها در حوزه فرکانسی به دست می آید. برای ارتباط این مفهوم به موقعیت صفرها در صفحه مختصات، ابتدا ارتباط مفهوم بهره برتر با تئوری مکان مجانبی صفرها[4] که رایجترین تئوری در تشخیص موقعیت صفرهای نوع خاصی از معادله ۲ می باشد، مشخص شده و سپس این مفهوم به معادله کلی ۲ تعمیم داده می شود و بدین ترتیب موقعیت صفرهای این معادله بر اساس مفهوم بهره برتر مشخص خواهد شد.

۲- تئوری مکان مجانبی صفرها [۲]

تابع انتقال بسیاری از سیستمهای فرآیندی پارامتر گسترده ازترکیب دو تابع انتقال که یکی از آنها دارای تاخیر زمانی است، تشکیل شده است. در [۱۷-۱۹] تابع انتقال این فرآیندها به صورت ۳ نمایش داده شده است و بر اساس این تابع انتقال، رفتار دینامیکی این سیستمها از دیدگاه تئوری مکان مجانبی صفرها و شرایط قرار گرفتن آنها در RHP یا LHP مورد بررسی قرار گرفته است.

$$G_P(s)=\frac{P_1(s)-P_2(s)\,e^{-st_d}}{Q(s)} \qquad (۳)$$

در تابع انتقال بالا $P_1(s)$ و $P_2(s)$ و $Q(s)$ چند جمله ایهایی بر حسب s می باشند که در آنها درجه $P_1(s)$ و $P_2(s)$ کوچکتر یا مساوی $Q(s)$ خواهد بود. با توجه به اینکه مدل فرآیندهای پارامتر گسترده با توابعی به شکل ۳ نمایش داده می شود به این توابع QRDS[5] نیز گفته می شود [۱۷-۱۹]. اگر صورت رابطه ۳ را بسط دهیم به رابطه ۴ دست می یابیم:

$$N(s)=(s^n+a_1s^{n-1}+.....+a_n)-K\,(s^m+b_1s^{m-1}+.....+b_m)\,e^{-st_d}=0 \qquad (۴)$$

شبه چند جمله ایهایی به شکل ۴ در کاربردهای کنترلی بیشماری بعنوان معادله مشخصه سیستمهای کنترل حلقه بسته در نظر گرفته می شوند[۳-۶]. مطالعه پایداری ۴ به اوایل دهه ۱۹۴۰ میلادی برمی گردد[۲۰-۲۲] و از آن زمان چنین شبه چند جمله ایهایی بطور وسیعی در هم ریاضیات و هم کنترل مورد بررسی قرار گرفته اند. اما هنوز علیرغم تنوع بیشمار نتایج قابل دسترس و روشهای آنالیز، دسته بندی کاملی از پایداری ۳ در حالت کلی وجود ندارد [۱۳]. تئوری مکان مجانبی صفرها نیز از این وضعیت مستثنی نیست، این مطلب در سطرهای بعد بیشتر توضیح داده می شود.

در رابطه ۴ درجه $P_1(s)$ و $P_2(s)$ به ترتیب n و m بوده و برای اینکه در همه موارد ضریب جمله $P_1(s)$ مساوی یک باشد، K به عنوان نسبت عددی $P_1(s)$ به $P_2(s)$ در نظر گرفته می شود. رابطه ۴ به دلیل وجود پارامتر تاخیر زمانی دارای زنجیره ای از بی نهایت صفر است. این زنجیره صفرها بسته به مقدار K و n و m می تواند در RHP یا LHP و یا در هر دو نیمه محورهای مختصات مختلط قرار داشته باشد و متناسب با آن رفتار دینامیکی سیستم در حوزه پاسخ فرکانسی می تواند مشخص شود.

بطور کلی چهار حالت زیر در مورد وضعیت قرار گرفتن صفرهای تابع انتقال ۳ یا ۴ در صفحه محورهای مختلط وجود دارد.

۱ - زنجیره ای از بینهایت صفرهای سمت چپ.

[1] Hermite-Biehler
[2] Hurwitz polynomials
[3] Pontryagin
[4] Assymptatic location of zeros theory

[5] Qausi Rational Distributed Parameter System

۲ – زنجیره ای از بینهایت صفرهای سمت چپ و تعداد محدودی از صفرهای سمت راست.

۳ – زنجیره ای از بینهایت صفرهای سمت راست.

۴ – زنجیره ای از بینهایت صفرهای سمت راست و تعداد محدودی از صفرهای سمت چپ.

مطابق [۲و ۲۳-۲۴] اگر $n \geq m$ و $|K| \prec 1$ باشد، در این صورت شبه چند جمله ای ۴ دارای زنجیره ای از بی نهایت صفرهای سمت چپ (LHP) می باشد. اگر شرایط $n \leq m$ و $|K| \succ 1$ برقرار باشد معادله ۴ دارای زنجیره ای از بینهایت صفرهای سمت راست می باشد. حالتهای دوم و چهارم حالتهایی ویژه هستند که در واقع بصورت تلفیقی از دو حالت دیگر می باشند و در تئوری مکان مجانبی صفرها به آن اشاره ای نشده است اما در [۱۷-۱۹] به صورت ضمنی به آن اشاره شده است که در قسمتهای بعد بهتر توضیح داده خواهند شد

۳- بررسی رفتار دینامیکی فرآیندهای پارامتر گسترده از دیدگاه پاسخ فرکانسی

در بخش قبل رفتارهای دینامیکی مختلف معادله ۳ از دیدگاه تئوری مکان مجانبی صفرها مورد بررسی قرار گرفت اما واقعیت این است که محاسبه این صفرها مشکل، غیر دقیق و تنها در محدوده خاصی از فرکانسها انجام می شود و به دلیل اهمیت آن حتی تا سالهای اخیر نیز به عنوان یک موضوع تحقیقاتی مورد توجه بوده است [۲۵-۲۶]. در این قسمت مفهوم بهره برتر در ساختار مدل های دینامیکی Irrational را مطرح نموده و نشان داده میشود که چگونه میتوان چهار حالت مذکور در فوق، در مورد وضعیت و طرز قرارگیری صفرهای توابع انتقال را با رفتارهای دینامیکی پیچیده ای که در حوزه پاسخ فرکانسی برای این سیستمها مشاهده شده است مرتبط نمود.

در مراجع [۱۴-۱۶] پاسخ فرکانسی سیستمهای پارامتر گسترده[1] با ساختار کلی تر مدل Irrational زیر:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{K_1 N_1(s)}{Q_1(s)} + \frac{K_2 N_2(s)}{Q_2(s)} e^{-s t_d} = G_1(s) + G_2'(s)\, e^{-s t_d} \qquad (۵)$$

مورد بررسی قرار گرفته و نتایج جدیدی برای تفسیر و توجیه پیچیدگیها و دوگانگی موجود در رفتار نمودارهای فاز این گونه سیستمها ارائه شده است. در این معادله $B_1(s)$، $B_2(s)$، $Q_1(s)$ و $Q_2(s)$ چند جمله ایهایی بر حسب s و به ترتیب با درجات n_1، n_2، m_1 و m_2 می باشند. همچنین K_1 و K_2 نیز بهره های جملات می باشند. برای مقایسه با حالتهای موجود در تئوری صفرهای مجانبی کافی است معادله ۵ را به صورت زیر نگاشت:

$$G(s) = \frac{K_1\, N_1(s)\; Q_2(s) + K_2\; N_2(s)\; Q_1(s)\; e^{-s t_d}}{Q_1(s)\; Q_2(s)} = \frac{K_1\, B_1(s) + K_2\, B_2(s)\, e^{-s t_d}}{Q(s)} \qquad (۶)$$

معادله بالا را می توان به صورت شکل بسط یافته زیر نگاشت:

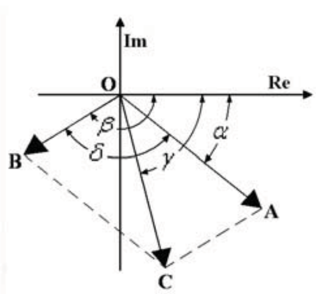
$$G(s) = \frac{K_1\,(\tau_{n1} s^{n1} + \cdots + 1) + K_2 (\tau_{n2} s^{n2} + \cdots + 1)\, e^{-s t_d}}{(\tau_Q s^Q + \cdots + 1)} = \frac{K_1\, \tau_{n1} \left[(s^{n1} + \cdots + \frac{1}{\tau_{n1}}) + \frac{K_2 \tau_{n2}}{K_1 \tau_{n1}} (s^{n2} + \cdots + \frac{1}{\tau_{n2}})\, e^{-s t_d} \right]}{\tau_Q (s^Q + \cdots + 1/\tau_Q)} \qquad (۷)$$

مقایسه بین۳ ، ۴ و ۷ نشان می دهدکه عبارت $K_2 \tau_{n2} / K_1 \tau_{n1}$ در ساختار ۷ مطابق K در ساختار ۳ و ۴ می باشد. پارامتر $K' = K_1 \tau_{n1}$ را می توان بهره کلی تابع انتقال ساختار ۷ در نظر گرفت که در ساختار ۳ و ۴ برابر یک در نظر گرفته شده است و هیچ نقشی در وضعیت قرار گرفتن و مکان صفرهای شبه چند جمله ای ندارد.

$$\left| \frac{K_2 \tau_{N_2}}{K_1 \tau_{N_1}} \right| = |K| \qquad (۸)$$

بنابراین حالا می توان مشابهتی بین تئوری مکان مجانبی صفرها ومفهوم بهره برتر که بعدا توضیح داده خواهد شد، انجام داد.

اگر در صفحه محورهای مختصات مختلط بردار $\mathbf{G(j\omega)}$ را با $\mathbf{C}$ و بردارهای $\mathbf{G_1(j\omega)}$ و $\mathbf{G_2(j\omega)}$ را به ترتیب با $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نمایش دهیم در این صورت وضعیت آنها نسبت به یکدیگر مطابق شکل ۱ خواهد بود.



شکل (۱): نمودار برداری معادله ۶

[1] Distributed parameter systems

بردار $\mathbf{B}$ به دلیل این که دارای عبارت تاخیر زمانی است با سرعت بیشتری نسبت به بردار $\mathbf{A}$ در چرخش است. لذا β همواره بزرگتر از α فرض می شود. می توان ثابت کرد که در صورتیکه در باند فرکانس بخصوصی مثل $\omega_1 \prec \omega \prec \omega_2$ اندازه برداری $\mathbf{A}$ از $\mathbf{B}$ بزرگتر یا مساوی آن باشد بردار برآیند، $\mathbf{C}$، از بردار $\mathbf{A}$ تبعیت خواهد نمود. یا برعکس اگر طول بردار $\mathbf{B}$ از طول بردار $\mathbf{A}$ بیشتر باشد بردار $\mathbf{C}$ از بردار $\mathbf{B}$ تبعیت خواهد نمود. البته، تبعیت بردار $\mathbf{C}$ از هر یک از بردارهای $\mathbf{A}$ و یا $\mathbf{B}$ هم در مورد زاویه و هم در مورد بهره صادق خواهد بود. بنابراین، اگر بردار $\mathbf{A}$ تابع انتقالی بدون تاخیر زمانی باشد بردار برآیند یعنی تابع انتقال $\mathbf{G(j\omega)}$ نیز از نظر نمودار فاز رفتار دینامیکی مشابه آن را خواهد داشت بطوریکه اثرات تاخیر زمانی واقعی از نمودار فاز آن محو خواهد شد و بالعکس اگر $\mathbf{B}$ بردار برتر باشد $\mathbf{G(j\omega)}$ رفتاری با تاخیر زمانی نشان خواهد داد. برای اثبات این مطلب کافی است که درستی رابطه (9) اثبات شود.

$$|\gamma-\alpha| \le \left|\frac{\delta}{2}\right| = \left|\frac{(\beta-\alpha)}{2}\right| \qquad (۹)$$

فرض معکوس یعنی دوران سریعتر $\mathbf{A}$ نسبت به $\mathbf{B}$ نیازی به مطرح کردن ندارد. زیرا در این حالت نیز باز مسئله مقایسه اندازه بهره ها مطرح میگردد که منجر به همان نتایج خواهد شد. در واقع این فرض قرینه فرض بالا است که در نظر گرفتن آن بدین معنی است که تاخیر زمان در جزء دیگر مدل قرار داده شده است. یعنی بردار $\mathbf{A}$ به علت وجود تاخیر زمان سریعتر از $\mathbf{B}$ دوران می کند. در این صورت باز هم مواجه با این مسئله هستیم که اندازه کدام بردار بیشتر است. اکنون برای اثبات فرض می کنیم $|\mathbf{A}| \ge |\mathbf{B}|$ باشد و $\mathbf{B}$ سریعتر دوران نماید.

در رابطه (۹) در نظر گرفتن قدر مطلق زوایا بدین معنی است که میخواهیم بزرگی و کوچکی زاویه ها را نسبت به هم بسنجیم و لذا جهت دوران بردارها اهمیتی ندارد. یعنی حتی اگر دو بردار خلاف جهت یکدیگر دوران نمایند، مثلا یکی در جهت عقربه های ساعت و دیگری در جهت خلاف عقربه های ساعت، باز هم اثبات ارائه شده اعتبار دارد.

اثبات: رابطه (۹) به مفهوم آن است که بردار برآیند از نظر زاویه همواره در حول و حوش بردار $\mathbf{A}$ حرکت می کند لذا در حوزه فرکانسی، یعنی نمودار نایکیست آن تابع رفتار نایکیست بردار $\mathbf{A}$ می باشد. چون بنا به فرض همواره $|\beta| > |\alpha|$ می باشد می توان از رابطه (9) به رابطه (10) رسید.

$$tg(\gamma-\alpha) \le tg\frac{\beta-\alpha}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{tg(\gamma)-tg(\alpha)}{1+tg(\gamma)tg(\alpha)} \le tg\frac{\beta-\alpha}{2} \qquad (۱۰)$$

با جایگذاری: $tg(\gamma) = \dfrac{|\mathbf{A}|\sin\alpha + |\mathbf{B}|\sin\beta}{|\mathbf{A}|\cos\alpha + |\mathbf{B}|\cos\beta}$ در رابطه ۱۰ می توان به ۱۱ رسید.

$$\frac{|\mathbf{B}|(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta)}{|\mathbf{A}|(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+|\mathbf{B}|(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)} \le tg\frac{\beta-\alpha}{2} \qquad (۱۱)$$

که معادل است با:

$$\frac{|\mathbf{B}|\sin(\beta-\alpha)}{|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|\cos(\beta-\alpha)} \le \frac{\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}{\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})} \qquad (۱۲)$$

$$\Rightarrow \frac{2|\mathbf{B}|\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|\cos(\beta-\alpha)} \le \frac{\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}{\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

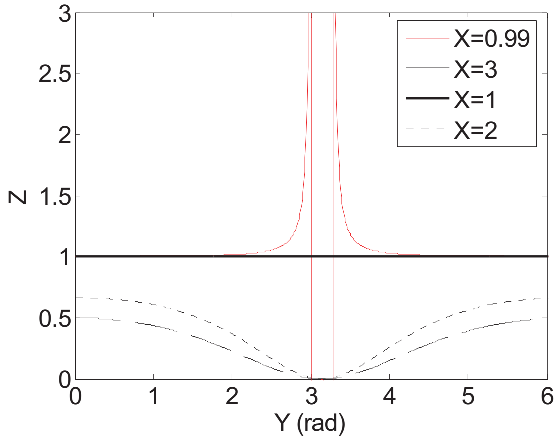
$$\Rightarrow \frac{2|\mathbf{B}|\cos^2(\frac{\beta-\alpha}{2})}{|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|\cos(\beta-\alpha)} \le 1$$

و پس از مرتب سازی روابط بالا، رابطه (۱۳) حاصل میگردد..

$$\frac{1+\cos(\beta-\alpha)}{|\mathbf{A}|/|\mathbf{B}|+\cos(\beta-\alpha)} \le 1 \qquad (۱۳)$$

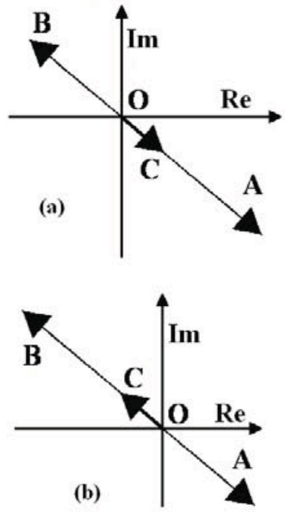
نامساوی (۱۳) همواره برقرار است چرا که فرض اولیه مبتنی بر $|\mathbf{A}| \ge |\mathbf{B}|$ بوده است.

همانطور که در شکل ۲ مشخص است، هر چه مقدار X (نسبت بردار $\mathbf{A}$ به $\mathbf{B}$) بیشتر می شود، مقدار Z که نشان دهنده تانژانت زاویه بین بردار برآیند و بردار $\mathbf{A}$ است، از یک (تانژانت زاویه ۴۵ درجه) فاصله گرفته و کمتر می شود و این نشان دهنده این است که به بردار $\mathbf{A}$ نزدیکتر می شود اما به محض اینکه مقدار X کمتر از ۱ یعنی ۰/۹۹ می شود، که نشان دهنده برتر بودن بردار $\mathbf{B}$ است، این مقدار به سمت بی نهایت می رود و این به معنای آن است که بردار برآیند از $\mathbf{A}$ فاصله گرفته و تابع $\mathbf{B}$ می شود.



شکل (۲): تغییرات $Z=\left[1+\cos(\beta-\alpha)\right]/\left[|\mathbf{A}|/|\mathbf{B}|+\cos(\beta-\alpha)\right]$ در مقابل $Y=(\beta-\alpha)$ به ازای مقادیر مختلف $X=|\mathbf{A}|/|\mathbf{B}|$

تا این جا تابعیت بردار برآیند از بردار برتر در رفتار فازی، اثبات شد. اما تابعیت بردار برآیند از بردار برتر در رفتار نمودار بهره نیز می بایست اثبات شود. این اثبات بسیار ساده تر از اثبات اول می باشد. در شکل ۳ برای مقایسه یک فرکانس خاص انتخاب شده است به نحویکه دو بردار مدل در دو جهت مخالف یکدیگر قرار گرفته اند در شکل ۳-(a) طول بردار $\mathbf{A}$ بزرگتر می باشد و در ۳-(b) طول بردار $\mathbf{B}$ بزرگتر است.



شکل (۳): نمایش جهت بردار برآیند و تابعیت آن از برداری که دارای اندازه برتر می باشد.

در این اشکال به وضوح دیده می شود که بردار برآیند که در اصل همان مدل فرآیند می باشد به سمت بردار با اندازه برتر جهت می گیرد. بنابراین در هر محدوده فرکانسی هر بردار که بهره برتر داشته باشد بردار برآیند بطرف آن بردار جهت گرفته و از رفتار آن تبعیت می کند و بنابراین اثبات کامل می شود. به منظور استنباط بهتر مفهوم بهره برتر شکلهای ارائه شده در ۳ را می توان در فرکانسهایی کمی بیشتر و کمی کمتر از فرکانسی که دو بردار روبروی یکدیگر قرار می گیرند نیز در نظر گرفت. با چنین تصوری مسئله دنبال روی بردار منتجه از بردار با بهره برتر بخوبی قابل درک خواهد بود.

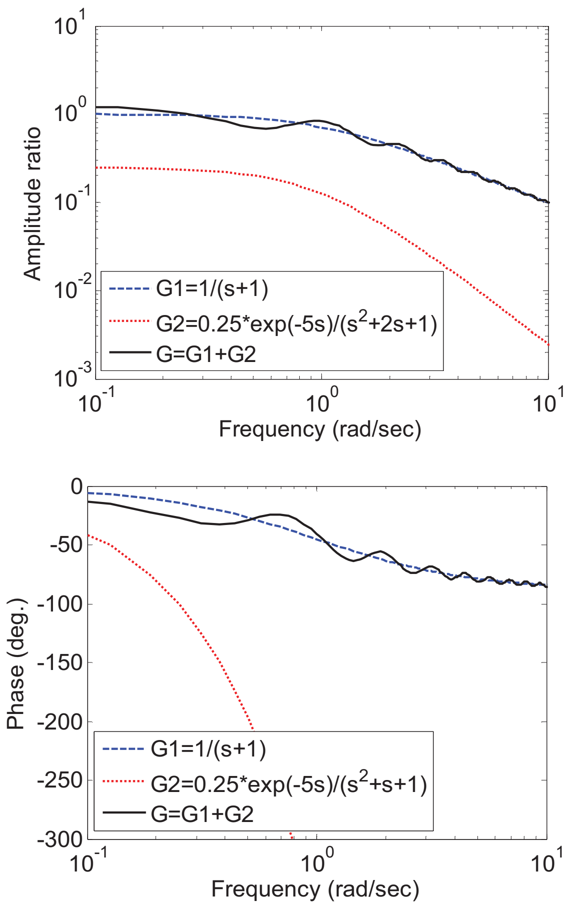
بدین ترتیب، با استفاده از مفهوم بهره برتر به راحتی می توان رفتار دینامیکی سیستمهای پارامتر گسترده را در حوزه پاسخ فرکانسی پیش بینی کرد. این رفتار دینامیکی را می توان در دو گروه اصلی که در پایین شرح داده شده است خلاصه کرد:

گروه اول: $\left|\mathbf{G_1(j\omega)}\right| \geq \left|\mathbf{G_2(j\omega)}\right|$

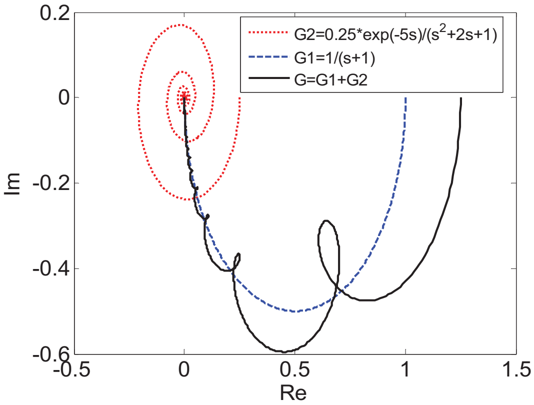
اگر در همه فرکانسها رابطه زیر برقرار باشد:

$$\left|\mathbf{G_1(j\omega)}\right| \geq \left|\mathbf{G_2(j\omega)}\right| \;,\quad \forall\omega$$

در اینصورت همانطور که قبلا نیز ثابت شد در تمام فرکانسها بردار برآیند تابع رفتار دینامیکی $\mathbf{G_1(j\omega)}$ می باشد. نمودارهای بد و نایکیست برای مثالی از این حالت در شکلهای ۴ و ۵ نشان داده شده است.

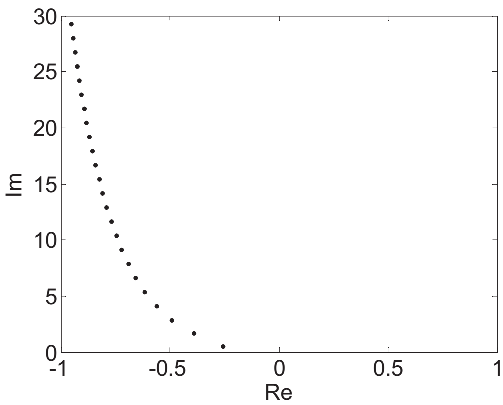


شکل (۴): نمودار بد در موردی که $\mathbf{G_1(j\omega)}$ غالب است.



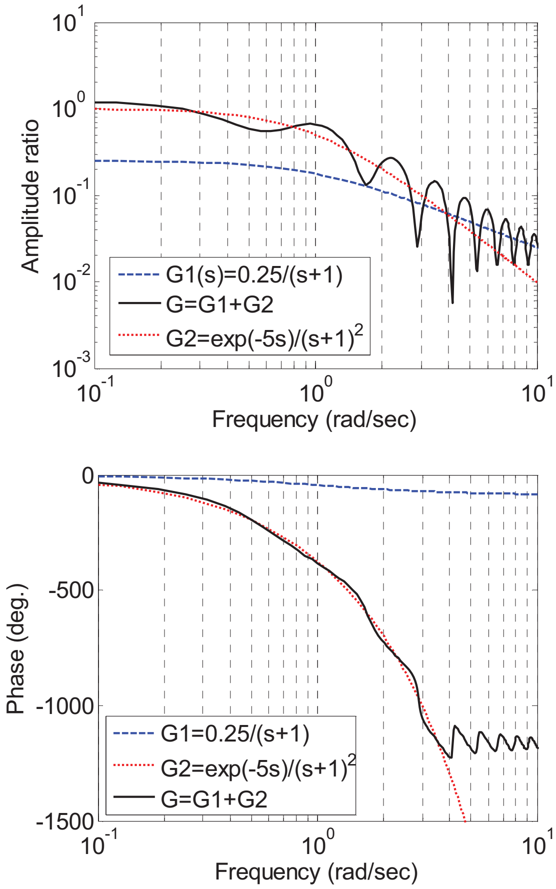
شکل (۵): نمودار بد در موردی که $\mathbf{G_1(j\omega)}$ غالب است

از شکلهای بالا نیز مشخص است که نمودارهای نسبت دامنه، فاز و نایکیست، برای بردار برآیند حول بردار غالب که $\mathbf{G_1(j\omega)}$ است نوسان می کند. حال اگر $G_1(s)$ یک تابع انتقال بدون تاخیر زمانی باشد، $G(s)$ هم رفتار دینامیکی بدون تاخیر زمانی را خواهد داشت. این حالت از رفتار مدل، رفتار بدون تاخیر زمانی -Non-Delay" QRDS (ND-QRDS) Behavior" نامگذاری می شود. در تئوری مکان مجانبی صفرها این حالت دقیقا در تطابق با حالتی است که $[n \geq m\ ,\ |K| \prec 1]\, or\, [n \succ m\ ,\ |K| = 1]$ و تابع انتقال مدل QRDS دارای زنجیره ای از بینهایت صفرهای سمت چپ می باشد. در شکل ۶ صفرهای مربوط به تابع $G(s)$ در مثال بالا ترسیم شده است. همانطور که دیده می شود این حالت در تطابق کامل با نتیجه بالا است.



شکل (۶): موقعیت صفرها در موردی که $\mathbf{G_1(j\omega)}$ غالب است

در حالت خاصی، ممکن است در فرکانسهای پایین، بردار $\mathbf{G_1(j\omega)}$ از بردار $\mathbf{G_2(j\omega)}$ بزرگتر نباشد. یعنی در فرکانس بخصوصی نمودارهای بهره $\mathbf{G_1(j\omega)}$ و $\mathbf{G_2(j\omega)}$ متقاطع باشند. در این صورت بردار برآیند در فرکانسهای پایین از $\mathbf{G_2(j\omega)}$ تبعیت کرده و پس از غالب شدن $\mathbf{G_1(j\omega)}$ در فرکانسهای بالاتر از رفتار دینامیکی آن تبعیت خواهد کرد. مثالی برای این حالت در شکل ۷ نمایش داده شده است:

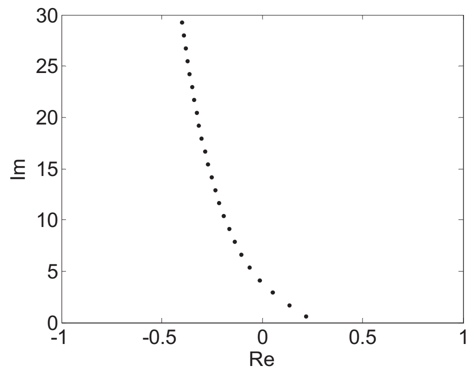


شکل (۷): نمودار بد هنگامیکه در فرکانسهای پایین $\mathbf{G_2(j\omega)}$ و در فرکانسهای بالا $\mathbf{G_1(j\omega)}$ غالب است.

همانطور که از شکل ۷ مشخص است نمودار پاسخ فرکانسی مدل در ابتدا به دلیل غالب بودن $\mathbf{G_2(j\omega)}$ از آن تبعیت کرده است، اما پس از تقاطع بهره ها در فرکانس rad/sec ۴ از $\mathbf{G_1(j\omega)}$ تبعیت کرده است. البته در نمودار فاز، به مقدار تاخیری که در تبعیت از $\mathbf{G_1(j\omega)}$ داشته است از نمودار فاز آن فاصله گرفته پیدا کرده است.

در این حالت تعداد محدودی از صفرهای فرکانس پایین، در سمت راست قرار می گیرند. این رفتار در عین حال که به مقدار محدودی میانگین حدی نمودار فاز را در فرکانسهای بالا کاهش می دهد اما هیچگونه شباهتی به رفتار سیستمهای دارای تاخیر زمانی ندارد. این

حالت، رفتار شبه تاخیر زمانی "Quasi-Delay-QRDS (QD-QRDS) Behavior" نامگذاری می شود. در شکل ۸ صفرهای $G(s)$ مثال ذکر شده نشان داده شده اند. همانطور که دراین شکل دیده می شود علیرغم اینکه در نتیجه تقاطع در فرکانس ۴ rad/sec نهایتا منحنی فاز $G(s)$ رفتار مینیمم فاز گرفته است اما به واسطه ظاهر شدن تعدادی صفر سمت راست، در مقایسه با زمانیکه تقاطعی بین بهره ها وجود نداشته باشد، حد میانگین بهره نمودار فاز مدل از حد نمودار فاز $G_1(s)$ تجاوز نموده است.



شکل (۸): موقعیت صفرها هنگامیکه در فرکانسهای پایین $G_2(j\omega)$ و در فرکانسهای بالا $G_1(j\omega)$ غالب است.

لازم به ذکر است اگر شرط $|G_1(j\omega)| \prec |G_2(j\omega)|$ تنها در فرکانسهای خیلی پایین برقرار گردد یا به عبارتی دیگر نقطه تقاطع بهره ها در فرکانس خیلی پایینی اتفاق بیافتد در این صورت هیچگونه صفر سمت راستی ظاهر نخواهد شد و رفتار مدل همچنان از نوع ND-QRDS محسوب می شود.

