



نشریه علمی - پژوهشی

انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران - قطب کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
جلد ۶، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۱

فهرست مقالات

- ۱ توسعه مفاهیم و قضایای توابع تبدیل ماتریسی اکیداً حقیقی مثبت
مجتبی حکیمی مقدم، حمید خالوزاده
- ۱۱ طراحی و ساخت سیستم اندازه گیری و کنترل TDS آب در سیستم های تصفیه آب اسمز معکوس به روش PID کلاسیک، با توانایی جبران سازی اثر دما بر روی اندازه گیری
سید کمال الدین موسوی مشهدی، حمید یدالهی
- ۲۳ تحلیل پایداری و کنترل PID مقاوم ربات های موازی کابلی با شرط نیروی کششی در کابل ها
محمد اعظم خسروی، حمیدرضا تقی راد
- ۳۵ رهیافتی نو برای تعیین شش مولفه موقعیت و وضعیت یک شیء با عکسبرداری
عبدالحمید بهجت پناه، جعفر حیرانی نوبری، مهدیه حسینی زاده آلاشتی
- ۴۹ وفقی سازی شعاع کرنل در تخمین موقعیت اجسام متحرک بر اساس الگوریتم باز نمونه برداری فیلتر ذره
عقیل عبیری، محمدرضا محزون
- ۶۱ تحلیل و جبران سازی خطای کانال ارتفاع سیستم ناوبری اینرسی در ارتفاعات بالا با کمک اطلاعات ردیاب ستاره
امیر مقتدایی راد، جعفر حیرانی نوبری، امیرعلی نیکخواه



مجله کنترل
(ISSN 2008-8345)



نشریه علمی - پژوهشی، انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران - قطب کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی
خواجه نصیرالدین طوسی، جلد ۶، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۱

پست الکترونیک: control@isice.ir

صاحب امتیاز: انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران

مدیر مسئول: پروفسور ایرج گودرزنیا

سردبیر: پروفسور علی خاکی صدیق - تلفن: ۸۴۰۶۲۳۱۷ - پست الکترونیک: sedigh@kntu.ac.ir

آدرس محل کار: خیابان دکتر شریعتی، پل سیدخندان، دانشکده برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
سمت: استاد دانشگاه

شورای سردبیری: پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور حمید خالوزاده، دکتر علیرضا فاتحی

دبیر اجرایی: پروفسور حمید خالوزاده

هیأت تحریریه:

پروفسور علی خاکی صدیق (استاد) - پروفسور ایرج گودرزنیا (استاد) - پروفسور حمید خالوزاده (استاد) - پروفسور پرویز جبه دار مارالانی (استاد) - پروفسور
علی غفاری (استاد) - دکتر حمیدرضا مومنی (دانشیار) - پروفسور سید کمال الدین نیکروش (استاد) - پروفسور مسعود شفیعی (استاد) - پروفسور بهزاد مشیری
(استاد)

هیأت مشاوران:

دکتر حمیدرضا مومنی، پروفسور بهزاد مشیری، پروفسور مسعود شفیعی، پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور پرویز جبه دار مارالانی، پروفسور علی غفاری،
پروفسور حمید خالوزاده، پروفسور حمیدرضا تقی راد، دکتر کیوان مسروری، دکتر محمدتقی بطحایی، دکتر محمدتقی بهشتی، دکتر فرزاد جعفر کاظمی،
دکتر رویا امجدی فرد، پروفسور سید علی اکبر موسویان، پروفسور محمد تشنه لب، پروفسور محمد حایری، پروفسور سید علی اکبر صفوی، پروفسور حسین
سیفی، دکتر احد کاظمی، دکتر علیرضا فاتحی، دکتر محمدرضا اکبرزاده توتونچی، دکتر مسعود علی اکبر گلکار، دکتر ناصر پریز، دکتر مهرداد جواد، دکتر
جعفر حیرانی نوبری، پروفسور فرامرز حسین بابایی، دکتر بیژن معاونی، دکتر مهدی علیاری شوره دلی، دکتر محمد عاروان، پروفسور محمد توکلی بینا.

هیأت مدیره انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق:

پروفسور مسعود شفیعی، دکتر محمدرضا جاهد مطلق، پروفسور ایرج گودرزنیا، پروفسور بهزاد مشیری، پروفسور علی اکبر صفوی، دکترایمان محمدزمان، دکتر
علی اشرف مدرس، مهندس علی کیانی.

ایران - تهران، صندوق پستی ۳۵۹۵-۱۵۸۱۵

تلفن: ۸۱۰۳۲۲۳۱

فاکس: ۸۱۰۳۲۲۰۰

www.isice.ir

فهرست مقالات

- ۱ توسعه مفاهیم و قضایای توابع تبدیل ماتریسی اکیداً حقیقی مثبت
مجتبی حکیمی مقدم، حمید خالوزاده
- ۱۱ طراحی و ساخت سیستم اندازه گیری و کنترل TDS آب در سیستم های تصفیه آب اسمز معکوس به روش PID کلاسیک، با توانایی جبران سازی اثر دما بر روی اندازه گیری
سید کمال الدین موسوی مشهدی، حمید یدالهی
- ۲۳ تحلیل پایداری و کنترل PID مقاوم ربات های موازی کابلی با شرط نیروی کششی در کابل ها
محمد اعظم خسروی، حمیدرضا تقی راد
- ۳۵ رهیافتی نو برای تعیین شش مولفه موقعیت و وضعیت یک شیء با عکسبرداری
عبدالحمید بهجت پناه، جعفر حیرانی نوبری، مهدیه حسینیقلی زاده آلاشتی
- ۴۹ وفقی سازی شعاع کرنل در تخمین موقعیت اجسام متحرک بر اساس الگوریتم باز نمونه برداری فیلتر ذره
عقیل عبیری، محمد رضا محزون
- ۶۱ تحلیل و جبران سازی خطای کانال ارتفاع سیستم ناوبری اینرسی در ارتفاعات بالا با کمک اطلاعات ردیاب ستاره
امیر مقتدایی راد، جعفر حیرانی نوبری، امیرعلی نیکخواه

مجله کنترل، مجله ای علمی - پژوهشی است که در برگیرنده تازه ترین نتایج تحقیقات نظری و کاربردی در علوم مختلف مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق می باشد. مقالات ارسالی به مجله کنترل می بایست به زبان فارسی و دارای چکیده انگلیسی باشند. از میان مباحث مورد نظر این مجله میتوان به موارد زیر اشاره نمود:

- (۱) مدل سازی، شناسایی، شبیه سازی، پیش بینی، بهینه سازی و پایش عملکرد سیستم ها.
- (۲) تحلیل و طراحی سیستم های کنترل پیشرفته از قبیل سیستم های کنترل خطی و غیرخطی، سیستم های کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم و کنترل بهینه، سیستم های کنترل هوشمند، سیستم های کنترل تصادفی، سیستم های کنترل گسسته پیشامد و ترکیبی، سیستم های ابعاد وسیع، سیستم های کنترل چندمنغیره.
- (۳) مکاترونیک و رباتیک.
- (۴) ابزار دقیق و سیستم های ترکیب داده و اطلاعات سنسوری.
- (۵) اتوماسیون صنعتی از قبیل سیستم های کنترل گسترده، رابط انسان - ماشین، سیستم های ایمنی و تشخیص خطا، تحلیل و طراحی سیستم های کنترل کسری، شناسایی و تشخیص عیب در سیستم ها، سیستم های کنترل پیچیده، سیستم های زمان حقیقی و سیستم های کنترل سوپروایزری.

کاربردهای مورد علاقه این مجله، وسیع بوده و می تواند در برگیرنده موارد زیر باشد:

- (۱) سیستم های هدایت و ناوبری.
- (۲) فرآیندهای صنعتی شامل فرآیندهای شیمیایی و بیوتکنولوژی.
- (۳) تولید و توزیع نیروی برق.
- (۴) مهندسی محیط زیست و هواشناسی.
- (۵) سیستمهای اقتصادی و مالی.
- (۶) سیستمهای اطلاعاتی، مخابراتی و شبکه های صنعتی.
- (۷) مهندسی پزشکی.

از کلیه پژوهشگران و کارشناسان فعال در زمینه های مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق دعوت بعمل می آید تا مقالات و نتایج آخرین دستاوردهای علمی و پژوهشی خود را به این مجله ارسال نمایند. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی به آدرس control@isice.ir ارسال فرمایید. برای کسب اطلاعات بیشتر و دریافت نحوه تهیه و ارسال مقالات می توانید به سایت مجله با آدرس www.isice.ir مراجعه نمایید.

شیوه تدوین

متن مقالات شامل چکیده، بدنه مقاله، مراجع و زیرنویسها باید با فونت ۱۲ B Zar و با فاصله double میان خطوط، در صفحات A4 یک ستونی و تحت نرم افزار Word تهیه گردد.

آدرس نویسندگان

آدرس پستی کامل همه نویسندگان همراه با شماره تلفن و دورنگار (فکس) و نشانی پست الکترونیک (email) نویسنده عهده دار مکاتبات در برگه مستقلی چاپ و به همراه مقاله ارسال گردد.

چکیده

هر مقاله باید شامل، عنوان (فارسی و انگلیسی)، چکیده (فارسی و انگلیسی) مقاله در حداکثر ۲۰۰ واژه، کلیدواژه (فارسی و انگلیسی) در حداکثر ۵ واژه باشد.

تصاویر و عکسها

در هنگام ارسال مقاله جهت داوری نیازی به ارسال اصل تصاویر و عکسها نمی باشد، ولی رونوشت ارسالی باید واضح باشد. پس از تایید مقاله، ارسال اصل تصاویر و عکسها جهت چاپ مقاله ضروری می باشد.

مراجع

به کلیه مراجع باید در متن ارجاع داده شده باشد. مراجع باید با شماره مشخص گردند و جزئیات آنها به شرح زیر در پایان مقاله به ترتیب حروف الفبای نویسندگان ظاهر گردد:

مقالات: [شماره مرجع] نام خانوادگی و علامت اختصاری اول نام، سال انتشار یا تاریخ برگزاری، "عنوان مقاله"، نام کامل نشریه یا کنفرانس، شماره مجله یا شماره جلد، شماره صفحات.

کتابها: [شماره مرجع] نام خانوادگی و نام کامل همه نویسندگان، عنوان کتاب، نام مترجم (در صورت وجود)، نام کامل ناشر، سال انتشار.

واحدها: کلیه مقالات باید از واحد استاندارد SI (متریک) در تمام بخشهای مقاله استفاده نمایند. در کنار واحد SI می توان از واحد انگلیسی در داخل پرانتز نیز استفاده نمود.

طول مقالات

حداکثر حجم مقالات در هنگام چاپ ۱۵ صفحه می باشد که معادل حدود ۷۵۰۰ واژه می باشد. برای چاپ صفحات بیشتر و یا رنگی لازم است هزینه ای معادل ۲۵۰,۰۰۰ ریال (۲۵ دلار آمریکا) برای هر صفحه به حساب مجله واریز گردد.

فرایند ارسال مقاله

مقالات قابل چاپ در مجله شامل مقالات کامل پژوهشی، مقالات کوتاه و یادداشتهای پژوهشی می باشد. مقالات ارسالی نباید در هیچ مجله داخلی و یا خارجی چاپ شده باشد و یا در حال داوری باشد.

- لازم است نسخه الکترونیکی مقاله به شکل pdf و word جهت داوری به نشانی مجله control@isice.ir ارسال شود.
- مقالات جهت داوری به داوران متخصص ارسال میگردد. در پایان تایید یا رد هر مقاله توسط هیئت تحریریه مجله انجام خواهد پذیرفت. سردبیر مجله نتیجه داوری را برای نویسنده عهده دار مکاتبات ارسال خواهد نمود.
- در صورتی که نیاز به تصحیح مقاله باشد، تصحیحات باید منحصرأ محدود به موارد ذکر شده باشد. در سایر موارد نویسنده لازم است سردبیر را در جریان هر گونه تغییر و یا تصحیح دیگری قرار دهد. در هر صورت مسئولیت صحت و سقم مطالب بر عهده نویسنده خواهد بود.

حق کپی: در صورت تایید مقاله، نویسندگان لازم است فرم انتقال حق انتشار آن به "انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران" را تکمیل و به همراه اصل مقاله ارسال نمایند. نویسندگان لازم است موافقت کتبی دارندگان حق کپی بخشهایی از مقاله که از مراجع و منابع دیگر نسخه برداری شده است را دریافت و به دفتر مجله ارسال نمایند.

بدینوسیله از کلیه اساتید، پژوهشگران و کارشناسان مهندسی کنترل و ابزار دقیق جهت ارائه مقالات خود در این نشریه دعوت به عمل می آورد. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی به آدرس: control@isice.ir ارسال فرمایید. برای کسب اطلاعات بیشتر میتوانید به سایت: <http://www.isice.ir> مراجعه نمایید.

توسعه مفاهیم و قضایای توابع تبدیل ماتریسی اکیداً حقیقی مثبت

مجتبی حکیمی مقدم^۱، حمید خالوزاده^۲

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل و سیستم، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

^۲ استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل و سیستم، قطب علمی کنترل صنعتی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

mojtaba_hakimi@ee.kntu.ac.ir, h_khaloozadeh@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۱۰/۱۴، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۱۲/۱۲)

چکیده: امروزه تقریباً در تمام زیر شاخه‌های کنترل حتی کنترل هوشمند از مزایای توابع تبدیل اکیداً حقیقی مثبت در پایدار سازی سیستم‌های کنترل حلقه بسته استفاده می‌شود. حضور این توابع تبدیل در یک سیستم کنترل حلقه بسته می‌تواند به تولید یک تابع لیاپانوف برای تضمین پایداری سیستم حلقه بسته کمک کند. با این وجود شرایط لازم و کافی داده شده برای توابع تبدیل ماتریسی اکیداً حقیقی- مثبت در مراجع مختلف برای سال‌های مدید، یکسان نبوده است. این موضوع اخیراً مورد توجه قرار گرفته است و نشان داده شده است که قضایای قبلی دارای ناسازگاری‌هایی با تعریف این توابع هستند. در این مقاله یک تمایز مهم ماتریس‌های تبدیل اکیداً حقیقی مثبت و حقیقی مثبت ارائه و اثبات می‌شود. علاوه بر این شرایط لازم و کافی ساده‌تر و کلی‌تری برای تعریف ماتریس‌های تبدیل اکیداً حقیقی مثبت ارائه می‌شود. مزیت مهم کار حاضر استفاده از پارامترهای مارکوف سیستم‌های چند متغیره است. می‌دانیم این پارامترها هم در حوزه فرکانس و هم در فضای حالت به راحتی قابل محاسبه هستند و بنابراین چارچوب یکسانی را برای حوزه فرکانس و حوزه زمان فراهم می‌آورند. همچنین با ارائه چند مثال مزیت نتایج جدید در مقایسه با کارهای قبلی نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: توابع تبدیل ماتریسی، توابع تبدیل اکیداً حقیقی مثبت (SPR)، پارامترهای مارکوف سیستم، بسط لوران.

Extension of Concepts and Theorems for Strictly Positive Real Transfer Function Matrices

Mojtaba Hakimi Moghaddam, Hamid Khaloozadeh

Abstract: Nowadays almost in the all branches of control even intelligent control strictly positive real transfer functions are used to stabilize closed loop control systems. These transfer functions in a closed loop control system can help to generate a lyapunov function for guarantee the stability of closed loop system. Nevertheless, the necessary and sufficient conditions for strictly positive real transfer function matrices have been different in the literature for many years. Recently, it is shown that there are inconsistencies between definition and theorems of strict positive realness. In this paper, we present and prove an important difference between positive real and strictly positive real transfer function matrices. Moreover, we introduce more complete and simpler necessary and sufficient conditions for strictly positive real transfer function matrices. An important advantage of present work is usage of Markov parameters of multivariable systems. We know these parameters are easily calculated in both frequency and time domains, so using these parameters can make a similar framework in both frequency and time domains. Presenting some examples, we show the advantages of our new results in comparison to before works.

Keywords: Matrix Transfer Functions, Strictly Positive Real (SPR) Transfer Functions, Markov Parameter of Systems, Laurent Series Expansion.

¹ - Strictly Positive Real

۱- مقدمه

نظریه تحقق^۱ در شبکه‌های الکتریکی عامل اصلی تعریف و توسعه توابع تبدیل حقیقی مثبت^۲ (PR) بوده است. در سال ۱۹۳۰ نشان داده شد که حقیقی مثبت بودن شرط لازم و کافی برای تحقق پذیری امیدانس نقطه تحریک یک شبکه‌ی الکتریکی تک درجه‌ای غیر فعال است که در آن فقط از اجزای غیر فعال مقاومت، خازن، القاگر و القاگرهای متقابل استفاده شده است [۱]. تعمیم تحقق پذیری به شبکه‌های الکتریکی چند درجه‌ای^۳ و ارتباط آن با سیستم‌های چند متغیره‌ی حقیقی مثبت در [۲] مورد بحث قرار گرفته است. در این راستا اطلاعات جامعی در [۳] و [۴] آمده است که شامل جمع‌بندی و تکمیل کارهای قبلی است. شناخت ویژگی‌ها و شرایط لازم و کافی معادل برای توابع تبدیل اکیداً حقیقی-مثبت (SPR) بسیار مهم است زیرا حضور این توابع در حلقه‌ی کنترل، خواص منحصر به فردی را به همراه خواهد داشت که می‌تواند به تولید یک تابع لیاپانوف برای تضمین پایداری سیستم حلقه بسته منتهی شود. امروزه تقریباً در تمام زیر شاخه‌های کنترل حتی کنترل هوشمند از مزایای این توابع در پایدار سازی سیستم‌های کنترل حلقه بسته استفاده می‌شود [۵]. لازم به ذکر است که مفهوم اکیداً حقیقی مثبت بودن، بارها مورد بازنگری قرار گرفته است، از جمله می‌توان به مراجع [۶] تا [۱۵] اشاره نمود. اولین کارهای انجام گرفته در ارتباط با استخراج شرایط لازم و کافی و ویژگی‌های یک ماتریس تبدیل SPR در سال‌های ۱۹۸۸ و ۱۹۹۰ به ترتیب در دو مقاله‌ی معروف [۱۶] و [۱۷] صورت گرفته است. در [۱۸] یک شرط کافی و در مراجع [۱۹] تا [۲۱] بیان‌های دیگری برای شرایط لازم و کافی ذکر شده است که در جزئیات یکسان نیستند. این بیان‌ها در یک شرط وابسته به فرکانس‌های بالا با هم اختلاف دارند. این شرط موضوع اصلی بحث در این مقاله است و به‌طور مفصل مورد بررسی قرار می‌گیرد و چندین مثال برای تشریح آن ذکر می‌شود. در این میان شرایط لازم و کافی مذکور در [۱۶] و [۲۱] بیشتر مورد استناد مقالات و کتب بوده است. با این حال در [۱۳] تا [۱۵] نشان داده شده است که نتایج مذکور در [۱۶] و [۲۱] هیچ‌کدام کامل نبوده و با تعریف توابع تبدیل ماتریسی اکیداً حقیقی مثبت ناسازگاری دارند. بالاخره در [۲۲] چند ویژگی مهم برای ماتریس‌های PR به اثبات رسیده است. کار حاضر از یک طرف تعمیم نتایج مذکور در [۶] به سیستم‌های چند متغیره و از طرف دیگر تکمیل و ساده سازی نتایج ذکر شده در [۱۳] تا [۱۵] و [۲۲] است. ایده اصلی ما در این مقاله استفاده از پارامترهای مارکوف سیستم است. ما به کمک پارامترهای مارکوف سیستم رفتار فرکانس بالای مقادیر ویژه شکل هرمیتی یک ماتریس تبدیل SPR را آشکار خواهیم نمود. به این ترتیب شرط فرکانس بالا که برای سال‌ها مورد اختلاف بوده است حال به‌طور ترسیمی به راحتی قابل بررسی

خواهد بود. همچنین این شرط در تکمیل شرایط لازم و کافی برای ماتریس‌های تبدیل SPR نقش کلیدی داشته و منجر به استخراج شرایط لازم و کافی ساده‌تری نسبت به کارهای گذشته می‌شود. لازم به ذکر است که در این تحقیق ماتریس‌های ناسره^۴ نیز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

۲- تعاریف و مفاهیم پایه

فرض کنید $G(s)$ یک ماتریس تابع تبدیل مربعی با ضرایب حقیقی به صورت

$$G(s) = [g_{ij}(s)]_{m \times m} = Es + D + C(sI - A)^{-1}B \quad (۱)$$

باشد که در آن تحقق (A, B, C) می‌نیمال است.

تعریف ۱ [۲۳] ماتریس تبدیل $G(s)$ را

الف) ناسره^۵ گوئیم هرگاه $E \neq 0$

ب) سره^۶ گوئیم هرگاه $E = 0$

ج) سره دوطرفه^۷ گوئیم هرگاه $E = 0, D \neq 0$

د) اکیداً سره^۸ گوئیم هرگاه $E = D = 0$.

بخش اکیداً سره ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ را با $G_{sp}(s)$ نمایش می‌دهیم که در آن $B_1, \dots, B_n$ ماتریس‌های مربعی $m \times m$ با درایه‌های ثابت و حقیقی هستند.

$$G_{sp}(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{B_1 s^{n-1} + \dots + B_{n-1} s + B_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n} \quad (۲)$$

در ادامه هر جا از $G(s)$ یا $G_{sp}(s)$ استفاده شده منظور روابط (۱) و (۲) است.

تعریف ۲ [۴] ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ حقیقی مثبت نامیده می‌شود اگر شرایط زیر را دارا باشد.

(۱) $G(s)$ هیچ قطبی در نیم صفحه‌ی راست باز^۹ نداشته باشد،

(۲) برای هر ω حقیقی که $j\omega$ قطبی از $G(s)$ نیست داشته

$$\text{باشیم } G(j\omega) + G^T(-j\omega) \geq 0,$$

(۳) اگر $j\omega$ قطبی از $G(s)$ است، این قطب غیر تکراری بوده و

ماتریس مانده^{۱۰} متناظر با آن نیمه معین مثبت باشد.

با توجه به این که استفاده از تعریف ۲ برای شناخت ماتریس‌های تابع

⁴- Improper Matrices

⁵- Improper

⁶- Proper

⁷- Semi-proper or bi-proper

⁸- Strictly proper

⁹- Open Right Half Plane

¹⁰- Residue Matrix

¹- Realization Theory

²- Positive Real

³- Multi-Port Electrical Networks

مورد ماتریس‌های تابع تبدیل SPR مرور می‌شود.

تعریف ۴ [۱۵] ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ را عادی^۲ گوئیم هرگاه معادله‌ی

$$\det(G(j\omega) + G^T(-j\omega)) = 0 \quad (۵)$$

دارای تعداد محدودی ریشه حقیقی باشد که در آن $\det(\cdot)$ نماد دترمینان است.

لم ۶ [۱۴] ماتریس تابع تبدیل عادی $G(s)$ اکیداً حقیقی مثبت است، اگر و فقط اگر

$$G(s) \text{ هیچ قطبی در نیم-صفحه‌ی راست بسته}^۳ \text{ نداشته باشد،} \quad (۱)$$

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) > 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (۲)$$

$$\text{رابطه‌ی } G(j\omega - \varepsilon) + G^T(-j\omega - \varepsilon) \geq 0 \text{ برای} \quad (۳)$$

یک $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک و ω به اندازه کافی بزرگ، برقرار باشد.

$$E = E^T \geq 0 \quad (۴)$$

شرط ۳ در لم اخیر را **شرط فرکانس بالا** می‌نامیم زیرا باید برای مقادیر بزرگ ω یک عدد مثبت به اندازه دلخواه کوچک ε وجود داشته باشد که رابطه‌ی

$$G(j\omega - \varepsilon) + G^T(-j\omega - \varepsilon) \geq 0 \quad (۶)$$

را برآورده نماید. این شرط محل اختلاف کارهای گذشته بوده است و بحث اصلی این مقاله تشریح و ساده سازی این شرط است.

در مقاله معروف تا^۴ [۱۶] که در سال ۱۹۸۸ منتشر شد معادل زیر برای شرط فرکانس بالا داده شده است: اگر $\det(D + D^T) \neq 0$ ، آنگاه $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (G(j\omega) + G^T(-j\omega)) > 0$ در غیر این صورت برای برخی مقادیر $\delta > 0$ رابطه‌ی $D + D^T - \delta(E + E^T) \geq 0$ برقرار بوده و نیز $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 (G(j\omega) + G^T(-j\omega)) > 0$.

در ویرایش سوم کتاب خلیل^۵ [۲۱] که در سال ۲۰۰۲ منتشر شده است، معادل زیر با پیش‌فرض $E = 0$ برای شرط فرکانس بالا داده شده است: یا $D + D^T > 0$ و یا اگر $D + D^T \geq 0$ ، آنگاه برای هر ماتریس رتبه کامل M^r با ابعاد $m \times (m - \text{rank}(D + D^T))$ که در آن $M^T(D + D^T)M = 0$ داشته باشیم

تبدیل حقیقی مثبت مشکل است در ادامه به بررسی چند لم می‌پردازیم که برخی از ویژگی‌ها و خواص این ماتریس‌ها را تشریح می‌کنند.

لم ۱ [۲۲] اگر $G(s)$ یک ماتریس تابع تبدیل PR باشد، آنگاه $D + D^T \geq 0$ و $E = E^T \geq 0$.

لم ۲ [۲۲] اگر $G(s)$ یک ماتریس تابع تبدیل PR باشد، آنگاه عناصر قطر اصلی آن نیز توابع تبدیل PR خواهند بود.

لم ۳ [۲۲] اگر $G(s)$ یک ماتریس تابع تبدیل PR باشد، آنگاه هیچ صفر انتقالی در نیمه‌ی راست صفحه نخواهد داشت و صفرهای انتقال واقع بر محور موهومی نیز در صورت وجود غیر تکراری هستند.

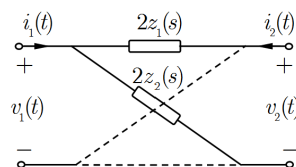
لم ۴ [۳] اگر $G(s)$ یک ماتریس تابع تبدیل PR باشد، آنگاه معکوس آن یعنی $G^{-1}(s)$ نیز در صورت وجود PR است.

لم ۵ [۲۴] اگر $G(s)$ ماتریس امپدانس^۱ یک شبکه‌ی الکتریکی خطی نامتغیر با زمان و غیر فعال باشد، آنگاه $G(s)$ حقیقی مثبت است.

نتیجه ۱ شبکه‌ی دو دریچه‌ای شکل (۱) دارای ماتریس امپدانس

$$G(s) = \begin{bmatrix} z_2(s) + z_1(s) & z_2(s) - z_1(s) \\ z_2(s) - z_1(s) & z_2(s) + z_1(s) \end{bmatrix} \quad (۳)$$

است. بنابراین بدیهی است اگر $z_1(s)$ و $z_2(s)$ توابع تبدیل اسکالر PR باشند، آنگاه $G(s)$ نیز یک ماتریس تابع تبدیل PR خواهد بود.



شکل ۱ شبکه‌ی دو دریچه‌ای غیر فعال و متقابل موسوم به لیتس متقارن.

مثال ۱ با توجه به تعریف ۲ به راحتی می‌توان نشان داد که $z_1(s) = \frac{2}{s+1}$ و $z_2(s) = \frac{s}{s+1}$ توابع تبدیل PR هستند. بنابراین ماتریس

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{s-2}{s+1} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{s+2}{s+1} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

که بر اساس رابطه (۳) ساخته شده است نیز یک ماتریس PR است.

تعریف ۳ [۲۵] ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ را SPR گوئیم هرگاه $G(s - \varepsilon)$ برای یک $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک PR باشد.