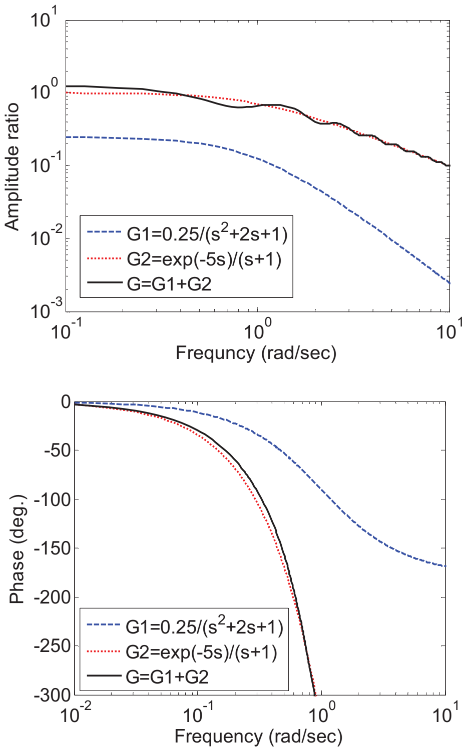
گروه دوم: $|G_1(j\omega)| \prec |G_2(j\omega)|$

به طریق مشابه می توان ثابت کرد که در صورتیکه:

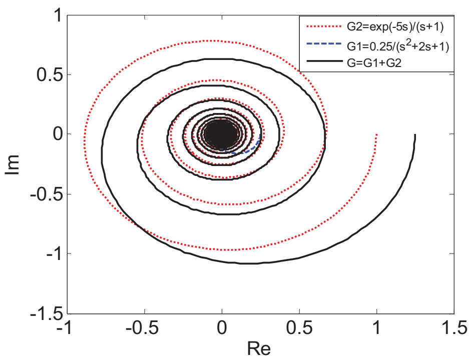
$$|G_1(j\omega)| \prec |G_2(j\omega)| , \quad \forall \omega$$

صادق باشد، در تمام فرکانسها رفتار دینامیکی بردار برآیند از بردار $G_2(j\omega)$ تبعیت خواهد کرد. در این حالت، با توجه به اینکه بردار $G_2(j\omega)$ دارای عبارت تاخیر زمانی می باشد و دارای رفتار دینامیکی غیر مینیمم فاز است مدل فرآیند نیز اجبارا دارای چنین رفتاری خواهد بود. این موارد در اشکال ۹ و ۱۰ نمایش داده شده است.

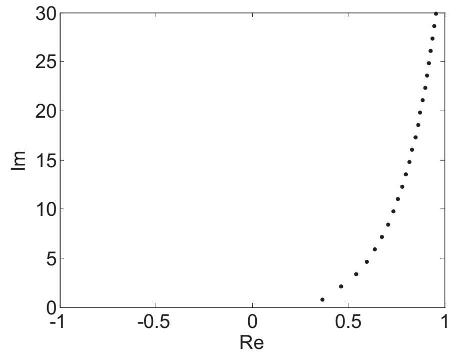
از دیدگاه تئوری صفرهای مجانبی این حالت مطابق است با $[n \le m \, , \, |K| \succ 1] or [n \prec m \, , \, |K| = 1]$. در این حالت QRDS یک زنجیر نامحدود از صفرهای سمت راست خواهد داشت. در این حالت نیز رفتار دینامیکی مدل در زمره رفتارهای غیر مینیمم فاز خواهد شد و ما آنرا رفتار رزنانسی- تاخیر زمانی "Delay-QRDS (D-QRDS) Behavior" نام گذاری می نماییم. در شکل ۱۱ موقعیت صفرهای $G(s)$ در این مثال نمایش داده شده است.



شکل (۹): نمودار بد هنگامیکه در همه فرکانسها $G_2(j\omega)$ غالب باشد

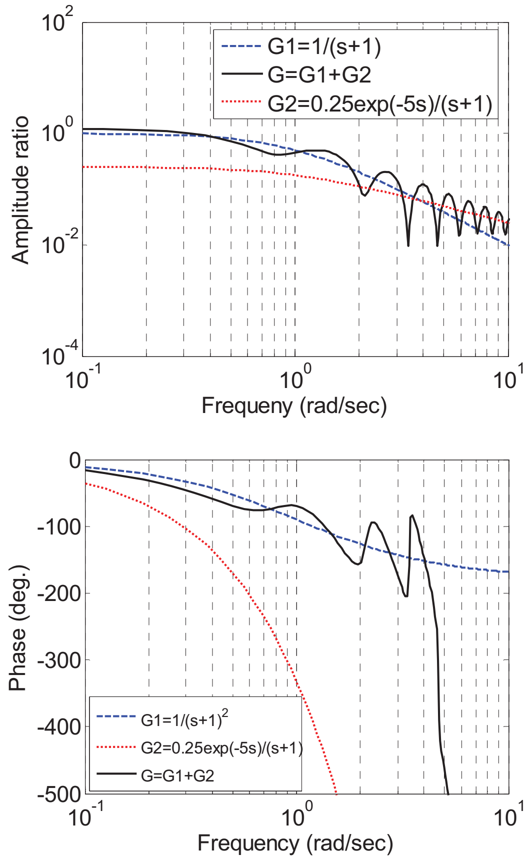


شکل (۱۰): نمودار نایکیست هنگامیکه در همه فرکانسها $G_2(j\omega)$ غالب باشد.



شکل (۱۱): موقعیت صفرها هنگامیکه در همه فرکانسها $G_2(j\omega)$ غالب باشد.

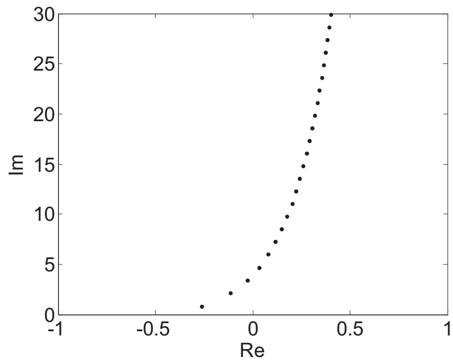
در این حالت نیز اگر در تمام فرکانسها بردار $G_2(j\omega)$ بردار غالب نباشد و تقاطعی بین بهره ها اتفاق بیافتد، در این صورت تا فرکانسی که بردار $G_1(j\omega)$ غالب است بردار برآیند رفتار دینامیکی بدون تاخیر زمانی خواهد داشت اما به محض غلبه $G_2(j\omega)$ بردار برآیند تابع رفتار دینامیکی $G_2(j\omega)$ خواهد شد. مثال نمونه برای این حالت در شکل ۱۲ نشان داده شده است.



شکل (۱۲): نمودار بد هنگامیکه در فرکانسهای پایین $G_1(j\omega)$ و در فرکانسهای بالا $G_2(j\omega)$ غالب است.

در شکل ۱۲ بخوبی دیده می شود که تبعیت نمودار فاز مدل از نمودار فاز $G_2(j\omega)$، پس از واقع شدن تقاطع بهره ها، در فرکانس ۴ rad/sec همراه با مقداری تقدم فاز نسبت به فاز $G_2(j\omega)$ خواهد بود.

این حالت مطابق با زنجیره ای از بی نهایت صفرهای سمت راست به همراه تعداد محدودی صفرهای سمت چپ می باشد. در شکل ۱۳ موقعیت صفرها برای $G(s)$ در این مثال نمایش داده شده است.



شکل (۱۳): موقعیت صفرها هنگامیکه در فرکانسهای پایین $G_1(j\omega)$ و در فرکانسهای بالا $G_2(j\omega)$ غالب است.

در شکلهای فوق به وضوح می توان تطابق تئوری مکان مجانبی صفرها و مفهوم بهره برتر را مشاهده کرد. در اینجا رفتار دینامیکی این حالت را رفتار "Retarded-Delay-QRDS (RD-QRDS) Behavior" می نامیم. علت انتخاب این نامگذاری این است که مدل، رفتاری کاملا تاخیر زمانی نشان می دهد ولی مقداری از اثرات تاخیر زمانی در اثر تبعیت از بردار $G_1(j\omega)$ در فرکانسهای پایین محو شده است بنابراین اثرات تاخیر زمانی کمی با تعلل بروز کرده است درست برعکس رفتار "QD-QRDS behavior" که در آن رفتار تاخیر زمانی در فرکانس پایین اتفاق افتاده است اما این رفتار در فرکانس تقاطع بهره ها متوقف شده است.

به غیر از حالتهایی که در بالا شرح داده شد، حالتهای دیگری نیز ممکن است اتفاق بیافتد. این حالتها در فرکانسهای میانی اتفاق می افتند به عنوان مثال ممکن است در فرکانسهای پایین تابع مینیمم فاز غالب باشد و در فرکانسهای میانی این وضعیت برعکس شده و در فرکانسهای بالا دوباره تابع مینیمم فاز غالب شود همچنین وضعیت به صورت عکس این موضوع نیز می تواند باشد یعنی ابتدا تابع غیر مینیمم فاز غالب باشد سپس در فرکانسهای میانی تابع مینیمم فاز غالب شود و در فرکانسهای بالاتر تابع غیر مینیم فاز غالب شود در هر صورت در تمامی این وضعیتها

مفهوم بهره برتر همواره صادق خواهد بود در حالیکه چون تئوری مکان مجانبی صفرها در مورد مکان صفرها در فرکانسهای پایین و بالا بحث می کند بنابراین در این موارد ممکن است نتواند پیش بینی درست را انجام دهد.

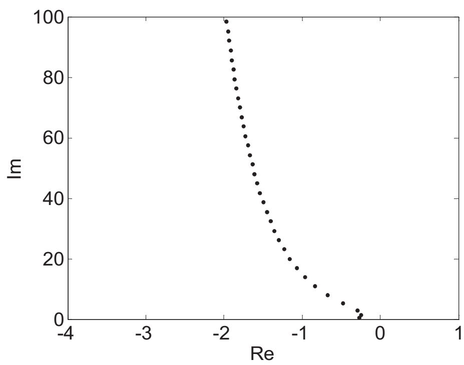
٤- مواردیکه تئوری مکان مجانبی صفرها قادر به پیش بینی رفتارمدل در حوزه فرکانسی نمی باشد

همانطور که قبلا نیز ذکر شد با توجه به اینکه تئوری مکان مجانبی صفرها در مورد مکان صفرها در فرکانسهای پایین و بالا بحث می کند بنابراین اگر تغییری در فرکانسهای میانی اتفاق افتد ممکن است رفتار مدل را اشتباه پیش بینی کند. در ذیل دو مثال از این موارد مطرح خواهد شد. هرچند برای مقایسه بین دو تئوری بهتر است ابتدا روابط بین پارامترها در مفهوم بهره برتر و تئوری مکان مجانبی صفرها را به دست آوریم. این روابط در معادلات ۸، ۱۴ و ۱۵ آورده شده اند.

$$n\,(in\ \ quasi-polynomial) = N_1 - Q \qquad (۱۴)$$

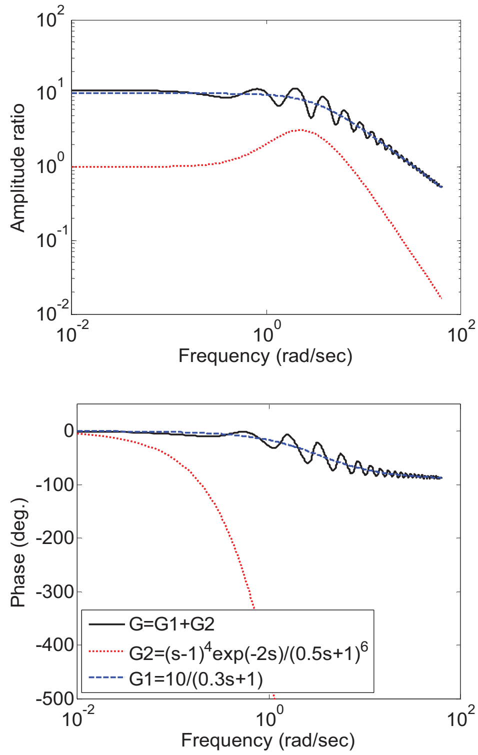
$$m\,(in\ \ quasi-polynomial) = N_2 - Q(in\,QRDS) \qquad (۱۵)$$

حال تابع $G_a(s)=[10/(0.3s+1)]+[(s-1)^4 e^{-2s}/(0.5s+1)^6]$ را در نظر بگیرید در این صورت $N(s)\ =10(0.5s+1)^6+(1)(0.3s+1)(s-1)^4 e^{-2s}$ بنابراین $n = 6 > m = 5$ و $K=\left|K_2\tau_{n_2}/K_1\tau_{n_1}\right| \ =\left|(1)(0.3)(1)^4/[10(0.5)^6]\right|=1.92>1$ و می توان نتیجه گرفت که رفتار کلی تابع در حوزه فرکانسی، QD-QRDS باید باشد که در این صورت تعداد محدودی صفر می بایست در سمت راست موجود باشند. اما اگر صفرهای تابع $G_a(s)$ ترسیم شود (شکل۱۴) هیچ صفری در طرف راست مشاهده نخواهد شد.



شکل (۱۴): مکان صفرها در تابع $G_a(s)$

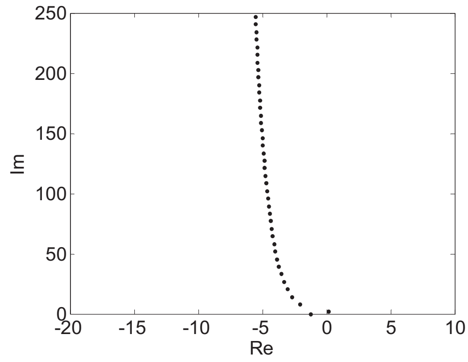
اگر نمودار بد این تابع ترسیم شود مشاهده می شود که در فرکانسهای میانی یک پیک اتفاق افتاده است که تئوری مکان مجانبی صفرها نمی تواند آن را پیش بینی کند و به همین دلیل رفتار تابع را اشتباه پیش بینی می کند در حالیکه مفهوم بهره برتر، رفتار $G_a(s)$ را ND-QRDS تشخیص داده که به معنای نبود صفر سمت راست است و درستی آن با مشاهده شکل ۱۴ به وضوح مشخص است.



شکل (۱۵): نمودار بد تابع $G_a(s)$

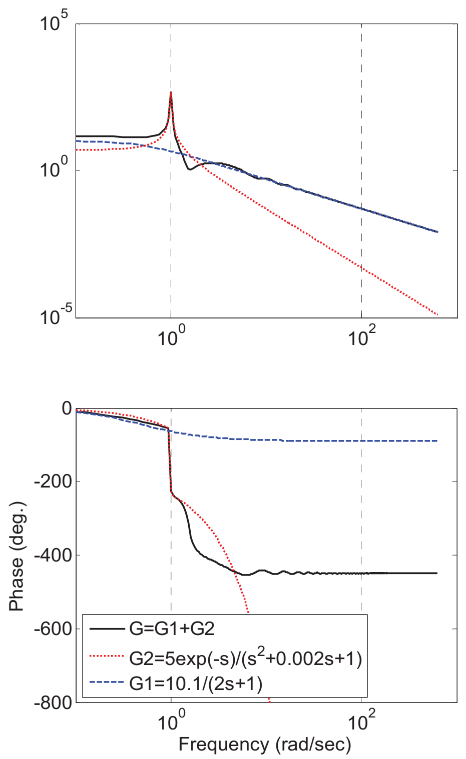
حال مثال دیگری مطرح می شود. در تابع $G_b(s)=[10.1/(2s+1)]+[5e^{-s}/(s^2+0.002s+1)]$ صورت تابع $N(s)=(10.1)(s^2+0.002s+1)+(5)(2s+1)e^{-s}$ می باشد بنابراین

$n=2>m=1$ و $K=\left|K_2\tau_{n_2}/K_1\tau_{n_1}\right|=\left|(5)(2)/[(10.1)(1)\right|=0.99<1$ در نتیجه پیش بینی می شود که تابع $G_b(s)$ هیچ صفری در طرف راست نداشته باشد یعنی رفتار تابع ND-QRDS تشخیص داده می شود اما با ترسیم صفرهای تابع (شکل ۱۶) یک صفر در سمت راست مشاهده می شود.



شکل (۱۶): مکان صفرها در تابع $G_b(s)$

این اشتباه در تشخیص، به این دلیل است که در فرکانسهای میانی رفتار توابع $G_1(s)$ و $G_2(s)$ تغییر کرده است. نمودار بد مربوط به تابع $G_b(s)$ در شکل ۱۷ نمایش داده شده است همانطور که در این شکل مشاهده می شود قبل از فرکانس ۱ رادیان بر ثانیه، تابع $G_2(s)$ بر تابع $G_1(s)$ غالب شده و بدین ترتیب رفتار $G_b(s)$ غیر مینیمم فاز می شود که نشان دهنده ظهور صفر سمت راست بوده و مطابق مفهوم بهره برتر رفتار تابع $G_b(s)$، QD-QRDS پیش بینی می شود.



شکل (۱۷): نمودار بد تابع $G_b(s)$

۵- تطابق حالتها بین تئوری مکان مجانبی صفرها و مفهوم بهره برتر

با مطالبی که در قسمتهای قبل مطرح شد می توان به این نتیجه رسید که با استفاده از مفهوم بهره برتر می توان رفتار دینامیکی فرآیندهای پارامتر گسترده، که تابع انتقال آنها بصورت حاصل جمع دو تابع انتقال، که یکی از آنها حاوی پارامتر تاخیر زمانی می باشد، را به چهار حالت متمایز دسته بندی نمود. این چهار حالت در تطابق با تئوری مکان مجانبی صفرها بوده و انواع حالتهای قرار گرفتن زنجیره صفرهای تابع انتقال مدل فرآیند در دو طرف محور موهومی در صفحه محورهای مختصات مختلط را به وضعیتهای مختلف ظاهر شدن نمودار فاز مدل مرتبط می نماید. بطور کلی مباحث مطرح شده تا اینجا، بصورت زیر قابل جمع بندی است.

در مدلهای QRDS در هر بازه فرکانسی، $\omega_1 \prec \omega \prec \omega_2$، رفتار دینامیکی فرآیند که بصورت بردار برآیند حاصل از جمع برداری دو بردار تشکیل دهنده مدل سیستم می باشد همواره تحت تاثیر رفتار دینامیکی برداری است که دارای اندازه بزرگتر می باشد و ما این مفهوم را مفهوم بهره برتر می نامیم.

حالتهای چهارگانه رفتار مدلهای QRDS از روی موقعیت زنجیره صفرها و رفتار پاسخ فرکانسی مترادف آنها مطابق با نامگذاریهای انجام شده در این مقاله در جدول زیر جمع بندی شده است.

جدول ۱- حالتهای چهار گانه رفتار QRDS

نام حالت	شرایط بهره	مکان صفرها	شرایط شبه چندجمله ای
ND-QRDS	$\lvert G_1(j\omega)\rvert \geq \lvert G_2(j\omega)\rvert ,\ \forall\omega$	i-LHP	$n \geq m,\ \lvert K\rvert < 1$ or $n = m,\ \lvert K\rvert = 1$
QD-QRDS	$\lvert G_1(j\omega)\rvert < \lvert G_2(j\omega)\rvert ,\ 0 > \omega > \omega_{gc}$ and $\lvert G_1(j\omega)\rvert > \lvert G_2(j\omega)\rvert ,\ \omega_{gc} > \omega > \infty$	i -LHP + f-RHP	$n > m,\ \lvert K\rvert > 1$
D-QRDS	$\lvert G_1(j\omega)\rvert < \lvert G_2(j\omega)\rvert ,\ \forall\omega$	i-RHP	$n \leq m,\ \lvert K\rvert > 1$ or $n < m,\ \lvert K\rvert = 1$
RD-QRDS	$\lvert G_1(j\omega)\rvert > \lvert G_2(j\omega)\rvert ,\ 0 < \omega < \omega_{gc}$ and $\lvert G_1(j\omega)\rvert < \lvert G_2(j\omega)\rvert ,\ \omega_{gc} > \omega > \infty$	i-RHP + f-LHP	$n < m,\ \lvert K\rvert < 1$

در جدول بالا ω_{gc} فرکانس نقطه برخورد بهره ها بوده و داریم:

i-LHP: Infinite number of LHP zeros

i-LHP + f-RHP : Infinite number of LHP plus finite number of RHP zeros.

i-RHP: Infinite number of RHP zeros.

i-RHP + f-LHP :Infinite number of RHP plus finite number of LHP zeros

هرچند همانطور که قبلا نیز توضیح داده شد ممکن است در فرکانسهای میانی نیز رفتار تابع تغییر کند که تئوری مکان مجانبی صفرها به دلیل اینکه روی مجانب صفرها در فرکانسهای پایین و بالا بحث می کند قادر به پیش گویی صحیح رفتار مدل در این حالتها نمی باشد در حالیکه چون مفهوم بهره برتر در تمامی فرکانسها برقرار است لذا قادر به پیشگویی رفتار مدل در این وضعیتها نیز بوده و در نتیجه کاملتر از تئوری مکان مجانبی صفرها می باشد.

٦- بسط نتایج معادلات دوجمله ای با تاخیر زمان ثابت به معادلات چند جمله ای با تاخیر زمانهای متغیر

با توجه به اینکه مفهوم بهره برتر در محیط برداری اثبات شده است بنابراین قابل بسط به جملات بیشتر نیز می باشد. بنابراین می توان معادله ۶ را بسط داده و به ۱۶ رسید.

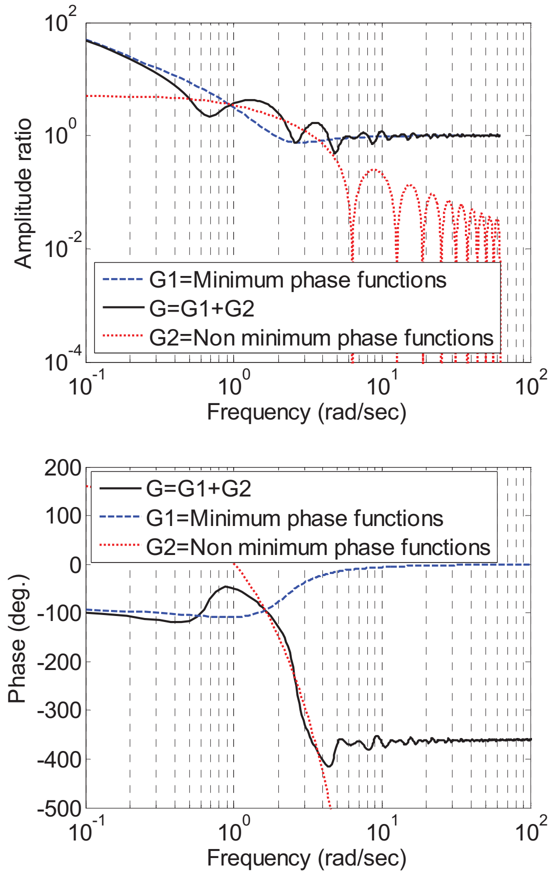
$$G(s)=\sum_{n=1}^{k}G_n(s)+\sum_{m=1}^{l}G_m(s)e^{-\tau_m s}=G_1(s)+G_2(s) \quad (۱۶)$$

در این معادله، $G_1(s)$ نماینده کلیه توابعی است که فاقد عبارت تاخیر زمان بوده و $G_2(s)$ نماینده تمامی عباراتی است که دارای تاخیر زمان می باشند این تاخیر زمانها می تواند با یکدیگر مساوی نباشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت این معادله همان معادله ۲ می باشد. همانطور که قبلا ذکر شد تاکنون در مورد تعیین مکان صفرها و مسائل پایداری مربوط به معادلاتی مانند معادله ۴ که تنها دو عبارت به همراه یک تاخیر زمان ثابت وجود دارند مقالات زیادی نگاشته شده و در شرایط مختلف، مکان صفرها و پایداری این توابع مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان مثال تئوری مکان مجانب صفرها یکی از همین تحقیقات می باشد که در مراجع مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. اما به دلیل پیچیدگی معادلاتی که شامل چندین پارامتر تاخیر زمان می باشند تاکنون راه حل ریاضی ساده و جامعی برای معادلات کلی به صورت ۱۶ که در برگیرنده کلیه توابع به همراه تاخیر زمانهای متغیر است ارائه نشده است. با توجه به اینکه در اثبات نتایج مربوط به معادله ۶ از نمایش برداری توابع استفاده شده است و در معادله ۱۶ ، $G_1(s)$ نماینده کلیه توابعی است که فاقد عبارت تاخیر زمان می باشند و $G_2(s)$ نماینده تمامی عباراتی است که دارای تاخیر زمان می باشند بنابراین به راحتی می توان نتیجه گرفت، نتایجی که برای معادلاتی نظیر معادله ۶ بدست آمده است قابل تسری به معادلاتی نظیر معادله ۱۶ نیز می باشد. بدین ترتیب با توجه به مفهوم بهره برتر می توان نتیجه گرفت که اگر در معادله ۱۶ که همان ۲ می باشد بهره توابع بدون تاخیر زمان در محدوده فرکانسی خاصی برتر از بهره توابع دارای تاخیر زمان باشد رفتار کلی تابع مجموع، پیرو آن خواهد شد و اگر بهره مجموع توابع دارای تاخیر زمان در یک محدوده فرکانسی از بهره توابع بدون تاخیر زمان بیشتر باشد رفتار تابع مجموع پیرو توابع دارای تاخیر زمان شده و غیر مینیمم فاز خواهد شد و بدین ترتیب به راحتی می توان مکان صفرهای تابع را در هر محدوده فرکانسی تشخیص داد. برای روشن شدن بهتر مطلب مثالی در ذیل آورده شده است.

مثال: فرض کنید فرآیند ی با مدل واقعی $G_p(s)=5e^{-3s}/(s+1)$ و مدل اسمی $G_{pn}(s)=5e^{-2s}/(s+1)$ در سیستم کنترلی با استفاده از روش اسمیت کنترل شود. در این صورت اگر از روش ذکر شده در [۲۷] پارامترها ی کنترل کننده تنظیم شوند کنترل کننده $G_c(s)=0.2+1/s$ به دست می آید. بدین ترتیب معادله مشخصه سیستم کنترل به صورت معادله ۱۷ خواهد شد.

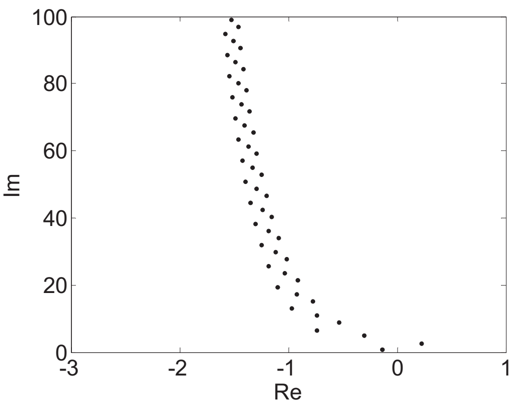
$$\begin{aligned}&1+G_{p0}(s)G_c(s)-G_{pn}(s)G_c(s)+G_p(s)G_c(s)\\&=1+[\frac{5}{s+1}-\frac{5e^{-2s}}{s+1}+\frac{5e^{-3s}}{s+1}][0.2+\frac{1}{s}]\end{aligned} \quad (۱۷)$$

همانطور که دیده می شود معادله ۱۷ یک شبه چند جمله ای از نوع معادله ۲ یا ۱۶ می باشد که به دلیل داشتن دو تاخیر زمان متفاوت، تعیین شرایط پایداری آن توسط تئورهای مرسوم مانند تئوری مکان مجانبی صفرها قابل انجام نیست. اما به راحتی با استفاده از مفهوم بهره برتر می توان این کار را انجام داد. در شکل ۱۸ نمودار بد مربوط به معادله ۱۷ ترسیم شده است.



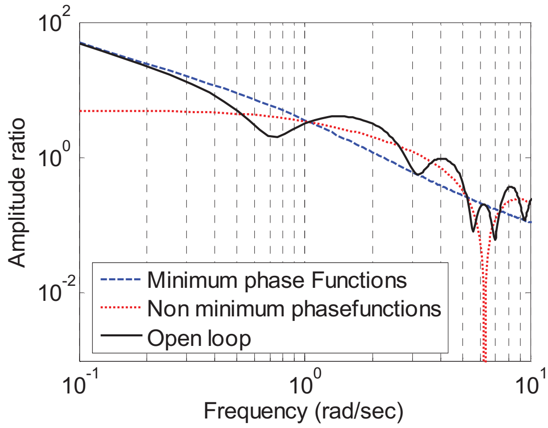
شکل (۱۸): نمودار بد مربوط به معادله ۱۷

همانطور که در این شکل دیده می شود نمودار کلی G(s) ابتدا به دلیل غالب بودن توابع دارای رفتار مینیمم فاز پیرو این توابع شده و رفتاری مینیمم فاز پیدا می کند بنابراین به دلیل نوسان منحنی فاز کلی، حول فاز توابع دارای رفتار مینیمم فاز، یک صفر سمت چپ ایجاد شده است. این وضعیت تا فرکانس ۰/۹ rad/sec ادامه پیدا میکند در این فرکانس وضعیت برعکس شده و بهره توابع با رفتار غیر مینیمم فاز برتر می شود بنابراین نمودار کلی G(s) رفتار غیر مینیمم فاز پیدا می کند و بنابراین به دلیل نوسان منحنی فاز کلی حول فاز توابع دارای رفتار غیر مینیمم فاز، یک صفر سمت راست ایجاد شده است. این وضعیت تا فرکانس ۴ rad/sec ادامه پیدا میکند و در این فرکانس، دوباره بهره توابع دارای رفتار مینیمم فاز بر توابع دارای رفتار غیر مینیمم فازغالب شده و نمودار کلی G(s) رفتارمینیمم فازپیدا می کند بنابراین زنجیره ای از صفرهای سمت چپ ایجاد می شود. در شکل ۱۹ صفرهای معادله مشخصه ترسیم شده اند همانطورکه در این شکل دیده می شود معادله مشخصه شامل یک صفر سمت راست برابر ۰/۲۲۲۳+۲/۶۰۵۹ i می شود که به معنای ناپایداری سیستم کنترل است. این صفر سمت راست در اصل در اثر نوسان منحنی کلی فاز، حول فاز تابع دارای رفتار غیر مینیمم فاز ایجاد شده است.

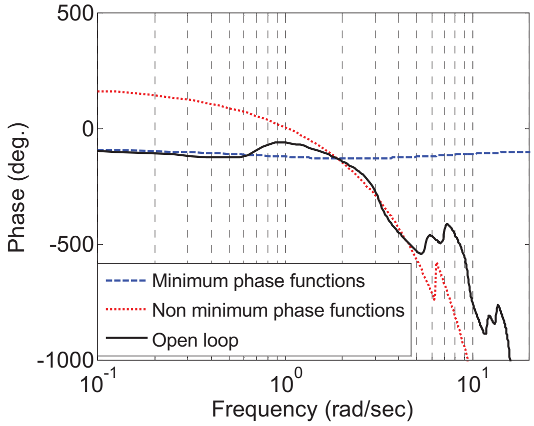


شکل (۱۹): موقعیت صفرهای معادله مشخصه سیستم کنترل در مثال مطرح شده برای واضح شدن مطلب، منحنی فاز تابع حلقه باز همین سیستم کنترل ترسیم شده است.

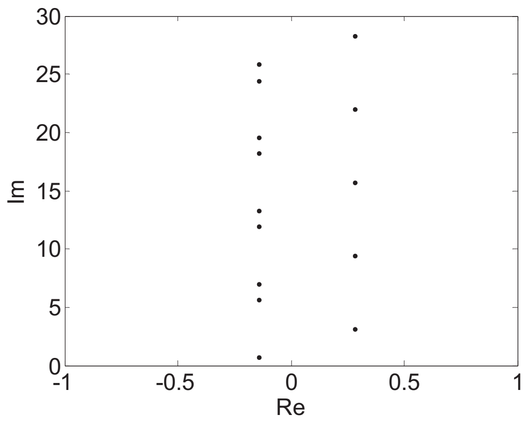
در شکلهای ۲۰ و ۲۱ نمودار های نسبت دامنه و فاز برای توابع موجود در حلقه باز سیستم کنترل مثال مطرح شده، نشان داده شده است. همانطور که در این شکلها دیده می شود تا فرکانس ۱ rad/sec بهره توابع دارای رفتار مینیمم فاز بر توابع دارای رفتار غیر مینیمم فاز برتری دارد لذا منحنی فاز، تابع منحنی توابع دارای رفتار مینیمم فاز گشته که به مفهوم ظهور صفر سمت چپ است اما به محض اینکه در این فرکانس، بهره توابع دارای رفتار غیرمینیمم فاز نسبت به توابع دارای رفتار مینیمم فاز برتر شد تابع حلقه باز پیرو توابع غیرمینیمم فاز گشته و دارای رفتار غیر مینیمم فازمی شود که به مفهوم ظهور صفر سمت راست است. همچنین در فرکانسهای ۵ ad/sec و ۷ rad/sec نیز که توابع دارای رفتار مینیمم فاز نسبت به توابع غیر مینیمم فاز دارای بهره برتر می شوند رفتار منحنی فاز تابع حلقه باز سیستم کنترل، پیرو توابع دارای رفتار مینیمم فاز گشته که به معنای ظهور صفرهای سمت چپ می باشد. لازم به ذکر است که برای وضوح بیشتر تصاویر، منحنی های نسبت دامنه و فاز به صورت جداگانه و در فواصل فرکانسی متفاوت ترسیم شده اند. بدیهی است که رفتار منحنی های نسبت دامنه و فاز در فرکانسهای مختلف به صورت تناوبی تکرار می شود و بدین ترتیب صفرهای سمت راست و چپ به صورت متناوب در نمودار مکان صفرهای تابع حلقه باز (شکل ۲۲) ظاهر می شوند.



شکل (۲۰): نمودار نسبت دامنه تابع حلقه باز مثال ذکر شده



شکل (۲۱): نمودار فاز تابع حلقه باز مثال ذکر شده



شکل (۲۲): مکان صفرهای تابع حلقه باز

همانطور که در این مثال به وضوح مشخص است به راحتی با استفاده از مفهوم بهره برتر می توان ناپایداری سیستم کنترل مورد نظر را در محدوده عدم صحت پارامتر تاخیر زمان به خوبی تشخیص داده و با تغییر پارامترهای کنترل کننده مانع از ناپایداری آن شد.

همچنین همانطور که می دانیم تشخیص صفر سمت راست در معادله حلقه باز سیستم کنترل برای بهبود عملکرد حلقه کنترل بسیار حائز اهمیت است. چرا که با تشخیص این موضوع و تنظیم پارامترها به گونه ای که صفرهای سمت راست را حذف کنند، می توان عملکرد حلقه کنترل را بهبود داد.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از پاسخ فرکانسی روشی نوین برای تشخیص مکان صفرهای معادلات دیفرانسیل خطی دارای تاخیر زمان ارائه شده است. این روش بسیار ساده بوده و بدون نیاز به محاسبات پیچیده به راحتی قابل استفاده است. در این روش قطبها به طور دقیق مشخص نمی شود بلکه موقعیت آنها نسبت به محور موهومی تعیین می گردد و می دانیم که همین امر در جهت بررسی پایداری سیستم کفایت می کند. همانطور که می دانیم در علم مهندسی کنترل، تشخیص صفرهای سمت راست در تحلیل پایداری و عملکرد مناسب یک حلقه کنترل از اهمیت ویژه ای برخوردار است. هرچند مطمئنا دامنه کاربرد این روش بسیار بزرگتر از محدوده مهندسی کنترل بوده و کلیه علومی را که با معادلات دیفرانسیل خطی دارای تاخیر زمان در ارتباط هستند را در بر می گیرد.

مراجع

[1] Pontryagin L.S., 1955, "On the zeros of some elementary transcendental functions", *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 1, 95-110.

[2] Bellman, R.E., Cooke, K. L., *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York, 1963.

[3] J.K. Hale, Theory of functional differential equations, Springer, New York, 1997.

[4] Stépán, G., *Retarded dynamical systems: Stability and haracteristic functions*, Harlow, UK: Longman, 1989.

[5] Niculescu, S. I., 2001, "Delay effects on stability: A robust control approach", *Lecture notes in control and information science*, 269, Berlin: Springer.

[6] Gu, K., Kharitonove, V. L., Chen, J., *Stability of time delay systems*, Boston: Birkhäuser, 2003.

[7] Gantmacher, F. R., *The theory of matrices*, New York, Chelsea Publishing Company, 1959.

[8] Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H., Keel, L. H., *Robust control: The parametric approach*, Englewood Cliffs, NJ: Prentic-Hall, 1995.

[9] Hara, T., Sugie, J., 1996, "Stability region for systems of differential difference equations", *Funk. Ekvac.*, 39, 69-89.

[10] Hara, T., Rinco, M., Morii, T., 1997, “Asymptotic stability condition for linear diffrential- diffrence equations with delays”, *Dynamic systems Appl.*, 6, 493-506.

[11] Baptistini, M., Hale, P. J. K., 1997, “On the stability of some exponential polynomials”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 205, 1, 259-272.

[12] Cahlon, B., Schmidt, D., 2000, “On stability of systems of delay differential equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 117, 137-158.

[13] Malakhovski, E., Mirkin, L., 2006, “On stability of second-order quasi-polynomials with a single delay”, *Automatica*, 42, 1041-1047.

[14] Shirvani, M., Inagaki, M., Shimizu, T., 1993, A Simplified Model of Distributed Parameter Systems”, *Int. J. Eng.*, 6, 2, 65-78.

[15] Shirvani, M, Inagaki, M., Shimizu, T., 1995, “Simplification Study on Dynamic Models of Distributed Parameter Systems”, *AIChE J.*, 41, 12, 2658-2660.

[16] Shirvani, M, Doustary, M. A., Shahbaz, M., Eksiri Z., 2004, “Heuristic Process Model Simplification in Frequency Response Domain”, *I.J.E. Transactions B: Applications*, 17, 1, 19-39.

[17] Ramanathan, S., Curl, R. L., Kravaris, C., 1987. “Dynamics and control of the cumulative mass fraction of a particle size distribution”, *ACC Proc.*, Minneapolis.

[18] Ramanathan, S., 1988, “Control of Quasirational Distributed Systems with Examples on the Control of Cumulative Mass Fraction of Particle Size Distribution”, *Ph.D Thesis, University of Michigan*, Ann Arbor.

[19] Ramanathan, S., Curl R. L., Kravaris, C., 1989, Dynamics and Control of Quasirational Systems, *AIChE J.*, 35, 6, 1017-1028.

[20] Minorsky, N., “Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions”, *Journal of Applied Mechanics*, 9, A65-A71, 1942.

[21] Tsypkin, Ya. Z., 1946, “Stability of systems with delayed feedback”, *Avtomatika I Telemekhanica*, 7, 2-3, 107-129.

[22] Ansoff, H. I., Kruhmansel, J. A., 1948, “A general stability criterion for linear oscillating systems with constant time lag”, *Quareterly of applied Mathematic*, 6, 337-341.

[23] Krall, A. M., *Stability Techniques for Linear Systems*, Gordon and Breach, New York, 1967.

[24] Manitius, A., Tran, H., Payre, G. Roy, R., 1987, “Computation of eigenvalues associated with functional differential equations”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 8, 222.

[25] Reda, D., 2006, “Solution operator approximations for characteristic roots of delay differential equations”, *Applied Numerical Mathematical*, 56, 3, 305-317.

[26] Verheyden K., Luzyanina T., Roose D., 2007, “Efficient computation of characteristic roots of delay differential equations using LMS methods”, *J. Comput. Appl. Math.*, 214, 1, 209-226.

[27] Majhi, S., Atherton, D P., 2000, “Obtaining Controller Parameters for a New Smith Predictor Using Auto tuning”, *Automatica,* 36, 11, 1651.

مجله کنترل
جلد ۳، شماره ۲، تابستان ۱۳۸۸، صفحه ۳۳-۲۵

کنترل پایدارساز سراسری مسیر کوانتومی با حالت‌های تعادل چندگانه

جواد شریفی [۱]، حمیدرضا مومنی [۲]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، jv.sharifi@gmail.com
[۲] دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، momeni_h@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۴/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۸/۷/۵)

چکیده: سیستم کوانتومی تصادفی با حالت تخمین‌یافته (مسیر کوانتومی) که دارای چندین نقطه تعادل است مورد تحلیل جهت طراحی یک کنترل‌کننده پایدارساز سراسری قرار گرفته است. قانون کنترلی به‌گونه‌ای طراحی شده است که تضمین می‌کند سیستم تنها به سمت نقطه تعادل مطلوب هدایت می‌شود و به سمت هیچکدام از دیگر نقاط تعادل حرکت نمی‌کند. به عنوان یک مثال فیزیکی از پایدارسازی سیستم با چندین نقطه تعادل، پایدارسازی سراسری یک اتم دارای اسپین نیم (شامل دو نقطه تعادل) که بعنوان بیت کوانتومی در محاسبات کوانتومی کاربرد فراوانی دارد، مورد بررسی قرار گرفته و شبیه‌سازی شده است و نتایج شبیه‌سازی، طراحی نظری حاصل‌شده را تائید می‌نماید.

کلمات کلیدی: مسیر کوانتومی، معادلات دیفرانسیل تصادفی، پایداری تصادفی، اتم اسپین نیم، کوبیت.

Abstract: Quantum trajectory with multiple equilibrium points is analyzed to become globally stable. The control law is designed such that the quantum system stabilized to one of its wanted equilibrium point and escape from the other unwanted equilibriums. As a physical example the global stabilization of one half-spin atom, which is known as a quantum bit (qubit) and has many applications in quantum computing, is investigated by our control law and simulated. The simulation result confirms the theoretical desig.

Keywords: Quantum trajectory، stochastic differential equation، stochastic stability، half-spin atom، quantum bit (qubit).

۱- مقدمه

فیزیک کوانتومی به بررسی دینامیک و قوانین حاکم بر ذارت ریز (در مقیاس هسته اتم، اتم و ملکول) می‌پردازد. با پیشرفت فناوری لیزر هم اکنون دستکاری اینگونه سیستم‌ها برای رسیدن به هدف مطلوب امکان‌پذیر شده است[1]. یکی از مهمترین کاربردهای کنترل سیستم‌های کوانتومی برای توسعه محاسبات و پردازش اطلاعات کوانتومی به منظور تحقق و ساخت رایانه‌های کوانتومی است[2,3]. از دیگر کاربردهای کنترل کوانتومی در فیزیک ماده چگال[۱] و لیزر اتمی[4,5,6]، نانوتکنولوژی[7]، اسپینترونیک[۲][8] و بسیاری از دیگر کاربردها می‌باشد[9]. معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده دینامیک یک سیستم کوانتومی بسته (بدون تقابل با محیط)، معادله مشهور شرودینگر[۳] می‌باشد. اما آنچه در توسعه تکنولوژی کوانتومی بسیار حائز اهمیت است، سیستم کوانتومی باز[۴] (دارای تقابل و برهم‌کنش با محیط و نویز) است. معادلاتی که نمو[۵] سیستم کوانتومی با نویز کوانتومی (فوتون)[۶] را بیان می‌کند، معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی[۷] است که برای اولین بار توسط دو دانشمند بنام هادسن و پارساساراسی [10] بدست آمد و این معادلات نیز به اسم آن دو نفر شهرت دارد. با استفاده از این معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی، یک دانشمند روسی بنام بلاوکین در [11] برای اولین بار، توانست معادلات دیفرانسیل تصادفی کلاسیکی استخراج نماید که بر اساس اندازه‌گیری خروجی، تخمین حالت سیستم کوانتومی باز را امکان‌پذیر نماید. این معادلات تخمین که به مسیر کوانتومی شهرت دارد، گستره وسیعی از سیستم‌های کوانتومی باز را شامل می‌شود. مسیرهای کوانتومی بدلیل کاربرد فراوان، مورد

[1] Condense Physics
[2] Spintronic
[3] Schrödinger Equation
[4] Open quantum system
[5] Evolution
[6] Quantum noise (photon)
[7] Quantum stochastic differential equation (QSDE)

توجه بسیاری از ریاضیدان‌ها، فیزیکدان‌ها و مهندسان کنترل [12-14] قرار گرفته است.

روش‌های کنترلی فراوانی برای مسیرهای کوانتومی توسعه یافته است که از جمله مهمترین آنها، کنترل بهینه تصادفی و پایدارسازی تصادفی است. اما پایدارسازی تصادفی این سیستم‌ها هم بسیار مشکل است و هم اهمیت بیشتری دارد. دلیل این اهمیت این است که مسیر کوانتومی دارای این خاصیت ویژه‌اند که دارای چندین نقطه تعادل پایدار می‌باشند و این امر، پایدارسازی سراسری آنرا بسیار مشکل نموده است. اولین مساله پایدارسازی اینگونه سیستم‌ها در [15] برای یک مثال جزئی از مسیر کوانتومی یعنی یک بیت کوانتومی (کوبیت) بررسی شد که از روش هندسی استفاده شده است. همچنین در [16] مساله پایدارسازی سراسری برای دو دسته مسیر کوانتومی بررسی شده است که این دو دسته عبارتند از (۱)-مجموعه‌ای از اتم‌های دارای اسپین و نیز (۲)-دو اتم دارای همبستگی. در این روش پایدارسازی سراسری، یک کنترل چند قانونی که بسته به ناحیه حالت چگالی سیستم، سوئیچ کرده و سیگنال کنترلی مناسب را اعمال می‌کند تا این دو سیستم را پایدار سراسری نماید. اما روش دستیابی کنترلی آنها که بر اساس سوئیچ کردن در نواحی مختلف است، بسیار پیچیده بوده و تنها برای این دو مثال نوعی حل شده است نه برای معادله کلی مسیر کوانتومی بلاوکین. در مرجع [17] کنترل لیاپانوف مسیر کوانتومی با وجود مشاهده‌پذیر هرمیتی یا خود-الحاق[1] بررسی شده است. همچنین در [18] مساله پایدارسازی سراسری برای یک دسته از اتم‌ها مورد تحلیل قرار گرفته است.

هدف ما در اینجا ارائه یک کنترل‌کننده پایدارساز سراسری و تنها با یک قانون کنترلی در تمامی نواحی حالت سیستم، برای معادله کلی مسیر کوانتومی بلاوکین است که برای کلیه سیستم‌های کوانتومی باز قابل کاربرد باشد. برای این منظور، در ابتدا بطور مختصر به قالب ریاضی کوانتومی آماری در فضای هیلبرت، اشاره کرده و حالت سیستم کوانتومی را تشریح می‌کنیم. همچنین، معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی را که اساس توسعه نظریه مسیرهای کوانتومی است، بیان می‌کنیم. پس از آن، مسیر کوانتومی بلاوکین را شرح می‌دهیم. سپس مهمترین قضایای پایداری تصادفی بیان شده و در ادامه با استفاده از این قضایای پایداری تصادفی، یک کنترل پایدارساز سراسری برای مسیر کوانتومی بلاوکین بدست می‌آید که برای هر حالت اولیه در سراسر فضای حالت، سیستم کوانتومی را تنها به یک نقطه تعادل مطلوب پایدار سازد. درنهایت عملکرد طراحی برای یک سیستم ساده کوانتومی (کوبیت[2])، که از اساسی‌ترین اجزای محاسبات کوانتومی است، بررسی شده و شبیه‌سازی می‌شود.

[1] Hermitian (self-adjoint)

۲- حالت و مشاهده‌پذیر کوانتومی

یک فضای هیلبرت محدود[3] $\mathcal{H}$ را درنظر بگیرید. ضرب داخلی در این فضا را با نماد $\langle , \rangle$ نشان می‌دهیم که در مولفه دوم خطی و در مولفه اول ناخطی[4] است. نرم فضای هیلبرت اقلیدسی است که عبارت است از $\| \ \|^2 = \langle , \rangle$. یک بردار ستونی مختلط $\mathrm{n} \times 1$ در فضای $\mathcal{H}$ با نماد $|\Psi\rangle$ نشان داده می‌شود و کت[5] دیراک نامیده می‌شود. ترانهاده مزدوج[6] این بردار مختلط که یک بردار سطری $1 \times \mathrm{n}$ است با نماد $\langle\Psi| = |\Psi\rangle^\dagger$ نشان داده شده و برا[7] نامیده می‌شود. فرض کنید که $|\Psi\rangle^\dagger$ پایه‌های فضای هیلبرت باشند، آنگاه برای هر بردار در این فضا داریم: $|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k |\Psi_k\rangle$ بطوریکه ضرایب ترکیب خطی $a_k \in \mathbb{R}_+$ به گونه‌ای می‌باشند که بردار حالت نرمالیزه باشد، به عبارتی: $\langle\Psi||\Psi\rangle = \langle\Psi, \Psi\rangle = \|\Psi\|^2 = 1$ واضح است که حاصلضرب کت در برا $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ یک ماتریس $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ است که با ترانهاده مزدوج خود برابر است، این ماتریس را در فیزیک کوانتومی، ماتریس چگالی[8] می‌نامند و با نماد ρ نشان می‌دهند. با توجه به نرمالیزه بودن بردار حالت، رد ماتریس چگالی برابر با یک است: $\mathrm{tr}(\rho) = 1$. همچنین توان دوم ماتریس چگالی در رابطه $0 \le \mathrm{tr}(\rho^2) \le 1$ صدق می‌کند و تساوی[9] برابر با یک زمانی برقرار است که ماتریس چگالی متناظر با حالت خالص[10] (پایه ماتریسی) باشد[19]. ماتریس چگالی اگرچه دارای درایه‌های مختلط است، اما با توجه به تعریف آن یک ماتریس هرمیتی (خود-الحاق)[11] است: $\rho = \rho^\dagger$. با استفاده از ماتریس چگالی، می‌توان مقادیر آماری وابسته به یک کمیت قابل اندازه‌گیری در فیزیک کوانتومی را محاسبه نمود. ابتدا اجازه دهید به تعریف مشاهده‌پذیر در فیزیک کوانتومی بپردازیم.

در فیزیک کوانتومی، عملگرهای قابل اندازگیری را *مشاهده‌پذیر*[12] می‌نامند. برای مثال مکان، سرعت، ممان زاویه‌ای یک ذره کوچک (مثل اتم) مثال‌هائی از مشاهده‌پذیرهای کوانتومی می‌باشند. یک

[2] Quantum bit (Qubit)
[3] فضای هیلبرت محدود دارای تعداد پایه‌های متناهی است.
[4] Anti-Linear
[5] Ket
[6] Conjugate transpose (†)
[7] Bra
[8] Density matrix
[9] کران بالای این رابطه با استفاده از نامساوی رد ماتریسی زیر بدست می‌آید:

$\mathrm{tr}(AB) \le \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$

[10] Pure State
[11] Hermitian (Self-adjoint)
[12] Observable

مشاهده‌پذیر در زمان اولیه (صفر) با $X = X_0$ و در زمان‌های دیگر با X_t نشان داده می‌شود. باید خاطرنشان کرد که مشاهده‌پذیر، ممکن است بصورت ماتریسی باشد. مقدار میانگین آماری (امید ریاضی) یک مشاهده‌پذیر با نماد $\langle X \rangle$ نشان داده شده و با استفاده از بردار حالت و یا ماتریس چگالی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\langle X \rangle = \langle \Psi, X\Psi \rangle = \mathrm{tr}\left(\rho X\right) \qquad (۱)$$

۳- معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی

معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی، بیانگر نمو سیستم کوانتومی در مواجهه با نویز کوانتومی می‌باشد. نویز کوانتومی، فرآیندهای وابسته به فوتون (ذرات نور) می‌باشند. نویزهای اساسی کوانتومی سه دسته می باشند که مختصراً در زیر توضیح داده شده است:

- *فرآیند نابودی*[۱] که با A_t نشان داده می‌شود.
- *فرآیند خلق*[۲] که با $A_t^\dagger$ نشان داده می‌شود و ترانهاده مزدوج نویز نابودی است.
- *فرآیند عدد*[۳] که با Λ_t نشان داده می‌شود.

دو نویز اول مختلط بوده و قابل اندازه‌گیری مستقیم نمی‌باشند و از نظر فیزیکی برای اندازه‌گیری آنها، دو عملگر قابل اندازه‌گیری بصورت $P_t = -i(A_t - A_t^\dagger)$, $Q_t = A_t + A_t^\dagger$ تعریف می‌شود. این دو نویز جدید که به ترتیب عملگرهای بزرگی[۴] و فاز[۵] نام دارند، بوسیله آشکارساز هموداین قابل اندازه‌گیری می‌باشند. نویز سوم مقدار حقیقی بوده و با شمارشگر فوتونی[۶] اندازه‌گیری می‌شود. بر اساس این سه نویز، در سال ۱۹۸۴ هادسن و پارساساراسی محاسبات تصادفی کوانتومی[۷] را پایه‌گذاری نموده و معادلات دیفرانسیل کوانتومی تصادفی بدست آوردند که کاربردهای فراوانی در فیزیک کوانتومی دارد. این معادلات برای یک عملگر ماتریس یکانی، $U_t^\dagger U_t = U_t U_t^\dagger = I$ بصورت زیر قابل بیان می‌باشد و به معادله دیفرانسیل تصادفی هادسن-پارساساراسی شهرت دارد [10]:

$$\begin{aligned} dU_t &= U_t L dA_t^\dagger - (U_t S L^\dagger) dA_t + U_t(S - I) d\Lambda_t \\ &\quad + U_t(-iH - \tfrac{1}{2} L^\dagger L)dt \;\;,\;\; U_0 = I \;\;,\; i = \sqrt{-1} \end{aligned} \qquad (۲)$$

در این معادله، H هامیلتونین[۸] (عملگر انرژی) و هرمیشین است که حامل سیگنال کنترلی است. L عملگر اندازه‌گیری است که میدان کوانتومی توسط آن با سیستم کوانتومی برهم‌کنش می‌کند. S نیز ماتریس پراکندگی[۹] نامیده می‌شود. درایه (i, j) این ماتریس، بیانگر پراکندگی بین دو کانال i و j می‌باشد. I ماتریس همانی است. این معادله برای نمو مشاهده‌پذیرهای کوانتومی و نیز حالت کوانتومی بسیار مهم است. اگر $X = X_0$ یک مشاهده‌پذیر کوانتومی بوده و نیز $\rho = \rho_0$ حالت اولیه سیستم کوانتومی باشد، آنگاه نمو زمانی این دو متغیر بر اساس معادله هادسن-پارساساراسی عبارت است از:

$$X_t = U_t X U_t^\dagger \quad , \quad \rho_t = U_t^\dagger \rho U_t \qquad (۳)$$

٤- معادلات تخمین حالت (مسیر) کوانتومی [۱۰]

برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ میلادی، پروفسور بلاوکین[۱۱] دریافت که تحت شرایطی امکان تخمین حالت یک سیستم کوانتومی تحت اندازه‌گیری وجود دارد[11]. بلاوکین نشان داد درصورتیکه اندازه-گیری درخروجی یک سیستم کوانتومی به گونه‌ای باشد که مشاهدات در زمان t بر نمو مشاهده‌پذیر کوانتومی در زمان‌های $\tau \geq t$ تاثیر نگذارد و یا به عبارتی انحطاط ناپذیر[۱۲] باشد، و نیز مقادیر مشاهده‌پذیر در زمانهای متفاوت جابجاپذیر باشند، و یا خود انحطاط ناپذیر[۱۳] باشد، آنگاه می‌توان تخمین کمترین خطای مربعی از حالت سیستم کوانتومی بدست آورد. در اینجا وارد موضوع تخمین نمی‌شویم چرا که هدف ما در اینجا مساله کنترل سیستم‌هائی است که تخمین زده شده‌اند. در نوشتجات فیزیکی موضوع تخمین سیستم کوانتومی تحت اندازه‌گیری پیوسته، *مسیر کوانتومی*[۱۴] نامیده می‌شود. معادله مسیر کوانتومی عبارت است از:

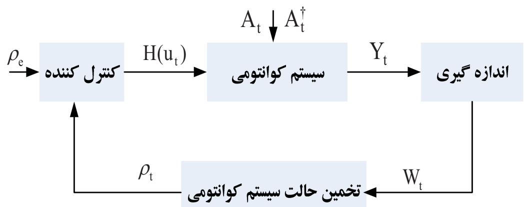
$$\begin{aligned} d\rho_t &= \left(i[\rho_t, H] + L\rho_t L^\dagger - \tfrac{1}{2}\{L^\dagger L, \rho_t\}\right)dt \\ &\quad + \left(L\rho_t + \rho_t L^\dagger - \mathrm{tr}\left([L^\dagger + L]\rho_t\right)\rho_t\right)dW_t \end{aligned} \qquad (۴)$$

در این معادله، عملگرهای جابجاگر[۱۵] $[,]$ و ناجابجاگر[۱۶] $\{,\}$ بصورت $[A, B] = AB - BA$, $\{A, B\} = AB + BA$ تعریف می‌شوند: همچنین W_t، یک فرآیند وینر با میانگین صفر و واریانس یک است که بر اساس اندازه‌گیری خروجی Y_t بصورت $dW_t = dY_t - \mathrm{tr}\left([L^\dagger + L]\rho_t\right)dt$ بیان می‌شود.

[1] Annihilation process
[2] Creation process
[3] Number process
[4] Amplitude operator
[5] Phase operator
[6] Photocounter
[7] Quantum stochastic calculus
[8] Hamiltonian

[9] Scattering matrix
[10] Rössler
[۱۱] یک ریاضی-فیزیکدان روسی‌تبار واقع در دانشگاه ناتینگهام انگلستان و از دوستان استراتونوویچ (پایه‌گذار تخمین غیرخطی و محاسبات تصادفی روی هندسه خمینه) می‌باشند.
[12] Nondemolish: $\left[X_{\tau \geq t}, Y_t\right] = 0$
[13] Self-nondemolish: $\left[X_\tau, X_t\right] = 0 : \tau \neq t$
[14] Quantum trajectory
[15] Commutator
[16] Anti-Commutator

با توجه به اینکه معادله بلاوکین، یک معادله دیفرانسیل تصادفی با نویز کلاسیک است، محاسبات تصادفی ایتو[1] بر آن حاکم است و درنتیجه می‌توان از روش‌های کنترل تصادفی که برای سیستم‌های تصادفی کلاسیک توسعه داده شده است، بهره‌مند شد. روشهای کنترل تصادفی بسیار متنوع می‌باشند که از جمله مشهورترین آنها روش کنترل بهینه تصادفی و کنترل پایدارساز می‌باشد. آنچه ما در اینجا به آن می-پردازیم، پایدارسازی تصادفی معادلات تخمین بلاوکین است. در بخش بعد نظریات پایداری تصادفی بیان می‌شود. در شکل۱، بلوک دیاگرام کنترل مسیر کوانتومی نشان داده شده است. در ابتدا سیستم کوانتومی تصادفی بواسطه عملگر اندازه‌گیری L با نویز کوانتومی برهم کنش می‌کند، سپس با استفاده از یک ابزار اندازه‌گیری فیزیکی بنام آشکارساز هموداین[2] ، موج پراکنده شده از سطح سیستم اندازه‌گیری می‌شود. سپس با استفاده از اندازه‌گیری بدست‌آمده از خروجی و نیز با استفاده از معادلات مسیر کوانتومی، حالت سیستم در هر زمان تخمین زده می‌شود و با استفاده از این تخمین حالت، سیگنال کنترلی (امواج الکترومغناطیسی) طراحی‌شده، بصورت پسخور غیرخطی حالت به سیستم اعمال می‌شود.



شکل ۱ –دیاگرام بلوکی کلی کنترل مسیر کوانتومی

- پایداری تصادفی

پایدارسازی یک سیستم دینامیکی، از مهمترین خواسته‌ها در یک سیستم کنترل است. روش لیاپانوف که یکی از بنیادی‌ترین نظریه‌های پایداری است، با گذشت زمان زیاد، هنوز به عنوان یک ابزار قدرتمند برای تحلیل پایداری سیستم‌ها بکار می‌رود. بسیاری از نظریات پایداری لیاپانوف در کتاب‌های کنترل غیرخطی موجود می‌باشد و بسیار مشهور است. بعلاوه، روش پایداری لیاپانوف برای سیستم‌های تصادفی مارکوف و نیز به شکل معادلات دیفرانسیل تصادفی، توسط کوشنر [20] و هاسمینسکی [21] و مائو [22] توسعه داده شده است. در ذیل بطور مختصر به مهمترین تعاریف و قضایای پایداری تصادفی اشاره می-شود. برای این منظور، معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل ایتو را درنظر بگیرید:

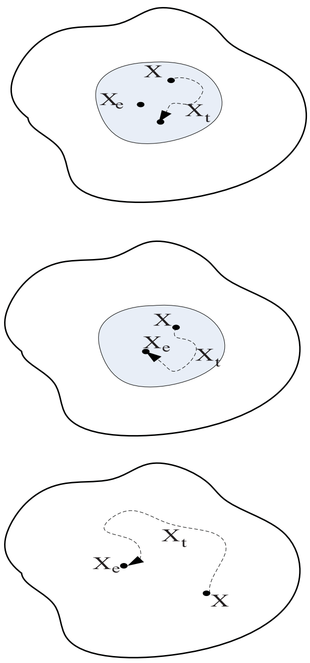
$$\mathrm{dX_t} = \boldsymbol{f}\left(\mathrm{u_t}, \mathrm{X_t}\right)\mathrm{dt} + \boldsymbol{g}\left(\mathrm{X_t}\right)\mathrm{dW_t} \qquad (۵)$$

که در این معادله توابع ماتریسی $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ بصورت کلی غیرخطی درنظر گرفته شده‌اند. $\mathrm{W_t}$ یک فرآیند وینر با میانگین صفر و واریانس یک است که در فضای احتمال درای تابع اندازه $\mathbb{P}$ قرار دارد. فرض کنید که $\mathrm{X_e}$ نقطه تعادل این سیستم باشد، یعنی. $\boldsymbol{f}\left(\mathrm{u_t}, \mathrm{X_e}\right) = \boldsymbol{g}\left(\mathrm{X_e}\right) = 0$ آنگاه تعاریف زیر، برای پایداری تصادفی این نقطه تعادل بیان می‌شوند:

۱- نقطه $\mathrm{X_e}$ را *پایدار در احتمال*[3] گویند، اگر برای یک همسایگی از شرایط اولیه X به این نقطه، داشته باشیم:
$$.\lim_{\mathrm{X_0}\to\mathrm{X_e}} \mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0}\left\|\mathrm{X_t}-\mathrm{X_e}\right\| > \varepsilon\right) = 0 \ : \ \forall\varepsilon > 0$$

۲- *پایدار سراسری*[4] است اگر پایدار در احتمال بوده و داشته باشیم: $\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty}\left\|\mathrm{X_t}-\mathrm{X_e}\right\| = 0\right) = 1$. به عبارتی $\mathrm{X_t}$ به ازای کلیه شرایط اولیه در فضای حالت به نقطه تعادل همگرا شود.