این تعریف نشان می‌دهد که مجموعه‌ی توابع SPR زیر مجموعه توابع PR هستند. بنابراین تمامی ویژگی‌های پیش‌گفته برای توابع PR، در مورد توابع SPR نیز برقرار خواهد بود. در ادامه برخی از نتایج موجود در

^۲- Regular

^۳- Closed Right Half Plane

^۴- Tao

^۵- Khalil

^۶- Full Rank

^۱- Impedance Matrix

$$A_k = CA^{k-1}B; k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 - \alpha_1 A_1 \\ A_3 &= B_3 - \alpha_1 A_2 - \alpha_2 A_1 \\ &\vdots \\ A_n &= B_n - \alpha_1 A_{n-1} - \alpha_2 A_{n-2} - \dots - \alpha_{n-1} A_1 \\ \text{If } k > n, \text{ Then} \\ A_k &= -\alpha_1 A_{k-1} - \alpha_2 A_{k-2} - \dots - \alpha_{n-1} A_{k-n+1} - \alpha_n A_{k-n} \end{aligned} \quad (10)$$

حال می‌خواهیم به کمک بسط لورانت داده شده در (۸) یک تعبیر هندسی برای (۷) به دست آوریم. با توجه به این که

$$G(s) = Es + D + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s^3} + \dots, |s| > R_L \quad (11)$$

و با فرض $G_H(j\omega) = G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ داریم

$$\begin{aligned} G(j\omega) + G^T(-j\omega) &= j\omega(E - E^T) + \\ &+ (D + D^T) + \frac{(A_1 - A_1^T)}{j\omega} - \frac{(A_2 + A_2^T)}{\omega^2} - \\ &- \frac{(A_3 - A_3^T)}{j\omega^3} + \dots, |\omega| > R_L \end{aligned} \quad (12)$$

از طرفی می‌دانیم اگر $G(s)$ حقیقی مثبت باشد، آنگاه جمله $j\omega(E - E^T)$ در رابطه (۱۲) برابر صفر است (زیرا بنا به لم ۱ $E = E^T$)؛ پس رابطه (۷) برای ماتریس‌های تابع تبدیل ناسره نیز برقرار است.

می‌دانیم اگر تابع تبدیل اسکالر $G(s)$ اکیداً حقیقی مثبت باشد، آنگاه $\text{Re}\{G(j\omega)\}$ نمی‌تواند برای مقادیر بزرگ ω سریع‌تر از ω^{-2} به صفر همگرا شود [۳۰]. در قضیه‌ی زیر این نتیجه را به ماتریس‌های تابع تبدیل اکیداً حقیقی مثبت تعمیم می‌دهیم. این قضیه امکان بررسی برقراری شرط فرکانس بالا را با توجه به منحنی اندازه مقادیر ویژه $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ فراهم می‌آورد.

قضیه ۱ مقادیر ویژه یک ماتریس تابع تبدیل SPR نمی‌توانند برای مقادیر بزرگ ω سریع‌تر از ω^{-2} به صفر همگرا شوند.

اثبات: بدیهی است مقادیر ویژه ماتریس $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ توابع زوج و حقیقی از ω هستند و اگر آن‌ها را با $\lambda_i(G(j\omega) + G^T(-j\omega))$ نمایش دهیم، آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \lambda_i(G(j\omega) + G^T(-j\omega)) &= \lambda_{0i} + \\ &+ \frac{\lambda_{2i}}{\omega^2} + \frac{\lambda_{4i}}{\omega^4} + \frac{\lambda_{6i}}{\omega^6} + \dots, |\omega| > R_L \end{aligned} \quad (13)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 M^T(G(j\omega) + G^T(-j\omega))M > 0$$

کرلس^۱ در سال ۲۰۱۰ نشان داد شرط فرکانس بالای ذکر شده در مقاله‌ی تا [۱۶] و کتاب خلیل [۲۱] وقتی $0 < \text{rank}(D + D^T) < m$ تعریف ۳ سازگار نیست. علاوه بر این در مقاله کرلس [۱۵] معادل جدید زیر برای شرط فرکانس بالا با پیش‌فرض $E = 0$ و $N = m - \text{rank}(D + D^T)$ ارائه شده است:

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^{2N} \det(G(j\omega) + G^T(-j\omega)) \neq 0 \quad (14)$$

رابطه (۷) یک تفاوت بسیار مهم ماتریس‌های PR و SPR را بازگو می‌کند. گرچه رابطه (۷) مستقل از ε بوده و به مراتب ساده‌تر از رابطه (۶) است، اما بررسی آن در بسیاری از مواقع پیچیده و طولانی است. در بخش بعد ابتدا نشان می‌دهیم که رابطه (۷) برای سیستم‌های ناسره نیز برقرار است. سپس این شرط را به رفتار فرکانس بالای مقادیر ویژه ماتریس $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ ارتباط می‌دهیم. در حقیقت اثبات می‌کنیم افت در اندازه مقادیر ویژه ماتریس $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ در فرکانس‌های بالا نباید بیش از $40 \frac{dB}{dec}$ (چهل دسی‌بل بر دهه) باشد. این نتیجه امکان بررسی شرط فرکانس بالا را از روی منحنی‌های اندازه مقادیر ویژه ماتریس $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ فراهم می‌آورد و این نتیجه‌ی بسیار کاربردی و با اهمیتی است زیرا در بسیاری مواقع بررسی رابطه (۷) به صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست. سپس یک معادل ساده‌تر برای رابطه (۷) به دست می‌آوریم که ما را از محاسبه‌ی $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ بی‌نیاز می‌کند و تنها کافی است دو پارامتر اول مارکوف سیستم را به دست آوریم. با چند مثال مزیت استفاده از نتایج جدید در مقایسه با رابطه (۷) نشان داده شده است. همچنین معادل شرط فرکانس بالا را برای ماتریس‌های ناسره استخراج می‌کنیم.

۳- تعبیر هندسی شرط فرکانس بالا

بسط لورانت بخش اکیداً سره ماتریس تابع تبدیل یعنی $G_{sp}(s)$ به صورت رابطه (۸) است که در آن R_L برابر فاصله‌ی دورترین قطب $G_{sp}(s)$ از مبدا است [۲۶ و ۴]. به ضرائب $A_1, A_2, A_3, \dots$ در رابطه (۸) پارامترهای مارکوف سیستم گفته می‌شود [۲۷ و ۴].

$$G_{sp}(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s^3} + \dots, |s| > R_L \quad (15)$$

پارامترهای مارکوف یک ماتریس تبدیل از ویژگی‌های اساسی آن بوده و در کنترل سیستم‌های چند متغیره و تحقق‌های فضای حالت کاربرد فراوان دارند [۲۸] و [۲۷]. پارامترهای مارکوف یک سیستم با توجه به رابطه (۲)، در فضای حالت با رابطه (۹) و در حوزه‌ی فرکانس با رابطه (۱۰) قابل محاسبه هستند [۲۹].

¹- Corless

جا مقادیر ویژه $G_H(j\omega)$ را محاسبه نموده و نشان می‌دهیم ویژگی اثبات شده در قضیه ۱ برقرار نیست. به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\lambda_{1,2}(G_H(j\omega)) = 1 + \frac{\omega^{-2} \pm \sqrt{1 + 4\omega^{-2}}}{\omega^{-2} + 1} \quad (20)$$

حال با استفاده از بسط‌های

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots, |x| < 1 \quad (21)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \mp \dots, |x| < 1 \quad (22)$$

داریم

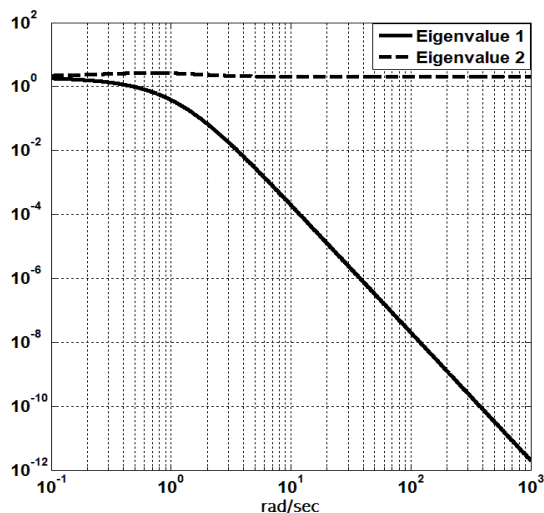
$$\lambda_1(G_H(j\omega)) = 2\omega^{-4} - 6\omega^{-6} + 16\omega^{-8} + \dots, |\omega| > 1 \quad (23)$$

$$\lambda_2(G_H(j\omega)) = 2 + 2\omega^{-2} - 4\omega^{-4} + 8\omega^{-6} + \dots, |\omega| > 1 \quad (24)$$

از رابطه (۲۳) دیده می‌شود که برای مقادیر بزرگ ω داریم $\lambda_1(G_H(j\omega)) \sim 2\omega^{-4}$ پس شرط فرکانس بالا برقرار نیست. شکل ۲ نمودار مقادیر ویژه $G_H(j\omega)$ را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود مقدار ویژه کوچک‌تر در فرکانس‌های بالا مضربی از ω^{-4} است.

۴- ساده سازی شرط فرکانس بالا

در این بخش شرط فرکانس بالای داده شده توسط کرلس را ساده می‌کنیم. قضیه ۲ یک روش تحلیلی بسیار ساده برای بررسی برقراری شرط فرکانس بالا فراهم می‌آورد. در حقیقت این قضیه مبین این حقیقت است که تنها دو پارامتر اول مارکوف سیستم در تعیین حد داده شده با رابطه‌ی (۷) موثر هستند.



شکل ۲: مقادیر ویژه $G_H(j\omega)$ برای مثال ۲

همچنین اگر فرض کنیم مقادیر ویژه به صورت صعودی مرتب شده باشند یعنی $\lambda_m(\cdot) \geq \lambda_{m-1}(\cdot) \geq \dots \geq \lambda_2(\cdot) \geq \lambda_1(\cdot)$ و نقص رتبه ماتریس $D + D^T$ برابر N باشد، آنگاه داریم

$$\lambda_i(G(j\omega) + G^T(-j\omega)) = \begin{cases} \frac{\lambda_{2i}}{\omega^2} + \frac{\lambda_{4i}}{\omega^4} + \frac{\lambda_{6i}}{\omega^6} + \dots, & i=1,2,\dots,N \\ \lambda_{0i} + \frac{\lambda_{2i}}{\omega^2} + \frac{\lambda_{4i}}{\omega^4} + \frac{\lambda_{6i}}{\omega^6} + \dots, & i=N+1, N+2, \dots, m \end{cases} \quad (14)$$

حال با فرض $G_H(j\omega) = G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ خواهیم داشت

$$\det(G_H(j\omega)) = \prod_{i=1}^m \lambda_i(G_H(j\omega)) = \frac{k_1}{\omega^{2N}} + \frac{k_2}{\omega^{2(N+1)}} + \dots \quad (15)$$

که در آن

$$k_1 = (\lambda_{21}\lambda_{22}\dots\lambda_{2N})(\lambda_{0(N+1)}\lambda_{0(N+2)}\dots\lambda_{0m}) \quad (16)$$

پس

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^{2N} \det(G_H(j\omega)) = k_1 \quad (17)$$

بنابراین رابطه‌ی (۷) به این معنی است که مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس تابع تبدیل SPR نمی‌توانند برای مقادیر بزرگ ω سریع‌تر از ω^{-2} به صفر همگرا شوند. ■

نتیجه ۲ اگر ماتریس تبدیل $G(s)$ اکیداً حقیقی مثبت بوده و ماتریس $D + D^T$ دارای نقص رتبه داشته باشد، آنگاه $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^2 \lambda_{\min}(G_H(j\omega)) \neq 0$

یک تمایز مهم ماتریس‌های PR و SPR در قضیه ۱ اثبات شد. در زیر با یک مثال این نتیجه مهم را تشریح می‌کنیم.

مثال ۲ ماتریس تابع تبدیل

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

را در نظر بگیرید. همان‌طور که در [۱۴] ذکر شده است، این ماتریس PR است زیرا

$$G_H(j\omega) = 2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{-j\omega}{\omega^2+1} \\ \frac{j\omega}{\omega^2+1} & \frac{1}{\omega^2+1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

بنابراین $\det(G_H(j\omega)) = \frac{4}{(\omega^2+1)^2} > 0$ می‌توان نشان داد این ماتریس SPR نیست زیرا شرط فرکانس بالا برآورده نمی‌کند. در این-

لازم به ذکر است که برای حالت خاصی که $N = 0$ ، رابطه‌ی (۳۲) معادل است با $\det(D + D^T) \neq 0$. از طرفی می‌دانیم که $D + D^T \geq 0$ بنابراین نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۳ اگر $N = 0$ ، آنگاه رابطه‌ی (۳۲) معادل است با این که $D + D^T > 0$.

همچنین در صورتی که $N = m$ ، آنگاه $D + D^T = 0$ و برای وجود حد (۳۲) لازم است که $A_1 = A_1^T$. اگر تساوی $A_1 = A_1^T$ برقرار باشد، آنگاه حد (۳۲) لازم می‌دارد که $\det(A_2 + A_2^T) \neq 0$. از طرفی برقراری $-(A_2 + A_2^T) \geq 0$ توسط شرط $G_H(j\omega) > 0$ تضمین شده است، پس نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۴ اگر $N = m$ ، آنگاه حد (۳۲) معادل است با این- که $A_1 = A_1^T$ و $-(A_2 + A_2^T) > 0$.

لازم به ذکر است که مثال‌های موجود در مراجع گذشته بسیار ساده انتخاب شده‌اند، به این معنی که ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ با ابعاد 2×2 و توابع تبدیل هر درایه‌ی آن از مرتبه اول انتخاب می‌شده است. ما در این جا با ارائه چند مثال پیچیده برای حالتی که $0 < N < m$ مزایای نتایج جدید را در مقایسه با کارهای گذشته نشان می‌دهیم.

مثال ۳ ماتریس تابع تبدیل

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s^4 + 10s^3 + 17s^2 + 15s + 6}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1} & \frac{2s^4 + 5s^3 + s^2 - 2s - 3}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1} \\ \frac{2s^4 + 5s^3 + s^2 - 2s - 3}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1} & \frac{2s^4 + 11s^3 + 17s^2 + 20s + 9}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1} \end{bmatrix}$$

مفروض است.

بدیهی است بررسی برقراری رابطه‌ی (۷) که مستلزم محاسبه $\det(G(j\omega) + G^T(-j\omega))$ می‌باشد کار بسیار طولانی و خسته کننده‌ای است. نشان می‌دهیم این کار به کمک رابطه‌ی استخراج شده در (۳۲) به راحتی انجام پذیر است. با استفاده از (۱۰) داریم

$$E = 0, D = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, N = 1, \quad (33)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$G_{TH}(j\omega) = 2 \begin{bmatrix} 2 + 3\omega^{-2} & 2 + 4\omega^{-2} \\ 2 + 4\omega^{-2} & 2 + 6\omega^{-2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

قضیه ۲ شرط فرکانس بالای داده شده در (۷) معادل است با شرط

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^{2N} \det(G_{TH}(j\omega)) \neq 0 \quad (25)$$

که در آن $G_{TH}(j\omega)$ شکل منقطع ماتریس هرمیتی $G_H(j\omega)$ است و با رابطه‌ی

$$G_{TH}(j\omega) = D + D^T + \frac{(A_1 - A_1^T)}{j\omega} - \frac{(A_2 + A_2^T)}{\omega^2} \quad (26)$$

داده می‌شود.

اثبات: فرض کنید P و Q دو ماتریس هرمیتی $m \times m$ بوده و مقادیر ویژه‌ی هر یک از آن‌ها و نیز مقادیر ویژه‌ی مجموع آن‌ها به صورت صعودی مرتب شده باشد، آنگاه رابطه‌ی زیر برقرار است [۳۱].

$$\lambda_{i+j-m}(P+Q) \leq \lambda_i(P) + \lambda_j(Q), \quad i+j \geq m+1 \quad (27)$$

بنابراین با انتخاب $j = m$ داریم

$$\lambda_i(P+Q) - \lambda_i(P) \leq \lambda_{\max}(Q), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (28)$$

این رابطه نشان می‌دهد که تفاضل هر یک از مقادیر ویژه‌ی $P+Q$ و P کوچک‌تر یا مساوی، بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی Q است. حال با انتخاب $Q = G_{TH}(j\omega)$ و $P+Q = G_H(j\omega)$ برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ خواهیم داشت

$$\lambda_i(G_H(j\omega)) - \lambda_i(G_{TH}(j\omega)) \leq \lambda_{\max}(G_H(j\omega) - G_{TH}(j\omega)) \sim k\omega^{-3} \quad (29)$$

بنابراین بدیهی است که اگر

$$\lambda_i(G_{TH}(j\omega)) = \lambda_{T0i} + \frac{\lambda_{T2i}}{\omega^2} + \frac{\lambda_{T4i}}{\omega^4} + \dots + \frac{\lambda_{T(2m)i}}{\omega^{2m}}, \quad |\omega| > R_L \quad (30)$$

آنگاه λ_{T0i} و λ_{T2i} برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ به ترتیب با λ_{0i} و λ_{2i} در رابطه (۱۳) برابر هستند. بنابراین

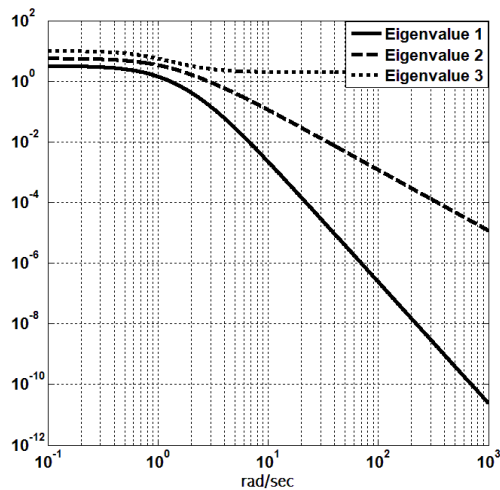
$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^{2N} \det(G_H(j\omega)) = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^{2N} \det(G_{TH}(j\omega)) = k_1 \quad (31)$$

از این رو شرط فرکانس بالای داده شده توسط کرلس به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^{2N} \det \left(D + D^T + \frac{(A_1 - A_1^T)}{j\omega} - \frac{(A_2 + A_2^T)}{\omega^2} \right) \neq 0 \quad (32)$$

و اثبات کامل است. ■

نیست. دقت کنید که نقص رتبه‌ی ماتریس $D + D^T$ برابر $N = 2$ است و بنابراین شرط فرکانس بالا لازم می‌دارد که دو تا از مقادیر ویژه‌ی $G_H(j\omega)$ در فرکانس‌های بالا با نرخ ω^{-2} به صفر همگرا شوند. مقادیر ویژه‌ی ماتریس $G_H(j\omega)$ در شکل ۴ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که اندازه‌ی کوچکترین مقدار ویژه در فرکانس‌های بالا با ω^{-4} متناسب است و دومین مقدار ویژه در فرکانس‌های بالا با ω^{-2} متناسب است.



شکل ۴: مقادیر ویژه‌ی $G_H(j\omega)$ برای مثال ۴

مثال ۵: ماتریس تابع تبدیل $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ با فرض

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -12 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1.5 & 10 \\ 0.5 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

داده شده است.

مشابه مثال‌های قبل استفاده از شرط (۷) که مستلزم محاسبه $\det(G(j\omega) + G^T(-j\omega))$ می‌باشد کار بسیار طولانی و خسته کننده‌ای است. نشان می‌دهیم که بررسی برقراری این شرط به کمک رابطه‌ی معادل استخراج شده در (۳۲) به راحتی انجام پذیر است. با استفاده از (۹) داریم

$$E = 0, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N = 1,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

بنابراین

پس $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{2N} \det(G_{TH}(j\omega)) = 8 \neq 0$ و بنابراین شرط فرکانس بالا برقرار است. در شکل ۳ مقادیر ویژه‌ی ماتریس $G_H(j\omega)$ ترسیم شده است. این شکل نشان می‌دهد که کوچکترین مقدار ویژه در فرکانس‌های بالا با ω^{-2} متناسب است یا به طور معادل در هر دهه 40^{dB} افت دارد.

مثال ۴: ماتریس تابع تبدیل

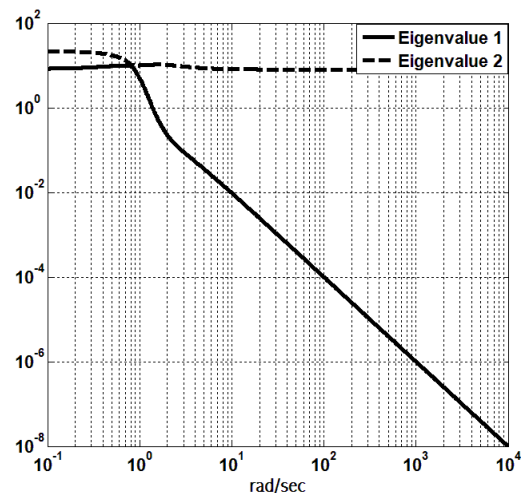
$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+3} & \frac{-s+2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{s+1}{s+3} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{s+2}{s+4} & \frac{1}{s+3} & \frac{3}{s+1} \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. در این مثال نیز استفاده از رابطه‌ی (۷) بسیار مشکل است به‌ویژه که ماتریس دارای ابعاد 3×3 است. با استفاده از (۱۰) داریم

$$E=0, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N=2,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

بنابراین



شکل ۳: مقادیر ویژه‌ی $G_H(j\omega)$ برای مثال ۳

$$G_{TH}(j\omega) = 2 \begin{bmatrix} 3\omega^{-2} & 3\omega^{-2} & 3\omega^{-2} \\ 2\omega^{-2} & 2\omega^{-2} + 1 & 2\omega^{-2} \\ 3\omega^{-2} & 3\omega^{-2} & 3\omega^{-2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

بدیهی است که ماتریس $G_{TH}(j\omega)$ ویژه است زیرا سطر اول و سوم آن یکسان هستند، پس $\det(G_{TH}(j\omega)) = 0$. بنابراین رابطه‌ی (۳۲) برقرار نیست و در نتیجه $G(s)$ شرط فرکانس بالا را ندارد و SPR

اکیداً سره $G_{sp}(s)$ حقیقی مثبت باشد، آنگاه ماتریس $H(s) = Es + G_{sp}(s)$ نیز با فرض $E = E^T \geq 0$ حقیقی-مثبت خواهد بود. اما این حکم در مورد ماتریس‌های SPR صادق نیست. در واقع اگر $G_{sp}(s)$ اکیداً حقیقی مثبت باشد، آنگاه ماتریس $H(s) = Es + G_{sp}(s)$ نمی‌تواند SPR باشد زیرا شرط $D + D^T - 2\varepsilon E \geq 0$ نقض می‌شود. اما ماتریس $H(s) = Es + D + G_{sp}(s)$ با دو فرض $E = E^T \geq 0$ و $D + D^T - 2\varepsilon E \geq 0$ اکیداً حقیقی مثبت خواهد بود.

مثال ۶ ماتریس تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ اکیداً حقیقی-مثبت است زیرا برای هر $0 < \varepsilon < 1$ ماتریس $G(s - \varepsilon)$ یک ماتریس PR است. بدیهی است که ماتریس $H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} s + G(s)$ حقیقی مثبت است ولی اکیداً حقیقی مثبت نیست زیرا شرط $D + D^T - 2\varepsilon E \geq 0$ را برآورده نمی‌کند.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله شرایط لازم و کافی برای ماتریس‌های تابع تبدیل SPR مورد بررسی قرار گرفت. برای یک شرط فرکانس بالا که مورد اختلاف کارهای گذشته بوده است تعبیر هندسی ارائه شد. علاوه بر این با استفاده از آنالیز مختلط ماتریسی نتایج قبلی به کمک پارامترهای مارکوف سیستم توصیف و سپس ساده سازی شد. همچنین شرایط لازم و کافی به ماتریس‌های تابع تبدیل ناسره تعمیم داده شد. از مزایای نتایج بدست آمده می‌توان به سادگی استفاده از آن اشاره نمود به‌طوری‌که با افزایش ابعاد ماتریس تابع تبدیل و یا افزایش تعداد قطب‌های آن بررسی شرایط جدید به‌مراتب ساده‌تر از نتایج قبلی است. همچنین یک وجه تمایز مهم ماتریس‌های SPR و PR که وابسته به رفتار فرکانس بالای مقادیر ویژه‌ی شکل هرمیتی ماتریس تبدیل است، استخراج گردید.

مراجع

- [1] W.-K. Chen, *Passive and Active Filters*, John Wiley & Sons, 1986.
- [2] L. Weinberg, P. Slepian, "Realizability Conditions on n-Port Networks," *IRE Trans. Circuit Theory*, pp. 217-221, 1958.
- [3] R. W. Newcomb, *Linear Multiport Network*, McGraw-Hill, 1966.
- [4] B. D. O. Anderson, S. Vongpanitlerd, *Network Analysis and Synthesis*, Prentice-Hall, 1973.
- [5] P. Kokotovic, M. Arcak, "Constructive Nonlinear

$$G_{TH}(j\omega) = 2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega} \\ -1 & \frac{2}{\omega^2} \end{bmatrix} \quad (۳۸)$$

بنابراین $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{2N} \det(G_{TH}(j\omega)) = 4 \neq 0$ و شرط فرکانس بالا را دارد.

۵- شرایط معادل برای ماتریس‌های ناسره SPR

نشان می‌دهیم که شرط فرکانس بالا برای ماتریس تابع تبدیل $G(s) = Es + D + G_{sp}(s)$ علاوه بر شرط (۳۲) مستلزم برقراری شرط $D + D^T - 2\varepsilon E \geq 0$ نیز می‌باشد. در واقع لازم است که نامساوی $G(j\omega - \varepsilon) + G^T(-j\omega - \varepsilon) \geq 0$ در فرکانس‌های بالا برقرار باشد. اما چون $E = E^T \geq 0$ این نامساوی به-صورت

$D + D^T - 2\varepsilon E + G_{sp}(j\omega - \varepsilon) + G_{sp}^T(-j\omega - \varepsilon) \geq 0$ ساده می‌شود. این رابطه لازم می‌دارد که نامساوی $D + D^T - 2\varepsilon E \geq 0$ برقرار باشد، پس قضیه زیر را خواهیم داشت که شرایط لازم و کافی را به‌صورت کامل‌تر و در عین حال ساده-تر از گذشته بیان می‌نماید.