۳- اگر $\mathrm{X_e}$ پایدار در احتمال بوده و برای یک همسایگی نزدیک از شرایط اولیه X به این نقطه تعادل، $\mathrm{X_t}$ با احتمال غیرصفر به این نقطه همگرا شود، گویند که *پایدار مجانبی*[5] *در احتمال* می‌باشد.



شکل۲- پایداری در احتمال (بالا)، پایداری مجانبی در احتمال (وسط) و پایداری سراسری در احتمال (پائین)

با استفاده از تعاریف فوق، قضایای پایداری تصادفی زیر توسعه یافته است [20-22]:

---

[1] ایتو (Itô): دانشمند ژاپنی که بنیانگذار محاسبات و انتگرال تصادفی است. ایتو را نیوتن دوم می‌نامند.

[2] Homodyne Detector

[3] Stable in probability

[4] Globally stable

[5] Asymptotically stable

قضیه۱: مجموعه $B_r = \left\{X : \|X - X_e\| < r \; ; r > 0\right\}$ را در نظر بگیرید. تابع دو بار مشتق‌پذیر $V : B_r \to \mathbb{R}_+$ بصورت $V(X_e) = 0 \; ; V(B_r \neq X_e) > 0$ و با تغییرات کوچک[۱] $\mathcal{R}(V) = \left(\partial_t V + \boldsymbol{f}\,\partial_x V + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}^T\,\partial_x^2 V)\right)$ را درنظر بگیرید. اگر برای $X \in B_r$ داشته باشیم: $\mathcal{R}(V) \leq 0$، آنگاه نقطه تعادل X_e را پایدار در احتمال و اگر برای $X \in \{B_r \neq X_e\}$ شرط $\mathcal{R}(V) < 0$ برقرار باشد، آنگاه نقطه تعادل فوق، پایدار مجانبی در احتمال است.

قضیه۲: تابع اسکالر دو بار مشتق‌پذیر $V(X_t)$ را درنظر بگیرید بطوریکه $V(X_e) = 0 \; ; V(X_t \neq X_e) > 0$. اگر نقطه تعادل پایدار در احتمال باشد و دو شرط: (۱)- $\mathcal{R}(V) < 0$ برای مقادیر $X_t \neq X_e$ و نیز (۲)- $|\mathcal{R}(V)| \to \infty \; , \; V(X) \to \infty$ برای $\|X\| \to \infty$، برقرار شوند، آنگاه نقطه تعادل X_e پایدار تصادفی سراسری می‌باشد.

۶- پایدارسازی مسیر کوانتومی

در این بخش می‌خواهیم با استفاده از نظریه پایداری تصادفی، برای مسیر کوانتومی معادله۴، کنترل‌کننده پایدارساز سراسری با پسخور غیرخطی حالت[۲] بصورت $u_t = F(\rho_t)$ را طراحی نمائیم، بطوریکه به ازای شرایط اولیه متفاوت از ماتریس چگالی حالت سیستم، با گذشت زمان بتوان به یکی از حالت‌های تعادل (ویژه)[۳] سیستم ρ_e همگرا شد. برای این منظور باید تابع لیاپانوف تصادفی $V(\rho_t)$ به گونه‌ای انتخاب شود که شرایط قضیه۲ برقرار شود. دقت کنید که هامیلتونین کل سیستم برابر با جمع هامیلتونین آزاد یا داخلی سیستم و هامیلتونین کنترلی است، و یا به عبارتی: $H = H_{free} + u_t H_{control}$.

در مرجع [16] اثبات شده است که معادلات مسیر کوانتومی بلاوکین دارای چندین حالت تعادل پایدار است که با سیگنال کنترلی صفر(عدم حضور سیگنال کنترل)، سیستم با توجه به اینکه دارای شرایط اولیه نزدیک به ناحیه جذب هر یک از نقاط تعادل، به آن نقطه تعادل همگرا می‌شود. اما آنچه در محاسبات کوانتومی و دیگر کاربردهای کنترل کوانتومی مطلوب می‌باشد، این است که برای تمامی نقاط فضای حالت، کنترل‌کننده پایدارساز سراسری‌ای طراحی شود که بتواند حالت سیستم را به نقطه تعادل دلخواه سوق دهد. برای دست‌یابی به این هدف، قضیه زیر بیان و اثبات می‌شود:

قضیه۳- مسیر کوانتومی بلاوکین را درنظر بگیرید. فرض کنید ثابت مختلط c وجود دارد بطوریکه برای حالت تعادل ρ_e رابطه $L\rho_e = c\rho_e$ برقرار باشد. همچنین برای ماتریس هامیلتونین آزاد سیستم داشته باشیم $[H_{free}, \rho_e] = [0]$. آنگاه مقادیر مثبت $\alpha, \beta > 0$ بطوریکه، یک کنترل‌کننده پایدارساز سراسری مسیر کوانتومی عبارت است از:

$$u_t = \left(\alpha^2 + 2\beta^2\langle\rho_e\rangle\right)\left\langle -i[\rho_e, H_{control}]\right\rangle + 2\beta\left(\left\langle L^\dagger\rho_e + \rho_e L\right\rangle - \left\langle L^\dagger + L\right\rangle\langle\rho_e\rangle\right) \quad (۶)$$

اثبات. تابع لیاپانوف را بصورت $V(\rho_t) = \alpha^2\left(1 - \langle\rho_e\rangle\right) + \beta^2\left(1 - \langle\rho_e\rangle^2\right)$ درنظر بگیرید. با توجه به اینکه ρ_e یک حالت تعادل ویژه است آنگاه $\mathrm{tr}(\rho_e^2) = \mathrm{tr}(\rho_e) = 1$، درنتیجه $V(\rho_e) = 0$. از طرفی با استفاده از نامساوی رد ماتریسی ($\mathrm{tr}(\rho_t\rho_e) \leq 1$)، درنتیجه $V(\rho_t \neq \rho_e) > 0$. با استفاده از قانون ضرب ایتو و با استفاده از مسیر کوانتومی، تغییرات تابع لیاپانوف برابر است با:

$$\begin{aligned} dV(\rho_t) &= -\alpha^2\, d\langle\rho_e\rangle - 2\beta^2\langle\rho_e\rangle d\langle\rho_e\rangle - \beta^2\left(d\langle\rho_e\rangle\right)^2 \\ &= -\left(\alpha^2 + 2\beta^2\langle\rho_e\rangle\right)\left\langle i[H, \rho_e]\right\rangle dt \\ &+ 2\langle\rho_e\rangle\left(\alpha^2 + 2\beta^2\langle\rho_e\rangle\right)\left\langle L^\dagger\rho_e L - \tfrac{1}{2}\{L^\dagger L, \rho_e\}\right\rangle dt \\ &- \beta^2\left(\left\langle L^\dagger\rho_e + \rho_e L\right\rangle - \left\langle L^\dagger + L\right\rangle\langle\rho_e\rangle\right)^2 dt \\ &- \left(\alpha^2 + 2\beta^2\langle\rho_e\rangle\right)\left(\left\langle L^\dagger\rho_e + \rho_e L\right\rangle - \left\langle L^\dagger + L\right\rangle\langle\rho_e\rangle\right) dW_t \end{aligned} \quad (۷)$$

و درنتیجه تغییرات کوچک آن که ضریب زمانی $dV(\rho_t)$ می‌باشد، پس از اعمال شرط $[H_{free}, \rho_e] = [0]$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(V) &= -\left(\left\langle L^\dagger\rho_e + \rho_e L\right\rangle - \left\langle L^\dagger + L\right\rangle\langle\rho_e\rangle\right)^2 \\ &- 2\langle\rho_e\rangle\left\langle L^\dagger\rho_e L - \tfrac{1}{2}\{L^\dagger L, \rho_e\}\right\rangle + 2\langle\rho_e\rangle\left\langle i[u_t H_{control}, \rho_e]\right\rangle \end{aligned} \quad (۸)$$

با استفاده از پایه‌های ماتریسی گلمن، [23] می‌توان پایه‌های ماتریس چگالی را طوری انتخاب نمود که ماتریس ρ_e یک حالت ویژه عملگر اندازه‌گیری L باشد، به عبارتی $L\rho_e = c\rho_e$. درنتیجه جمله دوم در معادله تغییرات کوچک (۸) صفر شده و داریم:

$$\mathcal{R}(V) = 2\langle\rho_e\rangle\left\langle i[u_t H_{control}, \rho_e]\right\rangle - \left(\left\langle L^\dagger\rho_e + \rho_e L\right\rangle - \left\langle L^\dagger + L\right\rangle\langle\rho_e\rangle\right)^2 \quad (۹)$$

با انتخاب سیگنال کنترلی بصورت زیر:

$$u(\rho_t) = \left(\alpha^2 + 2\beta^2\langle\rho_e\rangle\right)\left\langle i[H_{control}, \rho_e]\right\rangle + 2\beta\left(\left\langle L^\dagger\rho_e + \rho_e L\right\rangle - \left\langle L^\dagger + L\right\rangle\langle\rho_e\rangle\right) \quad (۱۰)$$

آنگاه مقادیر مثبت $\alpha, \beta > 0$ وجود دارد که تغییرات کوچک زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left(V(\rho_t)\right) &= -\{(\alpha^2 + 2\beta^2\langle\rho_e\rangle)\left\langle i[\rho_e, H_{control}]\right\rangle \\ &- \beta(\left\langle\rho_e L + L^\dagger\rho_e\right\rangle - \left\langle L^\dagger + L\right\rangle\langle\rho_e\rangle)\}^2 < 0 \end{aligned} \quad (۱۱)$$

[۱] تغییرات کوچک (infinitesimal) برابر با ضریب dt در $dV(X_t)$ است.
[2] Nonlinear state feedback
[۳] پایه‌های ماتریس چگالی همان ماتریس‌های گلمن (Gell-Mann) می‌باشند.

که باید نشان دهیم این عبارت همواره منفی بوده و تنها در حالت ویژه ρ_e صفر است. ابتدا ثابت می‌کنیم که با استفاده از این کنترل-کننده، نقطه تعادل ρ_e ، یک نقطه تعادل ایستا است، یعنی ضریب نویز در معادله۷ صفر می‌شود و درنتیجه نویز نمی‌تواند سیستم را از نقطه تعادل ρ_e حرکت دهد. با استفاده از $L\rho_e = c_e\rho_e$ و نیز $\rho_e L^\dagger = c_e^\dagger \rho_e$ ، بسادگی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\left(\left\langle L^\dagger\rho_e + \rho_e L\right\rangle - \left\langle L^\dagger + L\right\rangle\langle\rho_e\rangle\right)\Big|_{\rho_t=\rho_e} = \\ &\mathrm{tr}(\rho_e L^\dagger\rho_e + \rho_e L\rho_e) - \mathrm{tr}(\rho_e L^\dagger + L\rho_e)\,\mathrm{tr}(\rho_e^2) = \\ &\mathrm{tr}(c_e^\dagger\rho_e^2 + c_e\rho_e^2) - \mathrm{tr}(c_e^\dagger\rho_e + c_e\rho_e)\,\mathrm{tr}(\rho_e^2) = \\ &(c_e^\dagger + c_e)\,\mathrm{tr}(\rho_e^2)\Big(1 - \mathrm{tr}(\rho_e)\Big) = 0\end{aligned} \tag{۱۲}$$

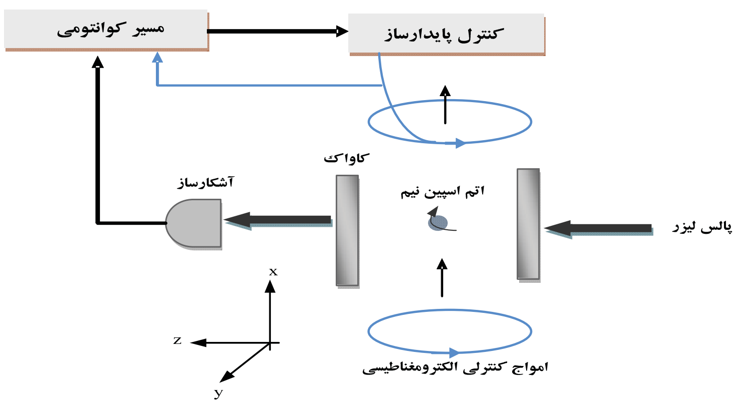
از طرفی چون $\mathcal{R}\left(V(\rho_e)\right) = 0$ ، درنتیجه $dV(\rho_e) = 0$ و همچنین $u(\rho_e) = 0$. پس این نقطه تعادل برای تابع لیاپانوف انتخاب-شده کنترل‌کننده فوق ایستا است. از طرفی فرض کنید در زمان t که $\rho_t \neq \rho_e$ الگوریتم کنترلی متوقف شود و سیستم نتواند به سمت نقطه تعادل حرکت کند یعنی $\mathcal{R}\left(V(\rho_t)\right) = 0$. با استفاده از این فرض صفرشدن، عبارت $\left(\alpha^2 + 2\beta^2\langle\rho_e\rangle\right)\left\langle i[\rho_e, H_{control}]\right\rangle$ برابر با $\beta\left(\left\langle\rho_e L + L^\dagger\rho_e\right\rangle - \left\langle L^\dagger + L\right\rangle\langle\rho_e\rangle\right)$ بدست می‌آید که با جایگذاری این عبارت در معادله سیگنال کنترلی، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&(\rho_t) = -\beta\left(\left\langle\rho_e L + L^\dagger\rho_e\right\rangle - \left\langle L + L^\dagger\right\rangle\langle\rho_e\rangle\right) = \\ &\cdot\beta\Big(\mathrm{tr}\left([L + L^\dagger]\rho_e\rho_t\right) - \mathrm{tr}\left([L + L^\dagger]\rho_t\right)\mathrm{tr}\left(\rho_e\rho_t\right)\Big)\end{aligned} \tag{۱۳}$$

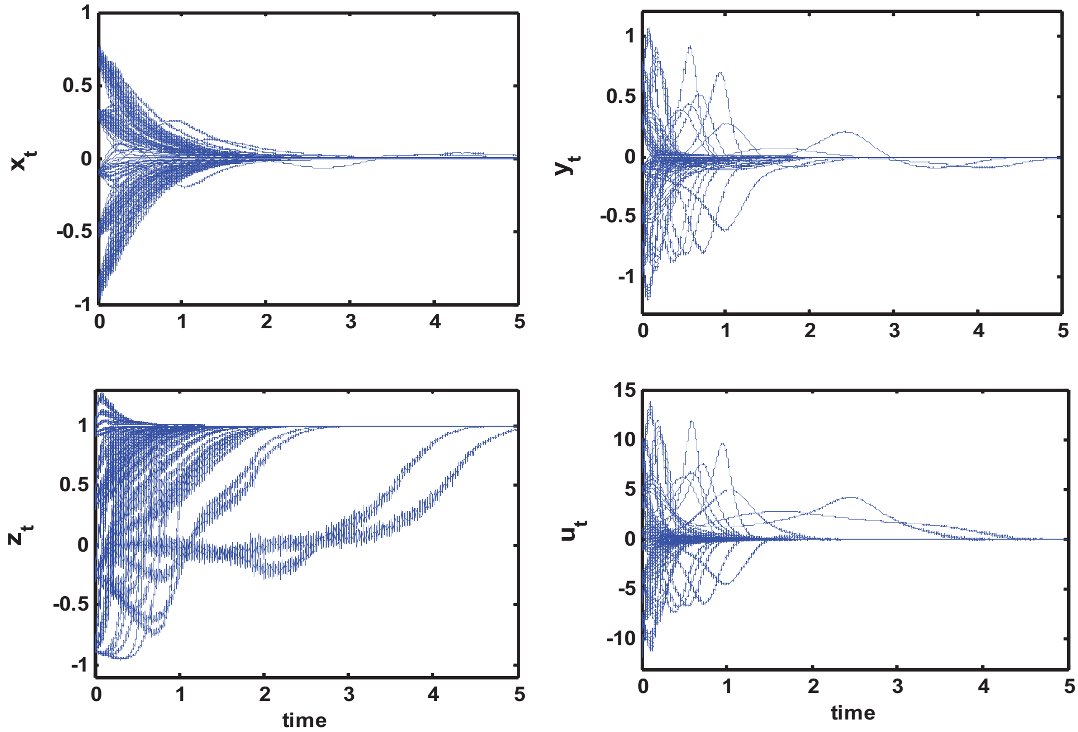
واضح است که در رابطه بالا اگر داشته باشیم $\rho_t = \rho_e$ ، باتوجه به اینکه $\mathrm{tr}(\rho_e) = 1$, $\rho_e^2 = \rho_e$ آنگاه $u(\rho_e) = 0$. اما چون $\rho_t \neq \rho_e$ آنگاه $u(\rho_t) \neq 0$. درنتیجه سیگنال کنترلی غیرصفر سبب حرکت سیستم از نقطه تعادل فرضی ρ_t می‌شود. همچنین $V\left(\rho_t \neq \rho_e\right) > 0$ ، درنتیجه نقطه فرضی ρ_t ، حتی اولین شرط مورد نیاز در قضیه۱ برقرار نیست و درنتیجه این نقطه نمی‌تواند پایدار در احتمال باشد. ازطرفی با توجه به اینکه ماتریس چگالی کراندار است، سیگنال کنترلی نمی‌تواند سیستم را بی‌کران نماید و شرط نهایی پایداری سراسری در قضیه۲ برقرار شده و اثبات تکمیل می‌شود.

۷-شبیه‌سازی: تک بیت کوانتومی (کوبیت)

برای شبیه‌سازی کنترل پایدارساز طراحی شده در بخش قبل، پایه‌ای-ترین عنصر محاسبات کوانتومی یعنی کوبیت را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم. در شکل۳، ساختار آزمایشگاهی مورد نیاز برای کنترل یک کوبیت نشان داده شده است. در ابتدا، پالس لیزر (نویز کوانتومی $(A_t, A_t^\dagger)$ با ممان دوقطبی مغناطیسی اتم (عملگر اندازه-گیری L) در جهت مختصاتی z برهم‌کنش می‌کند. امواج پراکنده شده حاصل از برهم‌کنش، در خروجی کاواک بوسیله آشکارساز همودواین اندازه‌گیری می‌شود. خروجی آشکارساز بصورت جریان الکتریکی (Y_t) است. سپس با استفاده از خروجی اندازه‌گیری‌شده و نیز با کمک معادلات مسیر کوانتومی بلاوکین، حالت سیستم کوانتومی (ρ_t) تخمین زده می‌شود. درنهایت با استفاده از تخمین حالت و قانون کنترلی طراحی‌شده u_t ، سیگنال کنترلی که امواج الکترومغناطیسی $H(u_t)$ درجهت مختصاتی x می‌باشد، به کوبیت اعمال می‌شود.



شکل ۳ – شماتیک سیستم کنترل پایدارساز سراسری اتم اسپین نیم (کوبیت): عملگر سیستم کوانتومی در جهت z با پالس لیزر تحریک شده و موج پراکنده شده در سمت دیگر کاواک بوسیله همودواین اندازه‌گیری می‌شود. با استفاده از سیگنال اندازه‌گیری‌شده، حالت سیستم تخمین زده می‌شود و درنهایت قانون کنترلی (موج الکترومغناطیس) در جهت x به اتم اعمال می‌شود.



شکل ۴ – شبیه‌سازی کنترل پایدارساز سراسری یک کوبیت

برای شبیه‌سازی این سیستم نیاز است تا هامیلتونین‌ها، عملگرهای اندازه‌گیری و ماتریس چگالی تعریف شوند. ماتریس چگالی بطور کلی برحسب ماتریس‌های گلمن قابل بیان است[23] که برای حالتی که ماتریس چگالی 2×2 می‌باشد، ماتریس‌های گلمن برابر با ماتریس‌های معروف پاولی[1] می‌باشد که عبارتند از:

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \qquad (۱۴)$$

با استفاده از این ماتریس‌های پایه، ماتریس چگالی بصورت

$$\rho=\tfrac{1}{2}\left(I+x\sigma_x+y\sigma_y+z\sigma_z\right)=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1+z&x-iy\\x+iy&1-z\end{pmatrix}$$

بیان می‌شود. نقاط تعادل یک کوبیت به ازای مقادیر $(x,y,z)=(0,0,\pm 1)$ می‌باشد که متناظر با ماتریس‌های چگالی زیر است:

$$\rho_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad,\quad \rho_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad (۱۵)$$

می‌خواهیم سیستم را به سمت ρ_{e_1} پایدار کنیم که متناظر با این مفهوم فیزیکی است که اتم دارای اسپین در جهت مثبت مختصات z باشد. در اینحالت تابع لیاپانوف تصادفی عبارت است از:

$V(\rho_t)=\alpha^2\left(1-\left\langle\rho_{e_1}\right\rangle\right)+\beta^2\left(1-\left\langle\rho_{e_1}\right\rangle^2\right)$. به دلیل اینکه اندازه‌گیری در جهت z انجام می‌شود: $L=\sigma_z$ و نیز اسپین درجهت z آزاد از اعمال کنترل است، پس $H_{free}=\sigma_z$. از طرفی، سیگنال کنترلی درجهت x اعمال می‌شود یعنی $H_{control}=\sigma_x$. آنگاه با کمی محاسبات ساده، عبارات بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&[H_{free},\rho_{e_1}]=[H_{free},\rho_{e_2}]=[0]\\&[H_{control},\rho_{e_1}]=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},[H_{control},\rho_{e_2}]=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\\&L^\dagger\rho_{e_1}L-\tfrac{1}{2}\{L^\dagger L,\rho_{e_1}\}=[0]\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

همچنین سیگنال کنترل با استفاده از قضیه۳ عبارت است از: $u_t=\left(\alpha^2+\beta^2(1+z)\right)y+2\beta(1-z^2)$ و نیز تغییرات کوچک زیر حاصل می‌شود:

$$\mathcal{R}\left(V(\rho_t)\right)=-\left\{\left(\alpha^2+\beta^2(1+z)\right)y-\beta(1-z^2)\right\}^2$$

و با توجه به اینکه در نقطه تعادل ρ_{e_2} داریم:

$$\begin{aligned}&V\left(\rho_t=\rho_{e_2}\right)=\alpha^2\left(1-\mathrm{tr}(\rho_{e_1}\rho_{e_2})\right)\\&+\beta^2\left(1-\mathrm{tr}^2(\rho_{e_1}\rho_{e_2})\right)=\alpha^2+\beta^2>0\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

شرط پایداری در احتمال برای این نقطه تعادل برقرار نیست. پس از کمی محاسبات، معادلات تک کوبیت برحسب ضرایب مختصات (x,y,z)، بصورت زیر حاصل می‌شود:

[1] Pauli matrices

$$\begin{cases} dx_t = -2\left(x_t + y_t\right)dt - 2x_t z_t dW_t \\ dy_t = 2(x_t - u_t z_t - y_t)dt - 2y_t z_t dW_t \\ dz_t = 2y_t u_t dt + (1 - z_t^2)dW_t \end{cases} \quad (۱۸)$$

با استفاده از این معادلات و سیگنال کنترلی طراحی‌شده در صفحه قبل، برای مقادیر $\alpha = 3, \beta = 1$، نتایج شبیه‌سازی یک کوبیت به ازای شرایط اولیه مختلف در شکل۴ مشاهده می‌شود. این نتایج نشان می‌دهد که اسپین اتم، به ازای کلیه شرایط اولیه در فضای حالت سیستم، به سمت مثبت دستگاه مختصات z دوران نموده و بطور سراسری پایدار شده است.

۸- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله، بطور مختصر درباره نظریه سیستم‌های کوانتومی باز که در تقابل با نویز فوتونی می‌باشند، بحث شد. از مهمترین دستاوردها در فیزیک کوانتومی، نظریه تخمین حالت سیستم با استفاده از اصل اندازه-گیری انحطاط‌ناپذیر است که بسیاری از دانشمندان و محققین ریاضی و فیزیک توانسته‌اند بر اساس این اصل، معادلات تخمین حالت سیستم کوانتومی را بدست آورند. این معادلات دیفرانسیل تصادفی، غیرخطی بوده و به منظور طراحی سیگنال کنترلی برای سیستم کوانتومی باز بسیار حائز اهمیت می‌باشند. همانطور که پیشتر در متن اشاره شد، روشهای کنترلی بسیاری برای این دسته معادلات ارائه شده است. ما توانستیم با استفاده از نظریه پایداری تصادفی، برای مسیر کوانتومی یک کنترل-کننده پایدارساز سراسری بدست آوریم. این کنترل‌کننده برای یک سیستم کوانتومی ساده (کوبیت) پرکاربرد در محاسبات کوانتومی و ساخت رایانه‌های کوانتومی، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. دینامیک کنترل‌شده کوبیت شبیه‌سازی شد و نتایج مطلوب (پایداری سراسری) حاصل شد.

در ادامه این موضوع تحقیقاتی، می‌توان به بحث پایدارسازی سراسری معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی پرداخت. باید دقت نمود که برای این مورد، در ابتدا نیاز است تا قضایای پایداری تصادفی کوانتومی، مشابه با قضایای۱ و۲ ذکرشده در این مقاله، توسعه یابد. سپس با استفاده از قضایای پایداری حاصل، می‌توان به طراحی کنترل-کننده، همانند قضیه۳، پرداخت. در مرجع [24] برخی از قضایای پایداری تصادفی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی بدست آمده است.

روشهای دیگر کنترلی مانند کنترل مقاوم و نیز کنترل بهینه تصادفی را می‌توان برای مسیر کوانتومی و نیز معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتومی توسعه داد. روش کنترل بهینه برای هردو دسته از معادلات کوانتومی به عنوان تحقیقات آینده ما در حال توسعه می‌باشد

مراجع

[1] Krausz, F., Ivanov, M., 2009, “Attosecond physics”, *Review of Modern Physics*, 81, 163-234.

[2] Lvovsky, A. I., Raymer, M. G., 2009, “Continuous-variable optical quantum-state tomography”, *Review of Modern Physics*, 81, 299-332.

[3] Král, P., Thanopulos, I., Shapiro, M., 2007, “Colloquium: Coherently controlled adiabatic passage”, *Review of Modern Physics*, 79, 53-77.

[4] Hohenester, U., Rekdal, P. K., Borzì, A., Schmiedmaye, J., 2007, "Optimal quantum control of Bose-Einstein condensates in magnetic microtraps", *Physical Review A*, 75, doi: 023602.

[5] Choi, S., Bigelow, N. P., 2005, "Initial steps towards quantum control of atomic Bose–Einstein condensates", *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 7, 413–420.

[6] Ketterle, E.W., 2001, "When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser", *Nobel Lecture*, 118-154.

[7] Dunning, F. B., Mestayer, J. J., Reinhold, C. O., Yoshida, S., Burgdörfer, J., 2009, “Engineering atomic Rydberg states with pulsed electric fields”, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys*., 42, doi: 2/022001.

[8] Fert, A., 2008, “Nobel Lecture: Origin, development, and future of spintronics”, *Review of Modern Physics*, 80, 1517-1530.

[9] Werschnik, J., Gross, E. K. U., 2007, “Quantum optimal control theory”, *Journal of Physics B*, 40 pp. 175–211.

[10] Hudson, R. L., Parthasarathy, K. R., 1984, “Quantum Itô’s formula and stochastic evolutions”, *Communications in Mathematical Physics*, 93, 301–323.

[11] Belavkin, V. P., 1992, “Quantum Continual Measurements and a Posteriori Collapse on CCR”, *Communications in Mathematical Physic*, 146, 611-635.

[12] Bouten, L., *Filtering and Control in Quantum Optics*, PhD Thesis، University of Nijmegen, 2004.

[13] Ticozzi, F., Viola, L., 2008, “Quantum Markovian Subsystems: Invariance, Attractivity and Control”, *IEEE Trans. Automatic Control*, 3, 9, 2048-2063.

[14] Van Handel, R., Stockton, J. K., Mabuchi, H., 2005, “Modeling and feedback control design for quantum

[20] Kushner, H. J., *Stochastic Stability and Control*, New York: Academic Press, 1967.

[21] Has'minski, R. Z., *Stochastic Stability of Differential Equations*, Amsterdam, the Netherlands: Sijthoff Noordhoff, 1980.

[22] Mao, X., *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood Publishing Chichester, 1997.

[23] Bertlmann R. A., Krammer, P., 2008, "Bloch vectors for qudits", *Journal of Physics A*, 41, doi: 235303.

[24] Sharifi, J., Momeni, H. R., "Quantum Stochastic Stability", quan-ph/0907.3452v1.

state preparation", *Journal of Optics B: Quantum Semiclass Optics*, 7, 179-197.

[15] Van Handel, R., Stockton, J. K., Mabuchi, H., 2005, "Feedback Control of Quantum State Reduction", *IEEE Trans. Automatic Control*, 50, 6, 768-780.

[16] Mirrahimi, M., Van Handel, R., 2007, "Stabilizing feedback controls for quantum systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46, 445–467.

[17] Altafini, C., Ticozzi, F., 2005, "Almost global stochastic feedback stabilization of conditional quantum dynamics", quant-ph/0510222v1.

[18] Tsumura, K., 2008, "Global Stabilization at Arbitrary Eigenstates of N-dimensional Quantum Spin Systems via Continuous Feedback", *American Control Conference*, 4148-4153.

[19] Breuer, H. P., Petruccione, F. *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, Clarendon, 2006.

Journal of Control
Vol. 3, No. 2, pp. 1-9, Summer 2009

Design of Multiple Model Controller using SOM Neural Network

Poya Bashivan[1], Alireza Fatehi[2]

Advanced Process Automation and Control (APAC) Research Group, Department of Control Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

[1]Poya_bashivan@yahoo.com, [2]fatehi@kntu.ac.ir

(Manuscript received: Feb. 20 2009, accepted Aug. 15 2009)

Abstract: A multiple-model adaptive controller is developed using the Self-Organizing Map (SOM) neural network. The considered controller which we name it as Multiple Controller via SOM (MCSOM) is evaluated on the pH neutralization plant. In MCSOM multiple models are identified using an SOM to cluster the model space. An improved switching algorithm based on excitation level of plant has also been suggested for systems with noisy environments. Identification of pH plant using SOM is discussed and performance of the multiple-model controller is compared to the Self Tuning Regulator (STR).
Keywords: Multiple models, Adaptive control**,** Self-organizing map, pH neutralization plant.

چکیده: در این مقاله یک کنترل کننده تطبیقی مدلهای چندگانه با استفاده از شبکه عصبی خود سازمانده (SOM) تولید می‌گردد. کنترل کننده مذکور که ما در اینجا آن را کنترل کننده چندگانه با کمک SOM یا به طور خلاصه MCSOM می‌نامیم، بر روی مدلی از فرآیند خنثی‌سازی مقدار pH ارزیابی می‌گردد. در کنترل کننده MCSOM، مدلهای چندگانه با بکارگیری شبکه عصبی SOM و با دسته‌بندی فضای مدلها انتخاب می‌گردند. همچنین یک الگوریتم بهبود یافته بر پایه سطح تحریک موجود در سیستم برای سیستمهای دارای نویز بالا پیشنهاد شده است. شناسایی فرآیند pH به وسیله شبکه عصبی SOM مورد بحث قرار گرفته و عملکرد کنترل کننده چندگانه با یک کنترل کننده رگولاتور خود تنظیم (STR) مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: مدلهای چندگانه، کنترل تطبیقی، شبکه عصبی خود سازمانده، فرآیند تنظیم pH

1- Introduction

There are many industrial processes which their nonlinear behavior cannot be modeled and controlled by a single mathematical model at least in their full operating range. Various solutions for controlling these systems have been suggested over past decades. Robust and adaptive control is two major approaches toward solving this problem. But these techniques can become quite restrictive in many applications. A more recent approach is the concept of multiple models along with a switching algorithm [14] which has been an area of interest in control theory in order to simplify both the modeling and controller design. Many global controller designs with the aid of multiple models have been reported on different applications [9, 5]. Narendra et al. [15] suggested an adaptive MM structure with switching based on a performance function. The key idea to this approach is the ability to approximate the behavior of nonlinear processes within a predefined neighborhood of operating point with a relatively simple linear model with a desired accuracy. By repeating this job in different key operating points of the nonlinear process, a bank of linear models can be created with each model corresponding to one of the operating points. An algorithm for switching between these models then should be used to find and select the best approximation of the nonlinear process from this bank as fast and as accurate as possible.

Selecting the proper bank of models is a key subject in control using multiple models. In many previous works on multiple model control, the bank of models is created by dividing the range of variations of all parameters of the assumed model structure and place a model for each combination of parameters [15, 3]. This method becomes inefficient when working with a nonlinear system with a high degree of nonlinearity. The proposed algorithm which is used here is an effort to solve this problem and introduce a method to create the model bank for any nonlinear system in a straight forward manner.

Corresponding Author: Poya Bashivan

In this paper, a multiple model adaptive strategy with pole placement controllers is considered. Models have the same structure but their parameter values are different for each model. To identify the bank of model, the multiple modeling using self-organizing map neural network (MMSOM) [6] is applied to the input/output data of the plant. Kohonen's self-organizing map (SOM) neural networks [12] is used in this algorithm to automatically assign parameters of models in the model bank based on the clustering of identification data from the RLS method. SOM have previously been used in a number of local modeling applications to divide the operating region of systems into local regions. In [6], at first, model of the system is identified using the linear identification methods and then the identification data are fed into the SOM network as training data. In this way we actually divide the parameter space of system with respect to the model structure in order to find the suitable models. Another method was used in [4], in which the SOM network was used to divide the state space of the system directly from the input/output data of the system.

The quality of the multiple controller depends not only on the bank of models but also on how to select the best model. An improved switching algorithm is used to find the best representing model from the generated bank of models. Parameters of the best model are then used in pole placement algorithm to generate control signal in each cycle. By including an adaptive model beside the fixed model in the bank, the multiple model controller will be able to control new operating areas of system with a performance at least as good as the conventional adaptive controller.

The paper is organized as follows. The general structure of multiple model control strategy together with some modification on it is described in the next section. A brief description of SOM and its application in MMSOM on generation of the bank of models is presented in section 3. In section 4 the total structure of the multiple model controller by SOM (MCSOM) is introduced. Simulation results from implementing the described control strategy on a simulated pH neutralization process are presented in section 5 and the paper is concluded in the final section.

2- Control Based on Multiple Models

A general block diagram of the closed loop system is shown in Fig.1. In this approach the understudy nonlinear system will be approximated by a set of linear models which will form a bank of models. The model which best suits the actual system's behavior will then be searched for in each cycle. For this purpose, a performance index is defined based on estimation errors of models. The performance index is given by:

$$J_i(t) = \alpha e_i^2(t) + \beta \sum_{k=1}^{M} e^{-\lambda k} e_i^2(t-k) \quad (1)$$

$\alpha, \beta > 0, 0 < \lambda \le 1$ are three weighting constants and $M \ge 1$ determines the range of effective past data. Relative values of α and β weights the current and previous estimation errors of models and λ is used as a forgetting factor for the past errors. In this manner the model corresponding to the lowest J_i will be the best model describes it at the time t. In order to avoid fast and unnecessary switches, a hysteresis function is added to the switching condition. The switch occurs only if the performance index for the in-loop model ($J_{in-loop}$) and the new best model ($J_{\min}$) satisfy the following condition:

$$J_{\min} < \delta J_{in-loop} \quad (2)$$

where δ is an arbitrary constant. This function prevents fast switches between models and decreases the unnecessary switches. But in the presence of measurement noise in the system this condition is not sufficient. Hence, another complementary condition is introduced in this paper to properly eliminate the remaining undesired switches and reduce chattering in the system response.

The proposed complementary condition is based on the excitation level of the process. The basic idea is to prevent switching between models if the process is in a steady state where it is not excited properly by the control signal. The level of excitation of the process is measured using the method proposed by Hugglund et al. [11] using a high pass filter. A predefined threshold is used to indicate the required level of excitation in order to allow a switch to a new model. This threshold is selected according to the existing noise characteristics. The excitation condition allows switching between models only if the following condition is satisfied:

$$\left| y_{hp}(t) \right| > w_0 \quad (3)$$

where w_0 is the desired switching threshold defined on the filtered output of the plant. Care must be taken when introducing this condition to the switching algorithm as high values for this threshold brings unnecessary delays into the switching algorithm and therefore can make the closed loop system to oscillate and even become unstable.

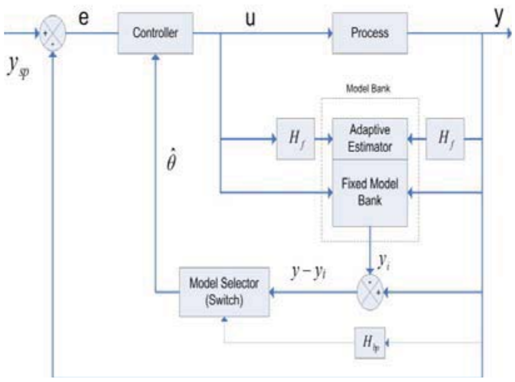


Fig.1 – General block diagram of the Multiple Model Structure

Note 1: A band-pass filter H_f is used to filter out the low and high frequency components from the identification data used in the adaptive estimator block [16] in which the poles of the filter are chosen 3 to 5 times faster than the dominant desired closed loop poles of the control system. This filter is necessary in order to map linear models into the nonlinear behaviors of the actual system. Also, a high-pass filter H_{hp} is used to impose excitation condition on the switching states. H_{hp} was designed by try and error such that the closed loop system remains stable and also the resulting switching condition only permits switching when enough variation exists in the system's output (i.e. enough excitation in the system's input).

Stability of the multiple model controller with switching algorithm based on performance indices similar to (1) and controller designed based on model reference adaptive controller (MRAC) method was previously studied in [15]. Theorem 1 summarizes the stability properties of this configuration as suggested in [15].

Theorem 1: Consider the switching and tuning system described above with N_1 fixed models and $N_2 \geq 1$ free-running adaptive models, where the latter are assumed to satisfy the identification conditions below:

$$\begin{aligned} &\hat{p}_j, \theta_j \in L^\infty \\ &\dot{\hat{p}}_j, \dot{\theta}_j \in L^\infty \cap L^2 \\ &\frac{e_j}{\sqrt{1+\overline{w}^T \overline{w}}} \in L^2 \\ &\varepsilon_{\theta_j}(t) \to 0 \end{aligned} \tag{4}$$

where $\hat{p}_j$ is the vector of model parameters, θ_j is the vector of controller parameters, e_j is the error between actual output of system and output of models and $\overline{w}$ is the sensitivity vector used in model reference method. Let $T_{\min} > 0$ be the minimum time between each successive switching of models. There exists a $T_s > 0$ such that if $T_{\min} \in (0, T_s)$, then all the signals in the overall system, as well as the performance indices $\{J_j(t)\}$, are uniformly bounded.

In the following lemma it is shown that in case of applying the excitation condition (3) for switching between models, the stability condition of theorem 1 can still be proved while $T_{\min}$ remains less than T_s.

Lemma 1: Assume the switching algorithm as described in theorem 1 together with the excitation condition of equation (3) for an observable plant. For any assumed variation of system output and $T_{\min}$ selected according to theorem 1, parameters of the high pass filter H_{hp} can be selected such that $|y_{hp}(T_{\min})| > w_0$ and the closed loop system remains uniformly bounded.

Proof: Suppose that output of the plant diverges and moves along

$$y(t) = Ce^{\lambda t} \tag{5}$$

where $\lambda > 0$. It will be shown that for every supposed trajectory like (5), parameters of the excitation condition can be found such that the time delay imposed by excitation condition before permitting a switch to a new model becomes less than the $T_{\min}$. Therefore the condition of theorem 1 satisfies despite the excitation condition.

Suppose that the output of system changes along the trajectory stated in (5) and the high pass filter used for detecting the excitation in system is as below:

$$G_{hp}(s) = \frac{s}{s+\gamma} \tag{6}$$

Therefore, the filtered output of the plant is obtained by:

$$\frac{Y_{hp}(s)}{U(s)} = \frac{Cs}{(s+\gamma)(s-\lambda)} \tag{7}$$

The time response of which will be as:

$$y_{hp}(t) = a_1 e^{-\gamma t} + a_2 e^{\lambda t}$$
$$a_1 = \frac{C\gamma}{\lambda + \gamma} \qquad (8)$$
$$a_2 = \frac{C\lambda}{\lambda + \gamma}$$

Define t_0 as the moment in which $y_{hp}(t)$ reaches w_0. w_0 can be computed from (9) while desired values are selected for t_0 and γ:

$$w_0 = a_1 e^{-\gamma t_0} + a_2 e^{\lambda t_0} \qquad (9)$$

Therefore, by selecting t_0 less than $T_{\min}$, the closed loop stability of the control system is .guaranteed.

Q.E.D.

3- Multiple Modeling by Self-organizing Map

Kohonen [12] developed the SOM with the ability to transform an input signal of arbitrary dimension into a lower dimensional discrete representation preserving topological neighborhoods. The SOM network has an input vector ψ_k with an arbitrary high dimension k. Each node in the network has a reference vector (RV) $w_{i,k}$ with the same dimension as the input vector. Training of SOM is started by introducing the index of the closest reference vector of the nodes to the input vector:

$$i = \arg\min_j \left|\psi_k - w_{j,k}\right| \qquad (10)$$

Then RV's of this node and its neighbors up to a certain geometric distance are updated as follows:

$$w_{i,k}(t+1) = w_{i,k}(t) + h_{ci}(t)\left[\psi_k(t) - w_{i,k}(t)\right] \qquad (11)$$

where $h_{ci}(t)$ is the neighborhood function. For convergence it is necessary that $h_{ci}(t) \to 0$ when $t \to \infty$. A typical choice in terms of the Gaussian function is[12]:

$$h_{ci}(t) = \alpha(t).\exp\left(-\frac{\left\|r_c - r_i\right\|^2}{2\sigma^2(t)}\right) \qquad (12)$$

where $r_c \in \Re^2$ and $r_i \in \Re^2$ are the location vectors of nodes *c* and *i*, respectively, in the array. $\alpha(t)$ is another scalar-valued learning-rate factor and the parameter $\sigma(t)$ defines the width of the function. Both $\alpha(t)$ and $\sigma(t)$ are some monotonically decreasing functions of time. In this way, the trained SOM will have more nodes (i.e. close RV's) in the regions where more input vectors existed.

Cho et al. [4] trained the SOM directly with input/output data and then the neuron weights of the trained SOM were converted to ARX model parameter vectors using the least square method.

Here we use the MMSOM algorithm proposed by Fatehi et al. [6] for identification of nonlinear plant. In MMSOM, an input vector of $\psi_{m+n} = [a_0,...,a_{n-1}, b_0,...,b_{n-d_0-1}]$ is considered as the input to the SOM. This input vector is the identification parameters of an instantaneous model of the plant, which identified using some online identification like recursive least square (RLS) algorithm. Therefore, the reference vector of the i^{th} node $w_{i,k}$ represents the parameters for the i^{th} model in the bank of models. After training the SOM neural network, models parameters approximate the statistical distribution of the input data [7].

The second approach will be more efficient in the sense that different operating regions with similar characteristics and model parameters will not be considered as different operating regions by the SOM and therefore less neurons is placed in the boundary regions of clusters compared to the first approach.

4- Structure of Multiple Model Controller by SOM (MCSOM)

The structure of multiple model controller by SOM (MCSOM) is as depicted in figure 1 in which the bank of models is constructed using MMSOM of section 3. Controllers for each of the models can be any kind of indirect adaptive controller like MRAC for continuous models or STR for discrete ones.

If MRAC is employed to design multiple controllers, stability of the control system can be guaranteed. For this purpose, first it should be noted that MCSOM without the excitation condition of section 2 has exactly the same structure as the controller assumed in by Narendra et. al [15]. The main difference between the MCSOM and the controller structure of [15] is in the way the bank of models is created. In MCSOM, SOM neural network is used but in [15] the bank of models is created by dividing the space of model parameters into a number of equal subspaces and assigning each a model. Since the bank of models created via the SOM network also satisfies the conditions of theorem 1 and the method with which the model bank was created does not violate theorem 1, the multiple model controller by SOM without the excitation condition stabilize the closed loop control system. Lemma 1 also proofs the stability under the excitation condition of equation (3). Therefore, stability of the whole control system of MCSOM is guaranteed for MRAC controller.

In the following section on application of MCSOM we used self-tuning regulator (STR) as the adaptive controller. In STR the controller is design based on pole placement method. Pole placement controller [1] is a simple and also a practically useful controller. The idea is to determine a controller with predefined closed loop poles. A brief description of this controller is presented here.

In STR an ARX model is used to describe the dynamic of the process:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + v(t) \qquad (13)$$

where y is the output, u is the input, v is a disturbance and q is the forward shift operator. It is assumed that the A polynomial is monic and also A and B polynomials are relatively prime. A general controller with the following structure is assumed

$$Ru(t) = Tu_c(t) - Sy(t) \qquad (14)$$

The controller has two degrees of freedom. The closed loop characteristic polynomial is

$$AR + BS = A_c \qquad (15)$$

The R and S polynomial can be solved from the diophantine equation (15) as the minimum degree solution when the closed loop poles are known. The desired closed loop response from the command signal to system output is described as

$$A_m y_m(t) = B_m u_c(t) \qquad (16)$$

which is a design parameter and is selected such that the closed loop response has suitable speed and characteristics. The T polynomial is then found from the following condition:

$$BT = B_m \qquad (17)$$

The R and S polynomials can be designed to integrate different characteristics into the controller. For example an integral action can be added by putting one root of the R polynomial in 1 and selecting the R polynomial by the following form

$$R = R'(q-1) \qquad (18)$$

5- Simulation Results

The MCSOM algorithm is demonstrated on a model of pH neutralization process. This process is a highly nonlinear plant which is widely used in industries. A schematic diagram of the pH plant is shown in Fig. 2.

The continuous stirred tank neutralizer has three inlet streams: base, acid and buffer. Acetic acid of concentration C_a flows in at a rate of f_a and reacts with sodium hydroxide of concentration C_b which flows into the tank at a rate of f_b. Buffer flow rate is f_c and is considered to control the tank level through a PID controller. The liquid exit the tank with the flow rate of f_o. Nominal operating conditions of the simulated pH system are summarized in Table 1.

The nonlinear model of this pH neutralization plant is presented in [10]. The model is assumed to be carried out under the assumptions of perfect mixing, constant temperature and complete solubility of the ions involved. Complete details about the chemical reactions and the exact mathematical model can be found in [10]. The objective is to control the pH value of the outlet stream by controlling the base flow.

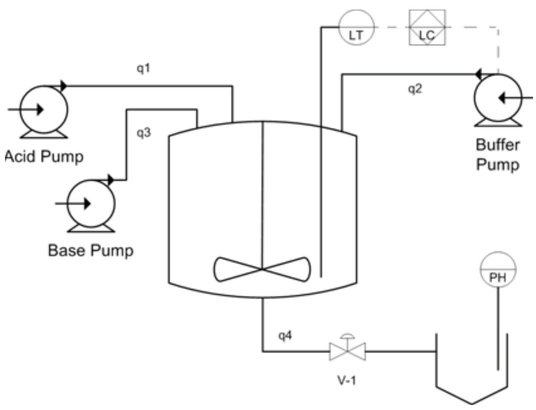


Fig.2 – Schematic Diagram of pH Plant

Table 1. Operating conditions of simulated pH plant

Operating Parameter	Parameter Value
Acid concentration (C_a)	0.001 mol/lit
Acid flow rate (f_a)	0.3 mlit/sec

Base concentration (C_b)	0.001 mol/lit
Cross sectional area of tank	70 cm^2
acid dissociation constant (K_a)	1.75e^{-5}
Water dissociation constant (K_w)	1e^{-14}
Tank level (h)	17 cm

5-1- Identification of pH Process

Fig. 3 illustrates the block diagram of identification of the pH process model. Here we have used MMSOM to extract the statistical features of identified parameters produced by the RLS method.

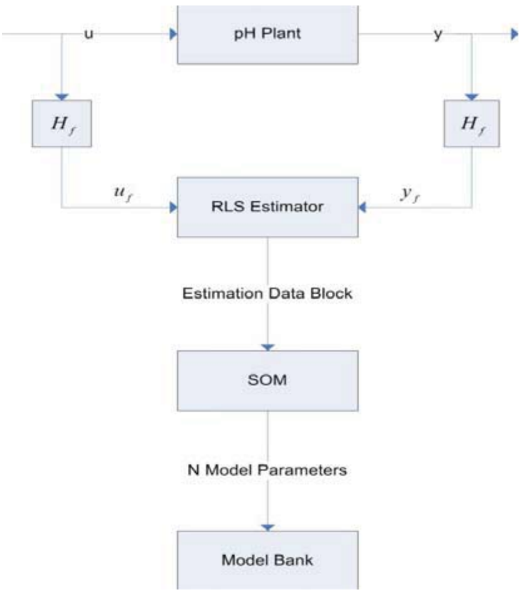


Fig.3 – Block Diagram of identification and model generation process

In the first step plant is excited by a suitable input sequence of enough persistently excitation (PE) order. A random binary signal (RBS) pattern was used as the identification input of the pH plant. The RBS signal was constructed such that the plant reaches the steady state in about 20 percent of toggles between high and low limits so that both low and high frequencies are excited. The input pattern was biased to identify the plant around 5 different operating points. The titration curve of the under study pH plant is shown in Fig.4. As the control variable is the base flow the curve has a positive derivative. Operating points were selected based on the value of derivative along the full operating region. Selected operating points are shown in Fig.4. Fig. 5 demonstrates the total input signal applied to the base flow pump.

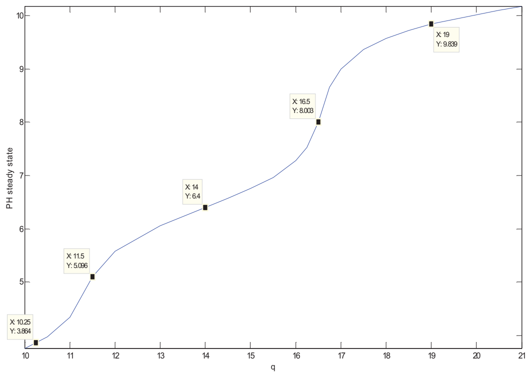


Fig.4 – Operating points on steady state diagram of input flow/pH

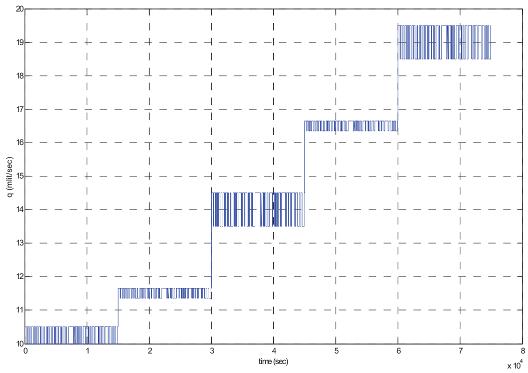


Fig.5 – Applied input signal for pH neutralization plant identification

The RLS method was applied to estimate the model parameters. A first order ARX model was used as the model structure. A forgetting factor of 0.98 was used to discard the old data and dealing with the problem of time-varying parameters.

In the next step, data from the RLS estimation was given to the SOM network. Input vectors are the estimated parameters of the ARX model which are two in our case. A two dimensional SOM network was then used to cluster the estimation parameter into some clusters. SOM distributes its RVs across the input space according to the statistical properties of the input data. Therefore, relative number of input data in each region acts as a weight for the number of required models in each region. This means that more identification data in a specific operating region of system forces SOM to place more models in that region on the cost of less models in other regions. Equal identification time intervals were used for each operation region to give equal weights to each region of pH plant.

Fig.6 shows the graphical representation of U-matrix [13] of the trained SOM. Areas with lighter color code indicate the closeness of adjacent neurons and those with darker color code indicates higher distance between adjacent neurons. By utilizing this graphical representation we can distinguish clusters of neurons. Each cluster represents one operating region of the plant behavior. Clusters are distinguished with areas with lighter color codes and their boundaries with lines of neurons with darker color codes.

Although the pH system was excited around 5 operating points, only three different regions can be distinguished from the U-matrix of trained SOM. This is because of closeness of model parameters in some of the operating points and also the continuity of SOM lattice. Similar results have been obtained by Galan et al. [8] using the gap metric method which confirms the results from utilizing SOM on model generation.

Here the SOM network functions as a nonlinear map to automatically assign proper models to different operating areas of the nonlinear system based on the identification data of the nonlinear system.

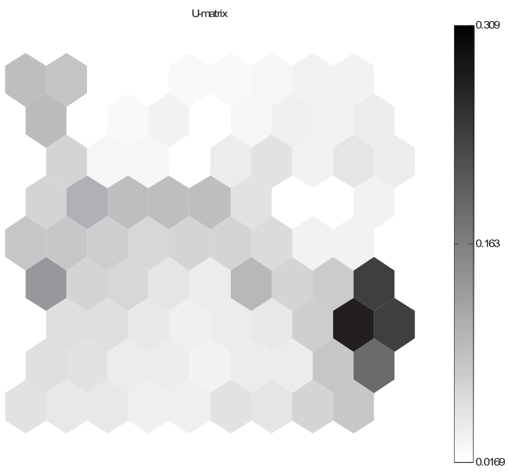


Fig.6 U-Matrix of trained network

5-2 Controller design and implementation

In this section, the proposed control strategy is evaluated using the nonlinear model of pH neutralization process. Results have been compared with a self tuning regulator (STR).

A total of 26 models are used in order to control the pH plant in this paper. The bank of models consists of 25 fixed models generated by the SOM and one free running adaptive model to give the control system the flexibility of working in unexplored regions. In selecting the dimensions of the SOM network, i.e. the number of fixed models, a compromise should be made between the required computational load and the accuracy of models.

Weighting constants of the performance index are selected as $\alpha,\beta = 1, \lambda = 0.65$, M = 30 and the Hysteresis constant is $\delta = 0.8$. Pole placement controller with integral action is employed as the closed loop controller. The desired closed loop pole is placed at 0.95.

Note 2: If the applied control technique does not include an integral action, there will be bias in tracking and steady state errors will be inevitable due to slight model mismatches.

Closed loop response of pH neutralization plant for big setpoint steps is shown in Fig.7. The result illustrates that the MCSOM controller have faster and more stable response comparing to the STR. Some observations from the simulations are given below:

1) The MCSOM improve the transient response of the closed loop system compare to the STR. This improvement is the consequence of switching to more appropriate models during the transient response. Switching in MCSOM skips the transient time of adaptation needed in the STR. The switching delay in MCSOM which is a result of the hysteresis and the excitation condition can be adjusted using the design parameters and are much lower than the transient adaptation time in STR.

2) The STR suffer from oscillations as the output approaches the high gain area of around pH = 8.5 due to the delay caused by adaptation process. Unlike the STR, the MCSOM avoided the oscillation by switching to a more appropriate fixed model from the model bank.

Fig.8 shows the results from [3]. A multiple-model PID controller was used to control a similar pH neutralization plant. Performance of the switching controller was compared to a multiple model interpolation (MMI) controller which is a tuning method which estimates the model parameters whenever poor performance of the current controller is detected. Results show that although the switching controller has improved the response in case of stability and speed, but the switching controller still experiences very different performances around different setpoints. For example around the high-gain region of pH=8, oscillations are observed while around the lower-gain area of pH=6, we have an over-damped response.

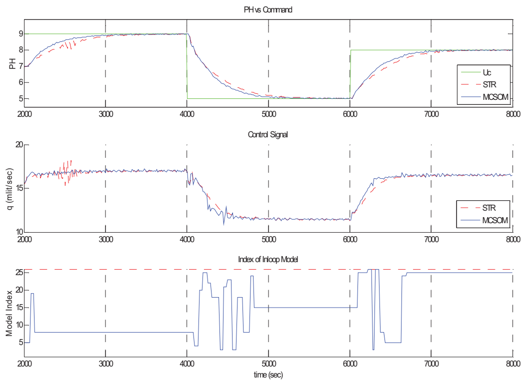


Fig.7 – Closed loop response of MCSOM and STR controllers in presence of measurement noise

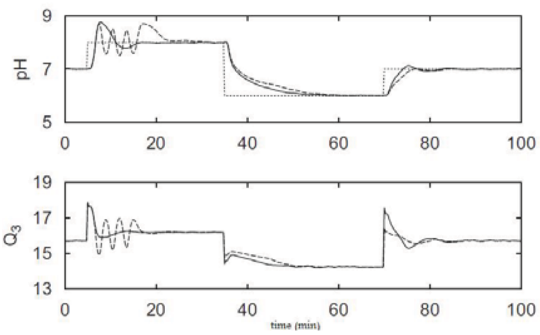


Fig.8 – Results from [3].switching controller (—), MMI re-tuning controller (- - -), setpoint and true values (…).

Fig.9 illustrates the effect of the excitation condition on the number of unnecessary switches. A threshold of 0.9 is considered for the excitation condition as illustrated in Fig. 10. During the steady state, the plant behavior does not change. However, due to the effect of noise and similarity of the behavior of some of the models, there might be some unnecessary switches between the models. Using excitation condition on the switches decreases the unnecessary switches between the models and smoothes the output signal.

6- Conclusion

In this paper, a multiple model pole placement control strategy via SOM which divides the operating region of plant into sub-regions is presented. The model set design problem in multiple model controller is solved by using SOM. SOM clusters the instantaneous models into some models which stores in the bank of model. Simulation results indicated superior performance compared to the STR controller.

An improved switching algorithm based on the excitation level of the process is suggested when multiple model controller is applied to the process. Simulation studies indicated better performance of the multiple-model controller when this condition is applied to the switching algorithm.

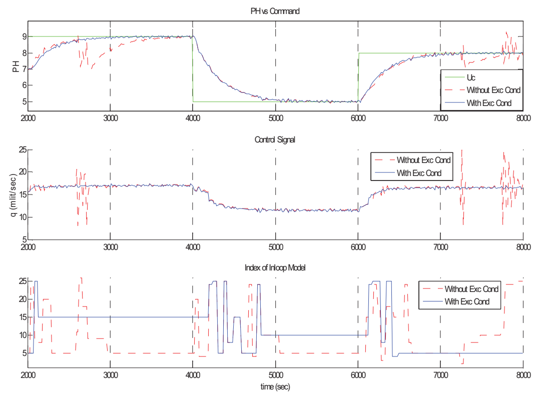


Fig.9 - Effect of adding the new excitation condition to the switching algorithm on the closed loop response in presence of measurement noise.

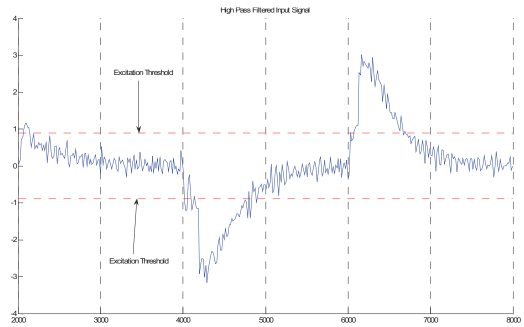


Fig.10 - High pass filtered input signal and the excitation condition

References

[1] Astrom, K. J. and Wittenmark, B., *Adaptive Control*, 2nd ed. Addison-Wesley, NY, 1995.

[2] Bashivan, P., Fatehi, A., December 2008, "Multiple-model control of pH neutralization plant using the SOM neural networks", *IEEE Conference & Exhibition on Control, Communication and Automation (INDICON)*, Kanpur, India, 11-13.

[3] Böling, J. M., Seborg D. E., Hespanha J. P., 2007, "Multi-model adaptive control of a simulated pH neutralization process", *Control Engineering Practice,* 15, 663-672.

[4] Cho, J., Principe, J. C., Erdogmus, D., and Motter, M. A., 2007 “Quasi-Sliding Mode Control Strategy Based on Multiple-Linear Models”, *Neurocomputing,* 70, 960-974.

[5] Dougherty, D., Cooper, D., 2003, “A Practical Multiple Model Adaptive Strategy for Multivariable Model Predictive Control”, *Control Engineering Practice*, 11, 649-664.

[6] Fatehi, A., Abe, K., Aug/Sept 1999, “Plant identification by SOM neural networks”, *The European Control Conference* (ECC’99), Karlsruhe, Germany, F190.

[7] Fatehi, A., Abe, A., October 2007, “Statistical properties of multiple modeling by self-organizing map (MMSOM),” *The Mediterranean Journal of Measurement and Control*, 3, 4.

[8] Galán, O., Romagnoli, J. A., Palazoglu, A., Arkun, Y., 2003, “Gap Metric Concept and Implications for Multilinear Model-Based Controller Design”, *Ind. Eng. Chem. Res*, 42, 2189-2197.

[9] Galán, O., Romagnoli, J. A., Palazoglu, A., 2004, “Real-time implementation of multi-linear model-based control strategies”, an application to a bench-scale pH neutralization reactor. *Journal of Process Control*, 14, 571–579.

[10] Hall, R. C., Seborg, D. E., “Modeling and Self-Tuning Control of a Multivariable pH Neutralization Process, Part I: Modeling and Multiloop Control. In: *Proc. ACC.* Pitts-burgh. PA., 1822-1828.

[11] Hugglund, T., Astrom, K. J., 2000, “Supervisory of Adaptive Algorithms”, *Automatica*, 36, 8, 1171-1180.

[12] Kohonen, T., *Self-Organizing Maps*, Springer, Berlin, 1995.

[13] Kraaijveld, M. A., Mao, J., Jain, A. K., 1992, “A Nonlinear Projection Method Based on Kohonen’s Topologypreserving Maps”, *Proc. 11th IAPR Int. Conf. on Pattern Recognition*.