قضیه ۳ فرض کنید ماتریس تابع تبدیل

$$G(s) = [g_{ij}(s)]_{m \times m} = Es + D + C(sI - A)^{-1}B$$

عادی است، آنگاه $G(s)$ اکیداً حقیقی مثبت است اگر و فقط اگر

$$G(s) \text{ هیچ قطبی در نیم-صفحه‌ی راست بسته نداشته باشد,} \quad (۱)$$

$$E = E^T \geq 0 \quad (۲)$$

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) > 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (۳)$$

$$\text{یکی از شرایط زیر برقرار باشد} \quad (۴)$$

$$D + D^T > 0 \quad (\text{الف})$$

$$D + D^T - 2\varepsilon E \geq 0 \quad (\text{ب}) \quad \text{و نیز اگر}$$

$$N = m - \text{rank}(D + D^T)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{2N} \det \left(D + D^T + \frac{(A_1 - A_1^T)}{j\omega} - \frac{(A_2 + A_2^T)}{\omega^2} \right) \neq 0$$

تذکر ۱ از تعریف ۲ می‌توان نتیجه گرفت که اگر ماتریس تابع تبدیل

- [17] G. Toa, P. A. Ioannou, "Necessary and sufficient conditions for strictly positive real matrices," IEE Proc. Control Theory and Application, vol. 137, no. 5, Oct., 1990.
- [18] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, second edition, Prentice-Hall, 1993.
- [19] K. Zhou, J. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall, 1998.
- [20] I. Hodaka, N. Sakamoto, M. Suzuki, "New Results for Strict Positive Realness and Feedback Stability," IEEE Trans. Auto. Contr, Vol. 45, No. 4, pp. 813-819, April. 2000.
- [21] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, third edition, Prentice-Hall, 2002.
- [22] M. Hakimi-M, H. Khaloozadeh, "Essential Frequency Domain Properties of Positive Real Matrices," in *Proc. ICCAS-SICE2009*, pp. 1514-1517 Japan, Aug. 2009.
- [23] S. Skogestad, I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control*, John Wiley & Sons, second edition, 2001.
- [24] M. E. Van Valkenburg, *Introduction to Modern Network Synthesis*, New York, London, John Wiley & Sons, 1960.
- [25] M. Hakimi-M, H. Khaloozadeh, "Strict Positive Realness as a Mapping," *SICE-ICASE Int. Joint Conf.*, pp. 2362-2367, Korea, Oct. 2006.
- [26] R. V. Churchill, J. W. Brown, *Complex Variables and Applications*, 5th edition, McGraw-Hill, 1990.
- [27] T. Kailath, "Linear Systems," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1980.
- [۲۸] علی خاکی صدیق، تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل چند متغیره، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، ۱۳۹۰.
- [29] C-T, Chen, "Linear System Theory and Design" 3rd Edition, Oxford University Press, 1999.
- [30] K. Narendra and J. Taylor, *Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*, New York: Academic, 1973.
- [31] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- Control: A Historical Perspective," *Automatica*, Vol. 37, pp. 637-662, 2001.
- [۶] مجتبی حکیمی مقدم، حمید خالوزاده، "بازنگری و توسعه در مفاهیم و قضایای توابع تبدیل SPR"، نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران (ویژه مهندسی برق)، جلد ۴۰، شماره ۳، شهریور ماه ۱۳۸۵.
- [7] B. D. O. Anderson, "A System Theory Criterion for Positive Real Matrices," J. SIAM Control, vol. 5, no. 2, pp. 171-182, 1967.
- [8] J. H. Taylor. "Strictly positive-real Functions and the Lefschetz-Kalman-Yakubovich (LKY) Lemma." *IEEE Trans. Circ. Syst.*, pp. 310-311. Mar 1974.
- [9] P. Ioannou, G. Tao, "Frequency Domain Conditions for Strictly Positive Real Functions," *IEEE, Trans. Auto. Contr.*, Vol. Ac-32, No. 1, Jan. 1987.
- [10] R. Lozano, S. M. Joshi, "Strictly Positive Real Transfer Functions Revisited," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 35, no. 11, November 1990.
- [11] M. Hakimi-M, H. Khaloozadeh, "Revision on the Frequency Domain Conditions for Strict Positive Realness," *IJCAS*, Vol. 5, No. 1, pp. 1-7, 2007.
- [12] M. Hakimi M., H. Khaloozadeh, "Comments on "A Note on Spectral Conditions for Positive Realness of Single-Input-Single-Output Systems With Strictly Proper Transfer Functions," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, will be published in Apr. 2013.
- [13] M. Corless, R. Shorten, "A Correct Characterization of Strict Positive Realness for MIMO Systems," in *Proc. ACC*, pp. 469-475, USA, June, 2009.
- [14] M. Hakimi-M, H. Khaloozadeh, "Generalized Necessary and Sufficient Conditions for Strictly Positive Real Matrices," in *Proc. ICCAS-SICE*, pp. 1518-1523, Japan, Aug. 2009.
- [15] M. Corless, R. Shorten, "On the Characterization of Strict Positive Realness for General Matrix Transfer Functions," *IEEE, Trans. Auto. Contr.*, Vol. 55, No. 8, pp. 1899-1904, Aug. 2010.
- [16] G. Tao, P. A. Ioannou, "Strictly Positive Real Matrices and the Lefschetz-Kalman-Yakubovitch Lemma," *IEEE Trans. Auto. Contr*, vol. 33, no. 12, pp. 1183-1185, Dec. 1988.

طراحی و ساخت سیستم اندازه‌گیری و کنترل TDS آب در سیستم‌های تصفیه آب اسمز معکوس به روش PID کلاسیک، با توانایی جبران‌سازی اثر دما بر روی اندازه‌گیری

سید کمال‌الدین موسوی مشهدی^۱، حمید یداللهی^۲

^۱ استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، sk_mousavi@iust.ac.ir

^۲ فارغ‌التحصیل مهندسی تکنولوژی کنترل و ابزار دقیق، مؤسسه آموزش عالی خراسان h.yadollahi@krec.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۶/۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۱۱/۱۲)

چکیده: اندازه‌گیری و کنترل TDS (Total Dissolved Solids) آب، در صنعت، کشاورزی، دامپروری و بهداشت از اهمیت بالایی برخوردار است. سیستم طراحی و ساخته شده در این مقاله، با نصب بر روی دستگاه‌های تصفیه آب صنعتی و خانگی، TDS آب را اندازه‌گیری، نمایش و کنترل می‌نماید. تکنولوژی ساخت سیستم اندازه‌گیری TDS به گونه‌ای است که اثر مخرب دما بر اندازه‌گیری جبران می‌کند. همچنین با شرح آزمایش‌های متعدد انجام شده در پژوهشکده علوم و صنایع غذایی، نحوه کالیبراسیون سیستم اندازه‌گیری توضیح داده می‌شود. به منظور کنترل TDS، مدل ریاضی دستگاه‌های تصفیه آب اسمز معکوس خانگی را با انجام آزمایش‌های عملی به دست می‌آوریم. سپس کنترل‌کننده سیستم را با روش پاسخ نوسانی زیگلر-نیکولز طراحی کرده و مناسب‌ترین آن را پیاده‌سازی می‌کنیم. اجرای عملیات کنترل TDS نیز از طریق کنترل زمان واقعی و پیوسته شیر مخلوط انجام می‌شود. این شیر با فیلتر ممبران یا RO (Reverse Osmosis) به صورت موازی بسته می‌شود و با افزودن یا کاستن آب ورودی این فیلتر به آب خروجی آن، اسباب کنترل TDS را فراهم می‌سازد. سیستم به دست آمده از این پژوهش، ضمن اخذ تاییدیه‌های علمی از مراجع ذیصلاح، به تولید نیمه صنعتی رسیده است و دارای کاربردهای فراوانی در صنعت می‌باشد.

کلمات کلیدی: اغتشاش دما، اندازه‌گیری TDS، کنترل TDS، هدایت الکتریکی، PID.

Design and Manufacture of TDS Measurement and Control System for Water Purification in Reverse Osmosis by Classic PID with the Ability to Compensate Effects of Temperature on Measurement

Seyed Kamal-e-ddin Mousavi Mashhadi, Hamid Yadollahi

Abstract: Measurement and control of TDS (Total Dissolved Solids) of water has significant importance for industry, agriculture, livestock and health. The system designed and manufactured in this paper measures, displays and controls TDS of water by installing on domestic and industrial purification systems. Technology of manufacturing TDS measurement system is such that it can compensate for the adverse effect of temperature on measurement. Meanwhile, calibration of the measurement system will be explained by discussing several examinations conducted in Research Institute for Food Science and Technology. In order to control TDS, mathematical model for domestic water purification devices of reverse osmosis (RO) is obtained by running practical

experiments. Then, system controller is designed by Ziegler-Nichols oscillation method with the most appropriate controller being implemented. Operation of controlling TDS is done through real time and continuous controlling of a mix valve. This valve is closed parallel with a membrane filter or RO, so one can control TDS by adding or reducing inlet water into outlet water of this filter. The system developed by this research is produced in pilot by receiving scientific approvals from relevant authorities and has found numerous applications in industry.

Keywords: temperature turbulence, TDS measurement, TDS control, electrical conductivity, PID

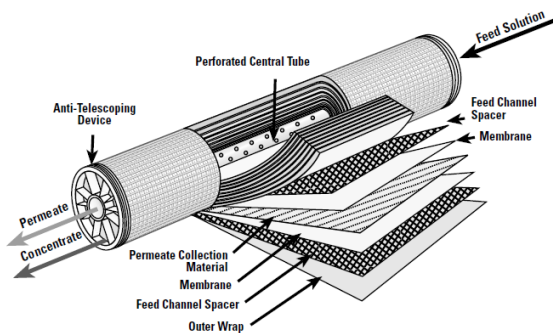
۱- مقدمه

آب طبیعی به علت خاصیت حل کنندگی خویش، معمولاً حجم بالایی از نمک های محلول را در خود دارد. CO_2 هوا نیز به علت حل شدن در آب و تولید اسید کربنیک ضعیف، خاصیت خوردندگی آب را شدت می بخشد. بنابراین آب در زمان عبور از محیط های گوناگون مخصوصاً محیط های آهنی، مقداری از کربنات ها را در خود حل می کند. این کربنات ها به همراه یون هایی مثل کلسیم، منیزیم و ... باعث ایجاد سختی موقت آب شده که با جوشاندن از بین می رود. البته یون های منیزیم، کلسیم و سایر یون های فلزی که با سولفات، نترات و کلرو ایجاد سختی دائم می کنند، با حرارت قابل حذف نیستند. مجموع مواد جامد نامحلول در آب را با TDS نشان می دهند و واحد آن هم بر حسب ppm (Part Per Million) می باشد [۱]. TDS بالای آب، اثرات زیان بخشی از جمله رسوب در دستگاه های حرارتی و دیگ های بخار، خوردندگی بویلرها و تاسیسات حرارتی، باقی گذاشتن لک روی محصولات غذایی و نساجی، کوتاه تر شدن زمان تولید سنگ کلبه در بدن، از دست دادن طعم و مزه خوب چای و قهوه، دیر پخته شدن حبوبات، کف نکردن صابون و افزایش میزان مصرف آن و در نتیجه مزاحمت در هنگام شستن دست ها را در پی دارد. از سوی دیگر، حذف بیش از اندازه املاحی نظیر کلسیم در دستگاه های معمول تصفیه آب خانگی، علاوه بر تلخی طعم آب موجب پوکی استخوان می شود که از آن به مرگ خاموش تعبیر می شود. اندازه گیری و کنترل TDS آب در بهداشت و صنعت از اهمیت بالایی برخوردار است. با استفاده از سیستم تصفیه آب به روش اسمز معکوس، روزانه $100000 m^3$ آب شور دریا در لیبی به آب شیرین تبدیل می شود [۲]. نحوه عملکرد و ساختار داخلی فیلتر RO که مهمترین بخش سیستم های تصفیه آب اسمز معکوس می باشد، در [۳] به طور کامل تشریح شده است. به منظور کنترل TDS آب ابتدا بایستی آن را اندازه گیری نماییم. اندازه گیری این پارامتر به طور کلی به دو روش اندازه گیری وزنی و هدایت الکتریکی انجام می شود [۴، ۱۱]. همچنین در [۴] ضمن بررسی ارتباط میان TDS با هدایت الکتریکی آب، رابطه ای ارائه شده است که در آن با داشتن هدایت الکتریکی و ضریب ke می توان TDS آب را به دست آورد. بررسی ها و تحقیقاتی نیز در [۵] بر روی آب شیرین منطقه Red hills هندوستان برای به دست آوردن رابطه

میان TDS و هدایت الکتریکی انجام گرفته است. هدایت الکتریکی را با EC که خلاصه شده کلمه Electrical Conductivity می باشد، نشان می دهند و واحد آن بر حسب میکرو زیمنس (μS) می باشد. همچنین آزمایش هایی در [۶] انجام شده است که حاکی از تغییرات هدایت الکتریکی آب با تغییرات دما می باشد. لذا یک رابطه ریاضی بین هدایت الکتریکی و دمای آب به دست آمده که براساس آن می توان اثر دما بر روی هدایت الکتریکی آب را کاهش داد.

برای کنترل انواع مختلف سیستم ها و پروسه های صنعتی، روش های متعددی وجود دارد. این روش های کنترلی در [۷] مورد بررسی قرار گرفته شده است. همچنین در [۸-۹] با افزایش دقت مدل ریاضی تخمینی از یک واحد نمک زدایی به روش اسمز معکوس، کنترل آن با استفاده از تکنیک های Feedback/Feed-forward بررسی شده است. با استفاده از منطق فازی، شاخص کیفیت آب رودخانه کارون ایران که عمدتاً شامل اکسیژن محلول (Dissolved Oxygen)، TDS، کدوری، نترات و PH می باشد؛ را تعیین کرده و به صورت کمی به کاربر ارائه می دهد [۱۰]. نحوه اندازه گیری و کنترل TDS آب در دستگاه های تصفیه آب اسمز معکوس به روش دو نقطه ای، در [۱۲] بررسی شده است.

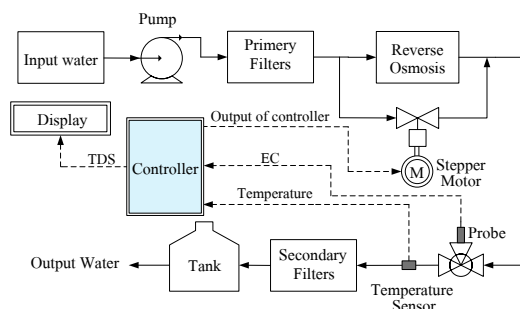
در این مقاله یک روش ابتکاری برای طراحی و ساخت سیستم اندازه گیری EC آب معرفی شده که صحت عملکرد آن در آزمایش های متعدد نشان داده می شود. همچنین به علت ساختار سنسور طراحی شده، امکان دستیابی به دقت های زیر ۰/۵ درصد را در بازه های کوچک فراهم می سازد. از نوآوری های این سیستم طراحی و ساخته شده، اندازه گیری و کنترل TDS آب بر روی دستگاه های تصفیه آب صنعتی و خانگی می باشد. تاییدیه شماره ۷۱۳/۱۴۲۸۵ پارک علم و فناوری استان خراسان، این ادعا را ثابت می نماید. پیش تر، از سیستم های کنترل TDS تنها در نیروگاه ها و مجتمع های پتروشیمی استفاده شده است که به هیچ عنوان از آنها نمی توان در تصفیه آب استفاده نمود. ولی ما با استفاده از علم کنترل در تصفیه آب شرب و ساخت سیستم اندازه گیری و کنترل مناسب، سلامتی و بهداشت را برای مصرف کنندگان به ارمان می آوریم. در ادامه ابتدا به عملکرد سیستم های تصفیه آب اسمز معکوس اشاره می کنیم. سپس ضمن معرفی تکنولوژی ساخت سیستم اندازه گیری TDS و همچنین نحوه جبران سازی اثر اغتشاش دما بر آن، به چگونگی تست و



شکل ۱: نمایی از لایه های مختلف تشکیل دهنده فیلتر RO [۳]

برای رفع این مشکلات در بخش اندازه گیری، با استفاده از تکنولوژی جبران سازی اثر اغتشاش دما در اندازه گیری، میزان دقت افزایش می یابد. همچنین میزان TDS آب خروجی دستگاه به صورت زمان واقعی و پیوسته اندازه گیری شده و سپس نمایش داده می شود. با داشتن میزان دقیق TDS آب و همچنین طراحی کنترل کننده مناسب، میزان املاح آب خروجی این دستگاه ها را در بازه دلخواه کنترل می نماییم. صحت عملکرد سیستم و کالیبراسیون به صورت کاملاً علمی در آزمایشگاه های مورد تایید وزارت علوم، انجام می شود.

در شکل ۲ ساختمان و نحوه عملکرد دستگاه های تصفیه آب اسمز معکوس، به همراه تلفیق آن با ساختار پیشنهادی این پژوهش مشاهده می شود.



شکل ۲: شمای کلی سیستم پیشنهادی اندازه گیری و کنترل TDS با حذف اثرات نامطلوب دمایی

همان طور که در شکل ۲ مشاهده می شود، فیلترهای ثانویه در نزدیکی تانک ذخیره آب قرار گرفته اند. یکی از این فیلترها، فیلتر Mineral می باشد که وظیفه افزودن مواد معدنی لازم به آب را بر عهده دارد. ضمناً با استفاده از فیلتر UV (Ultraviolet) در این قسمت، می توان ویروس ها و باکتری های باقیمانده را حذف نمود.

۳- بخش اندازه گیری TDS آب

اندازه گیری TDS آب به دو روش وزنی (Gravimetric TDS) و هدایت الکتریکی (EC) امکان پذیر می باشد. تفاوت عمده این دو روش

کالیبراسیون سیستم اندازه گیری می پردازیم. در ادامه با انجام آزمایش هایی، مدل ریاضی دستگاه های تصفیه آب اسمز معکوس خانگی را به دست می آوریم. با استفاده از مدل به دست آمده و کنترلرهای کلاسیک PID، TDS آب خروجی دستگاه های تصفیه آب را به روش پاسخ فرکانسی زیگلر- نیکولز کنترل می نماییم. در انتها نتایج ساخت، تست و ارزیابی عملی سیستم اندازه گیری و کنترل TDS به همراه تاییدیه های علمی اخذ شده و همچنین کاربرد آن در صنعت و بهداشت، مورد بررسی قرار می گیرد.

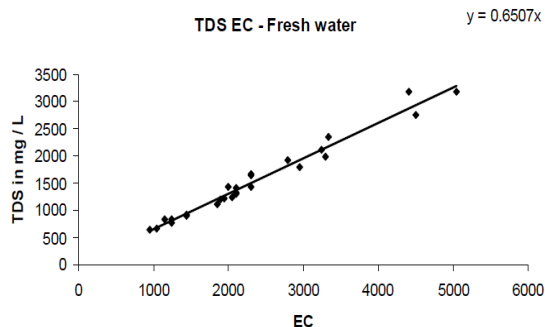
۲- چگونگی عملکرد سیستم های تصفیه آب

اسمز معکوس

در دستگاه های تصفیه آب اسمز معکوس از چندین فیلتر مختلف استفاده می شود. تعداد و نوع فیلترها، بسته به نوع آب منطقه و استفاده ای که از آن خواهد شد، تعیین می شود. فیلترهای انتهایی از دقت بالاتری نسبت به فیلترهای ابتدایی برخوردار هستند، بنابراین ذرات درشت تر در ابتدای مسیر و ذرات ریزتر در انتهای مسیر حذف می شوند. یکی از این فیلترهای انتهایی، فیلتر RO می باشد. در این فیلتر از یک غشاء نیمه تراوا استفاده شده است که علاوه بر جداسازی ذرات ناخالصی با ابعاد بزرگ، اکثر مواد شیمیایی و آلودگی های موجود در آب را نیز فیلتر می کند (شکل ۱). معمولاً TDS آب خروجی این فیلتر در حدود 20 ppm می باشد. این بدین معناست که میزان عناصر موجود در آب مانند کلسیم، فلوراید، پتاسیم، فیرها و... به میزان قابل توجهی کم شده و در نتیجه مزه آب طبیعی به سمت تلخی میل می کند. نوشیدن چنین آبی از نظر پزشکان توصیه نمی شود. لازم به تذکر است که غلظت آب مجاز برای شرب کمتر از 300 ppm می باشد.

برای رفع این مشکل و کنترل TDS آب خروجی در بازه دلخواه، از یک شیر مخلوط استفاده می شود. این شیر با فیلتر RO به صورت موازی قرار می گیرد و با تنظیم دستی آن می توان مقداری از آب ورودی این فیلتر را که از املاح زیادی برخوردار است، به خروجی آن اضافه نمود. بدین ترتیب TDS خارج شده از سیستم به حد مطلوب برای کاربر می رسد. اما بدلیل زیاد بودن فشار آب در ورودی شیر مخلوط و فیلتر RO، تغییرات اندک شیر مخلوط توسط اپراتور سبب تغییرات بزرگ TDS آب در خروجی دستگاه تصفیه آب می شود. همچنین به علت تاخیر ذاتی زیادی که این دستگاه ها دارند، کنترل TDS آب به صورت دستی امکان پذیر نمی باشد. از طرف دیگر با توجه به عدم وجود تکنولوژی جبران سازی اثر اغتشاش دما در سنسورهای اندازه گیری TDS عمومی موجود در بازار، خطای ناشی از این اغتشاش تاثیر مستقیمی بر روی کنترل دستی TDS می گذارد.

آزمایش‌های این مقاله، با توجه به آب منطقه ای مشهد، ۵۵/۰ در نظر گرفته شده است.

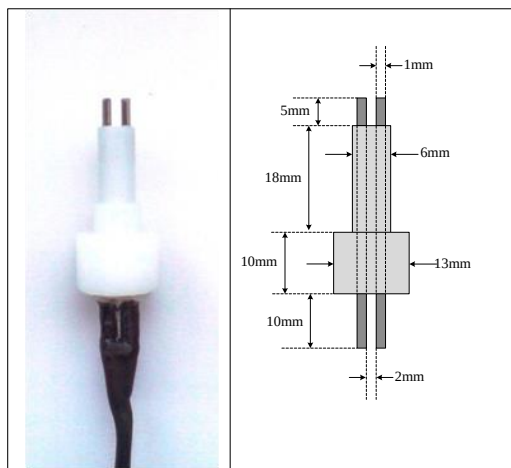


شکل ۳: نتایج آزمایش بیست و چهار نمونه آب شیرین به‌منظور به‌دست آوردن ضریب K_e [۵].

۳-۳ تکنیک ساخت سنسور اندازه‌گیری EC

به‌منظور اندازه‌گیری هدایت الکتریکی آب در سیستم پیشنهادی، نیاز به طراحی و ساخت پرابی داریم که ضمن آب بندی مناسب و مقاومت در مقابل خوردگی، از قابلیت نصب آسان بر روی یک سه راهی، برخوردار باشد. با نصب این پراب در مسیر آب خروجی فیلتر ممبران، در جایی که آب خروجی این فیلتر با آب خروجی شیر مخلوط مخلوط می‌شود؛ می‌توان هدایت الکتریکی آب را به صورت زمان واقعی و پیوسته اندازه‌گیری نمود.

هادی‌های به کار رفته در این پراب از فولاد ضد زنگ ساخته شده اند. انتخاب این جنس برای ساخت‌های‌ها به دلیل مقاوم بودن آن در مقابل خوردگی و عدم ترکیب پذیری آن با اکسیژن می‌باشد. مجموعه این هادی‌های فولادی در یک غلاف تفلونی قرار داده می‌شوند. انتخاب تفلون، به دلیل عایق بودن آن در مقابل جریان الکتریسته بوده است. ساخت این غلاف با تراشکاری توسط ماشین‌های CNC انجام می‌شود. در شکل ۴ نمایی از پراب ساخته شده مشاهده می‌شود.



شکل ۴: نمای روبرویی پراب ساخته شده (شکل سمت چپ)، و نقشه فنی آن (شکل سمت راست)

از دیدگاه عملی بسیار حائز اهمیت است. بدین ترتیب که روش وزنی کاملاً آزمایشگاهی بوده و در کنترل پیوسته فرایندهای صنعتی، هیچ‌گونه جایگاهی ندارد. این در حالی است که روش هدایت الکتریکی به علت سرعت بالای پاسخ دهی خود، به‌راحتی نقش مهم یک اندازه‌گیر را در حلقه‌های کنترلی ایفا می‌نماید. در زیر هر یک از این روش‌ها به‌طور مختصر توضیح داده می‌شود.

۱-۳ اندازه‌گیری TDS آب به روش وزنی

این روش بر مبنای اندازه‌گیری دقیق وزن مجموع مواد نامحلول، در حجم معینی از آب می‌باشد. با توجه به اینکه اندازه حجمی این مواد کمتر از $0.45 \mu\text{m}$ بوده، لذا بایستی نمونه آب را از فیلترهایی با همان اندازه عبور داد تا ناخالصی‌های آن جدا شود. سپس بر طبق استاندارد، 200 mL از این محلول را داخل یک بشر ریخته و به مدت ۲۴ ساعت در دمای 105°C حرارت می‌دهیم تا کاملاً تبخیر شود. همچنین به‌منظور خشک نمودن باقی‌مانده‌ها، بایستی آن‌ها را ۲ ساعت دیگر در دمای 180°C قرار دهیم. در نهایت بایستی وزن این مواد را با دقت بسیار بالایی اندازه‌گیری نموده و به کمک رابطه (۱)، TDS آب به‌دست می‌آید.

$$TDS (\text{mg} / \text{L}) = \frac{(W_2 - W_1) \times 1000}{V} \quad (1)$$

در رابطه (۱)، $W_1 [\text{mg}]$ وزن بشر قبل از حرارت و همچنین $W_2 [\text{mg}]$ وزن بشر به‌همراه مواد باقی‌مانده خشک شده بعد از حرارت، و بالاخره $V [\text{ml}]$ حجم آب پس از تصفیه را نشان می‌دهد [۴، ۱۱].

۲-۳ اندازه‌گیری TDS آب به روش هدایت الکتریکی

یکی دیگر از روش‌های اندازه‌گیری TDS آب، اندازه‌گیری هدایت الکتریکی (EC) آب می‌باشد. در رابطه (۲) ارتباط بین TDS و هدایت الکتریکی آب آمده است.

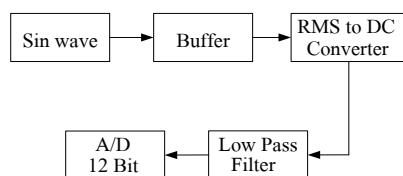
$$TDS = EC [\mu\text{S}] \times K_e \quad (2)$$

در این رابطه با جایگذاری هدایت الکتریکی آب بر حسب میکرو زیمنس $[\mu\text{S}]$ و ضریب K_e که یک عدد ثابت بین ۵۵/۰ الی ۸/۰ است و بر حسب نوع آب منطقه در آزمایشگاه شیمی تعیین می‌شود؛ TDS آب بر حسب $[\text{ppm}]$ به‌دست می‌آید [۴]. به‌عنوان نمونه در [۵]، بر اساس بیست و چهار نمونه آزمایش از آب شیرین منطقه Red hills واقع در کشور هندوستان، ضریب K_e مطابق با شکل ۳ به‌دست آمده است. نتایج حاصل ثابت می‌کند که در این منطقه، بهترین ضریب برای K_e عدد ۶۵۰۷/۰ می‌باشد. لازم به تذکر است که همین ضریب در تمامی

$$R_1[\Omega] = \frac{0.55 \times 10^6}{\alpha} \quad (7)$$

برای افزایش دقت در اندازه گیری می توان به جای استفاده از یک مقاومت به عنوان R_1 ، از یک شبکه مقاومتی پارالل با تعداد n مقاومت و اندازه $R_1 \times n$ استفاده نمود. همچنین به منظور دست یابی به دقت های بالا، لازم است که تمامی مقاومت های این شبکه از نوع نظامی انتخاب شود.

به منظور اندازه گیری و همچنین تحلیل ولتاژ سینوسی مقاومت های R_1 و R_2 توسط پردازشگر سیستم، از تراشه های RMS to DC Converter استفاده شده است. این تراشه ها مقدار موثر سیگنال های سینوسی را به سیگنال DC قابل اندازه گیری توسط واحد A/D میکروکنترلر تبدیل می کنند. در شکل ۶ بلوک دیاگرام آماده سازی سیگنال دیده می شود. سیگنال های VR_1 و VR_2 در ابتدا توسط مدارات آپ امپی، بافر می شوند و پس از تبدیل آن ها به سیگنال DC و عبور از یک فیلتر پایین گذر، آماده آنالیز می باشند. سطح ولتاژ خروجی این سنسور بین ۰ الی ۵ ولت می باشد و به منظور تبدیل این سیگنال آنالوگ، به دیجیتال و همچنین تحلیل و بررسی آن ها، از میکروکنترلر PIC مدل 16F877A استفاده می کنیم.



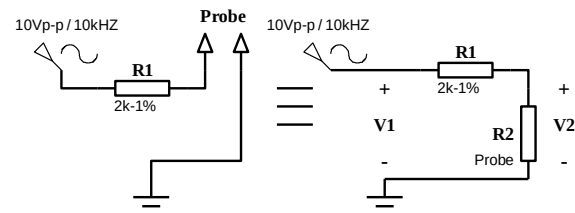
شکل ۶: بلوک دیاگرام مراحل آماده سازی سیگنال برای اندازه گیری در سیستم پیشنهادی

از نوآوری سیستم اندازه گیری TDS که به صورت کاملاً ابتکاری طراحی و ساخته شده است، قابلیت دست یابی به دقت های بالا در بازه های کوچک می باشد. این مهم، سبب کاربردهای بسیاری در نیروگاه ها، پالایشگاه ها و مجتمع های پتروشیمی می شود.

۳-۴ کالیبراسیون سنسور EC ساخته شده

به منظور اطمینان از صحت عملکرد سیستم اندازه گیری EC آب و کالیبراسیون سنسور طراحی و ساخته شده، آزمایش هایی در پژوهشکده علوم و صنایع غذایی، واقع در پارک علم و فناوری استان خراسان رضوی، صورت گرفت. برای انجام هرچه دقیق تر آزمایش ها، نیاز به تعداد زیادی نمونه آب با غلظت های متفاوت داریم. لذا محلول استاندارد با غلظت 1000 ppm را، در ۳۳ مرحله از طریق افزودن آب مقطر به آن، رقیق می نماییم. هرچه تعداد این مراحل بیشتر شود، بر دقت کالیبراسیون افزوده می شود. لازم به تذکر است که دمای آب را در تمامی مراحل آزمایش روی 25°C ثابت نگه می داریم. مطابق با آزمایش های انجام شده، منحنی های شکل ۷ پاسخ سیستم اندازه گیری

با ساخت یک سیگنال الکتریکی متناوب سینوسی با فرکانس ثابت بین 1 kHz الی 10 kHz و دامنه 10 V_{p-p} و اعمال آن به مدار شکل ۵، جریان ضعیفی در دو سر پراب جاری می شود. در این صورت با تغییر هدایت الکتریکی آب در دو سر پراب، ولتاژ این دو سر تغییر می کند. با تشکیل مدار ذیل و با کمک روابط (۳) و (۴)، هدایت الکتریکی آب در دو سر پراب به دست می آید.