[14] Murray-Smith, R., Johnsen, T.A., 1997, “Multiple Model Approaches to Modeling and Control”, *Taylor & Francis Inc, London*.

[15] Narendra, K. S., Balakrishnan, J., 1997, “Adaptive Control Using Multiple Models”, *IEEE Trans. on Automatic Control,* 42, 2, 171-187.

[16] Peymani F., E., Fatehi, A., Khaki Sedigh, A., September 2008, "Automatic Learning in Multiple Model Adaptive Control", *International Conference on Control*, UKACC, Manchester, UK.

Journal of Control
Vol. 3, No. 2, pp. 10-16, Summer 2009

Robust H_∞ Control of an Exerimental Inverted Pendulum using Singular Perturbation Approach

R. Amjadifard[1], M. T. H. Beheshti[2], H. Khaloozadeh[3], K. A. Morris[4]

[1]Department of Computer Engineering, Faculty of Engineering, Tarbiat Moallem University, Tehran, Iran, amjadifard@tmu.ac.ir

[2]Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran, mbehesht@modares.ac.ir

[3]Faculty of Electrical and Computer Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran, h_khaloozadeh@kntu.ac.ir

[4]Department of Applied Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, Canada
kmorris@birch.uwaterloo.ca

(Manuscript received: Feb. 23 2009, accepted Jul. 25 2009)

Abstract: In this paper, robust H_∞ control of an experimental system is considered. This system consists of a pendulum free to rotate 360 degrees that is attached to a cart. The cart can move in one dimension. The linearized model of the system is used and transformed to a linear diagonal form. The system is separated into slow and fast subsystems. We consider the fast dynamics as disturbance and this is used to design a H_∞ controller for a system with lower order than the original system.
It is shown via a theorem that there is a state feedback controller such that the closed loop system will be stable. Experimental results indicate that the performance is superior to the full-order LQR controller previously used. Material presented at 16th IFAC world congress.

Keywords: H-infinity control, Singular Perturbation Methods, Robust performance.

چکیده: در این مقاله کنترل مقاوم H_∞ یک سیستم آزمایشگاهی در نظر گرفته می شود. این سیستم، یک پاندول معکوس با قابلیت چرخش ۳۶۰ درجه است که به یک گاری متصل است. گاری توانایی حرکت در یک بعد را دارد. مدل خطی شده سیستم به فرم قطری تبدیل شده و سپس به زیر سیستمهای کند و تند تفکیک می گردد. دینامیکهای تند بعنوان اغتشاش در نظر گرفته شده اند و کنترل کننده H_∞ برای سیستمی با درجه کمتر از سیستم اصلی طراحی شده است. با استفاده از یک قضیه نشان داده شده است که کنترل کننده فیدبک حالتی وجود دارد که سیستم حلقه بسته را پایدار سازد. نتایج آزمایشگاهی نشان میدهد که عملکرد این سیستم بهتر از سیستم کنترل شده با کنترل کننده مرتبه کامل LQR است که قبلاً برای این سیستم آزمایشگاهی طراحی گردیده است.

کلمات کلیدی: کنترل H_∞، روشهای آشفتگی تکین، عملکرد مقاوم.

1- Introduction

Van der Schaft [1] indicated that in control of nonlinear systems, if the H_∞ control problem for the linearized system is solvable, then one obtains a local solution to the nonlinear H_∞ control problem. One problem with H_∞ designs is that the order of the controller is at least the order of the plant, and larger if, as is common, weights are included in the design.

An approach to reduced order controller design based on the idea that one can consider the fast dynamics of a system as disturbances is first introduced by Khalil [2] and then is discussed by Yazdanpanah et al. and Yazdanpanah and Karimi [3]-[4], in which the authors introduced a new algorithm for the problem of robust regulation for linear singularly perturbed systems via treating the fast modes of system as uncertainty using the small gain theorem. Then the authors in [5] extended the method introduced in [3] to a class of nonlinear

Corresponding Author: Roya Amjadifard

affine systems. Also, in [6] and [7] robust stability and disturbance attenuation for a class of linear singularly perturbed systems has been considered. In [8], problem of disturbance attenuation via H_∞ approach for nonlinear singularly perturbed systems has been solved by considering the related HJI (Hamilton-Jacobi-Isaacs) inequality, defining a reduced Hamiltonian system, fast ε -independent PDE (Partial Differential Equation), and then constructing the H_∞ composite controller. And in [9] the writers have shown that if the reduced order system associated with the original system is stabilizable or has uncertainties matched with the input, then the closed loop reduced-order system has the same property.

In the present paper, the fast stable part of the system is considered as uncertainty and then the controller is designed for the remaining part of the system. The remaining slow subsystem has an order less than the original one. The only information must be known, is the H_∞ norm of the fast subsystem. The part of the system regarded as uncertainty is not entirely arbitrary since the small gain theorem must hold.

Most systems have a lower gain in high frequencies than in the low frequencies and so this approach has wide applicability. No other dynamical information is required. This is advantageous since in general the high frequency aspect of a model is not well determined. With this idea, one can use the H_∞ method to design a robust controller using the slow subsystem as the nominal plant.

The proposed method is applied to a flexible joint robot manipulator ([5]) and the simulation results showed the desired behavior of system.

In this work, the approach to an unstable system is extended. The stabilization of an inverted pendulum-cart is considered. First, the nonlinear part of the system is eliminated, since it is stable and small. Then the linearized model is transformed to Jordan canonical form and the slow and fast modes are separated. The stability of the controlled system is proved through a theorem [5] and it has been verified on an experimental apparatus. The performance is shown to be superior to a linear quadratic regulator previously implemented by Landry et al. [10].

2- System Definition

A pendulum is attached to the side of a cart by means of a pivot that allows the pendulum to swing in the xy-plane over 360 degrees. (See Fig. 1.) A force $F(t)$ can be applied to the cart in the x direction. In Table 1 there is a complete list of notation.

The equations of motion for the system are (which is mentioned, *e.g.* by Landry et al., [10])

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta=F(t),\\ ml\ddot{x}\cos\theta+\tfrac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}-mgl\sin\theta=0.\end{aligned} \qquad (1)$$

Parameter values for the apparatus that is made by Quanser Consulting Inc. [11] are given in Table 2. Based on previous experiments, a value $\varepsilon=8$ for the friction parameter was used.

Using the state variables

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x,\dot{x},\theta,\dot{\theta})^T \qquad (2)$$

equations (1) can be written in first-order form as

$$\dot{X}=f(X)=\begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{4F(t)-4\varepsilon x_2+4mlx_4^2\sin x_3-3mg\sin x_3\cos x_3}{4(M+m)-3m\cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \dfrac{(M+m)g\sin x_3-(F(t)-\varepsilon x_2)\cos x_3-mlx_4^2\sin x_3\cos x_3}{l(\frac{4}{3}(M+m)-m\cos^2 x_3)} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

The force $F(t)$ on the cart is due to a voltage $V(t)$ applied to a motor:

$$F(t)=\alpha V(t)-\beta\dot{x}(t)\,. \qquad (4)$$

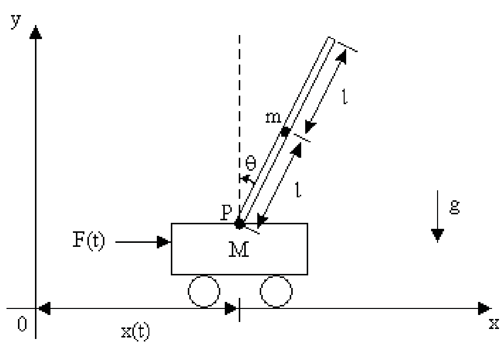


Fig. 1. Inverted pendulum system

Table 1. Notation

$x(t)$	Displacement of the centre of mass of the cart from point O
$\theta(t)$	Angle the pendulum makes with the top vertical
M	Mass of the cart
m	Mass of the pendulum
L	Length of the pendulum
l	Distance from the pivot to the centre of mass of the pendulum
P	Pivot point of the pendulum
$F(t)$	Force applied to the cart

The second term is due to electrical resistance in the motor. The physical constants are

$$\alpha = \frac{K_m K_g}{Rd}, \quad \beta = \alpha^2 R.$$

The voltage $V(t)$ can be varied and is used to control the system. A system of differential equations can be written in a simpler form using the normal form method. In general, the normal form method is a series of nonlinear coordinate transformations in order to eliminate or simplify the equation nonlinearities. Although the transformations are nonlinear functions of the state variables, they are found by solving a sequence of linear equations [12].

In this paper using the Taylor expansion of $f(X)$ about the equilibrium point (upright position of pendulum) we obtain the linearized model of the system (3). Then, using the idea of application of the normal form method ([13]-[14]), we apply a similarity transformation to convert the linearized model to a diagonal form.

The model for the controlled system linearized about the upright position is then

$$\dot{X} = AX + bV(t) \tag{5}$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-4(\varepsilon+\beta)}{m+4M} & \dfrac{-3mg}{m+4M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{3(\varepsilon+\beta)}{l(m+4M)} & \dfrac{3(m+M)g}{l(m+4M)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{4\alpha}{m+4M} \\ 0 \\ \dfrac{-3\alpha}{l(m+4M)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

It is well-known (e.g. as indicated by [10]) that for the uncontrolled system (*V(t)=0*), the cart-pendulum at rest in any upright position *(x,0,nπ,* 0) is at an unstable equilibrium point.

3- H_∞ Controller design

A similarity transformation $X = Ty$ is used (see also, [5] and [14]), where T contains the system eigenvectors, to transform A into Jordan canonical form. Equation (5) becomes

$$\dot{y} = Jw + BV(t) \tag{7}$$

Table 2. Parameter values of the inverted pendulum

Parameter	Value	Description
w_M	0.360 Kg	Weight mass
M	0.455 Kg+ w_M	Mass of the cart
m	0.210 Kg	Mass of the pendulum
L	0.61 m	Length of the pendulum
g	9.8 m/s	Acceleration due to gravity
ε	Unknown	Viscous friction
K_m	0.00767 V/(rad/sec)	Motor torque and back emf constant
K_g	3.7	Gearbox ratio
R	2.6 Ω	Motor armature resistance
d	0.00635 m	Motor pinion diameter

where $J = T^{-1}AT$ is a diagonal matrix of system eigenvalues and $B = T^{-1}b$.

We can recognize the slow and fast dynamics of the system equation (7), which is in a diagonal form, and decompose it into two subsystems as

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \Lambda_{11} X_1 + B_1 u \\ \dot{X}_2 &= \Lambda_{22} X_2 + B_2 u \end{aligned} \tag{8}$$

where $\Lambda_{11} = diag\{0,5,-4.74\}$, and $\Lambda_{22} = -18.33$.

The vector B is a permutation of elements of B_1 and B_2. Here X_1 indicates the slow dynamics of system, and X_2 the fast dynamics of system. Also, u indicates the input control $V(t)$.

If we consider the slow subsystem as the nominal system [5] with the controlled output Z

$$Z = C_1X_1 + D_{12}u := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} X_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u$$

and the measured output Y

$$Y = C_2X_1 + D_{21}X_2$$

(where C_2 is chosen to be I and C_1, C_2, D_{12}, D_{21} are all matrices with proper dimensions), then the nominal system with full information and with no disturbance can be written as

$$P \sim \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 & B_1 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

As mentioned earlier the stable subsystem with fast dynamics will be considered as uncertainty Δ.

This means rewriting the system (8) is needed so that the fast dynamics appear as disturbance to the nominal system.

A state transformation $[X_1, X_2]^T = M[\overline{X}_1, \overline{X}_2]^T$ is applied to the system, where M^{-1} has the structure

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}.$$

The equations of system (8) after transformation are (see Fig. 2)

$$\dot{\overline{X}} = \overline{\Lambda}\overline{X} + \overline{B}u$$

where

$$\overline{\Lambda} = M^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} \overline{\Lambda}_{11} & \overline{\Lambda}_{12} \\ 0 & \overline{\Lambda}_{22} \end{bmatrix},$$
$$\overline{B} = M^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}.$$

The new equation for the fast sub-system, or uncertainty block, is

$$\dot{\overline{X}}_2 = \overline{\Lambda}_{22}\overline{X}_2 + \overline{B}_2u \qquad (9)$$

Note that the coefficient of $\overline{X}_1$ in the fast sub-system is zero. Also, the equations for the slow sub-system, or nominal block, become

$$\overline{P} \sim \begin{bmatrix} \overline{\Lambda}_{11} & \overline{\Lambda}_{12} & \overline{B}_1 \\ \overline{C}_1 & D_{11} & D_{12} \\ \overline{C}_2 & \overline{D}_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z = \overline{C}_1\overline{X}_1 + D_{11}\overline{X}_2 + D_{12}u,$$
$$Y = \overline{C}_2\overline{X}_1 + \overline{D}_{21}\overline{X}_2$$

where

$$\overline{C}_1 = C_1M_{11}^{-1},\ \overline{C}_2 = C_2M_{22}^{-1},$$
$$D_{11} = -C_1M_{11}^{-1}M_{12}M_{22}^{-1},$$
$$\overline{D}_{21} = D_{21} - C_2M_{11}^{-1}M_{12}M_{22}^{-1}.$$

In Fig. 2, Z is the input to the uncertainty block. The fast dynamics are exponentially stable. Indicating the transfer function by

$$\Delta(s) = (sI - \Lambda_{22})^{-1}B_2,\ \|\Delta\|_\infty \le \gamma_1,$$

where $\gamma_1 = 0.301$.

Since $\overline{\Delta}(s) = \overline{C_2}(sI - \overline{\Lambda}_{22})^{-1}\overline{B}_2 = C_2(sI - \Lambda_{22})^{-1}B_2$, the H_∞-norm of the uncertainty block is $\overline{\gamma}_1 = 0.301$.

The H_∞ controller design problem for the system shown in Fig. 2, will lead to a H_∞ controller for the slow sub-system. The H_∞ controller will be designed here via state feedback (or full-information). The next step is to determine $\overline{\gamma}_2 = \min\gamma$, where $\overline{\gamma}_2$ indicates the H_∞-norm of the controlled slow sub-system, and a corresponding controller that achieves this.(9)

The transformation M must be chosen so $\overline{\gamma}_1.\overline{\gamma}_2 < 1$. By trial and error, a suitable transformation was found:

$$M = \begin{bmatrix} I_3 & M_{12} \\ 0_{3\times1} & 1 \end{bmatrix},\ M_{12} = 0.0095[1\ 1\ 1]^T.$$

It is straightforward to verify that the slow sub-system is stablizable and detectable. As indicated by

Doyle et al. [15], it then follows that $\bar{\gamma}_2$ is the smallest value of γ such that the eigenvalues of the Hamiltonian matrix

$$H = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{11} & \gamma^{-2}\bar{\Lambda}_{12}\bar{\Lambda}_{12}^T - \bar{B}_1\bar{B}_1^T \\ -\bar{C}_1^T\bar{C}_1 & -\bar{\Lambda}_{11}^T \end{bmatrix}$$

are not on the imaginary axis.

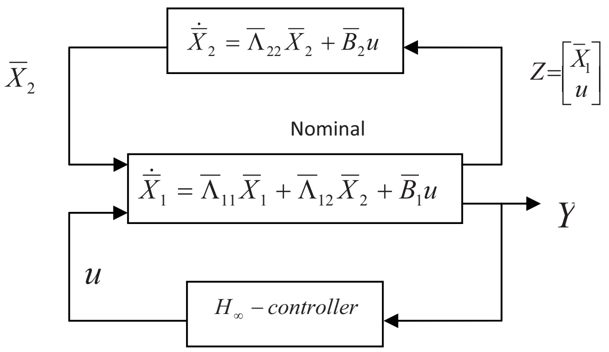


Fig. 2. Block diagram of system with fast dynamics as uncertainty

Theorem 1 [15]: Under the standard assumptions of stabilizability-detectability of [16], for a given $\gamma > 0$, there is an internal stabilizing controller such that $\left\| T_{z\bar{X}_2} \right\|_\infty \le \gamma$, if and only if X_∞ is a positive semi-definite solution of algebraic Riccati equation

$$\bar{\Lambda}_{11}^T X_\infty + X_\infty \bar{\Lambda}_{11} + X_\infty(\gamma^{-2}\bar{\Lambda}_{12}\bar{\Lambda}_{12}^T - \bar{B}_1\bar{B}_1^T)X_\infty + \bar{C}_1^T\bar{C}_1 = 0$$

and the matrix $\bar{\Lambda}_{11} - (\bar{B}_1\bar{B}_1^T - \gamma^{-2}\bar{\Lambda}_{12}\bar{\Lambda}_{12}^T)X_\infty$ is a stability matrix. Then the related controller will be in the form

$$u(t) = K\bar{X}_1(t)\,,\; K = -\bar{B}_1^T X_\infty \bar{X}_1(t) \qquad (10)$$

The following theorem guarantees the stability of the closed loop system.

Theorem 2 [5]: For the original system (3) and with $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1^{-1}$, there is a state feedback controller as (10) such that the closed loop system will be locally asymptotically stable.

Proof: The state space realization of the original closed loop system with controller (10) can be written as

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{X}}_1 \\ \dot{\bar{X}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{11} + \bar{B}_1 K & \bar{\Lambda}_{12} \\ 0 & \bar{\Lambda}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} + h.o.t. \qquad (10)$$
$$= N \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} + h.o.t.$$

where *h.o.t.* denotes higher order terms in the Taylor expansion. It is obvious that the eigenvalues of N contain the eigenvalues of matrices $\bar{\Lambda}_{22}$ and $\bar{\Lambda}_{11} + \bar{B}_1 K$. As assumption, $\bar{\Lambda}_{22}$ is a stability matrix; also, based on Theorem 1, the controller (10) is a stabilizing controller for the nominal system $\bar{P}$, thus $\bar{\Lambda}_{11} + \bar{B}_1 K$ is a stability matrix. It follows from the small gain theorem that the feedback connection of two input-output stable systems will be input-output stable provided the $\gamma_1.\gamma < 1$ or $\gamma < \gamma_1^{-1}$, in which γ_1 is the H_∞ norm of uncertainty block, and γ is the H_∞ norm of nominal closed loop system with controller that is greater than γ_2 determined from the Hamiltonian matrix. Thus, the linearized approximation of the whole dynamics is asymptotically stable, and therefore, using Lyapunov's linearization theorem, the original system will be locally asymptotically stable.

4- Experimental Results

The H_∞ controller of equation (10) is applied to the pendulum system. Only the position of the cart and the pendulum angle can be measured. An observer is required to obtain $\dot{x}$ and $\dot{\theta}$. In order to compare to the results shown by Landry et al. ([10]), the same Luenberger observer was used. The same linear-quadratic regulator (LQR) used in [10] was used as a comparison for the H_∞ state-feedback controller designed using the slow-fast approach in this paper (or for simplicity, the 'slow-fast controller').

The controlled pendulum angle and the cart position are shown in Fig. 3. The equilibrium x_1 (cart position) is arbitrary, as can be seen from equation (3).

In Fig. 4, the input controller signals, produced by the slow-fast and the LQR controllers, are shown. Although the performance of the two controlled systems is similar, the slow-fast controller achieves this performance with a smaller controller signal and also, with a system of lower degree.

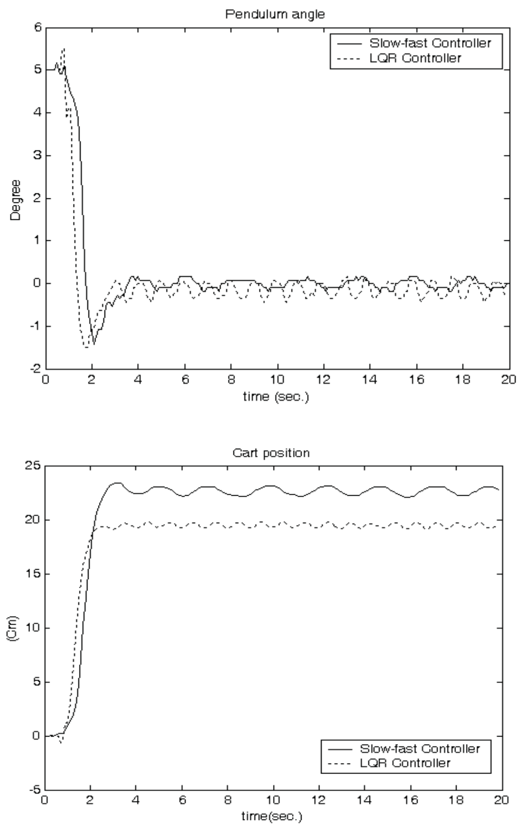


Fig. 3. System behavior via the two controllers without any additional disturbance or noise. (The equilibrium x_1 , i.e. cart position, is arbitrary)

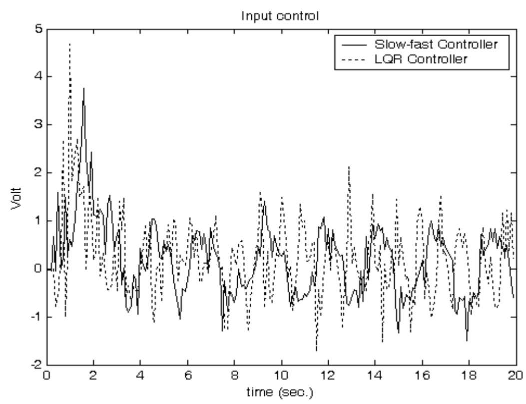


Fig. 4. The input controller signal, produced by the two controllers in a condition without any additional disturbance or noise.

The response of the controlled pendulum system to a disturbing “tap” on the pendulum controller was investigated for each controller. This “tap” was a disturbing impulse which was applied to the pendulum controlled by both controllers, similarly. Fig. 5 shows the angular position of pendulum and the cart position under this disturbance.

In Fig. 6, the behavior of the two controlled systems with a time delay of 0.035 seconds in the controller output is shown.

The performance of the slow-fast controller is superior to that of the LQR controller for both the disturbed and delayed systems.

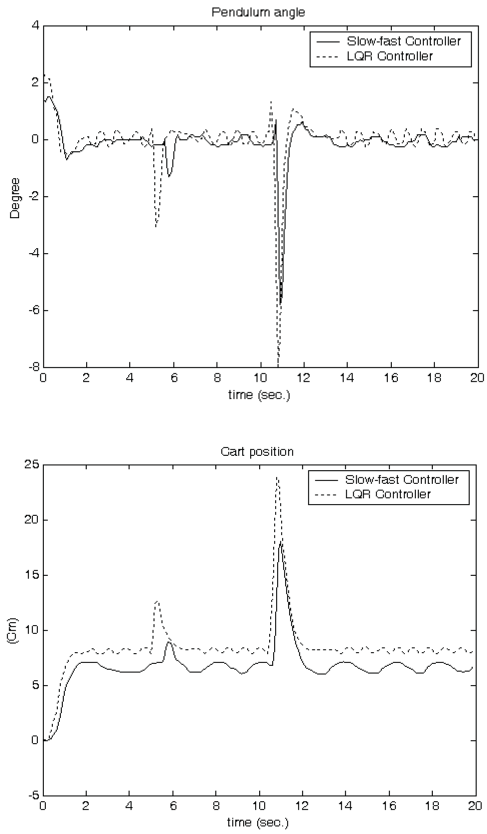


Fig. 5. The behavior of pendulum system with an additional disturbance on pendulum via the two controllers. (The equilibrium x_1 , i.e. cart position, is arbitrary)

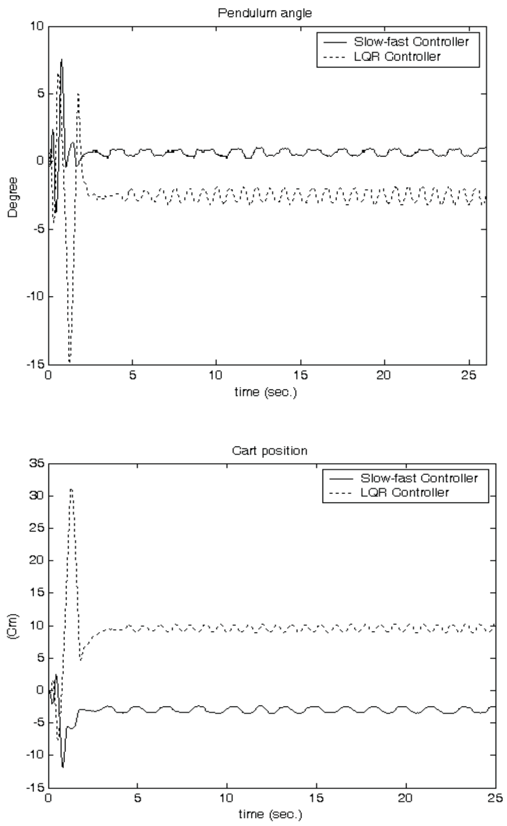


Fig. 6. Pendulum system behavior with a transport delay of 0.035 sec. in the controller output. (The equilibrium x_1, i.e. cart position, is arbitrary)

5- Conclusion

In this paper robust stabilization of an experimental pendulum system using slow-fast decomposition approach is considered. Considering the fast dynamics as norm-bounded uncertainty, a H_∞ controller for the reduced order system (slow subsystem) was designed. It was shown through a theorem that the closed- loop system would be stable. The resulting controller was implemented. Experimental results indicate that the performance is superior to the full-order LQR controller previously used, i.e. the slow-fast controller achieves the performance with a smaller controller signal and also, with a system of lower degree.

References

[1] Van der Schaft, A. J., 1992, "L_2 -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ control," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37, 6, 770-784.

[2] Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, (2^{nd} Ed.), chapter 10, 433-435. Prentice Hall, New Jersey, 1996.

[3] Yazdanpanah, M. J., Patel, R. V. and Khorasani, K., 1997, "Robust Regulation of a Flexible-Link Manipulator Based on a New Modeling Approach," *Proceeding of the 36^{th} Conf. on Decision and Contr.*, pp1321-1326, USA.

[4] Yazdanpanah, M. J., Karimi, H. R., 2002, "The Design of H_∞ Controller for Robust Regulation of Singularly Perturbed Systems," *AmirKabir Journal*, No. 49, pp. 9-23.

[5] Amjadifard, R., Beheshti, M.T.H., Yazdanpanah, M. J., Momeni, H. R., 2004, "Robust Regulation of a Nonlinear Flexible Joint Robot Manipulator using Slow-Fast Decomposition Approach," *Journal of Engineering Faculty- Ferdowsi university of mashhad*, 16^{th} year, 1.

[6] Karimi, H. R., Yazdanpanah, M. J., 2001, "Robust stability disturbance attenuation for a class of uncertain singularly perturbed systems," Int. *J. of Control, Automation and system*, 3, 3, 164-169.

[7] Karimi, H. R., Yazdanpanah, M. J., Patel, R. V. and Khorasani, K., 2006, "Modeling and Control of Linear Two-Time Scale Systems: Applied to Single Link Flexible Manipulator," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 45, 3, 235-265.

[8] Fridman E., 2001, "State Feedback H_∞ Control of Nonlinear Singularly Perturbed Systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11, 12.

[9] Corless, M., Garofalo, F., Glielmo, L., 2007, "Robust Stabilization of Singularly Perturbed Nonlinear Systems", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 3, **2**, 105-114.

[10] Landry, M., Campbell, S. A., Morris, K. A. Aguilar, C., 2005, "Dynamics of an Inverted Pendulum with Delayed Feedback," *SIAM Jour. on Applied Dynamical Systems*, 4, 2, 333-351.

[11] Quanser Consulting Inc. IP-02 Self- Erecting, "Linear Motion Inverted Pendulum", *Quanser Consulting Inc,* 1996.

[12] Kahn, P. B. and Zarmi, Y., *Nonlinear Dynamics: Exploration Through Normal Forms*, John Wiley & Sons. 1998.

[13] Khajepour, A., Golnaraghi, M. F., Morris, K. A., 1997, "Application of Centre Manifold Theory to Regulation of a Flexible Beam," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 119, 158-165.

[14] Khajepour, A., 2000, "Nonlinear Controller Design for Asymmetric Actuators", *Journal of Vibration and Control,* 6, 1-23.

[15] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P., Francis, B. A., 1989, "State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34, 831-846.

[16] Green, M., Limebeer, D. J. N., *Linear Robust Control*, Chapter 8, Prentice Hall, 1995.

Journal of Control
Vol. 3, No. 2, pp. 17-24, Summer 2009

An Algorithm for Constructing Nonsmooth Lyapunov Functions for Continuous Nonlinear Time Invariant Systems

Alireza Faraji Armaki[1], Naser Pariz[2], Rajab Asgharian[3]
[1]PhD student, Electrical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, arfaraji@kashanu.ac.ir
[2]Associate professor, Electrical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, n-pariz@um.ac.ir
[3]Professor, Electrical Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, rajab.asgharian@gmail.com

(Manuscript received: Jun. 22 2009, accepted Aug. 28 2009)

Abstract: This paper presents an algorithm based on the Generalized Lyapunov Theorem (GLT) for constructing nonsmooth Lyapunov Function (LF) for nonlinear time invariant continuous dynamical systems which can be differentiable almost every-where. A new method is firstly defined that a neighborhood of the equilibrium point (origin) is partitioned into several regions by means of the coordinate hyperplans (axes) and system state equations (nullclines); hence, the number of regions is a function of number of system states. Then, this method selects a LF in each region by original nonlinear model of system, based on the several proposed analytical Notes. These Notes select LF's and solve continuity problem of them on the boundaries of regions in more cases. The existing methods that use piecewise model of system in each region for constructing piecewise LF are approximate and computational, but, the defined method is completely exact and analytic. The different steps of this method are proposed by means of a non-iterative algorithm for constructing a nonsmooth continuous Generalized Lyapunov Function (GLF) in whole neighborhood of the origin. The ability of this algorithm is demonstrated via a few examples for constructing LF and analyzing system stability.
Keywords: Stability analysis, Continuous nonlinear dynamical systems, Generalized Lyapunov theorem, Nonsmooth continuous Lyapunov functions.

چکیده: در این مقاله الگوریتمی بر اساس قضیه لیاپانوف تعمیم یافته، جهت ساخت توابع لیاپانوف ناهموار برای سیستمهای دینامیکی غیر خطی پیوسته نامتغیر بازمان که می تواند در برخی نقاط نامشتق پذیر باشد، ارائه می شود. ابتدا روشی جدید معرفی می شود که توسط آن، همسایگی نقطه تعادل (مبدا) توسط محورها و معادلات حالت سیستم به چندین ناحیه تقسیم می گردد، بنابراین تعداد نواحی تقسیم بندی شده تابعی از تعداد متغیرهای حالت است. سپس این روش با استفاده از مدل اصلی غیرخطی سیستم در هر ناحیه یک تابع لیاپانوف پیدا می کند، که انتخاب این توابع لیاپانوف و پیوسته نمودن آنها بر روی مرزهای نواحی مبتنی بر چند نکته تحلیلی می باشد. برخلاف سایر روشهای موجود که جهت ساخت توابع لیاپانوف تکه ای در هر ناحیه از مدل تکه ای سیستم استفاده می کنند و تقریبی و محاسباتی هستند، این روش کاملاً دقیق و تحلیلی است. مراحل ساخت یک تابع لیاپانوف تعمیم یافته پیوسته و ناهموار برای کل همسایگی مبدا بر اساس روش معرفی شده در قالب یک الگوریتم غیر تکرار شونده ارایه شده و توانایی آن جهت ساخت توابع لیاپانوف و تحلیل پایداری سیستمها با چند مثال نشان داده شده است.
کلمات کلیدی: تحلیل پایداری،سیستم دینامیکی غیرخطی پیوسته، قضیه لیاپانوف تعمیم یافته، تابع لیاپانوف تعمیم یافته پیوسته ناهموار

1- Introduction

Lyapunov theorem is used for system stability analysis, which is an important issue in nonlinear dynamical systems theory. A main advantage of this theorem is reduction of system stability analysis with several dimensional equations, to the study of a LF with one-dimensional equation. There is no a systematic approach to choose LF for any nonlinear system, and the choice of LF is not unique.