شکل ۵: مدار اصلی چگونگی اندازه گیری EC آب

روابط ذیل، از تحلیل مدار شکل ۵ داریم:

$$R_1 V_2 + R_2 V_2 = R_2 V_1 \quad (3)$$

و از رابطه (۳)، به دست می آید:

$$R_2 \times |V_1 - V_2| = R_1 V_2 \quad (4)$$

در مدار شکل ۵ با اندازه گیری ولتاژ دو سر مقاومت ثابت R_1 و جایگذاری آن در رابطه (۴)، مقاومت دو سر پراب یا R_2 به دست می آید. اهمیت اندازه گیری این ولتاژ، در افزایش قابلیت اطمینان سیستم اندازه گیری می باشد. در این صورت چنانچه به هر دلیلی سطح ولتاژ خروجی منبع تغذیه تغییر کند، هیچ تغییری در اندازه گیری مقدار مقاومت R_2 ایجاد نمی شود. عکس مقاومت R_2 همان هدایت الکتریکی در دو سر پراب می باشد. در رابطه (۴) مقدار مقاومت R_1 مشخص است و تعیین آن بستگی به نوع کاربرد سیستم دارد. در صورتی که رنج اندازه گیری TDS محدود باشد، انتخاب مقدار مقاومت R_1 از اهمیت بالایی برخوردار می شود. به منظور رسیدن به بهترین دقت، بایستی مقاومت های R_1 و R_2 با هم برابر باشند. اما در عمل، مقدار دقیق غلظت محلول مورد اندازه گیری مشخص نمی باشد در صورتی که حدود تغییرات TDS آب را می دانیم. لذا اگر حد پایین غلظت آب را با $TDS_{\min}$ و حد بالای آن را با $TDS_{\max}$ نشان دهیم، α میانگین غلظت بازه اندازه گیری است که از رابطه (۵) به دست می آید:

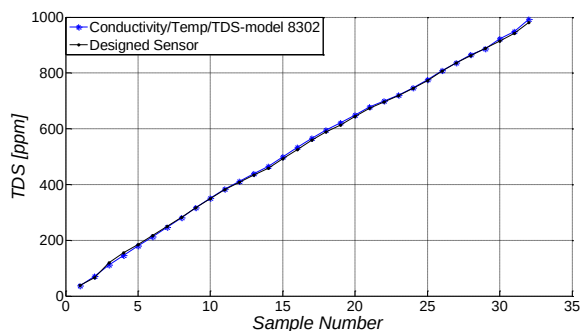
$$\alpha = \frac{TDS_{\min} + TDS_{\max}}{2} \quad (5)$$

حال بایستی مقدار مقاومت R_1 را با توجه به نقطه α تعیین نماییم. لذا

در رابطه (۲) با فرض $K_e = 0.55$ داریم:

$$TDS = \frac{10^6}{R_2} [\mu\text{S}] \times 0.55 \quad (6)$$

بنابراین بهترین مقدار برای مقاومت R_1 ، به صورت زیر محاسبه می شود:



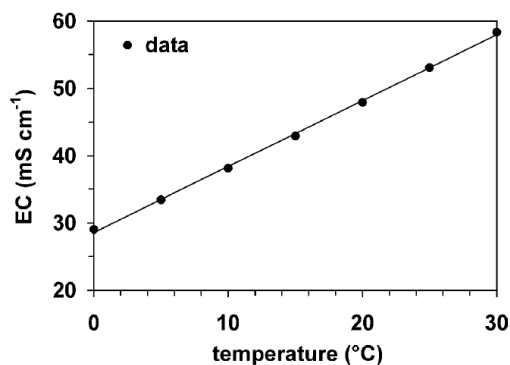
شکل ۸: مقایسه پاسخ سیستم اندازه‌گیری طراحی و ساخته شده (آبی رنگ) در مقایسه با پاسخ دستگاه Conductivity/temp/TDS مدل 8302 (سیاه رنگ ●)، پس از انجام عملیات کالیبراسیون به کمک ابزار Curve Fitting.

همان‌گونه که در منحنی شکل ۸ مشاهده می‌شود، فرمول ارائه شده در رابطه (۸) سبب منطبق شدن پاسخ سیستم اندازه‌گیری طراحی شده بر پاسخ سنسور مرجع می‌شود.

۴- جبران‌سازی اغتشاش دما در اندازه‌گیری EC

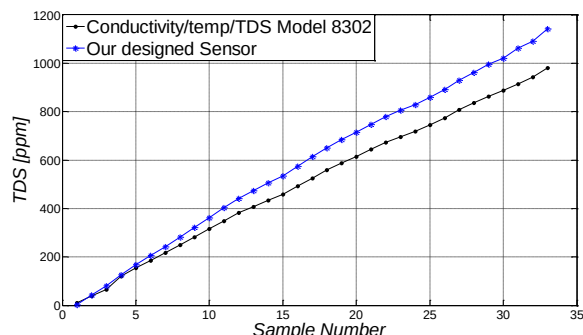
با توجه به اینکه تغییر دما سبب بروز خطا در تعیین EC آب می‌شود؛ به‌منظور اندازه‌گیری و کنترل مناسب TDS آب بایستی اغتشاش دما را جبران‌سازی نمود.

در اندازه‌گیری TDS آب به روش اندازه‌گیری هدایت الکتریکی، تغییرات دمای آب سبب تغییرات هدایت الکتریکی در دو سر پراب می‌شود؛ به‌طوری که با افزایش دما، هدایت الکتریکی افزایش و با کاهش آن، کاهش می‌یابد. توجه شود که مجموع مواد جامد نامحلول در آب، با افزایش و یا کاهش دما، تغییری نکرده و ثابت می‌باشد. اما به دلیل افزایش سرعت حرکت یون‌های موجود در آب، هدایت الکتریکی بین دو سر پراب افزایش می‌یابد و در نتیجه اندازه‌گیری با خطا همراه خواهد بود. منحنی شکل ۹، رابطه تغییرات EC را برحسب تغییرات دما نشان می‌دهد.



شکل ۹: تغییرات EC برحسب تغییرات دما [۶]

TDS آب را که در این پژوهش طراحی و ساخته شده است؛ در مقایسه با دستگاه استاندارد اندازه‌گیری پژوهشکده علوم و صنایع غذایی با نام Conductivity/temp/TDS مدل 8302، نشان می‌دهد.



شکل ۷: نمایش پاسخ خروجی بخش اندازه‌گیری TDS آب در سیستم طراحی و ساخته شده (منحنی آبی رنگ ●) در مقایسه با دستگاه استاندارد Conductivity/temp/TDS مدل 8302 (منحنی سیاه رنگ *).

با توجه به منحنی شکل ۷، مشاهده می‌شود که پاسخ خروجی سیستم اندازه‌گیری طراحی شده، نسبت به دستگاه اندازه‌گیری مرجع، دارای خطای کمی است. اما برای اصلاح این میزان خطا نیز، می‌توان با تغییر معادله منحنی سیستم طراحی شده به صورت نرم افزاری، دقت پاسخ‌های خروجی را بهبود بخشید. رابطه لازم برای اصلاح رفتار سیستم اندازه‌گیری طراحی و ساخته شده، با کمک ابزار Curve Fitting در Toolbox نرم افزار متلب به صورت زیر به دست می‌آید.

$$Y = A_1 \times \sin(\omega_1 x + \alpha_1) + A_2 \times \sin(\omega_2 x + \alpha_2) + A_3 \times \sin(\omega_3 x + \alpha_3) + A_4 \times \sin(\omega_4 x + \alpha_4) \quad (۸)$$

جدول ۱: ضرایب ثابت مربوط به رابطه (۸)

Constants	
$A_1 = 3064$	$A_3 = 1.543$
$\alpha_1 = -0.2052$	$\alpha_3 = 4.355$
$\omega_1 = 0.00182$	$\omega_3 = 0.01102$
$A_2 = 2255$	$A_4 = 0.6312$
$\alpha_2 = 2.86$	$\alpha_4 = -2.96$
$\omega_2 = 0.002085$	$\omega_4 = 0.02329$

در رابطه (۸)، A_1 تا A_4 ، α_1 تا α_4 و همچنین ω_1 تا ω_4 ، ضرایب ثابت هستند که مطابق با جدول ۱ تعیین شده‌اند. همچنین x پاسخ خروجی سیستم اندازه‌گیری طراحی شده به ازای غلظت‌های متفاوت آب، و Y خروجی اصلاح شده، منطبق با سنسور مرجع می‌باشد. بدین ترتیب، خطای اندازه‌گیری به صورت نرم افزاری اصلاح می‌گردد و رفتار خروجی هر دو سیستم اندازه‌گیری بر هم منطبق می‌شود. حال برای بررسی صحت عملکرد منطبق سازی پاسخ‌های خروجی هر دو سیستم، رفتار آن‌ها مجدداً در شکل ۸ بررسی می‌شود.

۴-۱ تئوری تحلیلی جبران سازی اثر دما بر اندازه گیری

EC

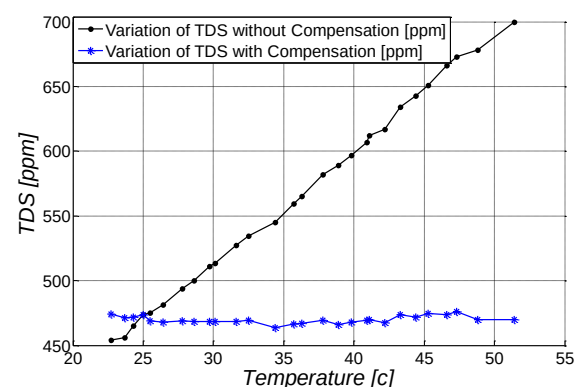
برای رفع این مشکل در سیستم طراحی شده می توان با اندازه گیری EC و دمای آب به طور دقیق و جایگذاری آن در رابطه (۹)، خطای حاصل از تاثیر دما بر روی هدایت الکتریکی آب را جبران نمود [۶].

$$EC_T = EC_{25} [1 + \beta(T - 25)] \quad (9)$$

در رابطه (۹)، EC_T هدایت الکتریکی آب اندازه گیری شده در دمای $T^{\circ}\text{C}$ ، و همچنین EC_{25} هدایت الکتریکی در دمای 25°C می باشد. در این رابطه β ضریبی است بین 0.0175 الی 0.0198 که بسته به املاح موجود در آب مناطق مختلف متفاوت است. اما با چند آزمایش می توان بهترین ضریب را انتخاب نمود. به عنوان مثال در [۶] با انتخاب $\beta = 0.0187$ خطای اندازه گیری EC در دماهای 25°C و 10°C برای یک منطقه خاص کمتر از 2% بوده است.

۴-۲ پیاده سازی سخت افزاری تئوری جبران سازی اثر دما

ما در سیستم طراحی و ساخته شده، برای اندازه گیری دمای آب از سنسور SMT 160-30 با دقت 0.1°C و حد تفکیک 0.005°C استفاده می نماییم. با اندازه گیری EC و دمای آب و نیز با ساخت رابطه (۹) در میکروکنترلر، این تکنیک را پیاده سازی می کنیم. همچنین برای دست یابی به دقت های بالاتر، از سنسور PT_{100} استفاده می نماییم. برای اطلاع از چگونگی اثر دما بر روی سیستم طراحی شده، آزمایش هایی بدین شرح انجام می شود. ابتدا دمای یک محلول با غلظت 473.5 ppm را تا دمای 52°C افزایش داده، و همزمان با سرد شدن تدریجی آب، TDS آن را در ۲۸ مرحله ثبت می نماییم. منحنی شکل ذیل نتایج این آزمایش ها را نشان می دهد. لازم به ذکر است که ضریب β در این آزمایش ها، 0.0187 در نظر گرفته شده است.



شکل ۱۰: تغییرات TDS آب بر حسب تغییرات دما با تکنولوژی جبران سازی اثر دما (شکل آبی رنگ*) و بدون جبران سازی اثر دما (سیاه رنگ •)

منحنی سیاه رنگ (•) در شکل ۱۰، تغییرات TDS آب را بر حسب تغییرات دما نشان می دهد. همان گونه که مشاهده می شود در سیستم اندازه گیری که از تکنیک جبران سازی دما استفاده نشده است، افزایش دما سبب افزایش شدید هدایت الکتریکی و به طبع آن، افزایش ناصحیح TDS آب می شود. اما منحنی آبی (*) رنگ بیانگر خروجی سیستم اندازه گیری طراحی و ساخته شده در این پژوهش است. در این سیستم از تکنولوژی جبران سازی اثر دما استفاده شده است که دارای مقاومت خوبی در مقابل تغییرات دمای آب می باشد.

۵- مدل سازی دستگاه های تصفیه آب اسمز معکوس

پس از طراحی و ساخت سنسور اندازه گیری TDS آب و جبران سازی اثر دما بر روی آن، نوبت به کنترل TDS می رسد. به منظور کنترل مناسب TDS آب، بایستی مدل دستگاه های تصفیه آب اسمز معکوس را به دست آوریم. تکنیک های متفاوتی جهت شناسایی مدل سیستم وجود دارد. ما برای تعیین مدلی ریاضی برای این دستگاه ها، از روش حلقه باز زیگلر-نیکولز (Ziegler-Nichols) استفاده می نماییم [۷]. بدین منظور با انجام چند آزمایش در عمل، تخمین مناسبی از مدل این دستگاه ها به دست می آید.

برای این کار ابتدا پراب سنسور طراحی شده را به کمک یک سه راهی، در مسیر آب خروجی فیلتر RO و شیر مخلوط، نصب می کنیم. خروجی سنسور را از طریق یک اسیلوسکوپ دیجیتال ساخت شرکت TNM ELECTRONICS مدل 20080A که سرعت نمونه برداری آن، 80 Msps است، به رایانه وصل می کنیم. بدین صورت، تمامی نمونه هایی که به دست می آیند، در یک فایل متنی ذخیره می شوند. سپس به منظور اعمال یک ورودی پله به سیستم، شیر مخلوط را به اندازه یک درصد باز کرده و تغییرات TDS آب خروجی دستگاه تصفیه آب مورد آزمایش را ثبت می نماییم. به دلیل استفاده از یک شیر کنترلی ۰ الی ۱۰ ولت با قابلیت عملکرد خطی به عنوان شیر مخلوط، ولتاژی معادل 0.1 ولت برای باز کردن یک درصدی شیر، به آن اعمال می شود. لازم به تذکر است که این آزمایش در دمای 25°C انجام شده است.

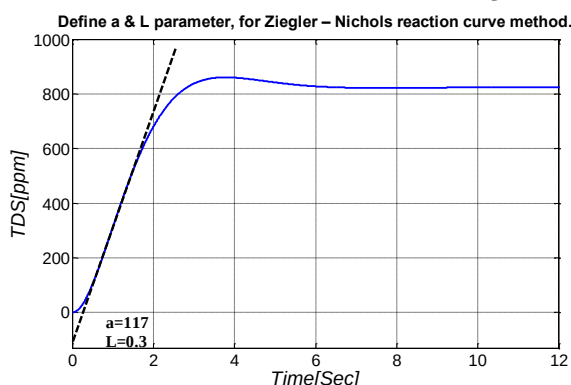
اما در عمل، به علت زیاد بودن تعداد نمونه ها، پردازش اطلاعات حاصل از آزمایش در نرم افزار متلب بسیار سنگین و زمان بر می باشد. از این رو با استفاده از تکنیک های آماری، میانگین هر ۱۰ نمونه آزمایش را به دست آورده و ذخیره می نماییم. سپس مراحل آماده سازی و پردازش اطلاعات را بر روی این نمونه های جدید پیاده سازی می کنیم.

منحنی شکل ۱۱، رفتار حلقه باز دستگاه تصفیه آب اسمز معکوس را به ازای فرمان باز شدن یک درصدی به شیر مخلوط، نشان می دهد. لازم به ذکر است که ورودی سیستم، همان ولتاژ اعمالی به شیر کنترل و خروجی آن، TDS آب خارج شده از دستگاه تصفیه آب اسمز معکوس می باشد.

همان‌گونه که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود، پاسخ پله مدل تقریبی به‌دست آمده، با دقت بسیار مناسبی رفتار دستگاه تصفیه آب را به ازای تغییرات شیر مخلوط، دنبال می‌کند.

۶- طراحی سیستم کنترل TDS آب

اکنون با داشتن مدل دستگاه‌های تصفیه آب اسمز معکوس، اقدام به طراحی سیستم کنترل آن می‌نماییم. سیستم کنترل طراحی شده در این پژوهش، از نوع PID کلاسیک و به روش پاسخ پله زیگلر-نیکولز می‌باشد. بدین ترتیب که با پیاده‌سازی انواع P، PI و PID و همچنین مقایسه رفتار آن‌ها، مناسب‌ترین کنترل‌کننده را انتخاب می‌نماییم. در این روش از دو پارامتر برای تعیین مشخصه سیستم استفاده می‌شود. پارامترهای با رسم پیشینه شیب منحنی پاسخ پله، مطابق شکل ۱۳ به‌دست می‌آید.



شکل ۱۳: تعیین پارامترهای a و L در روش پاسخ پله زیگلر - نیکولز، به ازای ورودی مرجع واحد

با توجه به شکل ۱۳، پارامترهای $a=117$ و $L=0.3$ می‌شوند. همچنین تعیین پارامترهای کنترل‌کننده PID در روش پاسخ پله، به صورت جدول ۲ می‌باشد.

جدول ۲: پارامترهای کنترل‌کننده PID، در روش پاسخ پله زیگلر - نیکولز

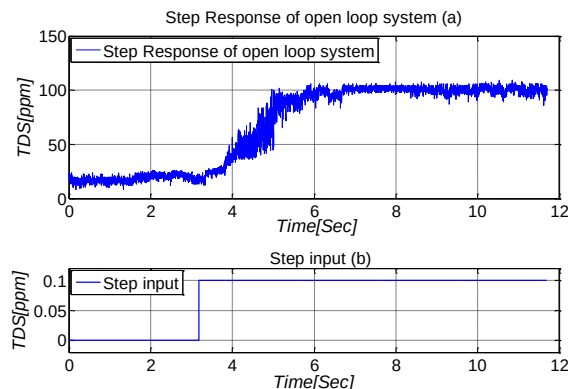
Controller	K	Ti	Td
P	$1/a$	-	-
PI	$0.9/a$	$3L$	-
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$

حال با داشتن پارامترهای a و L و همچنین جدول ۲، می‌توان ضرایب کننده را محاسبه نمود. جدول ۳، ضرایب کنترل‌کننده را در سیستم مورد نظر برای هر سه نوع P، PI و PID نشان می‌دهد.

جدول ۳: پارامترهای کنترل‌کننده PID، در روش نوسانی زیگلر - نیکولز

Controller	Proportional	Integral	Derivative
P	0.0085	-	-
PI	0.0077	0.0085	-
PID	0.0103	0.0171	0.0015

به‌منظور مقایسه رفتار کنترل‌کننده‌ها، آن‌ها را به‌صورت شکل ۱۴ در محیط Simulink نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی می‌کنیم.



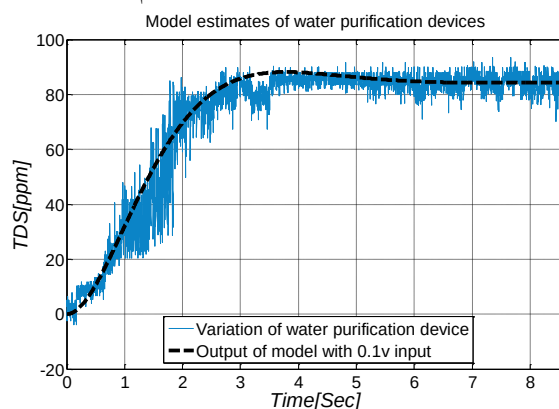
شکل ۱۱: a- رفتار حلقه باز دستگاه تصفیه آب اسمز معکوس در دمای 25°C ، b- تغییر یک درصدی شیر کنترل (شیر مخلوط) به‌عنوان ورودی پله

شدت اعوجاج مشاهده شده در منحنی فوق، به علت نویز اندازه‌گیری در سنسور نیست. اصولاً تغییرات رفتاری TDS و فرایند نیز به‌صورت ناگهانی نمی‌باشد. بنابراین علت این تغییرات تنها، حد تفکیک پایین کارت اسیلوسکوپ شرکت TNM است. حد تفکیک ۸ بیتی این تجهیز در مقایسه با سیستم اندازه‌گیری ۱۰ بیتی طراحی شده برای TDS، باعث کاهش $3/99$ برابری دقت می‌شود. لذا نویز مشاهده شده در عمل بسیار کم و قابل چشم‌پوشی است.

پس از به‌دست آوردن منحنی عکس العمل فرایند سیستم حلقه باز، اقدام به تعیین مدل تقریبی درجه دوم فرایند می‌نماییم. برای تعیین مدل سیستم با تقریب مناسب، از ابزار System Identification در Toolbox نرم افزار متلب استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب با استفاده از داده‌های گردآوری شده آزمایش، تابع انتقال مدل سیستم به صورت رابطه (۱۰) تقریب زده می‌شود.

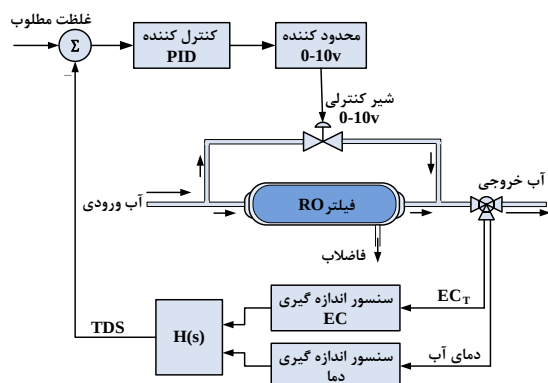
$$G(s) = \frac{823.71}{0.7316s^2 + 1.2021s + 1} \times e^{-0.0070017s} \quad (10)$$

به‌منظور اطمینان از درستی مدل تقریبی، پاسخ پله آن را با رفتار واقعی دستگاه تصفیه آب اسمز معکوس، مقایسه می‌کنیم (شکل ۱۲).



شکل ۱۲: مقایسه رفتار مدل به‌دست آمده با رفتار واقعی دستگاه تصفیه آب اسمز معکوس

پس از انتخاب مناسب ترین کنترل کننده، به پیاده سازی آن در عمل می پردازیم. شکل ۱۷ نحوه پیاده سازی سیستم کنترل حلقه بسته را در عمل نشان می دهد.



شکل ۱۷: پیاده سازی کنترل TDS با PID کلاسیک (طراحی شده به روش نوسانی زیگلر-نیکولز)، در دستگاه های تصفیه آب اسمز معکوس

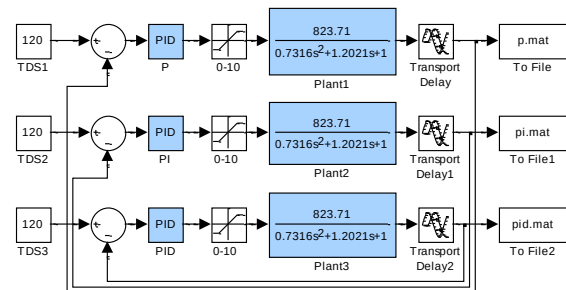
به منظور جبران سازی اثرات اغتشاش دما بر اندازه گیری هدایت الکتریکی آب در خروجی دستگاه تصفیه علاوه بر اندازه گیری $EC_T [\mu S]$ ، دما نیز به صورت $T [^{\circ}C]$ اندازه گیری می شود و وارد بلوک $H(s)$ می شوند. این بلوک در خروجی خود، TDS آب جبران شده را بر حسب ppm به صورت رابطه (۱۱) ارائه می دهد.

$$TDS = \frac{EC_T \times K_e}{[1 + \beta(T - 25)]} \quad (11)$$

نکته ای که در عمل برای بهبود جبران سازی اثر اغتشاش دما بر اندازه گیری EC از اهمیت بالایی برخوردار است، محل نصب سنسورها می باشد. بدین ترتیب که بایستی سنسور دما را در نزدیک ترین مکان نسبت به سنسور EC نصب نمود تا هدایت الکتریکی آب اندازه گیری شده در دوسر پراب، متناسب با دمای آب همان نقطه باشد.

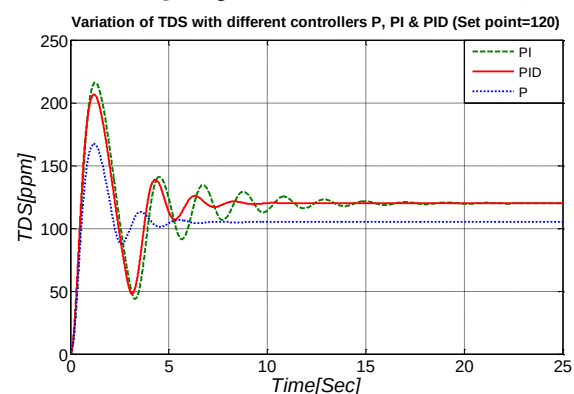
۷- تست و ارزیابی

سیستم طراحی و ساخته شده در پژوهشکده علوم و صنایع غذایی واقع در پارک علم و فناوری استان خراسان رضوی، مورد تست و ارزیابی قرار گرفته است. دقت سیستم اندازه گیری TDS طراحی شده، طی ۳۲ مرحله آزمایش در مقایسه با سنسور مرجع Conductivity/temp/TDS مدل 8302، بررسی شده است. دمای آب در تمام طول آزمایش، $25^{\circ}C$ بوده است. منحنی های شکل ذیل به ترتیب بیان کننده دقت و خطای سیستم اندازه گیری طراحی شده می باشد.



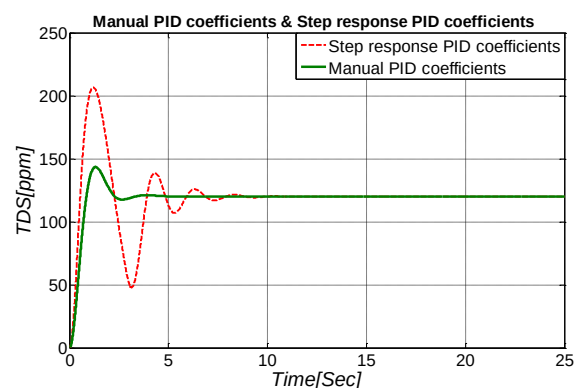
شکل ۱۴: شبیه سازی رفتار سیستم با کنترل کننده های P، PI و PID در محیط Simulink نرم افزار متلب

بنابراین پاسخ سیستم به کنترل کننده های P، PI و PID طراحی شده به روش حلقه باز زیگلر-نیکولز به صورت شکل ۱۵ می باشد.



شکل ۱۵: رفتار سیستم تصفیه آب، با کنترل کننده های P، PI و PID طراحی شده به روش پاسخ پله زیگلر - نیکولز، به ازای ورودی مطلوب 120 ppm

همان طور که مشاهده می شود، پاسخ کنترل کننده PID بسیار بهتر از کنترل کننده های دیگر است. اما با توجه به نوسانات آن، به منظور بهبود پاسخ در سیستم واقعی اقدام به تنظیم دستی ضرایب می کنیم. پس از پیاده سازی مشاهده می شود که برای کاهش نوسانات بایستی مقادیر P و I تعدیل شود. شکل زیر خروجی سیستم را با ضرایب جدید $P = 0.0068$ و $I = 0.004$ ، در مقایسه با PID روش پاسخ پله نشان می دهد.