Several nonsmooth Lyapunov stability theorems are defined in the articles. These theorems can be classified in two main categories. The first category determines the generalized derivative of a nonsmooth LF on its nonsmooth surfaces, via differential inclusion or similar approaches. In these theorems, the important step is to verify the generalized derivative of a nonsmooth LF on its nonsmooth surfaces. For example, [5] defined a nonsmooth Lyapunov stability theorem for a class of

Corresponding Author: Alireza Faraji Armaki

nonsmooth Lipschitz continuous LF's using Filipov's differential inclusion and Clarke's generalized gradient. Based on the latter paper, [6] constructed the LF's for several complicated systems.

The second category of nonsmooth Lyapunov stability theorems does not determine the generalized derivative of a nonsmooth LF on its nonsmooth surfaces. These theorems analyze system stability without calculation of gradient vector to the system solutions. Several of these theorems are mentioned below.

[1] proved a GLT for nonlinear dynamical systems, in which, LF can be discontinuous except for the origin, so, all regularity assumptions are removed for the system dynamics and LF's. Our algorithm in this paper is proposed using this GLT.

[7] proved a version of the Lyapunov's theorem for time invariant systems of ordinary differential equations, whose right hand side is continuous, but not Lipschitz continuous, in general. For such systems, stability cannot be characterized in general by means of smooth LF's.

[8] defined another theorem for constructing weak GLF for time invariant continuous systems. In nonsmooth Lyapunov stability theorems, the LF's can be nonsmooth except for the origin. Therefore, based on these theorems, nonsmooth LF's can be constructed for both continuous and discontinuous systems.

A number of articles have dealt with the continuity type for LF, for example; [2] proved for nonlinear systems, which are at least continuous, that the existence of a continuous LF does not imply the existence of a locally Lipschitz continuous LF, and also the existence of a Lipschitz continuous LF doesn't imply the existence of continuously differentiable LF.

The nonlinear systems can be analyzed by partitioning the state space into several divisions. By this method, firstly, in each division a Piecewise Model (PM) of the original nonlinear system is selected, and using it, a LF is constructed in each region. After that, the constructed LF's under special conditions are combined, and a piecewise LF for the PM of the whole system is obtained. This method should finally prove this obtained piecewise LF is useful for stability analysis of original nonlinear system.

Various applications of this method have been reported in the literature; for example; [9] obtained a switching LF for a class of nonlinear continuous systems. It approximates a PM by a switching fuzzy model in each quadrant. The stability is analyzed via a derived Piecewise Quadratic (PWQ) LF for each region. The parameters of quadratic matrix are solved by Linear Matrix Inequalities (LMI).

Johansson and Rantzer defined a method for time invariant nonlinear systems with Piecewise Affine (PWA) dynamic model [3], [4]. In this method around the origin is divided into some polyhedral cells with pair-wise disjoint interior, then, a PWQ LF is computed in each of them. The search for a PWQ LF is formulated as a convex optimization problem in terms of LMI.

[10] defined a construction method of PWQ LF for a simplified Piecewise Linear (PWL) model of the original nonlinear system. This method divided around the origin into a lot of simplices, then, computes a PWQ LF in each division by means of the variable gradient method.

[11] proposed an algorithm for constructing a PWA LF for nonlinear continuous time invariant ordinary differential equations in a family of simplices by linear programming.

[12] considered a parametric PWL model of nonlinear system, over a simplicial partitions in an area around the equilibrium point. It constructed a PWL LF using linear programming methods.

[13] computed global LF for nonlinear systems by means of radial basis functions.

All PM methods in above, have these disadvantages; they are approximate and computational, also, the result of the system analysis depends on the state space partitioning. To obtain sufficient resolution in the analysis, it is often necessary to refine an initial partition. Such refinements can be targeted towards increasing the accuracy of the model, or towards increasing the flexibility of the LF computations.

This paper describes a non-iterative algorithm, which is introduced for constructing nonsmooth continuous GLF for nonlinear time invariant continuous systems that can be differentiable almost every-where. The proposed algorithm is based on a GLT in [1].

This algorithm has three main stages. In the first stage, it defines a method in accordance to PM method for dividing neighborhood of the origin into several regions by means of coordinate hyperplans (axes) and state equations (nullclines), therefore, in this method the number of regions is a function of number of system states.

In the second stage, this method constructs a LF in each region by means of the original nonlinear model of system and several analytical Notes. Unlike the existing PM methods, that use an approximate model of nonlinear system, this method is completely exact. Also, the existing PM methods are computational, but this method is analytic.

In the final stage, it combines selected LF's and constructs a nonsmooth continuous GLF with a condensed formula based on a proved theorem.

The restrictions of this algorithm are; original selection of LF's for regions, and then, continuity of LF's on boundaries of regions, hence, the Notes are proposed to solve these restrictions in more cases.

In the next section, the mathematical framework for this paper is given. A new method for partitioning the neighborhood of the origin into several regions is presented in section 3. Section 4 explains construction of GLF. A proposed algorithm for obtaining GLF is defined in section 5. The capability of this algorithm is illustrated, when employed on two examples, in section 6.

2- Mathematical framework

Consider a nonlinear time invariant continuous dynamical system (1), which can be differentiable almost every-where.

$$\dot{x}=f(x(t)),\ t\geq 0,\ x(t)\in D\subseteq R^n,\ f:D\rightarrow R^n,\ f(0)=0\in D \quad (1)$$

where D is an open set and $x:T\subseteq R\rightarrow D$ is said to be a solution to (1) on the time interval T, providing $x(t)$ satisfies (1) for all $t\in T$. f is such that the solution $x(t)$ is well defined on $T=[0,\infty)$, that is, assume, for every $y\in D$ there is a unique solution $x(t)$ of (1) on T, such that $x(0)=y$, and all the solutions $x(t), t\geq 0$ are continuous functions of the initial conditions $x_0=x(0)\in D$ [1]. GLF is lower semi-continuous and differentiable almost every-where. Two definitions and a theorem are recalled from [1], below.

Definition 1 [1]: A function $V:D\rightarrow R$ is lower semi-continuous on D, if for every sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset D$ such that, $\lim_{n\rightarrow\infty} x_n = x$, then $V(x)\leq \liminf_{n\rightarrow\infty} V(x_n)$.

Definition 2 [1]: A lower semi-continuous, positive definite function $V(x)$, which is continuous at the origin, and satisfies $V(x(t))\leq V(x(\tau))$ for all $t\geq\tau\geq 0$ is called a GLF.

Theorem 1 [1]: Consider the nonlinear dynamical system (1) and let, $x(t)$, $t\geq 0$, denotes the solution to (1). Assume that, there exists a lower semi-continuous, positive-definite function $V:D\rightarrow R$ such that $V(x)$ is continuous at the origin and $V(x(t))\leq V(x(\tau))$ for all $t\geq\tau\geq 0$. Then the zero solution $x(t)\equiv 0$ is Lyapunov stable.

3. Partition method (definition of region)

Let, the coordinate hyperplans (axes) $x_i=0$, and nullclines $\dot{x}_i=f_i=0$, $i\in\{1,2,...,n\}$, partition an open set $D\subset R^n$ in a neighborhood of the origin into several regions, where each region is denoted by R_j, $j\in\{1,2,...,m\}$. Obviously, a common boundary of two neighboring regions is a coordinate hyperplan or a nullcline. If a nullcline is along a coordinate hyperplan, then the coordinate hyperplan is considered. The common vertex of all regions is the origin. Each region has n common boundaries $S_{ji}=R_j\cap R_{ji}$, which are the coordinate hyperplans or nullclines with its neighboring regions R_{ji}.

4. Construction of GLF

For constructing GLF for (1), a smooth LF is selected in each region; hence, each LF is non-increasing within its corresponding region. Moreover, if all neighboring LF's be equal on their common boundary, therefore, the condition $V(x(t))\leq V(x(\tau))$ for all $t\geq\tau\geq 0$ is satisfied, so, one can use theorem 1 for constructing GLF.

Assume, $v_j(x)$ in R_j satisfies (2),(3).

$$\forall j, v_j(x): R_j\subset D\subset R^n\rightarrow R, v_j(0)=0 \quad (2)$$

$$\forall x\in B_j=B\cap R_j: (v_j(x)>0 \text{ for } x\neq 0) \text{ and } \dot{v}_j(x)\leq 0 \quad (3)$$

$$\forall x\in B_j=B\cap R_j: (v_j(x)>0 \text{ for } x\neq 0) \text{ and } \dot{v}_j(x)<0 \quad (3')$$

Where B is an open set in neighborhood of the origin and $\forall j \quad 0\in B_j\subset B\subset D$.

$$\forall x\in S_{jk}\cap B: v_j(x)=v_k(x) \quad (4)$$

If (4) is satisfied on all common boundaries of regions, then all neighboring LF's are continuous on their common boundary S_{jk}, in B.

Definition 3: A proposed parametric LF is a time-invariant smooth function $v_j(x)$, in R_j, that satisfy (2) and (3).

At first, $v_j(x)$ is often selected for more regions as $v_j(x)=\alpha|h_l(x)|, \alpha\in R^+$, where, $h_l, l=1,2$ is a time-invariant smooth function in R_j.

Definition 4: A proper LF is a proposed parametric LF which satisfies (4) at some common boundaries of its region.

Definition 5: A special LF is a proper LF which satisfies (4) on all common boundaries of its region, and its parameters are identified.

Definition 6: An orthant is the n-dimensional generalization of the two dimensional quadrant and three dimensional octant.

To construct GLF, the following steps must be carried out: firstly, proposed LF's are chosen for more regions. Secondly, using these proposed LF's, proper LF's are constructed. Special LF's are obtained by means of the proper LF's, and finally, a GLF is defined using the special LF's. Each kind of boundaries, which are the coordinate hyperplans, nullclines or both of them, will provided different relationships for LF's. An algorithm is proposed for constructing GLF.

5. Proposed algorithm

Please, trace each step with its corresponding step in examples, to illustrate algorithm.

Divide a neighborhood of the origin into several regions by the coordinate hyperplans and nullclines. Select the lowest order of all LF's equal together to satisfy (4) on the coordinate hyperplans, else, the continuity of GLF is not provided on them.

Select proper LF for regions, which are on either side of the nullclines that aren't along the coordinate hyperplans by the next Note.

Note 1: Let, a nullcline $S_{jk}: \dot{x}_i=0$, be the common boundary of R_j and R_k and it isn't along the coordinate hyperplans. Let, $|f_{i1}(x)|$ and $|f_{i2}(x)|$ be proposed LF's in R_j and R_k, respectively, such that, $f_{i1}(x)-f_{i2}(x)=f_i(x)=\dot{x}_i$ (5)
then, $v_j(x)=\alpha_{jk}|f_{i1}(x)|$ and $v_k(x)=\alpha_{jk}|f_{i2}(x)|, \alpha_{jk}\in R^+$ are proper LF's for R_j and R_k, because, $f_{i1}(x)-f_{i2}(x)=f_i(x)=\dot{x}_i$ and $\forall x\in S_{jk}\cap B \Rightarrow \dot{x}_i=f_i(x)=0$

so, $\forall x\in S_{jk}\cap B \Rightarrow f_{i1}(x)-f_{i2}(x)=0 \Rightarrow |f_{i1}(x)|=|f_{i2}(x)|$, thus, $v_j(x)=v_k(x)$ and holds (4) true.

The previous step offers n LF's for a region whose all boundaries are nullclines which are not along the coordinate hyperplans. For such a region, compare the offered LF's with LF's of its neighboring regions, and then, for this region select a LF equal to one of the LF's of its neighboring regions.

Select proposed LF for a region whose boundaries are only coordinate hyperplans, by the next Note.

Note 2: Suppose, R_j is a region whose boundaries are the coordinate hyperplans $S_{ji}: x_i=0$, this region is an orthant. Let, LF's of all neighboring regions of R_j, v_{ji}, are selected by the previous steps. Therefore, each $v_{ji}(x)\big|_{x_i=0}$ is a LF for $S_{ji}: x_i=0$ in B.

To satisfy (4), $v_j(x)\big|_{x_i=0}=v_{ji}(x)\big|_{x_i=0}$ must be satisfied for all $S_{ji}: x_i=0$ in B. It imply that, (6) can satisfy (4) on all common boundaries of R_j by adding some statements with each $v_{ji}(x)\big|_{x_i=0}$ or a selection of appropriate parameters for LF's in the next step.

$$v_j(x)=\sum_{i=1}^{n} b_{ji}v_{ji}(x)\big|_{x_i=0}, b_{ji}\in R^+ \tag{6}$$

(when, $n=2$, if $b_{j1}=b_{j2}=1$, then $v_j(x)\big|_{x_1=0}=v_{j1}(x)\big|_{x_1=0}$, $v_j(x)\big|_{x_2=0}=v_{j2}(x)\big|_{x_2=0}$, hence, $v_j(x)=v_{j1}(x)\big|_{x_1=0}+v_{j2}(x)\big|_{x_2=0}$ satisfies (4) in R_j.) Moreover, if (6) satisfies (3) in R_j, then, (6) is a proper LF on this orthant.

If the following Note is satisfied on all coordinate hyperplans, then parameters of LF's and special LF's are specified

Note 3: Let, $R_j\subset Q_J$ and $R_k\subset Q_K$ be two neighboring regions, where Q_J and Q_K denote orthants and $S_{jk}: x_i=0$ is their common boundary. All LF's in Q_J and Q_K are already selected in previous steps.

Assume, $d_{jk}(x)=d_j(x)-d_k(x)$ (7)

Such that, $d_j(x)=v_j(x)\big|_{x_i=0}, d_k(x)=v_k(x)\big|_{x_i=0}$.

If a selection of appropriate parameters for $v_j(x)$ and $v_k(x)$ satisfies $d_{jk}(x)=0$, then these proper LF's are continuous on $S_{jk}:x_i=0$, and holds (4) true.

Else if, the lowest order of $v_j(x)$ and $v_k(x)$ is deleted in $d_{jk}(x)$ by a selection of appropriate parameters for them, then, the value of $d_{jk}(x)$ is smaller than the value of each LF in neighborhood of the origin (note that, the lowest order of all LF's for system must be equal).

Therefore, by adding $d_{jk}(x)$ with all LF's in Q_K (or $-d_{jk}(x)$ with all LF's in Q_J), new LF's in Q_J and Q_K are constructed, as the new constructed $v_j(x)$ and $v_k(x)$ are continuous on $S_{jk}:x_i=0$, and holds (4) true.

If this Note is repeated on all coordinate hyperplans, then, parameters of LF's and all special LF's may be identified.

If the special LF's for all regions are identified, then, construct a nonsmooth continuous GLF for system (1) by following Note.

Note 4: A nonsmooth continuous function is constructed by combination of the special LF's, $v_j(x), j\in\{1,\dots,m\}$

$$V(x)=\sum_{j=1}^{m} v_j(x)\Psi_j(x) \qquad \Psi_j(x)=\begin{cases}1 & x\in B_j\\ 0 & x\notin B_j\end{cases} \tag{8}$$

where $\Psi_j(x)$ is a characteristic function.

(9) defines derivative of (8) almost every where.

$$\dot V_f(x)=\sum_{j=1}^{m} \dot v_j(x)\Psi_j(x) \qquad a.e. \tag{9}$$

According to theorem 2, $V(x)$ in (8) is a GLF, and the origin is (asymptotically) stable.

Theorem 2: Consider the nonlinear dynamical system (1). Let, $B\subset D$ be an open set, $0\in \mathring{B}$ where is the interior of B and $\mathring{B}_j$ be the interior of B_j, $0\in B_j\subset R_j$. Suppose, D is divided by the coordinate hyperplans and nullclines of system into several regions R_j.

If $V(x)$ in (8) which is constructed by the special LF's, satisfies (2) and (3) within all regions in B, and also, if it satisfies (4) on all common boundaries of the regions in B, then, (8) is a GLF for (1), and the origin is Lyapunov stable. Moreover, If all special LF's satisfy (3') within their regions, then, origin is asymptotically stable.

Proof:

* Since, $V(x)$ satisfies (2), $\forall j, v_j(0)=0\Rightarrow V(0)=0$, therefore, $V(x)$ is continuous at the origin.

* Since, $V(x)$ satisfies (3),

$\forall x\in B_j\subset B: V(x)=v_j(x)>0$ for $x\neq 0$, hence, $V(x)$ is a positive-definite function, also, $\forall x\in B_j, \dot v_j(x)\le 0$, but, $\forall x\in S_{jk}-\{0\}$, $V(x)$ is non-differentiable in general, therefore, $\dot V_f(x)$ isn't often defined on the boundaries. Thus, $\forall x\in \mathring{B}_j\subset B: \dot V_f(x)=\dot v_j(x)\le 0$, i.e. $V(x)$ is differentiable and non-increasing within all regions in B.

* Since, $\forall x\in S_{jk}\cap B: V(x)=v_j(x)=v_k(x)$ in (4), thus, $V(x(t))\le V(x(\tau))$ for all $t\ge\tau\ge 0$ for any $x_0\in B$.

* Since, $V(x)$ has a zero minimum value in B, for every sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset B$, so, $\lim_{n\to\infty} x_n=0$. Hence, $\inf_{n\to\infty} V(x_n)$ exists and $\liminf_{n\to\infty} V(x_n)\ge V(0)=0$, i.e. $V(x)$ is a lower semi-continuous function.

* According to theorem 1, since, function $V:D\to R$ is lower semi-continuous, positive-definite and continuous at the origin, and moreover, $V(x(t))\le V(x(\tau))$ for all $t\ge\tau\ge 0$, (8) is a GLF for (1) in B and $x(t)\equiv 0$ is Lyapunov stable.

* Moreover, If each special LF's satisfies (3') within its region $\forall x\in \mathring{B}_j\subset B: \dot V_f(x)=\dot v_j(x)<0$, it means that $V(x)$ is decreasing within all regions in B, therefore, $\dot V_f(x)<0$ $a.e.$ along the system solutions in B.

* In addition, the special LF's satisfy (4) on all common boundaries, $\forall x\in S_{jk}\cap B: V(x)=v_j(x)=v_k(x)$, so, $V(x(t))<V(x(\tau))$ for all $t\ge\tau\ge 0$ for any $x_0\in B$.

* $V(x)$ in (8) has a zero minimum value in B, if $t\to+\infty \Rightarrow V(x(t))\to 0$, that it means the origin is asymptotically stable.

(18)

6- Examples

In this section, the GLF is constructed for two systems. The stability of the origin in these examples is approved by simulation with MATLAB software. These examples demonstrate ability of the proposed algorithm for system stability analysis.

Example 1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) = x_2 - x_1 \tan(x_2^2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x) = (\operatorname{sgn}(x_1) - 2)x_1 - 4sat(x_2) + \sin^2(x_1) \end{cases}$$
$$-0.2 \le sat(x) \le 0.2$$

Figure 1 shows a neighborhood of the origin for this continuous system. The simulation in figure 2 shows that the system is stable. The proposed algorithm is implemented for constructing GLF.

The neighborhood of the origin is divided by the axes and nullclines into 6 regions.

In the second quadrant, on $\dot{x}_2 = 0$,

$4x_2 - \sin^2(x_1) = -3x_1$, therefore,

$$v_2(x) = \alpha_{23}|f_{21}(x)| = \alpha_{23}(4x_2 - \sin^2(x_1)),$$
$$v_3(x) = \alpha_{23}|f_{22}(x)| = -3\alpha_{23}x_1.$$

In the fourth quadrant, on $\dot{x}_2 = 0$,

$-4x_2 + \sin^2(x_1) = x_1$, therefore,

$$v_5(x) = \alpha_{56}|f_{21}(x)| = \alpha_{56}(-4x_2 + \sin^2(x_1)),$$
$$v_6(x) = \alpha_{56}|f_{22}(x)| = \alpha_{56}x_1.$$

No region exists with nullcline boundaries.

Consider the first and third quadrants of this two dimensional system:

In the first quadrant,

$$v_2(x)\big|_{x_1=0} = 4\alpha_{23}x_2,\ v_6(x)\big|_{x_2=0} = \alpha_{56}x_1,$$

so, $v_1(x) = \alpha_{56}x_1 + 4\alpha_{23}x_2$, and holds (4). After checking, we find that, (3), is satisfied by it in R_1, hence, it's a proper LF.

In the third quadrant,

$$v_3(x)\big|_{x_2=0} = -3\alpha_{23}x_1,\ v_5(x)\big|_{x_1=0} = -4\alpha_{56}x_2,$$

so, $v_4(x) = -3\alpha_{23}x_1 - 4\alpha_{56}x_2$, satisfies (4).

Similarly, since, this function satisfies (3) in R_3, it's a proper LF for this region.

Since, system is two dimensional; the continuity of LF's on all axes is provided in the previous step. Thus, $\forall \alpha_{23}, \alpha_{56} \in R^+$, the special LF's are specified. By assumption, $\alpha_{23} = \alpha_{56} = 1$,

$$v_1(x) = x_1 + 4x_2,\ v_2(x) = 4x_2 - \sin^2(x_1),$$
$$v_3(x) = -3x_1,\ v_4(x) = -3x_1 - 4x_2,$$
$$v_5(x) = -4x_2 + \sin^2(x_1), v_6(x) = x_1.$$
$$V(x) = \sum_{j=1}^{6} v_j(x)\Psi_j(x)$$
$$\dot{V}_f(x) = \sum_{j=1}^{6} \dot{v}_j(x)\Psi_j(x) < 0 \quad a.e.$$

It is a GLF for the system and the origin is asymptotically stable.

Example 2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1 = -3x_1 + |x_1| + \dfrac{|x_2|}{1+x_1^2} \\ \dot{x}_2 = f_2 = \dfrac{x_1}{1+x_1x_2} - x_2 \end{cases}$$

Two functions $f_1(.)$ and $f_2(.)$ are continuous, but, $f_1(.)$ is non-differentiable on the axes. Two figures 3, 4 show the neighborhood of the origin for this stable system and its phase plan, respectively. The proposed algorithm is used for constructing GLF for the system.

The neighborhood of the origin is divided by the axes and nullclines into 8 regions.

In the first quadrant, $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + x_1x_2^2$

$$v_1(x) = \alpha_{12}|f_{21}(x)| = \alpha_{12}(x_1),$$
$$v_2(x) = \alpha_{12}|f_{22}(x)| = \alpha_{12}(x_2 + x_1x_2^2).$$

In the first quadrant, $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow 2x_1 = x_2 - 2x_1^3$

$$v_2(x) = \alpha_{23}|f_{11}(x)| = 2\alpha_{23}x_1,$$
$$v_3(x) = \alpha_{23}|f_{12}(x)| = \alpha_{23}(x_2 - 2x_1^3).$$

In the third quadrant, $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + x_1x_2^2$

$$v_5(x) = \alpha_{56}|f_{21}(x)| = \alpha_{56}(-x_1),$$

$v_6(x)=\alpha_{56}\left|f_{22}(x)\right|=\alpha_{56}(-x_2-x_1x_2^2)$.

In the fourth quadrant, $\dot{x}_1=0\Rightarrow -x_1=x_2+2x_1^3$

$v_7(x)=\alpha_{78}\left|f_{11}(x)\right|=0.5\alpha_{78}(-x_2-2x_1^3)$,
$v_8(x)=\alpha_{78}\left|f_{12}(x)\right|=\alpha_{78}x_1$.

The previous step offered two LF for R_2, if $v_1(x)=v_2(x)=2\alpha_{23}x_1=\alpha_{12}x_1$, then, (4) is satisfied on their common boundary.

Since, the system is two dimensional, $v_4(x)=v_3(x)\big|_{x_1=0}+v_5(x)\big|_{x_2=0}=\alpha_{23}x_2-\alpha_{56}x_1$ satisfies (4) on x_2^+ and x_1^-. Moreover, after checking, we get that, (3), is satisfied by it in R_4, hence, it's a proper LF for this region.

For continuity of LF's on x_1^+, x_2^-,

$d_1(x)=2\alpha_{23}x_1, d_8(x)=\alpha_{78}x_1$, if,

$\alpha_{23}=0.5\alpha_{78}\Rightarrow d_{18}(x)=0$.

$d_6(x)=-\alpha_{56}x_2, d_7(x)=-0.5\alpha_{78}x_2$,
if, $\alpha_{56}=0.5\alpha_{78}\Rightarrow d_{67}(x)=0$.

Therefore, $0.5\alpha_{78}=\alpha_{56}=\alpha_{23}$, by assumption, $\alpha_{23}=1$, the special LF's of the regions are identified.

$v_1(x)=v_2(x)=v_8(x)=2x_1, v_3(x)=x_2-2x_1^3$,
$v_4(x)=x_2-x_1, v_5(x)=-x_1, v_6(x)=-x_2-x_1x_2^2$
$v_7(x)=-x_2-2x_1^3$.

$V(x)=\sum_{j=1}^{8}v_j(x)\Psi_j(x)$, $\dot{V}_f(x)=\sum_{j=1}^{8}\dot{v}_j(x)\Psi_j(x)<0 \quad a.e.$

$V(x)$ is a GLF for this system and the origin is asymptotically stable.

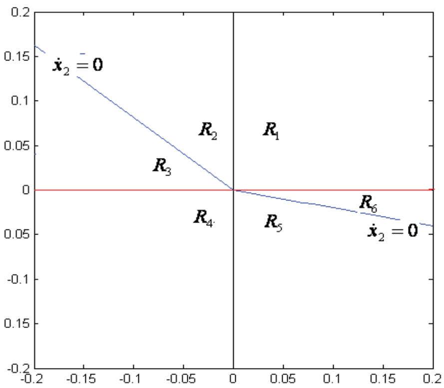


Figure 1: The regions for example 1

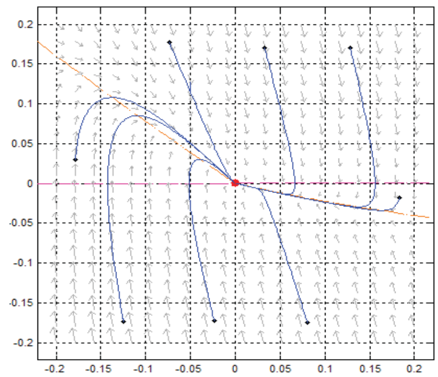


Figure 2: Simulation of example 1

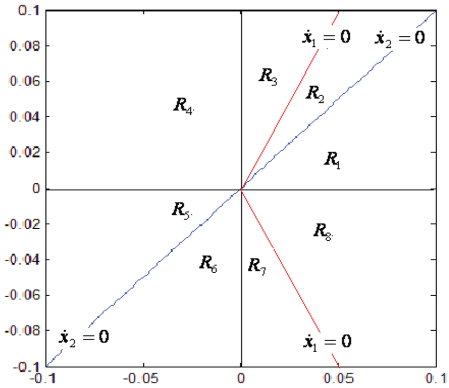


Figure 3: The regions for example 2

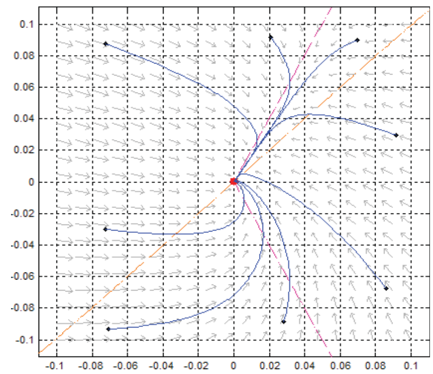


Figure 4: Simulation of example 2

7. Conclusion

In this paper, a non-iterative algorithm was proposed for constructing Generalized Lyapunov Function for nonlinear time invariant system which can be differentiable almost every-where, such that, the system solutions be well defined. The proposed algorithm was based on the Generalized Lyapunov theorem, hence, it didn't require calculation of the generalized derivative of nonsmooth LF's on their nonsmooth surfaces.

Unlike the methods that for constructing piecewise LF, used approximate piecewise model of system in each region, the defined method used original nonlinear model of system, hence, this method was exact. Furthermore, these other methods are computational and more detailed analysis comes to the cost of increased computations, but, this method was analytic.

The steps of algorithm were defined by means of several proposed Notes, which select LF with attention to kind of boundaries of each region.

According to the algorithm, a GLF for the whole system was constructed by a condensed formula. The capability of the algorithm was demonstrated by successful construction of GLF's for two nonsmooth examples.

The main restrictions of this algorithm were original selection of LF's for regions, and then, continuity problem of LF's on their common boundaries. The Notes are proposed to solve these restrictions in many cases.

In the next researches, one can suggest these subjects; can this algorithm obtain GLF for every stable continuous system? Is there a systematic approach for selection of LF's and continuity of them on the boundaries?

References

[1] Chellaboina, V., Leonessa, A., Haddad, W.M., 1999, "Generalized Lyapunov and invariant set theorems for nonlinear dynamical systems," *Systems & Control Letters*, 38, 289-295.

[2] Bacciotti, A., Rosier, L., 2000, "Regularity of Liapunov functions for stable systems," *Systems & Control Letters*, 41, 265-270.

[3] Johansson, M., Rantzer, A., 1997, "On the Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions," *Proceeding of the 36th IEEE Conference on Decision & Control*, 4, 3515-3520.

[4] Johansson, M., Rantzer, A., 1998, "Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions for Hybrid Systems," *IEEE Transaction on Automatic Contro*l, 43, 4, 555-559.

[5] Shevitze, D., Paden, B., 1994, "Lyapunov stability theory of nonsmooth systems", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 39, 9, 1910-1914.

[6] Wu, Q., Sepehri, N., 2001, "On Lyapunov's stability analysis of non-smooth systems with applications to control engineering", *International journal of non-linear mechanics*, 36, 1153-1161.

[7] Bacciotti, A., 2002, "Stability in the continuous case," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 270, 488–498.

[8] Bacciotti, A., Rosier, L., *Lyapunov functions stability in control theory*, (2nd ed.), Berlin: Springer, 2005.

[9] Ohtake, H., Tanaka, K., Wang, H., 2002, "A construction method of switching Lyapunov function for nonlinear systems," *Proceeding of the IEEE conference on Fuzzy Systems*, 221-226.

[10] Nakamura A., Hamada, N., 1988, "A construction method of Lyapunov functions for piecewise Linear systems," *Proceeding of the IEEE symposium on Circuits and Systems*, 3, 2217-2220.

[11] Marinoasson, S.F., 2002, "Lyapunov function construction for ordinary differential equations with linear programming," *Dynamical Systems*, 17, 2, 137-150.

[12] Juliaan, P., Guivant J., Desages, A., 1999, "A parameterization of piecewise linear Lyapunov functions via linear programming," International Journal of Control, 72, 7/8, 702 -715.

[13] Giesl, P., *Construction of Global Lyapunov Functions Using Radial Basis Functions*, Berlin: Springer, 2007.

Journal of Control
Vol. 3, No. 2, pp. 25-32, Summer 2009

AR Order Determination of 3-D ARMA Models Based on Minimum Eigenvalue (MEV) Criterion and Instrumental Variable Method

Mahdiye Sadat Sadabadi, Masoud Shafiee
Electrical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran
sadabadi@iust.ac.ir, mshafiee@aut.ac.ir

(Manuscript received: Aug. 20 2009, accepted Oct. 10 2009)

Abstract: Model order determination, the first step of system identification, plays a dominant role in modeling any dynamic system. In this paper, a new method for AR order determination of 3-D ARMA models is proposed. The proposed method is based on minimum eigenvalue (MEV) criterion and instrumental variable (IV) approach. The model is assumed to be causal, stable, linear, and spatial shift-invariant with quarter space (QS) region of support. Numerical simulations are presented to confirm the theoretical results.
Keywords: Three-Dimensional ARMA Model, AR Order, Model Order Determination, Minimum Eigenvalue Criterion and Instrumental Variable.

چکیده: تعیین مرتبه مدل به عنوان اولین مرحله در فرآیند شناسایی سیستم، نقش بسزایی در مدلسازی سیستم‌های دینامیکی ایفا می‌کند. در این مقاله، روش جدیدی برای تعیین مرتبه بخش AR در مدل ARMA سه بعدی بر اساس معیار حداقل مقدار ویژه (MEV) و روش متغیر کمکی مطرح شده است. فرض بر آن است که مدل، علی، پایدار، خطی و تغییرناپذیر با شیفت با ناحیه پشتیبانی ربع صفحه (QS) می‌باشد. در انتها، شبیه‌سازی‌های عددی به جهت تائید نتایج تئوری مطرح شده در مقاله، آورده شده است.

کلمات کلیدی: مدل ARMA سه بعدی، مرتبه AR، تعیین مرتبه مدل، معیار حداقل مقدار ویژه و متغیر کمکی.

Nomenclatures:

AIC: Akaike Information Criterion
AR: Autoregreesive
ARMA: Autoregreesive Moving Average
CRA: Column Ratio Array
IV: Instrumental Variable
LRA: Layer Ratio Array
MA: Moving Average
MDL: Minimum Description Length
MEV: Minimum Eigenvalue
1-D: One-Dimensional
QS: Quarter Space
ROS: Region of Support
RRA: Row Ratio Array
SVD: Singular Value Decomposition
3-D: Three-Dimensional
2-D: Two-Dimensional

1- Introduction

Recently, there has been considerable interest in three-dimensional (3-D) systems by 3-D auto-regressive (AR) models and 3-D autoregressive moving-average (ARMA) models. These models are used in several areas such as modeling, system identification, spectral analysis, etc [1]-[6]. In most cases, the model order is assumed to be known. However, in most realistic situations, the model order is not known and must be estimated. Obviously, selecting the model order is an important first step towards the goal of system modeling. Model order determination of 3-D ARMA models is a difficult task.

During the last three decades, several new methods and algorithms have been proposed for one dimensional and two-dimensional (2-D) model order selection, but 3-D model order selection has not received so much attention.

Generally, the existing order determination methods can be divided into two categories, namely, information theoretic criterion methods and linear algebraic methods [7]-[10]. Information criterion methods, e.g., Akaike information (AIC) criterion and minimum description length (MDL) criterion, are evaluated by minimizing an expression that

Corresponding Author: Mahdiye Sadat Sadabadi

depends on the prediction error variance and free parameter number. The value of order that yields the lowest value of selected criterion is chosen as the best estimate of the true model order [9]. In applying AIC or MDL criterion, one usually has to estimate the parameters corresponding to all possible model structures. Therefore, these methods are very time consuming [9]. The minimum eigenvalue (MEV) criterion is based on MDL criterion. It permits the choice of the true order with high accuracy and without any parameter estimation [9].

The linear algebraic methods are based on determinant and rank testing algorithms, SVD-based methods, etc. In these methods, the order of the system is usually determined using the rank of special matrices. References [8], [11] are examples of this class.

In this paper, a new technique for AR order selection of 3-D ARMA models is proposed. The proposed method consists of the minimum eigenvalue (MEV) criterion and instrumental variable (IV) approach (with delayed observations). Usually, the techniques based on the computation of an information criterion need the parameter estimation of all the possible models including the true order. On the contrary, this method only needs the computation of matrix eigenvalues.

Based on the authors' knowledge, three-dimensional ARMA model order determination has not been studied as much as one-dimensional and two-dimensional case. However, some references ([1-2]) have proposed some methods for 3-D AR model order determination. These methods cannot be used for 3-D ARMA model order determination.

The model considered here is assumed to be causal, stable, linear, and spatial shift invariant with quarter space (QS) region of support. The paper is organized as follows: The problem formulation and the basic algorithm are presented in section 2. Section 3 provides numerical simulations in order to illustrate the effectiveness of the proposed method. Section 4 concludes the paper.

2- 3-D AR Order Determination of a 3-D ARMA Model

2-1- Preliminaries

Consider a 3-D causal, stable, linear, and spatial shift invariant ARMA model defined by

$$\sum_{i_1=0}^{p_1^*}\sum_{i_2=0}^{p_2^*}\sum_{i_3=0}^{p_3^*} a_{i_1,i_2,i_3}\, y_{t_1-i_1,t_2-i_2,t_3-i_3} = \sum_{j_1=0}^{q_1^*}\sum_{j_2=0}^{q_2^*}\sum_{j_3=0}^{q_3^*} b_{j_1,j_2,j_3}\, e_{t_1-j_1,t_2-j_2,t_3-}. \quad (1)$$

$$a_{0,0,0}=1$$

where (p_1^*, p_2^*, p_3^*) and (q_1^*, q_2^*, q_3^*) are the AR order and the MA order of a 3-D ARMA model, respectively. The following conditions are assumed to hold.

Assumption 1: e_{t_1,t_2,t_3} is a white noise with zero-mean and variance σ_e^2.

Assumption 2: The true AR model order is (p_1^*, p_2^*, p_3^*) such that

$$p_1^* = \max\{i_1 \;;\quad a_{i_1,i_2,i_3} \neq 0\}$$
$$p_2^* = \max\{i_2 \;;\quad a_{i_1,i_2,i_3} \neq 0\}$$
$$p_3^* = \max\{i_3 \;;\quad a_{i_1,i_2,i_3} \neq 0\}$$

Assumption 3: The 3-D ARMA model in (1) is stable.

Note that the stability analysis of 3-D models is much more difficult than one-dimensional case. One of the most important reasons is that multidimensional systems have infinite poles. As a result, the convention methods and theorems for 1-D stability analysis cannot be used for multidimensional case. For more information in multidimensional stability conditions, one can refer to [12]-[13].

Since the true orders (p_1^*, p_2^*, p_3^*) and (q_1^*, q_2^*, q_3^*) are unknown, the general case of (1) with $(p_1^*, p_2^*, p_3^*; q_1^*, q_2^*, q_3^*)$ replaced by unknown orders $(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$ is considered.

2-2- Algorithm for AR Order Determination

Assuming the data length is $N_1 \times N_2 \times N_3$ (that is $t_1 = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$, $t_2 = 0, 1, \ldots, N_2 - 1$, and $t_3 = 0, 1, \ldots, N_3 - 1$), the equation (1) can be rewritten in a matrix form as follows:

$$Y\theta = W \tag{2}$$

In the above equation, Y is an output data matrix with dimension $(N_1N_2N_3)\times(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)$, vector θ is a $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\times 1$ parameter vector, and W is an $(N_1N_2N_3)\times 1$ input data vector.

$$\theta = [\theta_0\ \theta_1\ \dots\ \theta_{p_1}]^T \tag{3a}$$

$$\theta_{i_1} = [\theta_{i_1,0}\ \theta_{i_1,1}\ \dots\ \theta_{i_1,p_2}]^T \tag{3b}$$

$$\theta_{i_1,i_2} = [a_{i_1,i_2,0}\ \ a_{i_1,i_2,1}\ \dots\ a_{i_1,i_2,p_3}]^T \tag{3c}$$

$$W = [W_0\ W_1\ \dots\ W_{N_1-1}]^T \tag{4a}$$

$$W_{t_1} = [W_{t_1,0}\ W_{t_1,1}\ \dots\ W_{t_1,N_2-1}]^T \tag{4b}$$

$$W_{t_1,t_2} = [w_{t_1,t_2,0}\ w_{t_1,t_2,1}\ \dots\ w_{t_1,t_2,N_3-1}]^T \tag{4c}$$

$$w_{t_1,t_2,t_3} = \sum_{i_1=0}^{q_1}\sum_{i_2=0}^{q_2}\sum_{i_3=0}^{q_3} b_{i_1,i_2,i_3}\, e_{t_1-i_1,t_2-i_2,t_3-}$$

and

$$Y = \begin{bmatrix} Y_0 & O & \dots & O \\ Y_1 & Y_0 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{N_1-1} & Y_{N_1-2} & \dots & Y_{N_1-1-p_1} \end{bmatrix} \tag{5a}$$

$$Y_{t_1} = \begin{bmatrix} Y_{t_1,0} & O' & \dots & O' \\ Y_{t_1,1} & Y_{t_1,0} & \dots & O' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{t_1,N_2-1} & Y_{t_1,N_2-2} & \dots & Y_{t_1,N_2-1-p_2} \end{bmatrix} \tag{5b}$$
$$t_1 = 0,1,\dots,N_1-1$$

$$Y_{t_1,t_2} = \begin{bmatrix} y_{t_1,t_2,0} & 0 & \dots & 0 \\ y_{t_1,t_2,1} & y_{t_1,t_2,0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{t_1,t_2,N_3-1} & y_{t_1,t_2,N_3-2} & \dots & y_{t_1,t_2,N_3-1-p_3} \end{bmatrix}$$
$$t_2 = 0,1,\dots,N_2-1$$

(5c)

Note that matrices O and O' in (5a) and (5b) are zero matrices with dimensions $N_2\times(p_2+1)$ and $N_3\times(p_3+1)$, respectively. An instrumental variable (IV) matrix can be defined as

$$Z = \begin{bmatrix} Z_0 & O & \dots & O \\ Z_1 & Z_0 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{N_1-1} & Z_{N_1-2} & \dots & Z_{N_1-1-k_1} \end{bmatrix} \tag{6a}$$

$$Z_{t_1} = \begin{bmatrix} Z_{t_1,0} & O' & \dots & O' \\ Z_{t_1,1} & Z_{t_1,0} & \dots & O' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{t_1,N_2-1} & Z_{t_1,N_2-2} & \dots & Z_{t_1,N_2-1-k_2} \end{bmatrix} \tag{6b}$$
$$t_1 = 0,1,\dots,N_1-1$$

$$Z_{t_1,t_2} = \begin{bmatrix} z_{t_1,t_2,0} & 0 & \dots & 0 \\ z_{t_1,t_2,1} & z_{t_1,t_2,0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{t_1,t_2,N_3-1} & z_{t_1,t_2,N_3-2} & \dots & z_{t_1,t_2,N_3-1-k_3} \end{bmatrix}$$
$$t_1 = 0,1,\dots,N_1-1$$
$$t_2 = 0,1,\dots,N_2-1$$

(6c)

where z_{t_1,t_2,t_3}, O, and O' are an IV sequence and zero matrices with dimensions $N_2\times(k_2+1)$ and $N_3\times(k_3+1)$, respectively. Several choices of z_{t_1,t_2,t_3} are possible as long as IV sequence is uncorrelated with the noise part w_{t_1,t_2,t_3} and fully correlated with the observed part y_{t_1,t_2,t_3} [14], [15].

In this paper, the instrument z_{t_1,t_2,t_3} is formed from the delayed observed data $y_{t_1-l_1,t_2-l_2,t_3-l_3}$ with $l_1 > q_1$, $l_2 > q_2$, and $l_3 > q_3$. Premultiplying (2) by $\frac{1}{N_1 N_2 N_3} Z^T$ and considering $V = \frac{1}{N_1 N_2 N_3} Z^T W$, the following equation is obtained:

$$\frac{1}{N_1 N_2 N_3} Z^T Y \theta = V \tag{7}$$

V is an asymptotically Gaussian distribution with zero mean [15]. If D is defined as $D = \frac{1}{N_1 N_2 N_3} Z^T Y$, the equation (7) can be rewritten as

$$D\theta = V \tag{8}$$

In which, the dimensions of D and V respectively are

$(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1) \times (p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)$ and $(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1) \times 1$. Now the matrix R is defined as

$$R = D^T D \tag{9}$$

Note that R is a symmetric and positive semi-definite matrix. The method proposed in this paper permits the choice of the AR order of 3-D ARMA models in (1) with high accuracy and without any parameter estimation. This method uses both 3-D MDL criterion and the minimum eigenvalue of matrix R.

In the 3-D case, the MDL order determination criterion appears as follows [2]

$$\begin{aligned} J_{MDL}(p_1, p_2, p_3) &= -\log(f(V)) + K \\ K &= \frac{1}{2}(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\log((k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)) \end{aligned} \tag{10}$$

where $f(V)$ is the probability density function of V such that $V = [v_{0,0,0} \cdots v_{0,0,k_3} \cdots v_{k_1,k_2,0} \cdots v_{k_1,k_2,k_3}]^T$. Since v_{t_1,t_2,t_3} is zero-mean white Gaussian noise,

$$\begin{aligned} f(V) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}{2}}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} V^T \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}{2}}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \theta^T R\theta) \end{aligned} \tag{11}$$

where σ^2 is the variance of v_{t_1,t_2,t_3}. Replacing $f(V)$ by (11) results in

$$\begin{aligned} J_{MDL}(p_1, p_2, p_3, \theta) &= \frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}{2}\log(2\pi\sigma^2) \\ &+ \frac{1}{2\sigma^2}\theta^T R\theta + K \end{aligned} \tag{12}$$

For fixed-order (p_1, p_2, p_3) and constraining θ to have unit Euclidean norm, the choice of θ that minimizes (12) is found to be the eigenvector associated with the minimum eigenvalue $(\lambda_{\min})$ of R [2]. In other words

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}\theta_{\min}^T R\theta_{\min} = \\ &\frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)} V^T V \approx \sigma^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Therefore,

$$\frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}\lambda_{\min} = \sigma^2$$

Substituting and dropping all the terms not depending on p_1, p_2, p_3 or θ,

$$\begin{aligned} J_{MDL}(p_1, p_2, p_3) &= \frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}{2}\log(\lambda_{\min}) \\ &+ K \end{aligned} \tag{14}$$

The term θ in the argument of MDL has been dropped since it has been incorporated into the $\lambda_{\min}$ term. Multiplying both sides of the above equation by $\frac{2}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}$, and combining terms lead to

$$\frac{2}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)} J_{MDL}(p_1,p_2,p_3) = \log(\lambda_{\min}\,(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)^{\frac{(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}}) \quad (15)$$

Since log(.) is a monotonically increasing function, a different criterion can be formed that contains the same information as $J_{MDL}(p_1,p_2,p_3)$, and combining terms. Therefore, using a combination of MDL criterion and instrumental variable (IV) method, the minimum eigenvalue criterion for AR order selection of an ARMA model is as follows:

$$J = \lambda_{\min}\,[((k_1+1)(k_2+1)(k_3+1))^{\frac{(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}}] \quad (16)$$

where $\lambda_{\min}$ is the minimum eigenvalue of positive semi-definite matrix R.

From the above equation, it can be seen that when $k_1 \to \infty$ or/and $k_2 \to \infty$ or / and $k_3 \to \infty$ the $[((k_1+1)(k_2+1)(k_3+1))^{\frac{(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)}{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)}}]$ part of (16) is approximately one and AR model selection is asymptotically simplified by examining the minimum eigenvalue of R for different values of $p_1, p_2,\ p_3$.

Note that if $p_1, p_2,\ p_3$ are chosen such that $p_1 \ge p_1^*$, $p_2 \ge p_2^*$,and $p_3 \ge p_3^*$, $\lambda_{\min}$ will be small compared with case $p_1 < p_1^*$ or $p_2 < p_2^*$ or $p_3 < p_3^*$. Because if $p_1 < p_1^*$ or $p_2 < p_2^*$ or $p_3 < p_3^*$, the model dose not have enough parameters to fit the signal very well.

Consequently, the procedure for model order selection consists of computing $J(p_1,p_2,p_3)$ for different orders and selecting the triplet which correspond to the corner where $\lambda_{\min}$ drops very quickly [2]. In practice, several corners can be found instead of a single corner. In order to select the correct corners, three arrays are constructed as follows:

1) Row Ratio Array (RRA): by dividing each horizontal plan of $J(p_1,p_2,p_3)$ array by the previous one; i.e.

$$RRA(i_1,i_2,i_3) = J(i_1,i_2,i_3)/J(i_1-1,i_2,i_3)$$

2) Column Ratio Array (CRA): by dividing each vertical plan of $J(p_1,p_2,p_3)$ array by the previous one; i.e.

$$CRA(i_1,i_2,i_3) = J(i_1,i_2,i_3)/J(i_1,i_2-1,i_3)$$

3) Layer Ratio Array (LRA): by dividing each layer of $J(p_1,p_2,p_3)$ array by the previous one; i.e.

$$LRA(i_1,i_2,i_3) = J(i_1,i_2,i_3)/J(i_1,i_2,i_3-1)$$

An estimate of p_1^* is set equal to the row number (p_1) that contains the minimum value in the row ratio array. The number of columns (p_2) which have the minimum value in the column ratio array will be the estimate of p_2^*. Finally, the number of layers (p_3) which have the minimum value in the layer ratio array will be the estimate of p_3^*.

From the proposed results, the following algorithm for AR order estimation of a 3-D ARMA model is suggested.

Step 1) Fix the AR order (p_1,p_2,p_3) over the set $S = [p_{1_{\min}}, p_{1_{\max}}] \times [p_{2_{\min}}, p_{2_{\max}}] \times [p_{3_{\min}}, p_{3_{\max}}]$, and suppose that is the true order.

Step 2) Compute the matrix R by (9) and determine its eigenvalues.

Step 3) Evaluate (16) for all values of p_1, p_2, and p_3.

Step 4) Construct the row, column, and layer ratio arrays.

Step 5) Choose the minimum value of the row, column, and layer ratio arrays.

Step 6) An estimate of the true value of p_1^* is set equal to the row number that contains the minimum value of the row ratio array. The number of columns having the minimum value in the column ratio array will be the estimate of the true value of p_2^*. Finally, the number of layers which have the minimum value in the layer ratio array will be the estimate of p_3^*.

3- Numerical Simulations

In this section, two numerical examples are presented to provide verification of the theoretical results. In these examples, input sequence e_{t_1,t_2,t_3} is a Gaussian white noise with zero-mean and variance one: $N(0,1)$. The data length is $N_1 \times N_2 \times N_3$: $N_1 = 30$, $N_2 = 30$, $N_3 = 30$.

Example 1: The true model is given by

$$\begin{aligned} y_{t_1,t_2,t_3} &= 0.9\, y_{t_1-1,t_2,t_3} + 0.88\, y_{t_1,t_2-1,t_3} + 0.95\, y_{t_1,t_2,t_3-1} \\ &- 0.792\, y_{t_1-1,t_2-1,t_3} - 0.855\, y_{t_1-1,t_2,t_3-1} \\ &- 0.836\, y_{t_1,t_2-1,t_3-1} + 0.7524\, y_{t_1-1,t_2-1,t_3-1} \\ &+ e_{t_1,t_2,t_3} + 0.8\, e_{t_1-1,t_2-1,t_3-1} \end{aligned} \tag{17}$$

This model is a 3-D stable model of AR order (1,1,1) and MA order (1,1,1).

The data for order determination is collected from the above model in (17). Using these data and the algorithm proposed in the end of section (2-2), the AR order of the ARMA model in (17) can be determined.

In this example, the fixed-order interval set is $(p_1, p_2, p_3) \in [0,3]\times[0,3]\times[0,3]$. Using row, column, and layer ratio arrays, the AR order of the ARMA model in the above example is estimated. Results are shown in tables 1-3. As can be seen from the tables, the minimum value of the row, column, and layer ratio arrays has occurred in $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, and $p_3 = 1$. Therefore, based on the proposed algorithm, the true AR order is $(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (1,1,1)$.

The example is simulated 100 times and it is checked how often this method choose the correct AR order. The results obtained with the proposed method are displayed in table 4. Note, the symbol * is used in tables to identify the true order of model.

Example 2: In the second example, a 3-D ARMA model is considered as follows:

$$\begin{aligned} y_{t_1,t_2,t_3} &= 1.3\, y_{t_1-1,t_2,t_3} - 0.3825\, y_{t_1-2,t_2,t_3} \\ &+ 1.27\, y_{t_1,t_2-1,t_3} - 1.6510\, y_{t_1-1,t_2-1,t_3} \\ &+ 0.4858\, y_{t_1-2,t_2-1,t_3} - 0.39\, y_{t_1,t_2-2,t_3} \\ &+ 0.5070\, y_{t_1-1,t_2-2,t_3} - 0.1492\, y_{t_1-2,t_2-2,t_3} \\ &+ 1.13\, y_{t_1,t_2,t_3-1} - 1.4696\, y_{t_1-1,t_2,t_3-1} \\ &+ 0.4322\, y_{t_1-2,t_2,t_3-1} - 1.4251\, y_{t_1,t_2-1,t_3-1} \\ &+ 1.8656\, y_{t_1-1,t_2-1,t_3-1} - 0.5489\, y_{t_1-2,t_2-1,t_3-1} \\ &+ 0.4407\, y_{t_1,t_2-2,t_3-1} - 0.5729\, y_{t_1-1,t_2-2,t_3-1} \\ &+ 0.1686\, y_{t_1-2,t_2-2,t_3-1} - 0.3120\, y_{t_1,t_2,t_3-2} \\ &+ 0.4056\, y_{t_1-1,t_2,t_3-2} - 0.1193\, y_{t_1-2,t_2,t_3-2} \\ &+ 0.3962\, y_{t_1,t_2-1,t_3-2} - 0.5151\, y_{t_1-1,t_2-1,t_3-2} \\ &- 0.1516\, y_{t_1-2,t_2-1,t_3-2} - 0.1217\, y_{t_1,t_2-2,t_3-2} \\ &+ 0.1582\, y_{t_1-1,t_2-2,t_3-2} + 0.0465\, y_{t_1-2,t_2-2,t_3-2} \\ &+ e_{t_1,t_2,t_3} + 1.2\, e_{t_1-2,t_2-2,t_3-2} \end{aligned} \tag{18}$$

The same procedure as in Example 1 was followed. The simulation for AR order determination is performed 100 times using the proposed method. The results are displayed in table 5. In this example, the fixed-order interval set is $(p_1, p_2, p_3) \in [1,5]\times[1,5]\times[1,5]$.

4- Conclusion

In this paper, an effective approach for AR order determination of 3-D causal, stable and shift-invariant ARMA models with quarter-plane ROS was proposed. The proposed method is based on the minimum eigenvalue (MEV) criterion and the instrumental variable method that is computationally more efficient than some methods such as AIC and MDL criteria. In spite of 3-D AIC criterion and MDL criterion, this method permits choice of the true order with high accuracy and without any parameter estimation. Numerical examples were given that illustrated the good performance of the results that can be obtained with this approach.

References

[1] Aksasse, B., Stitou, Y., Berthoumieu, Y., Najim, M., 2006, "3-D AR model order selection via rank test procedure", *IEEE Trans. Signal Processing*, 54, 2672-2677.

[2] Aksasse, B., Stitou, Y., Berthoumieu, Y., Najim, M., 2005, "Minimum eigenvalue based 3-D AR model

order selection", *13th Workshop on Statistical Signal Processing*, 431-436.

[3] Digalakis, V. V., Ingle, V., Manolakis, D. G., 1993, "Three-dimensional linear prediction and its application to digital angiography", *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 4, 4, 307-329.

[4] Kokaram, A. C., Morris, R. D., Fitzgerald, W., Rayner, P. J. W., 1995, "Interpolation of missing data in image sequences", *IEEE Trans. Image Process*, 4, 1509-1519.

[5] Kwan, H. K., Lui, Y. C., 1989, "Lattice predictive modeling of 3-D random fields with application to interframe predictive coding of picture sequences", *International Journal of Electronics*, 66, 489-505.

[6] Szummer, M., Picard, R.W., 1996, "Temporal texture modeling*", IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, 3, 823-826, Lausanne, Switzerland.

[7] Rital, S., Meziane, A., Rziza, M., Aboutajdine, D., 2002, "Two-dimensional non-Gaussian autoregressive model order determination", *IEEE Signal Processing Letter*, 9, 426-42.

[8] Aksasse, B., Radouane, L., 1999, "A rank test based approach to order estimation-Part I: 2-D AR models application", *IEEE Trans. Signal Processing*, 47, 2069-2072.

[9] Aksasse, B., Radouane, L., 1999, "Two-dimensional autoregressive (2-D AR) model order estimation", *IEEE Trans. Signal Processing*, 47, 2072-2077.

[10] Sadabadi, M. S., Shafiee, M., Karrari, M., 2008, "A new technique for order determination of two-dimensional ARMA models", *SYSTEMS SCIENCE Journal*, 34, 2, 49-53.

[11] Sadabadi, M. S., Shafiee, M., Karrari, M., October 2007, "Determination of the two-dimensional ARMA model order using rank test based approach", *Proceedings of the 16th IEEE International Conference on Control and Applications (CCA)*, Singapore, 1156-1160.

[12] Bose, N. K., *Multidimensional Systems-Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Second Edition, 2003.

[13] Mastorakis, N. E., Gonos, I. F., Swamy, M. N. S., 2003, "Stability of multidimensional systems using genetic algorithms," *IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 50, 7, 962–965.

[14] Xiao, C. B., Zhang, X. D., Li, Y. D., 1996, "A new method for AR order determination of an ARMA process", *IEEE Trans. Signal Processing*, 44, 2900-2903.

[15] Söderström, T., Stoica, P., 1981, "Comparison of some instrumental variable methods-consistency and accuracy aspects", *Automatica*, 17, 101-115.

Table 1: Row Ratio Array (Example 1)

p_1																	
***1**						**2**						**3**					
p_2 / p_3		p_3				p_2 / p_3		p_3				p_2 / p_3		p_3			
		0	**1**	**2**	**3**			**0**	**1**	**2**	**3**			**0**	**1**	**2**	**3**
p_2	**0**	0.21	0.31	0.54	0.43	p_2	**0**	0.43	0.84	0.66	0.69	p_2	**0**	0.84	0.93	0.99	0.79
	1	0.26	0.5	0.58	0.92		**1**	0.81	0.93	0.57	0.45		**1**	0.93	0.91	0.68	16 e-7
	2	0.57	0.84	0.54	0.38		**2**	1.05	0.59	15 e-7	22 e-7		**2**	0.75	0.94	0.88	1.16
	3	0.56	0.72	0.45	**10 e-7**		**3**	1	0.59	21 e-7	1.23		**3**	0.91	17 e-7	1.16	1.31

Table 2: Column Ratio Array (Example 1)

p_2																	
***1**						**2**						**3**					
p_1 / p_3		p_3				p_1 / p_3		p_3				p_1 / p_3		p_3			
		0	**1**	**2**	**3**			**0**	**1**	**2**	**3**			**0**	**1**	**2**	**3**
p_1	**0**	0.35	0.37	0.48	0.23	p_1	**0**	0.38	0.42	0.51	0.92	p_1	**0**	0.78	0.83	0.82	0.83
	1	0.44	0.58	0.52	0.50		**1**	0.81	0.71	0.48	0.38		**1**	0.77	0.72	0.67	27 e-7
	2	0.82	0.65	0.45	0.33		**2**	1.05	0.45	13 e-6	19 e-7		**2**	0.73	0.73	0.93	1.20
	3	0.92	0.64	0.31	**67 e-8**		**3**	0.84	0.46	16 e-7	1.37		**3**	0.89	13 e-7	1.23	1.36

Table 3: Layer Ratio Array (Example 1)

p_3																	
***1**						**2**						**3**					
p_1 / p_2		p_2				p_1 / p_2		p_2				p_1 / p_2		p_2			
		0	**1**	**2**	**3**			**0**	**1**	**2**	**3**			**0**	**1**	**2**	**3**
p_1	**0**	0.23	0.24	0.27	0.29	p_1	**0**	0.55	0.71	0.86	0.85	p_1	**0**	1.02	0.50	0.9	0.91
	1	0.34	0.45	0.40	0.37		**1**	0.93	0.83	0.56	0.52		**1**	0.82	0.80	0.62	20 e-7
	2	0.66	0.52	0.22	0.22		**2**	0.73	0.51	14 e-7	18 e-7		**2**	0.85	0.62	0.93	1.20
	3	0.73	0.51	0.28	**42 e-8**		**3**	0.79	0.38	13 e-7	1.24		**3**	0.67	15 e-7	1.23	1.36

Table 4: 3-D AR Order estimation results from 100 simulation runs (Example 1)

AR Order	***(1,1,1)**	**(2,1,1)**	**(1,2,1)**	**(1,1,2)**	**(3,1,1)**
%	**81**	16	0	0	3

Table 5: 3-D AR Order estimation results from 100 simulation runs (Example 2)

AR Order	***(2,2,2)**	**(2,1,2)**	**(2,2,3)**	**(2,3,2)**	**(3,2,2)**	**(2,3,3)**	**(3,2,3)**	**(3,3,2)**
%	**88**	1	0	2	8	0	0	1

Journal of Control

A Joint Publication of the Iranian Society of Instrumentation and Control Engineers and the K.N. Toosi University of Technology, Vol. 3, No. 2, Summer 2009.

Publisher: Iranian Society of Instrumentation and Control Engineers
Managing Director: Prof. Iraj Goodarznia
Editor-in-Chief: Prof. Ali Khaki-Sedigh
Tel: 84062317
Email: sedigh@kntu.ac.ir
Assistant Editor: Dr. Hamid Khaloozadeh, Dr. Alireza Fatehi
Executive Director: Dr. Hamid Khaloozadeh

Address: Unit 241, 2nd floor, No.27, Mousavi Ave. Ferdowsi Sq. Enghelab St. Tehran, Iran.
P.O. Box: 15815-3595 Tel: (+9821) 88813002 Fax: (+9821) 88324979
http://www.isice.ir

Journal of Control

K.N. Toosi Univ. of Tech. 1928

A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the K.N. Toosi University of Technology

Vol. 3, No. 2, Summer 2009

Persian Part

English Part