شکل ۱۶: مقایسه پاسخ خروجی سیستم با تغییر ضرایب PID به دست آمده از روش پاسخ پله زیگلر-نیکولز، به ازای TDS مطلوب 120 ppm

دما هیچ گونه تغییراتی در TDS آب ایجاد نکند. اما همان‌طور که مشاهده می‌شود، سنسور مرجع نیز جبران‌سازی ایده‌آلی نسبت به تغییرات دما ندارد. این در حالی است که عملکرد سیستم جبران ساز طراحی شده در مقابل این تغییرات، حتی در بازه‌های 30°C الی 40°C و همچنین 60°C الی 70°C بسیار بهتر از سنسور مرجع می‌باشد. همچنین با توجه به منحنی‌های شکل ۱۹، میانگین میزان خطای جبران‌سازی، محدود به $5/5 \text{ ppm}$ بوده که این مقدار برابر $3/3\%$ می‌شود. لذا این میزان خطا در این محدوده بسیار مطلوب است.

۸- نتیجه‌گیری

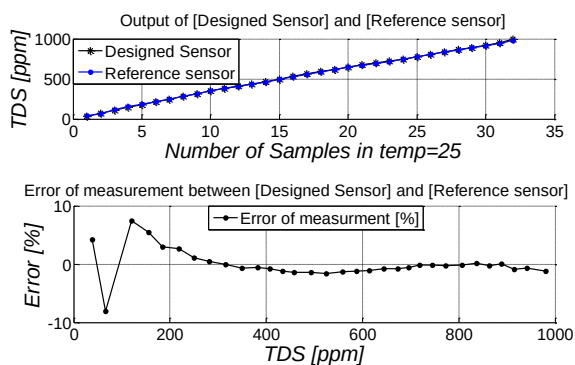
کیفیت عملکرد و نوآوری سیستم طراحی شده، در پارک علم و فناوری خراسان بررسی شده است. بنابراین تاییدیه علمی این سیستم با نام "اندازه‌گیری و کنترل TDS از طریق هدایت سنجی جهت کاربرد در سیستم‌های تصفیه آب با توانایی حذف اثر دما"، بر اساس مصوبه شماره ۹۱/۲/ش‌م شورای علمی گروه پژوهشی شیمی مواد غذایی پژوهشکده، به شماره ۷۱۲ صادر شده است.

لازم به ذکر است که بخش اندازه‌گیری TDS آب در پژوهشکده علوم و صنایع غذایی همین پارک بررسی شده و تاییدیه آن هم به شماره ۴۱۰/۲۳۸۶ صادر گردیده است. همچنین عملکرد بخش جبران‌سازی اثر دما بر روی اندازه‌گیری نیز، در این پژوهشکده مورد تست و ارزیابی جداگانه قرار گرفته و تاییدیه این بخش نیز به شماره ۴۱۰/۲۴۰۶ صادر شده است.

سیستم طراحی و ساخته شده با توجه به قابلیت نصب بر روی هر نوع دستگاه تصفیه آب اسمز معکوس خانگی یا صنعتی، TDS آب را به‌صورت دقیق اندازه‌گیری می‌کند. همچنین با مدل علمی که از دستگاه‌های تصفیه آب اسمز معکوس به‌دست آورده‌ایم، امکان کنترل پیوسته TDS آب در بازه‌های دلخواه فراهم می‌شود. با استفاده از این سیستم، مشکلات دستگاه‌های تصفیه آب اسمز معکوس مرتفع شده و با بهبود کیفیت آب خروجی آن‌ها، اسباب رضایت‌مندی کاربران را فراهم می‌سازد.

از مزایای سیستم طراحی شده می‌توان به اندازه‌گیری و نمایش پیوسته TDS آب به‌منظور اطمینان خاطر مصرف‌کننده از کیفیت آب، عدم نیاز به کنترل دستی TDS آب، جبران خطای اندازه‌گیری ناشی از اغتشاش دما، جلوگیری از حذف بی دلیل میزان املاح مفید برای بدن، بهبود چشم‌گیر کیفیت آب خروجی با کنترل پیوسته شیر مخلوط، طولانی تر شدن عمر فیلتر RO با تغییر وضعیت به موقع شیر مخلوط، کاهش هزینه‌های تعمیر و نگهداری و همچنین ارتقاء سطح بهداشت در خانواده‌ها اشاره نمود.

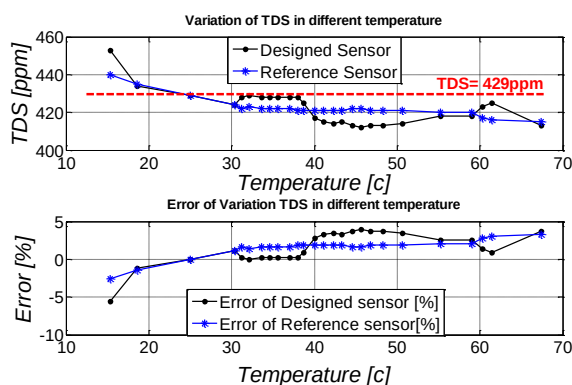
نمونه صنعتی سیستم طراحی و ساخته شده در این پژوهش، در شکل ۲۰ نشان داده شده است.



شکل ۱۸: a- بررسی رفتار سیستم اندازه‌گیری طراحی شده در مقایسه با سنسور مرجع Conductivity/temp/TDS مدل 8302 در دمای ثابت و TDS های متفاوت. b- خطای اندازه‌گیری نسبی برحسب درصد

با توجه منحنی به شکل ۱۸(b)، خطای اندازه‌گیری در هر بازه‌ای، متفاوت است. بالا بودن دقت در بازه 250 ppm الی 1000 ppm به دلیل انتخاب $R_1 = 1K\Omega$ می‌باشد؛ که با این مقدار، حداکثر حساسیت سیستم اندازه‌گیری در نزدیکی مقادیر 500 ppm به‌دست می‌آید که برای مصارف کشاورزی و دامداری مناسب است. در صورتی که سیستم برای مصارف آب شرب مد نظر باشد، $R_1 = 3.5K\Omega$ انتخاب می‌شود که منجر به بیشترین دقت در غلظت‌های کمتر از 200 ppm می‌گردد. و در آخر اگر آب برای مصارف صنعتی مد نظر باشد، مقدار مقاومت $R_1 = 100K\Omega$ انتخاب می‌شود که اسباب دست یابی به حداکثر حساسیت در غلظت‌های زیر 10 ppm می‌شود.

منحنی‌های شکل ۱۹ نتایج مقایسه بخش جبران‌ساز دما، در سیستم طراحی شده و سنسور مرجع را نشان می‌دهد. این آزمایش‌ها در TDS ثابت 429 ppm و در دماهای 15°C الی 68°C صورت گرفته است.



شکل ۱۹: بررسی میزان دقت و خطای نسبی بخش جبران‌سازی اثر دما در سیستم اندازه‌گیری طراحی شده، در مقایسه با سنسور مرجع Conductivity/temp/TDS مدل 8302 در دماهای متفاوت و TDS ثابت

منحنی آبی (*) و سیاه رنگ (●) در شکل ۱۹، به ترتیب رفتار سنسور مرجع و سیستم اندازه‌گیری طراحی شده را در دماهای متفاوت نشان می‌دهد. در این آزمایش‌ها با توجه به اینکه استاندارد در دمای 25°C مقدار 429 ppm می‌باشد، حالت ایده‌آل این است که تغییرات



شکل ۲۰: نمای کلی از سیستم اندازه گیری و کنترل TDS طراحی و ساخته شده

مراجع

- [7] Charles W. McFall and A. Bartman and Panagiotis D. Christofides and Y. Cohen, "Control of a reverse osmosis desalination process at high recovery", American Control Conference, Washington, 2008.
- [8] A. Abbas, "Model predictive control of a Reverse osmosis desalination unit", desalination, vol. 194, pp. 268-280, 2006.
- [9] F. Babaei Semiromi and A.H. Hassani and A. Torabian and A.R. Karbassi and F. Hosseinzadeh Lotfi, "Water quality index development using fuzzy logic: A case study of the Karoon River of Iran", African Journal of Biotechnology. Vol. 10, No. 50, pp. 10125-10133, 2011.
- [10] H. Keramati and A.H. Mahvi and L. Abdulnezhad, "The survey of physical and chemical quality of Gonabad drinking water in spring and summer of 1386", Quarterly of the Horizon of Medical Sciences. Vol. 13, No. 3, 2007.
- [۱۲] حمید یدالهی و سید کمال الدین موسوی مشهدی. "اندازه گیری و کنترل TDS آب در سیستم های تصفیه آب اسمز معکوس با توانایی حذف اثر دما" بیستمین کنفرانس مهندسی برق ایران (ICEE2012)، اردیبهشت ۹۱
- [1] Leo M.L. Nollet, Handbook of water analysis. CRC Press, 2007.
- [2] M. Aboabboud and S. Elmasallati, "Potable water production from seawater by the reverse osmosis technique in libya", desalination, vol. 203, pp. 12-23, 2007.
- [3] J. Wagner, Membrane filtration handbook: practical tips and hints. Osmonics, 2001.
- [4] Eliot A. Atekwana and Estella A. Atekwana and Rebecca S. Rowe and D. Dale Werkema Jr and Franklyn D. Legall, "The relationship of total dissolved solids measurements to bulk electrical conductivity in an aquifer contaminated with hydrocarbon", Journal of Applied Geophysics, vol. 56, pp. 281-294, 2004.
- [5] S. Thirumalini and Kurian Joseph, "Correlation between Electrical Conductivity and Total Dissolved Solids in Natural Waters", Malaysian Journal of Science, vol. 28, No. 1, pp. 55-61, 2009.
- [6] M. Hayashi, "Temperature-electrical conductivity relation of water for environmental monitoring and geophysical data", Environmental Monitoring and Assessment, vol. 96, pp. 119-128, 2004. Karl Johan Åström and Björn Wittenmark, Computer controlled systems: theory and design. Prentice-Hall, 1984.

تحلیل پایداری و کنترل PID مقاوم ربات‌های موازی کابلی با شرط نیروی کششی در کابل‌ها

محمد اعظم خسروی، حمیدرضا تقی‌راد

گروه رباتیک ارس، قطب کنترل صنعتی، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

taghirad@kntu.ac.ir, makh@ee.kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۹/۱۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۱۲/۲۸)

چکیده: در این مقاله تحلیل دینامیکی و کنترل مقاوم PID ربات‌های موازی کابلی که به صورت کامل مقید می‌باشند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. از آنجا که در این کلاس از ربات‌ها کابل‌ها باید در تمامی مانورهای حرکتی خود تحت کشش باشند، کنترل آن‌ها چالش برانگیزتر از همتایان آن‌ها با ساختارهای سری و موازی بوده و توسعه نظریه‌های کنترلی برای این دسته از ربات‌ها کمتر مورد توجه قرار گرفته و مسائلی از قبیل تحلیل پایداری مقاوم آنان مغفول مانده است. به همین دلیل در این مقاله با در نظر گرفتن نامعینی‌های ساختار یافته و بدون ساختار در دینامیک و ژاکوبین ربات‌های موازی کابلی، الگوریتم کنترلی مقاوم بر مبنای کنترل PID پیشنهاد می‌شود. علاوه بر این به منظور ارضای شرط کششی بودن نیروها در کابل‌ها از یک ترم اصلاحی بر اساس مفهوم نیروی داخلی در الگوریتم کنترلی پیشنهادی PID استفاده می‌شود. در ادامه تحلیل پایداری مقاوم الگوریتم کنترلی پیشنهادی بر اساس تئوری لیاپانوف انجام شده و نشان داده می‌شود که با انتخاب مناسب بهره‌های کنترلی سیستم حلقه بسته پایدار مقاوم است. در پایان با ارائه نتایج عملی حاصل شده از اعمال الگوریتم کنترلی پیشنهادی بر روی یک ربات موازی کابلی صفحه‌ای، عملکرد الگوریتم کنترلی پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: ربات‌های موازی کابلی، کنترل PID، نیروی داخلی، تحلیل پایداری، پایداری UUB.

Stability Analysis and Robust PID Control of Parallel Cable Robots with Positive Tensions

Mohammad A. Khosravi, Hamid D. Taghirad

Advanced Robotics and Automated Systems, Industrial Control Center of Excellence (ICCE),

Faculty of Electrical and Computer Engineering, K. N. Toosi University of Technology,

taghirad@kntu.ac.ir, makh@ee.kntu.ac.ir

Abstract: In this paper dynamic analysis and robust PID control of fully-constrained parallel cable driven manipulators are studied in detail. Since in this class of manipulators, cables should remain in tension for all maneuvers in their workspace, feedback control of such robots becomes more challenging than that of conventional parallel robots and research on this topic especially on robust stability analysis is limited. In this paper, structured and unstructured uncertainties are considered in the dynamic model and Jacobian of the robot, and a robust PID controller is proposed for the cable driven parallel robot. To ensure that all the cables are in tension, a corrective term is used in the proposed PID control based on the internal force concept. Then, robust stability of the closed-loop system is analysed through Lyapunov's second method and it is shown that by suitable selection of the controller gains, the closed-loop system would be robustly stable. Finally, the effectiveness of the proposed PID algorithm is examined through experiments on a planar cable driven robot and it is shown that the proposed control structure is able to provide suitable performance in practice.

Keywords: Parallel cable robots, PID control, Internal force, Stability analysis, UUB stability.

۱- مقدمه

اولین نسل ربات های صنعتی امروزی از بازوهای صلبی تشکیل شده اند که با چندین مفصل به شکل متوالی به یکدیگر متصل شده اند. این ساختار متداول یک بازوی مکانیکی سری است. امروزه این دسته از ربات ها از جمله پرکاربردترین نوع مکانیزم های مورد استفاده در صنعت می باشند. با گسترش روزافزون استفاده از ربات ها در کاربردهای مختلف، نیاز به مکانیزم هایی که محدودیت های ربات های سری را نداشته و ویژگی های خاصی نظیر دقت بالا، شتاب زیاد و قابلیت حمل بار زیاد را داشته باشند، بیش از پیش احساس شده است. در پاسخ به این نیاز ربات های موازی طراحی و ساخته شده اند. علیرغم اینکه مکانیزم های موازی یک سری از محدودیت های ربات های سری نظیر سرعت، شتاب و دقت کم را بر طرف می سازند، از محدودیت ها و مشکلاتی نیز رنج می برند. از مهمترین این مشکلات محدودیت در فضای کاری آنهاست. علاوه بر این، این دسته از ربات ها در موقعیت های نکین سختی خود را از دست می دهند.

برای غلبه بر این مسائل از حدود سه دهه پیش نگرش جدیدی در طراحی و ساخت ربات های موازی رخ داده است. این نگرش که علاوه بر رفع محدودیت های ربات های موازی، هدف کاهش هزینه های طراحی و ساخت را نیز دنبال می کند، مبتنی بر استفاده از کابل به جای بازوهای صلب معمول در ساختار ربات های موازی می باشد. با بهره گیری از این ساختار موازی جدید که تنها از نیروی کششی کابل استفاده می کند، می توان ربات موازی طراحی کرد که فضای کاری بزرگی را داراست [۱]. علاوه بر این از نقطه نظر وزنی نیز به دلیل استفاده از کابل به جای بازوهای صلب معمول، مکانیزم های موازی کابلی بسیار سبک تر از ربات های معمول بوده و در واقع این ربات ها ضمن برخورداری از مزیت های ربات های سری و موازی محدودیت های ساختاری آنها را ندارند. یکی از اولین مکانیزم هایی که از کابل ها در طراحی سود برد روبرج ثقیل^۱ است که در NIST توسعه داده شد. این ربات شبیه به یک مکانیزم موازی شش درجه آزادی استوارت-گو می باشد که به صورت معکوس قرار گرفته و شش کابل درایو شده با موتورهای الکتریکی جای محرک های هیدرولیکی را گرفته اند [۲، ۳]. در ربات های موازی کابلی موقعیت مجری نهایی با تغییر طول کابل ها تغییر می کند، حال از آنجا که کابل ها فقط می توانند نیروی کششی اعمال کنند و قادر به اعمال نیروی فشاری و یا گشتاور نیستند پس نمی توان مستقیماً و بدون هیچ تغییری از ساختار مکانیزم های موازی استفاده کرد. به همین دلیل برای آن که کابل ها در تمام جهت های فضای کاری در حال کشش باشند باید حداقل از یک محرک کابلی افزون بر درجات آزادی مکانیزم استفاده کرد و یا شبیه به روبرج ثقیل ها از اعمال یک نیروی منفعل بر مجری نهایی سود برد. بر این مبنا ربات های کابلی به دو دسته کلی تقسیم می شوند: مقید کامل و مقید ناقص [۴]. در ربات های کابلی که به صورت کامل مقید

هستند درجات آزادی سیستم به وسیله کابل ها محدود می شود بدین معنی که موقعیت دقیق مجری نهایی با دانستن اندازه طول کابل ها به دست می آید. این نوع از ربات های کابلی با افزودن در محرک ها طراحی می شوند. به عبارت دیگر در این نوع تعداد محرک های کابلی فعال از تعداد درجات آزادی سیستم بیشتر است و به همین دلیل ماتریس ژاکوبین این ربات ها غیرمربعی است. دلیل استفاده از افزودن در محرک ها اطمینان از تحت کشش بودن کابل ها در تمام محدوده حرکتی ربات در فضای کاری است. تمرکز اصلی در این مقاله بر روی این کلاس از ربات های موازی کابلی است.

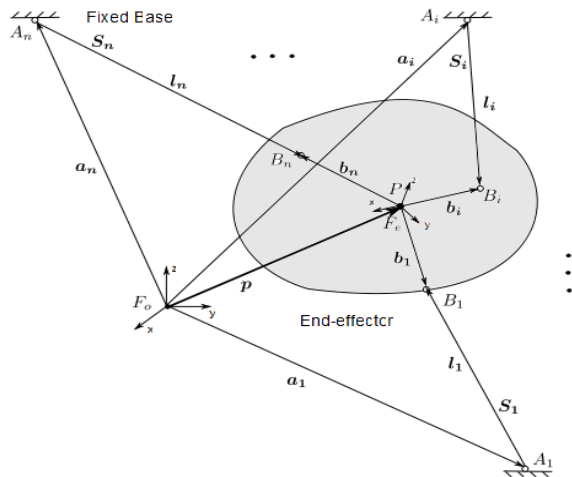
استفاده از کابل در ساختار ربات، چالش های جدیدی را پیش روی محققین قرار می دهد. به دلیل ویژگی یکنای کابل که فقط می تواند نیروی کششی اعمال کند، بسیاری از الگوریتم های کنترلی که تاکنون برای ربات های سری و موازی پیشنهاد شده اند، نمی توانند مستقیماً در کنترل این ربات ها مورد استفاده قرار گیرند. در همه این الگوریتم های کنترلی محرک ها می توانند در هر دو جهت مثبت و منفی اعمال تحریک کنند اما در این ربات ها محرک ها فقط باید در یک جهت عمل کنند. به همین دلیل از نقطه نظر کنترلی، افزودن تحریک در این ربات ها یک نیاز اساسی است تا سیستم بتواند نقص اعمال یک جهت تحریک را به نحوی جبران کند [۵]. علاوه بر این الگوریتم کنترلی باید به گونه ای طراحی شود که فرض کششی بودن کابل ها را در تمام مانورهای حرکتی ارضا نماید. به همین دلیل در مقایسه با حجم بسیار تحقیقاتی که در زمینه کنترل ربات های معمول به انجام رسیده، متأسفانه تنها تعداد معدودی به کنترل ربات های کابلی پرداخته اند که در بسیاری از آنها، الگوریتم های کنترلی که برای ربات های سری و موازی توسعه داده شده اند برای استفاده در ربات های موازی کابلی تطبیق داده شده اند. از جمله این روش ها می توان به روش های مبتنی بر تئوری لیاپانوف [۶]، گشتاور محاسبه شده [۷] و روش سطوح لغزشی [۸] اشاره کرد. هدف از این مقاله پیشنهاد یک روش کنترلی جدید مبتنی بر کنترل PID و تبیین چهارچوب نظری لازم برای پایداری این الگوریتم است که برای اولین بار بدین شکل برای ربات های موازی کابلی توسعه داده می شود. الگوریتم پیشنهادی در فضای کارترین شکل گرفته و از یک ترم اصلاحی به منظور اطمینان از تحت کشش بودن کابل ها سود می برد.

کاوامورا و دیگران در [۶] از الگوریتم کنترلی PD به همراه جبران سازی جاذبه برای کنترل ربات کابلی در فضای طولی کابل استفاده کرده اند. در این الگوریتم برای اینکه کابل ها همیشه در حالت کشش باقی بمانند از بردار نیروی داخلی استفاده شده است. این بردار که به منظور اطمینان از تحت کشش بودن کابل ها به خروجی کنترل کننده اضافه می شود، تأثیری در حرکت مجری نهایی نداشته و در فضای پوچی ماتریس ژاکوبین مکانیزم قرار دارد. آلپ و آگراوال در [۹] از روش خطی سازی با فیدبک برای طراحی کنترل کننده سود می برند. در این روش ابتدا با استفاده از دینامیک مکانیزم، سیستم خطی شده و سپس از یک کنترل کننده خطی برای دستیابی به مشخصات مطلوب استفاده می شود. این روش کنترلی در

^۱ RoboCrane^۲ National Institute of Standard Technology

۱-۲ سینماتیک ربات

ربات موازی کابلی مکانیزم حلقه بسته ای است که مجری نهایی آن توسط کابل ها به پایه متصل است و کابل ها به دور یک استوانه دوار که به پایه ساکن ثابت شده است، می پیچند و موقعیت مجری نهایی با تغییر طول کابل ها تغییر می کند. شمای سینماتیکی یک ربات موازی n کابله در شکل (۱) دیده می شود.



شکل ۱: شمای سینماتیکی ربات موازی n کابله

در این شکل l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) بردار طول کابل بوده و S_i نیز بردار یکه در امتداد طول کابل می باشد. A_i, B_i نقاط اتصال i امین کابل به پایه و مجری نهایی می باشند و موقعیت نقاط اتصال i امین کابل نیز با بردارهای a_i, b_i داده می شوند. با توجه به شکل (۱) موقعیت مجری نهایی با رابطه زیر داده می شود:

$$\vec{p} = \vec{a}_i + \vec{l}_i - \vec{b}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

و در نتیجه

$$l_i^2 = [\vec{p} - \vec{a}_i + \vec{b}_i]^T \cdot [\vec{p} - \vec{a}_i + \vec{b}_i] \quad (2)$$

با مشتق گیری از این رابطه و نوشتن معادلات به فرم ماتریسی می توان ژاکوبین مکانیزم موازی کابلی ($\vec{J}$) را بدست آورد:

$$\dot{L} = \vec{J} \dot{t}, \quad \dot{L} = [\dot{l}_1, \dot{l}_2, \dots, \dot{l}_n]^T \quad (3)$$

که در آن

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ b_1 \times S_1 & b_2 \times S_2 & \dots & b_n \times S_n \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

و $t = [\vec{p}, \omega]^T = [\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ در این معادلات $\dot{p}$ سرعت خطی نقطه P را نشان می دهد و ω نمایانگر سرعت زاویه ای مجری نهایی است.

۲-۲ تحلیل دینامیکی ربات

فضای کاری کارترین شکل می گیرد و با توجه به وابسته بودن آن به مدل سیستم در مقابل خطاهای مدل سازی و تغییر پارامترهای سیستم مقاوم نیست. در [۱۰] از ایده کنترل سری برای کنترل LAR که یک ربات کابلی با فضای کاری بزرگ است، استفاده شده است. در این ایده از دو حلقه کنترلی داخلی و خارجی استفاده شده است. حلقه کنترلی خارجی که از خطی سازی با فیدبک و کنترل PID استفاده می کند وظیفه کنترل موقعیت مجری نهایی را بر عهده دارد در حالی که حلقه داخلی که کنترل H_{∞} است، برای اطمینان از تحت کشش بودن کابل ها طراحی می گردد. متأسفانه در این تحقیق تحلیل پایداری این الگوریتم انجام نشده است.

اما در این روش های کنترلی، ساختار روش کنترلی پیچیده بوده و در هیچ کدام از این روش ها تحلیل پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته در مقابل نامعینی های ساختاریافته و بدون ساختار انجام نشده است. بنابر این پیاده سازی این روش ها با توجه به دسترس نبودن اطلاعات کامل از دینامیک سیستم و پیچیدگی ساختار کنترلی غیر عملی است. با عنایت به این محدودیت ها و با توجه به محبوبیت کنترل ساده PID در صنعت واکثریت قریب به اتفاق کاربردهای عملی رباتیک، در این مقاله چهارچوب تئوری لازم برای استفاده از این کنترل کننده در ربات های موازی کابلی تبیین گردیده و پایداری مقاوم آن در مقابل نامعینی های ساختاریافته و بدون ساختار بررسی می گردد. بدین منظور پس از مروری بر دینامیک ربات های کابلی، یک سری ویژگی های حاکم بر این معادلات و بخش های تشکیل دهنده آن بدست خواهد آمد. برای اطمینان از تحت کشش بودن کابل ها در تمامی فضای کاری مفهوم نیروی داخلی که فضای پوچی ماتریس ژاکوبین مکانیزم را پوشش می دهد، معرفی شده و در ساختار کنترلی پیشنهادی مورد استفاده قرار می گیرد. در تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته فرض بر این قرار می گیرد که همه پارامترهای دینامیکی و ژاکوبین مکانیزم نامعین بوده و تنها کران آن ها در دسترس می باشد.

در این مقاله و در ادامه، ابتدا دینامیک سیستم بررسی شده و معادلات حرکت یک ربات موازی n کابلی بدست می آید. سپس ویژگی های حاکم بر معادلات دینامیکی ربات مورد بحث قرار گرفته و با فرض وجود نامعینی یک سری کران بر روی ترم های دینامیکی ربات بدست می آید. این کران ها در طراحی الگوریتم پیشنهادی و تحلیل پایداری ربات مورد استفاده قرار می گیرند. در بخش (۳) الگوریتم کنترلی پیشنهادی که بر اساس کنترل PID بوده و از مفهوم نیروی داخلی برای اطمینان از تحت کشش بودن کابل ها سود می برد، معرفی می شود. در ادامه با فرض وجود نامعینی ها در ساختار ربات موازی کابلی تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته صورت پذیرفته و نشان داده می شود که با انتخاب مناسب بهره های کنترلی سیستم حلقه بسته پایدار مقاوم است. در نهایت نیز برای نشان دادن کارایی الگوریتم کنترلی پیشنهادی، این الگوریتم بر روی ربات کابلی صفحه ای که در دانشگاه صنعتی خواجه نصیر توسعه داده شده، اعمال می گردد و نتایج حاصله بررسی می گردند.

۲- تحلیل سینماتیکی و دینامیکی ربات

$$\dot{L} = J\dot{x} \quad (9)$$

که

$$J = \tilde{J} \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E \end{bmatrix} \quad (10)$$

با این قرارداد، معادلات حرکت می‌توانند بر حسب بردار x بازنویسی شوند:

$$M(x)\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} + G(x) = -J^T \tau \quad (11)$$

که در آن

$$M(x) = \begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E^T I_P E \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E^T I_P E + E^T (E\dot{\theta})_{\times} I_P E \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} -mg \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

۲-۲ ویژگیهای حاکم بر معادلات دینامیکی ربات

در این بخش به بررسی بعضی از ویژگیهای مهم حاکم بر معادلات دینامیکی حاکم بر حرکت ربات می‌پردازیم. فهم ویژگیهای حاکم بر معادلات دینامیکی ربات و استفاده از آن‌ها در طراحی کنترل باعث ساده‌تر شدن و کارآرتر شدن الگوریتم کنترلی پیشنهادی خواهد شد. همان گونه که می‌دانیم اصطکاک و اغتشاش همواره در حرکت ربات دخالت دارند، پس معادلات حرکتی مکانیزم را با در نظر گرفتن این نیروها می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$M(x)\ddot{x} + N(x, \dot{x}) = -J^T \tau \quad (15)$$

$$N(x, \dot{x}) = C(x, \dot{x})\dot{x} + G(x) + F_d \dot{x} + F_s(x) + T_d$$

که در آن x بردار مختصات تعمیم یافته، τ بردار نیروی کابل‌ها، F_d ماتریس ضرایب اصطکاک ویسکوز و F_s بردار اصطکاک کولمب می‌باشند. $M(x)$ ماتریس جرم، $C(x, \dot{x})$ ماتریس کوریولیس/سانتریفوژ و $G(x)$ بردار جاذبه می‌باشند که بسط آن‌ها در قسمت قبل به تفصیل آمده است. J ماتریس ژاکوبین بوده و T_d بردار اغتشاش در سیستم می‌باشد که می‌تواند نمایانگر هر گونه نامعینی در دینامیک سیستم باشد. توجه به این نکته ضروری است که معادلات دینامیکی بالا در صورتی صادق هستند که ماتریس ژاکوبین J غیرتکین بوده و همه کابل‌ها تحت کشش باشند ($\tau \geq 0$).

ماتریس اینرسی $M(x)$:

با توجه به بسط $M(x)$ که در قسمت قبل بدست آمد، می‌توان گفت که ماتریس $M(x)$ یک ماتریس مثبت معین متقارن بوده که از بالا و پایین کراندار است. در حقیقت انرژی جنبشی ربات با رابطه

$$K = \frac{1}{2} \dot{x}^T M(x) \dot{x} \quad (16)$$

از آنجا که در کاربردهای عملی جرم و انعطاف موجود در کابل در قیاس با سایر قطعات مکانیکی ناچیز است می‌توان از جرم و انعطاف کابل چشم پوشی نموده و آن را شبیه به یک رشته صلب بدون جرم در نظر گرفت. با این فرض دینامیک ربات موازی کابلی به مشخصه های دینامیکی مجری نهایی محدود خواهد بود. با این توصیف و با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل (۲)، وقتی همه کابل‌ها تحت کشش باشند، معادلات دینامیکی حرکت را با استفاده از قوانین نیوتون-اولر می‌توان به صورت زیر نوشت [۹]:

$$\begin{bmatrix} ml & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ \omega \times I_P \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} = -J^T \tau \quad (5)$$

که در آن m نمایانگر جرم مجری نهایی، I_P ممان اینرسی مجری نهایی حول نقطه P در فریم F_o ، g بردار شتاب جاذبه و $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]$ بردار مقادیر نیروی کابل‌هاست. بردار مختصات تعمیم یافته x را به صورت $x = [x_p, y_p, z_p, \alpha, \beta, \gamma]^T$ در آن $\theta = [\alpha, \beta, \gamma]^T$ نمایانگر زوایای اولر می‌باشد. با این توصیف ماتریس دوران ${}^{F_o}R_{F_e}$ می‌تواند با توجه به زوایای اولر به صورت زیر نوشته شود:

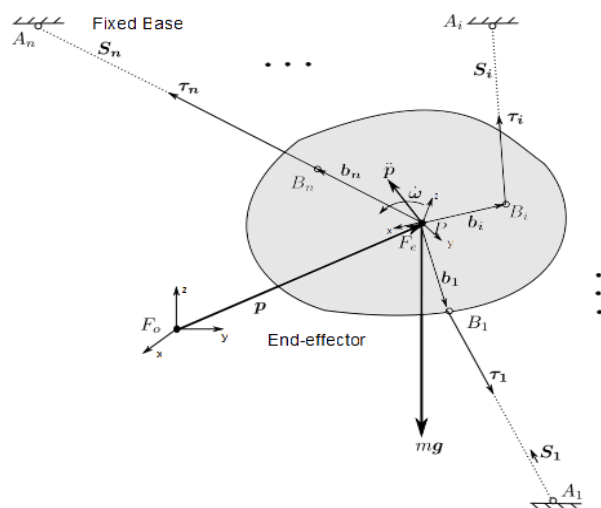
$${}^{F_o}R_{F_e} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & c\gamma s\alpha\beta - c\alpha s\gamma & c\alpha c\gamma s\beta + s\alpha s\gamma \\ c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma & -c\gamma s\alpha + c\alpha s\beta s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\alpha & c\alpha c\beta \end{bmatrix} \quad (6)$$

که C و S به ترتیب توابع سینوس و کسینوس را نشان می‌دهند. با این وصف سرعت زاویه‌ای مجری نهایی را می‌توان بدین صورت بازنویسی کرد:

$$\omega = E\dot{\theta}, \quad \dot{\theta} = [\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}]^T \quad (7)$$

که در آن

$$E = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \cos(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$



شکل ۲: شمای دینامیکی ربات موازی کابلی

بنابر این می‌توان نوشت:

$$I_m \ddot{q} + D \dot{q} - r \tau = u \quad \tau \geq 0 \quad (24)$$

که در آن q بردار زوایای شفت موتور و I_m ماتریس قطری ممان اینرسی محرک هاست. این ماتریس مثبت معین بوده و فرض می کنیم که از بالا و پایین کراندار است یعنی

$$i_{m1} I \leq I_m \leq i_{m2} I \quad (25)$$

که i_{m1} و i_{m2} اسکالرهایی مثبتی می باشند. D : ماتریس قطری ضرایب اصطکاک ویسکوز محرک هاست. این

ماتریس مثبت معین بوده و از بالا و پایین کراندار است یعنی

$$d_1 I \leq D \leq d_2 I \quad (26)$$

ضرایب d_1 و d_2 اسکالرهایی مثبتند. علاوه بر این τ : شعاع درام، τ : بردار کشش کابل ها و u بردار گشتاور موتور هاست.

حال فرض کنید بردار زاویه شفت موتورها q زمانی که مجری نهایی در مرکز فریم قرار دارد، مقدار صفر است. با این پیکربندی تغییر زاویه ای q باعث ایجاد ΔL در طول کابل ها خواهد شد. بنابراین می توان نوشت

$$\Delta L = r q = L - L_0 \Rightarrow q = r^{-1}(L - L_0) \quad (27)$$

که L_0 بردار طول کابل ها در $x = 0$ است. با مشتق گیری از این رابطه و استفاده از $L = J \dot{x}$ خواهیم داشت:

$$\dot{q} = r^{-1} \dot{L} = r^{-1} J \dot{x}, \quad \ddot{q} = r^{-1} J \ddot{x} + r^{-1} \dot{J} \dot{x} \quad (28)$$

با استفاده از معادلات (۱۱)، (۲۴) و (۲۸) می توان معادلات کلی سیستم را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$M_{eq}(x) \ddot{x} + N_{eq}(x, \dot{x}) = J^T u \quad (29)$$

که در آن

$$M_{eq}(x) = r M(x) + r^{-1} J^T I_m J \quad (30)$$

$$C_{eq}(x, \dot{x}) = r C(x, \dot{x}) + r^{-1} J^T I_m \dot{J} \quad (31)$$

$$N_{eq} = r N(x, \dot{x}) + r^{-1} J^T I_m \dot{J} \dot{x} + r^{-1} J^T D J \dot{x} \quad (32)$$

در این معادلات، دینامیک محرک ها توسط ماتریس ژاکوبین که یک نگاشت غیرخطی از فضای طولی کابل به فضای کاری است، به فضای کارترین انتقال یافته است.

تکته ۱ ماتریس $M_{eq}(x)$ یک ماتریس متقارن مثبت معین بوده که از بالا و پایین کراندار است. با توجه به (۳۰) و (۱۸) می توان نوشت:

$$\underline{m} \leq \| M_{eq}(x) \| \leq \bar{m} \quad (33)$$

داده می شود و انرژی جنبشی هم همواره مثبت است. از طرف دیگر از آنجا که این ماتریس از بالا و پایین کراندار است پس

$$m_1 I \leq M(x) \leq m_2 I \quad (17)$$

و یا

$$m_1 \leq \| M(x) \| \leq m_2 \quad (18)$$

که I ماتریس همانی بوده و m_1, m_2 ثابت های مثبتی می باشند.

ماتریس کوریولیس و سانتریفیوژ: $C(x, \dot{x})$:

با توجه به بسط $C(x, \dot{x})$ روشن است که وابستگی این ماتریس به x از نوع سینوس و کسینوس است. بنا بر این ماتریس $C(x, \dot{x})$ دارای کران بالایی است که مستقل از x بوده ولی با افزایش $\dot{x}$ افزایش می یابد. بنابر این می توان نوشت:

$$\| C(x, \dot{x}) \| \leq \xi_c \| \dot{x} \| \quad (19)$$

که ξ_c یک اسکالر مثبت می باشد. علاوه بر این به سادگی با استفاده از بسط های $M(x)$ و $C(x, \dot{x})$ می توان نشان داد که تفاضل مشتق زمانی ماتریس جرمی $M(x)$ و ماتریس کوریولیس $C(x, \dot{x})$ یک ماتریس پادمتقارن است یعنی

$$y^T (\dot{M}(x) - 2C(x, \dot{x})) y = 0 \quad (20)$$

بردار جاذبه $G(x)$:

با توجه به (۱۴) روشن است که بردار جاذبه از بالا کراندار است. بنا بر این می توان نوشت:

$$\| G(x) \| \leq \xi_g \quad (21)$$

که ξ_g ، یک ثابت مثبت است.

بردار ترم های اصطکاک $F_d \dot{x} + F_s(x)$:

همان گونه که می دانیم ترم های اصطکاک زایل کننده انرژی بوده و از بالا کراندار می باشند یعنی

$$\| F_d x + F_s(x) \| \leq \xi_{f0} + \xi_{f1} \| \dot{x} \| \quad (22)$$

فرض می شود که ξ_{f0} و ξ_{f1} ثابت های معلوم مثبتی هستند.

بردار ترم های اغتشاش T_d :

همان گونه که گفته شد، ترم اغتشاش می تواند تاثیرات انواع نامعینی های ساختاریافته و بدون ساختار در سیستم را نشان دهد. با فرض اینکه این ترم از بالا محدود است، خواهیم داشت

$$\| T_d \| \leq \xi_t \quad (23)$$

که ξ_t ثابت معلوم مثبتی است.

از طرف دیگر معادلات دینامیکی محرک ها را می توان به صورت زیر نوشت:

که در آن

$$u_1 = \hat{f}^T u = K_V \dot{e} + K_P e + K_I \int_0^t e(s) ds = Ky \quad (37)$$

و یا

$$u = \hat{f}^T \left[K_V \dot{e} + K_P e + K_I \int_0^t e(s) ds \right] + rQ \\ = \hat{f}^T u_1 + rQ \quad (38)$$

که در آن

$$e = x_d - x$$

$$K = [K_I \quad K_P \quad K_V]$$

$$y = \left[\int_0^t e^T(s) ds \quad e^T \quad \dot{e}^T \right]^T$$

$\hat{f}^T$ معکوس مجازی $\hat{f}^T$ است و Q فضای پوچی ماتریس $\hat{f}^T$ را پوشش داده و داریم

$$\hat{f}^T Q = 0 \quad (39)$$

با استفاده از بردار Q که به عنوان ترم اصلاحی به کنترل PID اضافه می شود این اطمینان حاصل می شود که در تمام مانورهای حرکتی ربات، کابل ها در حال کشش قرار دارند. این ترم که از نقطه نظر فیزیکی می تواند به عنوان نیروی داخلی تعبیر گردد، می تواند با افزایش نیروهای داخلی در سیستم باعث افزایش سختی مکانیزم گردد [۶]. از آنجا که این ترم با توجه به رابطه (۳۹) در فضای پوچی ماتریس $\hat{f}^T$ قرار دارد در صورت تخمین دقیق ماتریس ژاکوبین یعنی $J^T = \hat{f}^T$ هیچ تاثیری در حرکت مجری نهایی نداشته و فقط باعث ایجاد نیروی کششی مثبت در کابل ها می گردد. ماتریس $\hat{f}^T$ که تخمینی از ماتریس واقعی ژاکوبین سیستم (J^T) است، با استفاده از موقعیت های غیردقیق نقاط اتصال بدست می آید و فرض می شود که این ماتریس روابط زیر را ارضا می کند

$$\|I - J^T \hat{f}^T\| \leq \delta_1, \quad \|J - \hat{f}\| \leq \delta_2 \quad (40)$$

که در آن، δ_1 و δ_2 مقادیر مثبتی هستند. با اعمال کنترل u در (۲۹) داریم

$$y = Ay + B\Delta A \quad (41)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_6 & 0 \\ 0 & 0 & I_6 \\ -M_{eq}^{-1} K_I & -M_{eq}^{-1} K_P & -M_{eq}^{-1} K_V \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{eq}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = N_{eq}(x, \dot{x}) + M_{eq} \ddot{x}_d + (I - J^T \hat{f}^T) u_1 + r(\hat{f}^T - J^T) Q$$

برای تحلیل پایداری سیستم خطای (۴۱) تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V(y) = y^T P y \quad (42)$$

$$\underline{m} = \sigma_{min}(rM(x) + r^{-1} J^T I_m J) \quad (34)$$

$$\overline{m} = \sigma_{max}(rM(x) + r^{-1} J^T I_m J)$$

σ_{min} و σ_{max} مقادیر کمینه و بیشینه مقادیر ویژه ماتریس M_{eq} می باشند.

تکته ۲ ماتریس $\dot{M}_{eq}(x) - 2C_{eq}(x, \dot{x})$ یک ماتریس پادمتقارن است.

اثبات:

$$\begin{aligned} \dot{M}_{eq}(x) - 2C_{eq}(x, \dot{x}) &= r\dot{M}(x) + r^{-1} J^T I_m J + r^{-1} J^T I_m \dot{J} - \\ &2rC(x, \dot{x}) - 2r^{-1} J^T I_m \dot{J} = r(\dot{M}(x) - 2C(x, \dot{x})) + \\ &r^{-1}(J^T I_m J + J^T I_m \dot{J} - 2J^T I_m \dot{J}) = r(\dot{M}(x) - 2C(x, \dot{x})) + \\ &r^{-1}(J^T I_m J - J^T I_m \dot{J}) \end{aligned}$$

با توجه به ویژگی های ربات، ترم اول پادمتقارن است. ترم دوم هم با توجه به تعریف یک ماتریس پادمتقارن، پادمتقارن است. بنابراین ماتریس $\dot{M}_{eq}(x) - 2C_{eq}(x, \dot{x})$ پادمتقارن است.

تکته ۳ ماتریس $C_{eq}(x, \dot{x})$ دارای یک کران بالا به صورت زیر است

$$\|C_{eq}(x, \dot{x})\| = \|rC(x, \dot{x}) + r^{-1} J^T I_m \dot{J}\| \leq \|rC(x, \dot{x})\| + \|r^{-1} J^T I_m \dot{J}\| \quad (31)$$

وابستگی ماتریس ژاکوبین J به x از نوع توابع سینوس و کسینوس است. بنابراین

$$\|C_{eq}(x, \dot{x})\| \leq r\xi_c \|\dot{x}\| + r^{-1} \xi_J \|\dot{x}\| = \xi_{C_{eq}} \|\dot{x}\|$$

تکته ۴ بردار جاذبه G_{eq} محدود است.

$$\|G_{eq}(x)\| = \|rG(x)\| \leq r\xi_g = \xi_{g_{eq}} \quad (36)$$

۳- کنترل PID ربات موازی کابلی

در این بخش ابتدا الگوریتم پیشنهادی کنترلی PID بر مبنای مدل نامی سیستم ارائه می شود و سپس پایداری مقاوم آن با توجه به وجود نامعینی های موجود در مدل واقعی اثبات می گردد. در تحلیل پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته فرض می کنیم که همه ترم های دینامیکی شبیه به $M_{eq}(x)$ و $C_{eq}(x, \dot{x})$ نامعین بوده و فقط اطلاعاتی در مورد کران آن ها در دسترس است. علاوه بر این فرض می شود که موقعیت نقاط اتصال به صورت دقیق در اختیار نیست. با این وصف ژاکوبین دقیق مکانیزم یا J در دسترس نبوده و ما مجبور به استفاده از ژاکوبین تقریبی یعنی $\hat{f}$ بر اساس موقعیت تقریبی و محرک ها می باشیم. الگوریتم کنترلی پیشنهادی بر مبنای این کران ها و ژاکوبین تقریبی طراحی می شود به گونه ای که یک سری شرایط کافی را برای پایداری مقاوم ارضا نماید.

با توجه به مدل دینامیکی سیستم در (۲۹)، کنترل PID برای $\hat{f}^T u$ به صورت زیر پیشنهاد می شود:

که در آن P ماتریس مثبت معینی است که توسط رابطه زیر داده می شود:

$$\dot{V}(y) = -y^T H y + \frac{1}{2} y^T \begin{bmatrix} \mu I \\ \mu I \\ I \end{bmatrix} (C_{eq} + C_{eq}^T) [\mu I \quad \mu I \quad I] y +$$

$$y^T \begin{bmatrix} \mu I \\ \mu I \\ I \end{bmatrix} \Delta A +$$

$$\frac{1}{2} y^T \begin{bmatrix} 0 & \mu^2 I & \mu^2 I \\ \mu I & 2\mu^2 I & (\mu^2 + \mu) I \\ \mu^2 I & (\mu^2 + \mu) I & \mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & M_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & M_{eq} \end{bmatrix} y$$

که در آن

$$H = \begin{bmatrix} \mu k_p I & 0 & 0 \\ 0 & (\mu k_p - \mu k_v - k_I) I & 0 \\ 0 & 0 & k_v I \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu K_p + \mu K_I + \mu^2 M_{eq} & \mu K_v + K_I + \mu^2 M_{eq} & \mu M_{eq} \\ \mu K_v + K_p + \mu^2 M_{eq} & \mu K_v + K_p + \mu^2 M_{eq} & \mu M_{eq} \\ \mu M_{eq} & \mu M_{eq} & M_{eq} \end{bmatrix}$$

برای سادگی فرض کنید

$$\begin{aligned} K_p &= k_p I \\ K_I &= k_I I \\ K_v &= k_v I \end{aligned}$$

فرض کنید نامساوی های زیر برقرار باشند

بنابراین داریم

$$\mu > 0, \quad 2\mu < 1$$

$$\dot{V}(y) \leq -\gamma \|y\|^2 + \lambda_1 \|C_{eq}\| \|y\|^2 + \mu^{-1} \lambda_1 \|y\| \cdot \|\Delta A\| + \lambda_2 \bar{m} \|y\|^2 \quad (49)$$

$$s_1 = \mu(k_p - k_v) - (1 - \mu)k_I - \mu \bar{m} > 0 \quad (43)$$

$$s_2 = k_p - k_I - \mu \bar{m} > 0$$

که در آن

در این صورت ماتریس P مثبت معین بوده و نامساوی زیر را ارضا می کند

(نامساوی رایلی-ریتز)

$$\gamma = \min\{\mu k_I, \mu(k_p - k_v) - k_I, k_v\} \quad (50)$$

$$\underline{\lambda}(P) \|y\|^2 \leq V(y) \leq \bar{\lambda}(P) \|y\|^2 \quad (44)$$

علاوه بر این می دانیم که

$$\underline{m} \leq M_{eq} \leq \bar{m} \quad (51)$$

که در آن

$$\|C_{eq}(x, \dot{x})\| \leq \xi_{C_{eq}} \|\dot{x}\| \leq \beta_3 + \beta_4 \|y\| \quad (52)$$

$$\underline{\lambda}(P) = \min\left\{\frac{1-2\mu}{2} \underline{m}, \frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}\right\} \quad (45)$$

$$\|G_{eq}(x)\| \leq \xi_{g_{eq}} \quad (53)$$

$$\bar{\lambda}(P) = \max\left\{\frac{1+2\mu}{2} \bar{m}, \frac{s_3}{2}, \frac{s_4}{2}\right\}$$

و

$$\|N_{eq}(x, \dot{x})\| \leq \beta_0 + \beta_1 \|y\| + \beta_2 \|y\|^2 \quad (54)$$

$$s_3 = \mu(k_p + k_v) + (1 + \mu)k_I + (1 + 2\mu)\mu \bar{m} \quad (46)$$

$$s_4 = \mu \bar{m}(1 + 2\mu) + 2\mu k_v + k_p + k_I$$

و

$\underline{m}$ و $\bar{m}$ در (۳۴) تعریف شده اند.

$$\|(I - J^T \hat{f}^T)u_1\| \leq \delta_1 \xi_{u1} \|y\|$$

$$\|r(J - \hat{f})^T Q\| \leq \xi_Q$$

اثبات بر اساس قضیه گرشگورین و شبیه به آنچه در [۱۱] آمده است،

می باشد. پس از اثبات مثبت معین بودن P خواهیم داشت:

بنابراین با استفاده از نامساوی های بالا می توان نوشت

$$\dot{V}(y) \leq \|y\| (\xi_0 - \xi_1 \|y\| + \xi_2 \|y\|^2) \quad (55)$$

که

$$\xi_0 = \mu^{-1} \lambda_1 \beta_0 + \mu^{-1} \lambda_1 \lambda_3 \bar{m} + \mu^{-1} \lambda_1 \xi_Q \quad (56)$$

$$\xi_1 = \gamma - \lambda_1 \beta_3 - \lambda_2 \bar{m} - \mu^{-1} \lambda_1 \beta_1 - \delta_1 \xi_{u1} \quad (57)$$

$$\xi_2 = \lambda_1 \beta_4 + \mu^{-1} \lambda_1 \beta_2 \quad (58)$$

$$\lambda_3 = \sup \|\ddot{x}_d\| \text{ و } \lambda_2 = \lambda_{\max}(R_2) \quad \lambda_1 = \lambda_{\max}(R_1)$$

می باشد و $\lambda_{\max}$ نمایانگر بزرگترین مقدار ویژه است و

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= y^T (A^T P + PA + \dot{P}) y + 2y^T P B \Delta A \\ &= -y^T \begin{bmatrix} \mu k_p I & 0 & 0 \\ 0 & (\mu k_p - \mu k_v - k_I) I & 0 \\ 0 & 0 & k_v I \end{bmatrix} y \\ &+ \frac{1}{2} y^T \begin{bmatrix} \mu I \\ \mu I \\ I \end{bmatrix} \dot{M}_{eq} [\mu I \quad \mu I \quad I] y + y^T \begin{bmatrix} \mu I \\ \mu I \\ I \end{bmatrix} \Delta A \\ &+ \frac{1}{2} y^T \begin{bmatrix} 0 & \mu^2 M_{eq} & \mu^2 M_{eq} \\ \mu M_{eq} & 2\mu^2 M_{eq} & (\mu^2 + \mu) M_{eq} \\ \mu^2 M_{eq} & (\mu^2 + \mu) M_{eq} & \mu I \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

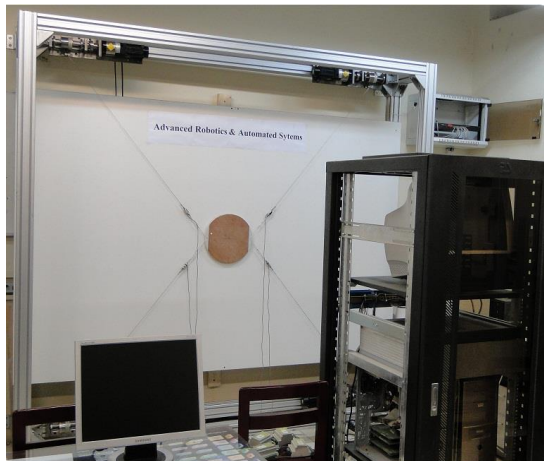
با توجه به نکته (۲) داریم

$$z^T \dot{M}_{eq} z = 2z^T C_{eq} z \quad (47)$$

بنابراین خواهیم داشت:

جدول ۱: پارامترهای سینماتیکی ربات کابلی KNTU

بازو	$x_A (cm)$	$y_A (cm)$	$\theta_B (deg)$
1	-۱۰۵	۱۱۲	۱۸۰
2	۱۰۵	۱۱۲	۰
3	-۱۰۵	-۱۱۲	۰
4	۱۰۵	-۱۱۲	۱۸۰
شعاع مجری نهایی	۱۵,۵ cm		



شکل ۳: ربات موازی کابلی صفحه‌ای KNTU

۱-۴ دینامیک ربات کابلی صفحه‌ای KNTU

با توجه به جرم بسیار ناچیز کابل انتخاب شده در قیاس با جرم مجری نهایی ربات، معادلات دینامیکی ربات را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$M\ddot{X} + G = -J^T \tau, \quad X = [x, y, \varphi]$$

$$I_m \ddot{q} + D \dot{q} - r\tau = u, \quad L = rq + L_0$$

در این معادلات M ماتریس جرمی ربات، G برادر نیروی جاذبه ربات و J ماتریس ژاکوبین ربات می‌باشند و بسط آن‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

مقادیر پارامترهای نامی ربات کابلی KNTU در جدول (۲) آمده است. در این جدول جرم نامی مجری نهایی ۲,۵ کیلوگرم بوده و در آزمایش‌های مختلف بار وزنی آن به اندازه ± ۱ کیلوگرم تغییر می‌کند. با توجه به این ساختار، می‌توان کران‌های ترم‌های دینامیکی معادلات حرکت ربات را به صورت زیر نوشت:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \mu^2 I & \mu^2 I & \mu I \\ \mu^2 I & \mu^2 I & \mu I \\ \mu I & \mu I & \mu I \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mu^2 I & \mu^2 I \\ \mu I & 2\mu^2 I & (\mu^2 + \mu)I \\ \mu^2 I & (\mu^2 + \mu)I & \mu I \end{bmatrix}$$

با توجه به نتایجی که تاکنون بدست آورده ایم می‌توان از قضیه زیر برای پایداری سیستم حلقه بسته سود برد.

قضیه: سیستم حلقه بسته (۴۱) به صورت UUB' پایدار است اگر ξ_1 به منظور ارضای شرایط پایداری به قدر کافی بزرگ انتخاب شود.

اثبات: با توجه به معادلات (۴۴)، (۵۵) و لم ۳-۵ از [۱۲] در صورتی که شرایط زیر ارضا شوند سیستم نسبت به $B(0, d)$ (گوی به مرکز صفر و شعاع d) پایدار خواهد بود که در آن

$$d = \frac{2\xi_0}{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 4\xi_0\xi_2}} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}(P)}{\underline{\lambda}(P)}} \quad (۵۹)$$

این شرایط عبارتند از

$$\xi_1 > 2\sqrt{\xi_0\xi_2} \quad (۶۰)$$

$$\xi_1^2 + \xi_1 \sqrt{\xi_1^2 - 4\xi_0\xi_2} > 2\xi_0\xi_2 \left(1 + \sqrt{\frac{\bar{\lambda}(P)}{\underline{\lambda}(P)}} \right) \quad (۶۱)$$

$$\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 4\xi_0\xi_2} > 2\xi_2 \|y_0\| \sqrt{\frac{\bar{\lambda}(P)}{\underline{\lambda}(P)}} \quad (۶۲)$$

این شرایط به سادگی با بزرگ بودن ξ_1 ارضا می‌شوند. با توجه به (۵۷) و (۵۰)، ξ_1 نیز با انتخاب مناسب مقادیر گین های کنترل PID می‌تواند برای ارضای شرایط بزرگ شود.

۴- نتایج پیاده‌سازی عملی

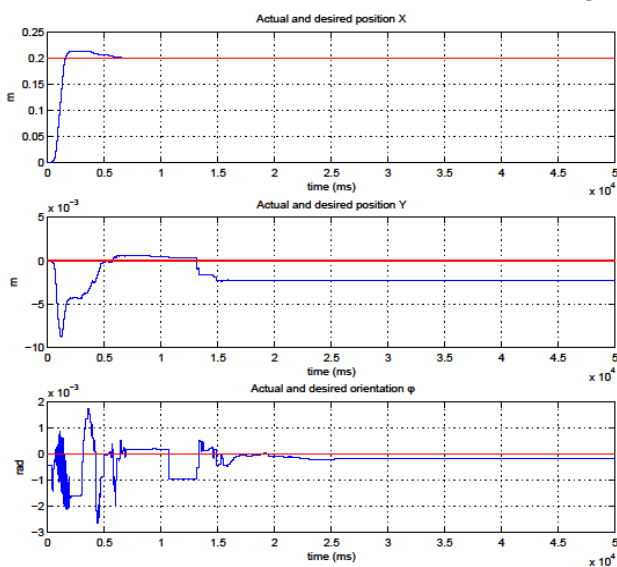
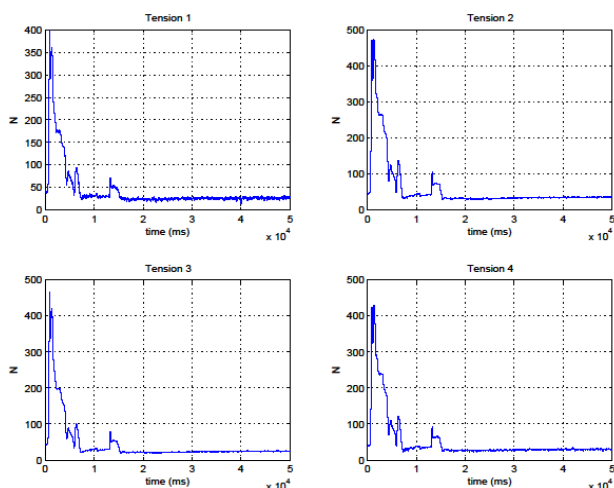
به منظور ارزیابی کارایی الگوریتم کنترلی پیشنهادی در این قسمت به بررسی نتایج عملی حاصله از اعمال این الگوریتم کنترلی بر روی ربات ساخته شده در دانشگاه صنعتی خواجه نصیر که با عنوان ربات موازی کابلی صفحه‌ای KNTU معرفی می‌گردد، خواهیم پرداخت و نتایج عملی بدست آمده با اعمال الگوریتم کنترلی پیشنهادی مورد توجه قرار خواهند گرفت. ربات موازی کابلی صفحه‌ای KNTU، یک مکانیزم سه درجه آزادی با دودرجه حرکت انتقالی در راستاهای x ، y و یک درجه چرخشی حول محور z می‌باشد و از یک درجه افزونگی در تحریک سود می‌برد. این ربات که در شکل (۳) نشان داده شده است، مشخصات هندسی مطابق جدول (۱) را داراست و محرک‌ها در رئوس یک مستطیل با ابعاد ۲۱۰ در ۲۲۴ سانتی متر قرار گرفته‌اند [۱۳].

¹ Uniformly Ultimately Bounded

جدول ۲: مقادیر پارامترهای دینامیکی ربات

مقدار	نماد	پارامتر
$2.5Kg$	m	جرم مجری نهایی
$15.31Kg.cm^2$	I_z	ممان اینرسی مجری نهایی
$2.43Kg.cm^2$	I_m	ممان اینرسی موتور
$3.5cm$	r	شعاع درام
50	N	نسبت گیربکس
$9.8m/s^2$	g	شتاب جاذبه

شکل (۶) نتایج عملی حاصل از پیاده سازی این مسیر مطلوب را نشان می دهد. همان گونه که در این شکل دیده می شود مجری نهایی به خوبی مسیر دلخواه را دنبال کرده و خطای حرکتی زاویه ای آن بسیار ناچیز است ضمن اینکه تغییرات مجری نهایی در امتداد محورهای x و y قابل چشم پوشی است.

شکل ۴: نتایج عملی حاصله با ورودی مرجع $x_d = [0.2, 0, 0]^T$ شکل ۵: نیروی کابل ها در جریان مانور حرکتی با $x_d = [0.2, 0, 0]^T$

$$\|C(x, \dot{x})\| = 0, \quad \|G(x)\| \leq 35$$

$$\bar{m} = 3.5, \quad \underline{m} = .01$$

الگوریتم کنترلی بر اساس این کران ها طراحی می شود به طوری که یک سری شرایط پایداری مقاوم که توسط قضیه ولم اثبات شده در بخش های قبلی تبیین گشته اند، توسط گین های انتخابی PID ارضا گردند. با در نظر گرفتن این کران ها و شرایط پایداری مقاوم برای مکانیزم کابلی KNTU، گین های کنترلی به صورت $k_p = 10000$ ، $k_v = 3000$ و $k_l = 600$ انتخاب می شوند.

۲-۴ نتایج

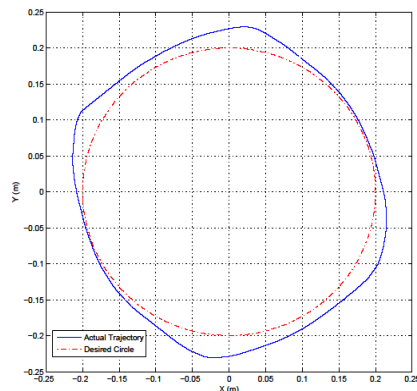
برای ارزیابی مشخصات عملکردی ربات کابلی سه مسیر مطلوب متفاوت را به مکانیزم اعمال کرده و کیفیت ردیابی سیستم را بررسی می کنیم ضمن اینکه نباید از یاد برد که نیروی کششی کابل ها در تمام این مانورهای حرکتی باید مثبت باشند. در دو تست ابتدایی فرض می شود که مجری نهایی در موقعیت $x = [0, 0, 0]^T$ قرار داشته و با اعمال تابع پله به عنوان ورودی های مرجع در امتداد x و ϕ ، پاسخ مکانیزم و موقعیت مجری نهایی بررسی می شود.

باید به این نکته توجه داشت که ورودی پله یکی از بدترین ورودی هایی است که می توان به یک کابل داد زیرا مستلزم یک تغییر ناگهانی در نیرو است و عملاً این ورودی می تواند اکثر دینامیک های کابل را تحریک کند. به همین دلیل ارزیابی پاسخ پله ربات کابلی KNTU می تواند ما را به درک درستی از کیفیت پاسخ و کارا بودن عملکرد ربات و سیستم کنترلی برساند. در آزمایش بعدی که هدف بررسی کارایی ربات کابلی KNTU با یک مسیر مرجع متفاوت و چالشی است، از یک مسیر دایره ای به عنوان مسیر مطلوب استفاده می شود. در این آزمایش هدف بر این است که مجری نهایی یک دایره به شعاع ۲۰ سانتی متر را در صفحه xy دنبال کند و در عین حال تغییر زاویه ϕ آن صفر باشد.

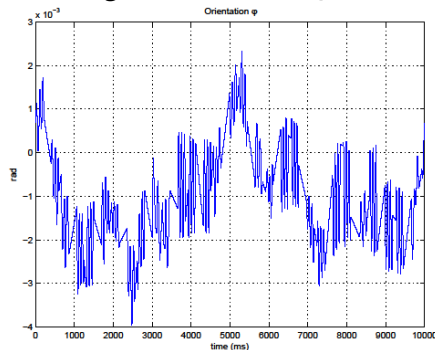
در اولین تلاش مجری نهایی ربات را در موقعیت صفر قرار داده و با اعمال ورودی $x_d = [0.2m, 0m, 0rad]^T$ به عنوان موقعیت دلخواه رفتار مکانیزم را بررسی می کنیم. هدف از انجام این آزمایش ارزیابی ردیابی سیستم با اعمال یک پله با دامنه ۲۰ سانتی متر در امتداد محور x است ضمن اینکه باید تغییرات موقعیت و زاویه ای مجری نهایی در امتداد محور y و z صفر باشد. نتایج عملی حاصل از اعمال این ورودی در شکل (۴) دیده می شود. همانگونه که در شکل (۴) دیده می شود خطای ردیابی بسیار ناچیز بوده و مجری نهایی مسیر تعیین شده را با سرعت مناسب دنبال می کند. از نقطه نظر نیرویی نیز همان گونه که در شکل (۵) دیده می شود، نیروی کشش کابل ها مثبت می باشند.

در آزمایش دوم، فرض کنید که مکان مطلوب یک چرخش خالص است و مجری نهایی باید از مکان صفر به مکان $x_d = [0, 0, \pi/9]^T$ برسد. همان گونه که دیده می شود در این مسیر تغییرات مجری نهایی در امتداد محورهای x و y باید صفر باشد.

شکل (۸) دایره مرجع و حرکت واقعی مجری نهایی را نشان می دهد. شکل (۹) نیز تغییرات زاویه ای مجری نهایی را در طول حرکت دایره ای نشان می دهد. همان گونه که از شکل های (۸) و (۹) می توان فهمید علیرغم استفاده از الگوریتم کنترلی مبتنی بر کنترل PID خطای ردیابی قابل قبول می باشند. نیروهای کششی کابل ها در این مانور حرکتی در شکل (۱۰) دیده می شوند. با توجه به این شکل نیروی کابل ها در تمام طول حرکت کششی مثبت می باشند.



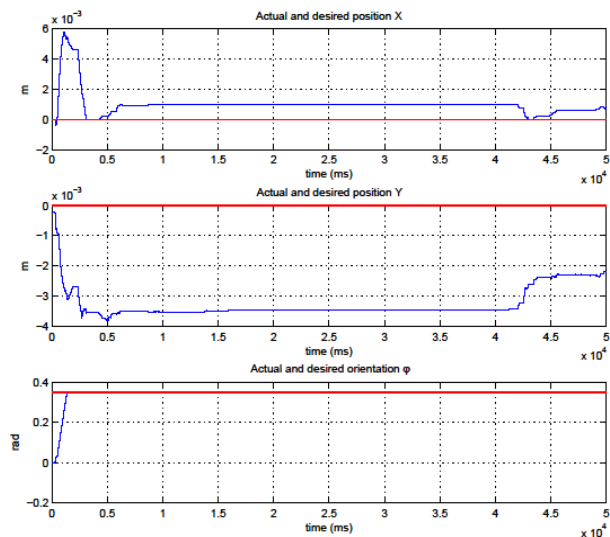
شکل ۸: نتایج عملی حاصله با ورودی مرجع دایروی



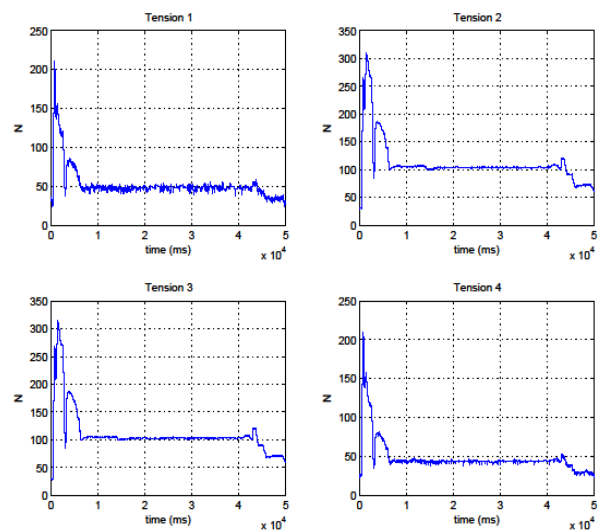
شکل ۹: زاویه ϕ در جریان مانور حرکتی دایروی

با عنایت به نتایج بدست آمده، الگوریتم کنترلی توانسته به خوبی در عین پایداری سیستم مشخصات عملکردی مطلوبی را به ارمغان آورد. ضمن اینکه با توجه به تست های مختلف عملکردی، ربات در عین داشتن نیروهای کششی مثبت در کابل ها در تمام مانورهای حرکتی سرعت عملکردی مناسبی داشته و خطای ردیابی مکانیزم علیرغم استفاده از الگوریتم ساده کنترلی ناچیز است. البته باید دقت داشت که یک سری منابع بالقوه ایجاد خطا در همه این آزمایش ها وجود دارد که می توانند مورد توجه قرار گیرند. یکی از این منابع وجود اصطکاک و لقی و سایر نامعنی هایی است که در سیستم انتقال قدرت در نظر گرفته نشده است. علاوه بر با توجه به محدودیت های سخت افزاری و قیمت گزاف تجهیزات لازم موقعیت مجری نهایی مستقیماً اندازه گیری نمی شود و با استفاده از حل سینماتیک مستقیم مکانیزم بدست می آید [۱۳]. این حل عددی با عدم دقت هایی که در اندازه گیری های نقاط اتصال داریم می تواند منجر به ایجاد خطا در محاسبات و در نتیجه خطای موقعیت مجری نهایی گردد. منبع دیگری که می تواند باعث ایجاد خطا گردد، انعطاف موجود در کابل است

شکل (۷) نیروی کشش کابل ها را در جریان این مانور حرکتی نشان می دهد. همان گونه که می بینیم نیروی کششی کابل ها در تمام مدت انجام حرکت مثبت می باشد.



شکل ۶: نتایج عملی حاصله با ورودی مرجع $x_d = [0, 0, \pi/9]^T$



شکل ۷: نیروی کابل ها در جریان مانور حرکتی با $x_d = [0, 0, \pi/9]^T$

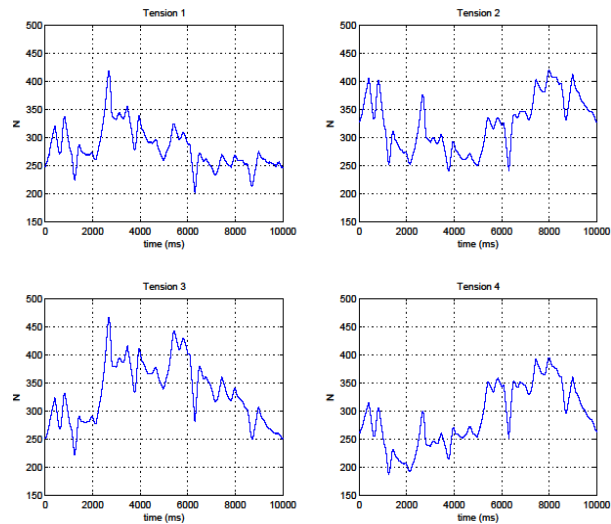
در آزمایشی دیگر به منظور تست ربات با یک مسیر متفاوت و بررسی کارایی ربات کابلی KNTU از پروفایل دایره ای به عنوان مسیر دلخواه مرجع استفاده می کنیم. در این آزمایش هدف این است که مجری نهایی مسیری دایره ای شکل به مرکز صفر و شعاع ۲۰ سانتی متر را در صفحه xy در زمان ۱۰ ثانیه به گونه ای طی کند که تغییرات زاویه ای آن در تمام طول مسیر صفر باشد ($\phi_d = 0$). برای این منظور مسیرهای مرجع به صورت زیر انتخاب می شوند:

$$\begin{aligned} x_d &= 0.2 \cos(0.2\pi t) \\ y_d &= 0.2 \sin(0.2\pi t) \\ \phi_d &= 0 \end{aligned}$$

مراجع

- [1] S.E. Landsberger and T.B. Sheridan, "A new design for parallel link manipulator," Proceedings of IEEE International Conference on Cybernetics and Society, p 812-14, 1985.
- [2] J. Albus, R. Bostelman and N. Dagalakis, "The NIST Robocrane. Journal of Robotic Systems," Vol. 10, No. 5, 1993.
- [3] R. Bostelman, J. Albus, N. Dagalakis, and A. Jacoff, "Applications of the NIST Robocrane," Proceedings of the 5th International Symposium on Robotics and Manufacturing, 1994..
- [4] R. Roberts, T. Graham, and T. Lippitt, "On the Inverse Kinematics, Statics, and Fault Tolerance of Cable-Suspended Robots," Journal of Robotic Systems, Vol. 15, No. 10, pp. 649-661, 1998.
- [5] M.A. Khosravi and H.D. Taghirad, "Dynamic Analysis and Control of Cable Driven Robots with Elastic Cables.," Trans. Can. Soc. Mech. Eng., Vol. 35, No. 4, pp. 543-557, 2011.
- [6] S. Kawamura, H. Kino, and C. won, "High-speed manipulation by using parallel wire-driven robots," Robotica, Vol. 18, No. 3, pp. 13-21, 2000.
- [7] R. L. Williams, P. Gallina, and J. Vadia, "Planar translational cable direct driven robots," Journal of Robotic Systems, Vol. 20, No. 3, pp. 107-120, 2003.
- [8] S. Ryoek and S. Agrawal, "Cable suspended planar robots with redundant cables: controllers with positive tensions," IEEE Trans. On Robotics, Vol. 21, No. 3, pp. 457-465, 2005.
- [9] A. Alp and S. Agrawal, "Cable Suspended Robots: Feedback Controllers with Positive Inputs.," Proceedings of the American Control Conference, 2002, pp. 815-820.
- [10] G. Meunier, B. Boulet, and M. Nahon, "Control of an Overactuated Cable-Driven Parallel Mechanism for a Radio Telescope Application.," IEEE Trans. On Control Systems Tech., Vol. 17, No. 5, pp. 1043-1054, 2009.
- [11] Z. Qu and J. Dorsey, "Robust PID control of robots," International Journal of Robotics and Automation, Vol. 6, No. 4, pp. 228-235, 1991.
- [12] Z. Qu and D. M. Dawson, "Robust tracking control of robot manipulators," IEEE Press, 1996.
- [13] M.A. Khosravi and H.D. Taghirad, "Experimental Performance of Robust PID Controller on a Planar Cable Robot," Cable-Driven Parallel Robots, pp. 337-352, Springer, 2012.

که در این پژوهش نادیده گرفته شده است. این انعطاف نیز می تواند باعث ایجاد خطای موقعیتی در مجری نهایی به خصوص در سرعت های بالا گردد.



شکل ۱۰: نیروی کابل ها در جریان مانور حرکتی دایروی

۸- نتیجه گیری

در این مقاله مدل سازی دینامیکی و کنترل مقاوم PID ربات های موازی کابلی مورد بحث قرار می گیرد. بدین منظور ابتدا دینامیک ربات های موازی کابلی مورد توجه قرار گرفته و ویژگی های حاکم بر معادلات دینامیکی ربات بررسی می گردد. سپس با توجه به ویژگی ها و محدودیت های حاکم بر معادلات حرکت ربات های موازی کابلی و با عنایت به مرسوم بودن روش کنترلی PID، روش کنترل PID به همراه یک ترم اصلاحی به عنوان توپولوژی مناسب کنترلی پیشنهاد شده است. این ترم اصلاحی که به منظور اطمینان از تحت کشش بودن کابل ها در تمامی فضای کاری به کنترل کننده PID اضافه می شود، با توجه به ماتریس ژاکوبین مکانیزم طراحی می گردد بدین معنی که این ترم اصلاحی فضای پوچی ژاکوبین مکانیزم را اسپن می کند. در انتخاب روش پیشنهادی محدودیت های موجود در پیاده سازی به هنگام روش کنترل، و عملکرد نهایی آن در تضمین دقت های حرکتی مورد نظر مورد توجه قرار گرفته اند و فرض بر این قرار گرفته است که اطلاعات موجود از دینامیک ربات کابلی دقیق نیست. سپس پایداری مقاوم سیستم با توجه به وجود نامعینی های ساختار یافته و بدون ساختار در سیستم به صورت ریاضی اثبات می گردد و نشان داده می شود که در صورت انتخاب مناسب گین های PID به گونه ای که یک سری شرایط را ارضا نمایند پایداری مقاوم سیستم که از نوع UUB است، حفظ می گردد. در نهایت نتایج حاصله از پیاده سازی الگوریتم کنترلی پیشنهادی بر روی ربات کابلی صفحه ای KNTU مورد بحث قرار می گیرد. نتایج حاصله نشان می دهند که ربات در عین حفظ ساختار خود با داشتن نیروهای کششی مثبت می تواند به خوبی مسیرهای تعریف شده را دنبال نماید.

رهیافتی نو برای تعیین شش مولفه موقعیت و وضعیت یک شیء با عکسبرداری

عبدالحمید بهجت پناه^۱، جعفر حیرانی نوباری^۲، مهدیه حسینقلی زاده آلاشتی^۳

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی برق-کنترل، گروه مهندسی برق، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، 8700396@ee.kntu.ac.ir

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، nobari@eed.kntu.ac.ir

^۳ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق-کنترل، گروه مهندسی برق، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، mah.gholizadeh@gmail.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۸/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۱۲/۲۹)

چکیده: در این مقاله روشی جدید برای تعیین موقعیت و وضعیت شیء نسبت به دستگاه دوربین با استفاده از تصویر آن ارائه شده است. تصویر واقعی که از دوربین در اختیار است از نگاشتی غیرخطی بین جهان سه بعدی و تصویر دوبعدی حاصل می شود. برخی محققان با خطی فرض کردن این نگاشت تخمین موقعیت و وضعیت را ساده تر کردند ولی از کلیت مسأله کاسته و محدودیت هایی بر ابعاد شیء مورد نظر اعمال نمودند. استفاده از نگاشت غیرخطی و دست یابی به روابط هندسی برقرار بین شیء و تصویر آن اگر چه کاری چالش برانگیز و دشوار است ولی دقت کار را بالا برده و محدودیتی بر ابعاد شیء وارد نمی کند. حالتی که یک شیء در برابر دوربین قرار می گیرد بسته به نوع دوران و فاصله اش از محور اصلی دوربین تغییر می کند. در این مقاله برای تعیین شش مولفه موقعیت و وضعیت یک شیء با عکس برداری، دستگاه معادلات غیرخطی با ده معادله و پنج مجهول استخراج شده است. در حل دستگاه معادلات غیرخطی، انتخاب الگوریتمی مناسب که علاوه بر کمینه کردن خطا، زمان کمی نیاز داشته باشد، حائز اهمیت است. با توجه به اینکه در آزمایش عملی مقادیر دقیق نیستند الگوریتمی از نوع بهینه سازی پیشنهاد شده و راهکاری برای انتخاب حدس اولیه پیشنهاد می شود که هم همواره به پاسخ برسد و هم زمان حل مسأله را کاهش دهد. درستی معادلات استخراج شده با بدست آوردن شش مولفه ی موقعیت و وضعیت یک تئودولیت از روی تصاویر نشان داده شده است.

واژه های کلیدی: تعیین موقعیت و وضعیت، مولفه های شیء، روابط حاکم بر دوربین، تعیین ماتریس دوران.

New Approach to Determine 6-DOF Position and Orientation of an Object Using its Image

Abdolhamid Bahjat Panah, Jafar Heyrani Nobari,
Mahdiah Hosseingholizadeh Alashti

Abstract: In this paper, a new method for determining the position and orientation of the object in respect to the camera coordinate using the image is presented. True picture of the camera is obtained by a nonlinear mapping between the three-dimensional world and two-dimensional image. Some researchers assumed linear mapping to make approximation of position and orientation easier, but restrictions were imposed on the object size. Also the use of nonlinear mapping and geometric relationships between object and its image is so challenging and difficult task, but increase the accuracy and do not raises the limit on the size of the object. The case in which an object is placed in front of the camera can become different according to the orientation type and its distance from the main axis of the camera. In this paper, to determine 6DOF position and orientation of an object using its image, a system of nonlinear equations with ten equations and 5 unknowns is extracted. In solving nonlinear equations, it is important to choose an appropriate algorithm to minimize the error and needs little time. With regard to the non-exact values in practical test, the kind of optimization algorithm is proposed and. Then a way for selecting initial guess is proposed to always have a solution and reduce the run time. Accuracy of extracted equations is shown by determining 6 DOF position and orientation of one theodolite.

Keywords: Position and orientation determining, object coordinates, camera mathematical and geometrical equation, determining orientation matrix.

فهرست علائم

f	فاصله ی کانونی عدسی یا دوربین	p	فاصله ی شیء تا عدسی دوربین
q	فاصله ی تصویر تا عدسی دوربین	$\vec{r}_{AB}$	مولفه های دوبعدی شیء AB نسبت به مرجع
$\vec{r}_{A'B'}$	مولفه های دوبعدی تصویر شیء AB نسبت به مرجع	x_{AB}	مولفه ی اول شیء AB بیان شده در دستگاه مشخص
y_{AB}	مولفه ی دوم شیء AB بیان شده در دستگاه مشخص	z_{AB}	مولفه ی سوم شیء AB بیان شده در دستگاه مشخص
$x_{A'B'}$	مولفه ی اول تصویر شیء AB بیان شده در دستگاه مشخص	$y_{A'B'}$	مولفه ی دوم تصویر شیء AB بیان شده در دستگاه مشخص
α	زاویه دوران گذار راستگرد حول محور Z	β	زاویه دوران گذار راستگرد حول محور Y
γ	زاویه دوران گذار راستگرد حول محور X	f_x	فاصله ی کانونی در راستای X
f_y	فاصله ی کانونی در راستای Y	l	طول شیء
l'	طول تصویر شیء قرار گرفته روی حساسه دوربین	c'	بردار واصل نقطه انتهایی تصویر شیء به عدسی دوربین
l''	طول شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین و به فاصله ی d از عدسی دوربین	d	فاصله ی صفحه ی موازی حساسه دوربین تا عدسی دوربین
x'	مولفه ی اول تصویر شیء ای با مولفه ی اول X	y'	مولفه ی دوم تصویر شیء ای با مولفه ی دوم Y
x''	مولفه ی اول شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین و به فاصله ی d از عدسی دوربین	y''	مولفه ی دوم شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین و به فاصله ی d از عدسی دوربین
Δx	فاصله ی نقطه ی ابتدایی شیء در راستای X تا نقطه ای به فاصله ی d از عدسی در راستای محور اصلی دوربین	Δy	فاصله ی نقطه ی ابتدایی شیء در راستای Y تا نقطه ای به فاصله ی d از عدسی در راستای محور اصلی دوربین
$\Delta x'$	فاصله ی نقطه ی ابتدایی تصویر در راستای X تا نقطه ای به فاصله ی f از عدسی در راستای محور اصلی دوربین	$\Delta y'$	فاصله ی نقطه ی ابتدایی تصویر در راستای Y تا نقطه ای به فاصله ی f از عدسی در راستای محور اصلی دوربین
$c-m$	بردار واصل نقطه انتهایی شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین به عدسی آن	c	بردار واصل نقطه انتهایی شیء به عدسی دوربین
x_e	اختلاف مولفه ی اول شیء و شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین	y_e	اختلاف مولفه ی دوم شیء و شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین
l_e	اختلاف طول شیء و شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین	Ψ	زاویه ی تصویر شیء با راستای X و همچنین زاویه شیء تصویر شده روی صفحه ی موازی حساسه با راستای X
C	ماتریس تبدیل بین دستگاه چسبیده به حساسه و دستگاه چسبیده به شیء	$\epsilon_{1,2,3,4}$	چهارگان ها

با استفاده از این اطلاعات می توان شیء مشخصی را در Pose

مشخصی نمایش داد یا به عبارتی دیگر اشیاء مجازی را در دنیای واقعی نمایش داد. این همان معنای واقعیت افزوده است. همچنین در برخی موارد تنها اطلاعاتی که از یک شیء ثابت یا در حال حرکت در دسترس است عکس یا فیلم مربوط به آن است، به عنوان مثال پرنده ی در حال حرکت یا موشک در زمان های اولیه پس از پرتاب. تعیین موقعیت و وضعیت یک پرنده ی در حال حرکت به منظور شکار آن و تعیین موقعیت و وضعیت یک موشک برای تحلیل حرکت آن و مقایسه ی حرکت آن با آن چه از شبیه سازی انتظار می رفت، تنها از طریق عکس برداری و یا فیلم برداری امکان پذیر است. موضوعاتی از این دست اهمیت و کاربرد تعیین موقعیت و وضعیت با استفاده از عکس برداری را نشان می دهند.

۱- مقدمه

محاسبه ی موقعیت و وضعیت یک شیء^۱ (pose شیء) با استفاده از نقاط مشخصه ی روی آن، با دانستن وضعیت هندسی این نقاط یا دانستن مدل شیء و همچنین در دسترس بودن نقاط متناظر این نقاط مشخصه در تصویر گرفته شده از شیء یکی از موضوعات چالش برانگیز است که تا کنون برای محاسبه ی آن، روش های مختلفی که هر یک مزایا و معایب خاص خود را دارند ارائه شده است.

تعیین Pose فرآیند استخراج اطلاعات مربوط به موقعیت و وضعیت با استفاده از نقاط متناظر مدل یک شیء و تصویر بدست آمده با حسگر اپتیکی مانند دوربین است. Pose برای یک شیء موقعیت و وضعیت آن شیء می باشد که شش درجه آزادی (6DOF) دارد [۹].

¹ Computation of the Position and Orientation of an Object

کوچک تر از فاصله ی شیء تا دوربین باشد یا عمق شیء باید مقدار جزئی در اطراف یک صفحه تغییر کند.

در سال ۱۹۹۹ الگوریتمی با نام خانواده الگوریتم های جبری خطی، توسط کوآن^{۱۲} و لان^{۱۳} ارائه شد. این الگوریتم راهی جبری برای تخمین pose است. این روش یک دستگاه خطی تشکیل داده و سپس تجزیه مقادیر ویژه را به این معادلات اعمال می کند [۶].

با مطرح شدن مسائل تعیین موقعیت و وضعیت یک شیء با استفاده از تعداد نقاط مشخصی از شیء و نقاط متناظر آن در تصویر، محققان بسیاری در جهت یافتن بهترین پاسخ برای این مسائل تحت شرایط مختلف پرداختند. به عنوان مثال در سال ۲۰۰۱ هو^{۱۴} و همکارانش حلی برای مسأله ی چهارنقطه ای (P4P) و در همان سال وو^{۱۵} و هو حلی برای مسأله ی P5P ارائه کردند. در سال ۲۰۱۰ بوجانک^{۱۶} و همکارانش پاسخی کلی برای مسأله P4P برای دوربینی با فاصله ی کانونی نامشخص مطرح کردند [۱۳]. کار آن ها در حقیقت حل مقاوم دستگاهی از معادلات جبری است و از متغیرها و روش های خاصی برای حل این دستگاه استفاده نمودند. تفاوت کار آن ها با کسانی همچون ابیدی^{۱۷} و چندرا^{۱۸} [۱۴] در این است که نقاط فضایی انتخابی در روش آن ها دلخواه بوده و هیچ محدودیتی ندارد. پاسخ آن ها اگرچه پیچیده است ولی کاملاً کلی است.

در سال ۲۰۱۲ پانگ گو^{۱۹} روشی جدید برای مسأله P4P برای دوربینی که کالیبره نشده است ارائه کرد [۱۵]. در حقیقت این روش برای زمانی که از تنظیمات خودکار دوربین استفاده می کنیم و در هر فریم از فیلم این تنظیمات بسته به شرایط تغییر می کند مفید است. روشی که آن ها بکار بردند روش خاصی نبوده و روش جبری ساده است که با نگاه هندسی به مسأله و ایجاد مجدد برخی پارامترها توانسته است به پاسخ دست پیدا کند.

این مقاله در دسته ی مسائل P4P قرار می گیرد. شاید بتوان گفت تفاوت بسیار اساسی کار این مقاله با کارهایی که تاکنون ارائه شده است این می باشد که در اکثر آن ها روابطی که برای دوربین در نظر گرفته شده با استفاده از پارامترهای آن و به صورت روابطی ماتریسی است، ولی در این مقاله کلیه ی مراحل از ابتدا تا انتها هندسی بوده و روابط ماتریسی وجود ندارد. همچنین این روابط هندسی ارتقا پیدا کرده و برای کلیه ی خطوطی که از شیء می توان مشاهده کرد برقرار است. حل دستگاه معادلات غیرخطی که همان سینماتیک مسأله را شرح می دهد با روش های بهینه سازی انجام شده و با انتخاب درست شرایط اولیه و متغیرهای چهارگانه رسیدن به پاسخی درست تضمین شده است.

۲- تشکیل تصویر در دوربین روزنه دار

تصویر مسأله ی سه نقطه ای^۱ که همان تعیین موقعیت و وضعیت یک شیء با استفاده از سه نقطه ی مشخصه است، ابتدا توسط لاکروایکس^۲ در سال ۱۷۹۵ ارائه شد [۱]. ریاضی دان آلمانی، گرانرت^۳ برای نخستین بار در سال ۱۸۴۱ این مسأله را به صورت جبری حل کرد [۴]. برای نخستین بار در سال ۱۹۸۱ فیچر^۴ و بولز^۵ اصطلاح مسأله ی تصویر n نقطه ای را برای یافتن موقعیت و وضعیت یک شیء با n نقطه ی مشخصه ساختند [۳].

راحت ترین روش، برای نخستین بار در سال ۱۹۶۵ توسط رابرتز^۶ ارائه شد که شامل پیدا کردن درایه های ماتریس تصویر پرسپکتیو با حل دستگاه معادلات خطی است که این ماتریس در واقع نگاشتی بین نقاط مشخصه و تصاویرشان در دستگاه همگن است. یازده درایه ی مجهول با داشتن حداقل شش نقطه مشخصه از شیء و نقاط متناظرشان در تصویر بدست می آیند [۵]. روش مورد توجهی دیگر از میان روش های ارائه شده برای تعیین pose، روش ارائه شده توسط تی سائی^۷ در سال ۱۹۸۷، لوئه^۸ در سال ۱۹۸۵ و یوآن^۹ در سال ۱۹۸۹ است. روش ارائه شده توسط تی سائی وقتی فاصله ی کانونی دوربین و مرکز تصویر نامشخص هستند بسیار مفید است. همچنین این روش برای زمانی که هفت تناظر داده شده است تخمین خوبی از pose می باشد [۷]. هنگامی که فاصله ی کانونی دوربین و مرکز تصویر از قبل کالیبره شده اند روش ارائه شده توسط یوآن و لوئه مفید خواهند بود [۸ و ۱۰]. با این وجود هر دو روش به روش نیوتن-رافسون وابسته اند که دو ایراد مهم را بر آن وارد می کند. نخستین ایراد این است که یک pose تخمینی باید برای شروع روند تکراری تخمین pose وجود داشته باشد و دومین ایراد این است که در هر تکرار شبه-معکوس ماتریس ژاکوبین با ابعاد $2N \times 6$ (N تعداد نقاط مشخصه) در روش Lowe یا $N \times 6$ در روش Yuan باید پیدا شود که از لحاظ محاسباتی بسیار هزینه بر است.

در سال ۱۹۹۲ الگوریتم POSIT توسط دنیل دمتون^{۱۰} و لاری دیویس^{۱۱} ارائه شد [۲]. عنوان مقاله ی آن ها که بسیار جسورانه بود "تعیین Pose شیء بر مبنای مدل در ۲۵ خط برنامه ی Mathematica" بود. POSIT یک روش ترکیبی برای پیدا کردن pose است. این روش بر پایه ی روش های خطی جبری بنا شده است و مانند روش های لوئه و یوآن تکرار شونده است ولی به تخمین pose اولیه و معکوس ماتریس در تکرارهایش نیاز ندارد. POSIT برای هشت نقطه مشخصه و چهار تکرار، بسیار سریع است. این روش در مقایسه با روش لوئه و یوآن به محاسبات کمتری نیاز دارد. تنها نکته ای که در بکارگیری این روش وجود دارد این است که اندازه ی شیء ای که تخمین pose آن مدنظر است باید بسیار

¹Perspective three-point Problem

²Lacroix

³Grunert

⁴Fischer

⁵Bolles

⁶Roberts

⁷Tsai

⁸Lowe

⁹Yuan

¹⁰Daniel F.DeMenthon

¹¹LaryS.Davis

¹²Quan

¹³Lan

¹⁴Hu

¹⁵Wu

¹⁶Bujnak

¹⁷Abidi

¹⁸Chandrra

¹⁹Yang Guo

$$\frac{\vec{r}_{A'B'}}{\vec{r}_{AB}} = \frac{f}{p} \quad (۲)$$

در رابطه (۲)، f فاصله کانونی دوربین، p فاصله شیء تا دوربین، $\vec{r}_{AB}$ مولفه‌های دوبعدی شیء بیان شده در دستگاه مشخص و $\vec{r}_{A'B'}$ مولفه‌های دوبعدی تصویر بیان شده در دستگاه مشخص می‌باشند. در صورتی که شیء مولفه سوم هم داشته باشد این رابطه به صورت رابطه (۳) می‌باشد.

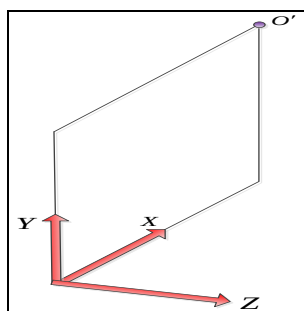
$$\frac{\begin{pmatrix} x_{A'B'} \\ y_{A'B'} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix}} = \frac{f}{p + z_{AB}} \quad (۳)$$

در معادله بالا x و y مولفه‌های اول و دوم و z مولفه سوم شیء بر حسب میلی‌متر بوده و تمامی مولفه‌ها در دستگاه مرجع مشخصی بیان شده‌اند.

۳- معرفی دستگاه‌های مرجع و نحوه دوران با استفاده از زوایای اولیه

برای بیان درست روابط بین نقاط متناظر سه بعدی شیء و دوبعدی تصویر، لازم است همانند شکل ۲ سه راستا و یک نقطه را به عنوان مرجع قرار دهیم که در کل دستگاه مرجع خوانده می‌شوند. از آنجایی که این سه راستا چسبیده به حساسه دوربین یا همان CCD هستند، این دستگاه را دستگاه چسبیده به CCD یا دوربین می‌نامیم. نقطه مرجعی که برای دستگاه CCD در نظر می‌گیریم نقطه‌ی O' است که کمترین مقدار پیکسل را در هر دو راستا داراست.

دستگاه چسبیده به شیء نیز دستگاهی است متعامد که دو راستای اول آن دو راستای هم‌صفحه‌ی متعامداند و راستای سوم هم راستایی متعامد بر دو راستای اول در جهت راستگرد می‌باشد. همچنین نقطه‌ای دلخواه روی شیء به عنوان نقطه‌ی مرجع روی شیء در نظر گرفته می‌شود.



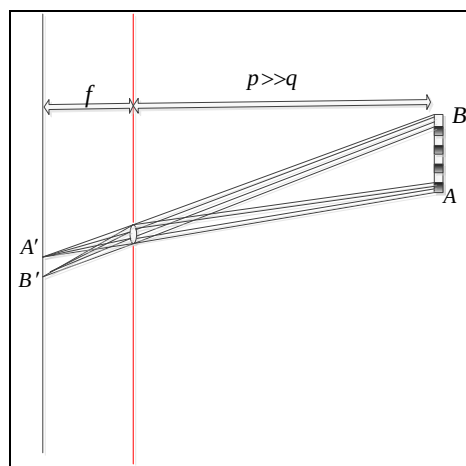
شکل ۲. دستگاه مرجع چسبیده به CCD

حال برای محاسبه‌ی میزان دوران دستگاه چسبیده به شیء نسبت به دستگاه CCD، دورانی با استفاده از زوایای اولیه به صورتی که در ادامه

همانطور که می‌دانید در ابتدا برای تشکیل تصویر روی پرده از روزنه استفاده می‌شد. دلیل جایگزینی عدسی در دوربین به جای روزنه این است که در صورت بزرگ اختیار کردن قطر روزنه، یک نقطه از تصویر تشکیل شده، می‌تواند تصویر بیش از یک نقطه از شیء باشد و با کوچک اختیار کردن آن پرتوهای کافی برای تشکیل تصویری قابل رویت برای چشم ممکن نیست. بنابراین تصویری که با عدسی، که وظیفه همگراکردن پرتوهای زیادی را به عهده دارد، تشکیل می‌شود این مشکلات را نخواهد داشت. تنها محدودیتی که استفاده از عدسی به جای روزنه بر ما تحمیل می‌کند این است که تصویر با استفاده از روزنه در هر فاصله‌ای از روزنه تشکیل می‌شود، اما تصویر تشکیل شده با عدسی تنها در فاصله‌ی q از عدسی است. رابطه‌ی معروف (۱) برای دوربین عدسی‌دار برقرار است.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (۱)$$

در این رابطه فاصله‌ی شیء تا عدسی دوربین p ، فاصله‌ی صفحه‌ی تصویر تا عدسی دوربین q و فاصله‌ی کانونی دوربین f می‌باشد. به منظور ساده‌سازی، برای حالتی که $p \gg q$ است فرض می‌شود تصویر در فاصله‌ی کانونی از عدسی دوربین تشکیل می‌شود (یعنی $q=f$). از آنجایی که معمولاً فاصله‌ی کانونی در حد میلی‌متر است، فرض می‌شود همواره شیء در بی‌نهایت قرار گرفته و همواره صفحه‌ی تصویر در فاصله‌ی f از عدسی دوربین قرار می‌گیرد. بنابراین می‌توان اینطور فرض نمود که روزنه‌ای بجای عدسی قرار گرفته و برای هر شیء‌ای که در فاصله‌ی p از صفحه‌ی روزنه‌دار قرار داشته باشد تصویری در فاصله‌ی f از این صفحه تشکیل خواهد شد. این همان دوربین روزنه‌دار است (شکل ۱).



شکل ۱. تشکیل تصویر با استفاده از عدسی
که معادل تشکیل تصویر با روزنه در نظر می‌گیرند.

رابطه‌ای که با استفاده از قضیه تالس برای دوربین روزنه‌دار برقرار می‌باشد، به صورت رابطه (۲) است.

حکم: با استفاده از قضیه ی تالس و برقراری فرضیات فاصله کانونی دوربین بدست می آید.
اثبات: برای تصویر این شیء صفحه مانند، رابطه ی (۴) براساس قضیه تالس برقرار است.

$$\frac{\begin{pmatrix} X_{AB'} \\ Y_{AB'} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} X_{AB} \\ Y_{AB} \end{pmatrix}} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad (4)$$

در این رابطه f_x و f_y فاصله ی کانونی در دو راستای x و y هستند که به دلیل متفاوت بودن اندازه ی پیکسل ها (S_x, S_y) بر حسب میلی متر در دو راستای x و y وجود می آید. در حقیقت به این دلیل که مولفه های تصویر با واحد پیکسل در اختیارمان قرار دارند، با وارد نمودن این فاکتورهای اندازه ی پیکسل ها در رابطه ی (۴) واحد تمام عناصر به میلی متر تبدیل شده می شود. همچنین رابطه ی (۵) برای فاصله ی کانونی در راستاهای x و y برقرار می باشد.

$$f_x = \frac{f}{S_x}, \quad f_y = \frac{f}{S_y} \quad (5)$$

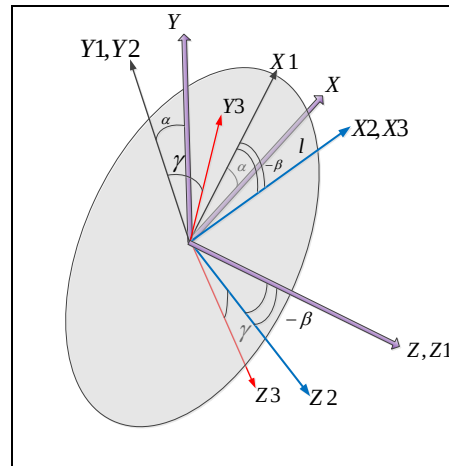
با جایگذاری مقادیر معلوم در رابطه ی (۴) مقدار فاصله ی کانونی بر حسب میلی متر بدست می آید. با این کار دوربین کالیبره شده و به دلیل اینکه از این مقدار فاصله ی کانونی در روابط محاسبه ی موقعیت و وضعیت استفاده می کنیم، تصاویر دیگری که با دوربین تهیه می کنیم باید با همان تنظیماتی باشد که این تصویر، گرفته شده است. بنابراین در ادامه فاصله ی کانونی جزء معلومات می باشد.

۵- تعیین موقعیت و وضعیت یک قلم

برای ساده سازی مسأله ی تعیین موقعیت و وضعیت، شیء مورد نظر را ساده ترین نوع، یعنی یک قلم انتخاب می کنیم. دوران قلم می تواند تک بعدی به معنای تک زاویه ای بودن آن (α شامل β) یا دوبعدی به معنای دوزاویه ای بودن آن (شامل هر دو زاویه ی α و β) باشد. نقطه ی ابتدایی قلم نیز می تواند روی محور اصلی دوربین (محوری که از مرکز CCD و روزنه عبور کرده و عمود بر CCD است) باشد، یا نسبت به این محور به اندازه Δy در راستای y اختلاف داشته باشد (نقطه ی ابتدایی روی صفحه YZ قرار داشته باشد) یا می تواند نسبت به محور اصلی به اندازه Δx در راستای x و به اندازه Δy در راستای y اختلاف داشته باشد (نقطه ی ابتدایی دلخواه باشد). البته دوران روی صفحه XZ مشابه دوران روی صفحه YZ می باشد. همچنین فرض می شود مولفه ی سوم نقطه ی ابتدایی قلم همواره به اندازه d است و مقدار d را می دانیم. به این ترتیب قلم می تواند در نه حالت مختلف در مقابل دوربین قرار بگیرد. برای طولانی نشدن بحث، حالت نه، یعنی پیچیده ترین حالت قرارگیری قلم در مقابل دوربین (شکل ۴)، بررسی می شود.

بیان می شود درنظر گرفته می شود که در حقیقت برای رسیدن به موقعیت شیء با دانستن وضعیت آن و بالعکس، این نمایش مورد استفاده قرار می گیرد.

همانطور که در شکل ۳ ملاحظه می شود ابتدا دستگاه حول محور z آن به صورت راستگرد به اندازه ی α دوران داده شده تا به دستگاه شماره ی یک برسد، سپس حول محور y دستگاه شماره ی یک به اندازه ی β دوران داده می شود تا به دستگاه شماره ی دو برسد و در نهایت حول محور x دستگاه شماره ی دو به اندازه ی γ دوران داده می شود تا به دستگاه شماره ی سه برسد. [۱۶]



شکل ۳. دوران سه بعدی با استفاده از زوایای اوایلر

۴- تعیین فاصله ی کانونی دوربین با استفاده از

تصویر یک شیء مشخص

برای تعیین موقعیت و وضعیت یک شیء با مدل مشخص، معلومات، مولفه های سه بعدی شیء بیان شده در دستگاه شیء، مولفه های دوبعدی تصویر بیان شده در دستگاه CCD می باشد و مجهولات موردنظر مولفه های سه بعدی شیء بیان شده در دستگاه CCD و اندازه ی برداری است که ابتدای آن مرکز تصویر و انتهای آن نقطه ی دلخواه مشخص شده روی شیء است. طبق رابطه ی (۳) که بر اساس قضیه تالس نوشته شده است فاصله ی کانونی نیز نامشخص می باشد. بنابراین قبل از تعیین موقعیت و وضعیت باید f را محاسبه نمود تا در ادامه ی کار f معلوم باشد. به عبارت دیگر یک بار دوربین کالیبره می شود و در ادامه کار این تنظیمات تغییری نمی کنند.

قضیه: اگر مولفه های شیء ای مشخص و تصویر آن در یک دستگاه و فاصله ی شیء تا دوربین مشخص باشند، آن گاه فاصله ی کانونی دوربین بدست می آید.

فرضیات: تصویری از شیء ای صفحه مانند که در راستاهای x و y مولفه داشته ولی مولفه ی سومی ندارد موجود است. فاصله ی شیء تا دوربین اندازه گیری شده و در اختیارمان قرار دارد. مولفه های اول و دوم شیء (X_{AB}, Y_{AB}) و مولفه های اول و دوم تصویر ($X_{AB'}, Y_{AB'}$) مشخص می باشند.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(x''+\Delta x)^2+(y''+\Delta y)^2}}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}} &= \frac{d}{d+z} \\ \frac{a=\sqrt{(x''+\Delta x)^2+(y''+\Delta y)^2}}{(x+\Delta x)\sqrt{(1+\tan^2(\phi))}} &= \frac{1}{1+\frac{z}{d}} \\ \rightarrow a + \frac{a}{d}z &= (x+\Delta x)\sqrt{(1+\tan^2(\phi))} \\ \frac{z=\sqrt{l^2-x^2-y^2}}{d} \rightarrow a + \frac{a}{d}\sqrt{l^2-x^2-y^2} &= (x+\Delta x)\sqrt{(1+\tan^2(\phi))} \\ \frac{k=\sqrt{(1+\tan^2(\phi))}}{a} \rightarrow \sqrt{l^2-x^2-y^2} &= \frac{d(x+\Delta x)k}{a} - d \\ \rightarrow \sqrt{l^2-x^2-y^2} &= \frac{dkx}{a} + \frac{d\Delta x k}{a} - d \\ \frac{q=\frac{d\Delta x k}{a}-d}{a} \rightarrow \sqrt{l^2-x^2-y^2} &= \frac{dkx}{a} + q \\ \rightarrow l^2-x^2-y^2 &= \left(\frac{dkx}{a}+q\right)^2 \\ \rightarrow l^2-x^2-y^2 &= \frac{d^2k^2x^2}{a^2} + q^2 + 2q\frac{dkx}{a} \\ \frac{y=c_1x+d_1}{a} \rightarrow l^2-x^2-(c_1x+d_1)^2 &= \frac{d^2k^2x^2}{a^2} + q^2 + 2q\frac{dkx}{a} \\ \rightarrow l^2-x^2-c_1^2x^2-d_1^2-2c_1d_1x &= \frac{d^2k^2x^2}{a^2} + q^2 + 2q\frac{dkx}{a} \\ \rightarrow x^2\left(\frac{d^2k^2}{a^2}+1+c_1^2\right) + x\left(\frac{2qdk}{a}+2c_1d_1\right) &+ q^2-l^2-d_1^2=0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{A)} \\ (\end{matrix}$$

حال با جایگذاری x ها در رابطه‌ی (۹) دو مقدار هم برای y و z بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} y &= c_1x + d_1 \\ z &= \frac{dk}{a}(x+\Delta x) - d \end{aligned} \quad (9)$$

اگر قلمی با طول مشخص را به اندازه‌ی α و β ، به صورتی که بیان شد، دوران دهیم مولفه‌های شیء در دستگاه مرجع به صورت زیر خواهند بود که با استفاده از این روابط با دانستن وضعیت شیء (یعنی همان زوایای دوران) می‌توان به مولفه‌های آن در دستگاه مرجع رسید.

$$\begin{aligned} x &= l \cos \beta \cos \alpha \\ y &= l \cos \beta \sin \alpha \\ z &= -l \sin \beta \end{aligned} \quad (10)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۰) زوایای دوران اوایل نیز با استفاده از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \beta &= \sin^{-1}\left(\frac{-z}{l}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

در این حالت قرارگیری قلم در مقابل دوربین، تعیین موقعیت قلم به معنی تعیین موقعیت نقطه‌ی ابتدایی آن یا بدست آوردن Δx و Δy و همچنین

قضیه: اگر فاصله‌ی کانونی دوربین مشخص باشد، با استفاده از تصویر یک قلم می‌توان به موقعیت و وضعیت آن رسید.

فرضیات: شیء مورد نظر قلم بوده و دوران آن دوبعدی است و نقطه‌ی ابتدایی آن به اندازه‌ی Δx در راستای X و به اندازه‌ی Δy در راستای Y نسبت به محور اصلی اختلاف دارد و طول قلم معلوم است. فاصله‌ی قلم تا دوربین یا d مشخص است.

حکم: با استفاده از قضیه‌ی تالس و برقراری فرضیات، موقعیت و وضعیت یک قلم تعیین می‌گردد.

اثبات: روابط هندسی حاکم بر این حالت به صورت رابطه‌ی (۶) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x'' &= \frac{d}{f} x' \\ y'' &= \frac{d}{f} y' \end{aligned} \right\} l'' &= \frac{d}{f} l' \\ \Delta x &= \frac{d}{f} \Delta x', \Delta y = \frac{d}{f} \Delta y' \\ \tan(\Psi) &= \frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} \rightarrow x'' = \frac{l''}{\sqrt{1+\tan^2(\Psi)}} \end{aligned} \quad (6)$$

همچنین با تعریف زاویه ϕ خواهیم داشت:

$$\tan(\phi) = \frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} = \frac{y'+\Delta y'}{x'+\Delta x'} = \frac{y''+\Delta y''}{x''+\Delta x''} \rightarrow (y+\Delta y) = (x+\Delta x) \tan(\phi)$$

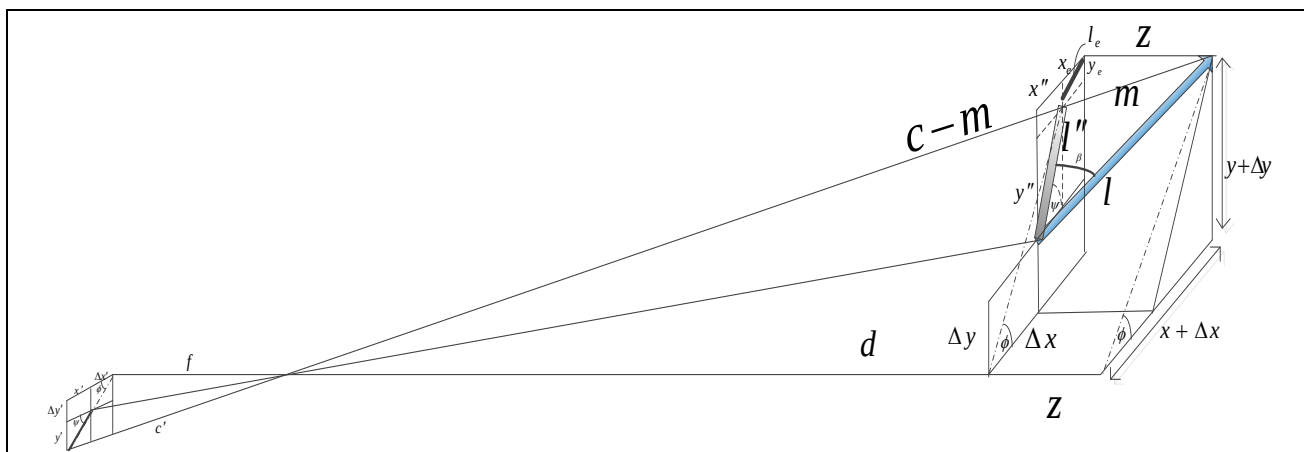
بنابراین:

$$y = x \tan(\phi) + \Delta x \tan(\phi) - \Delta y \rightarrow y = c_1x + d_1 \quad (7)$$

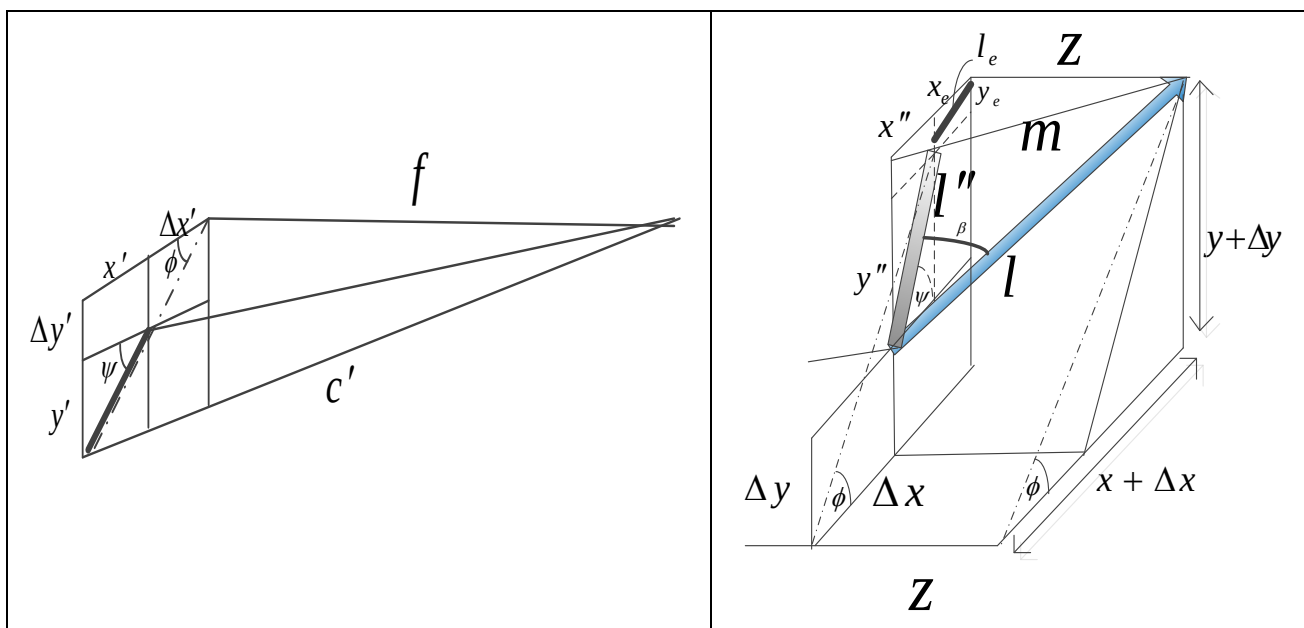
نمای بزرگتر بخش‌هایی از شکل ۴ و نمای دوبعدی آن مطابق شکل‌های ۵ و ۶ خواهند بود که برای درک بهتر روابط نشان داده شده است. مطابق شکل ۴ رابطه‌ی (۸) را خواهیم داشت.

با حل رابطه‌ی (۸) مقدار x یا مولفه‌ی اول قلم بدست می‌آید. ولی همانطور که مشاهده می‌کنید معادله‌ی بدست آمده از درجه دوم است، در حالی که انتظار داشتیم تنها یک پاسخ برای x داشته باشیم. دلیل این موضوع با توجه به شکل ۷ مشخص می‌شود.

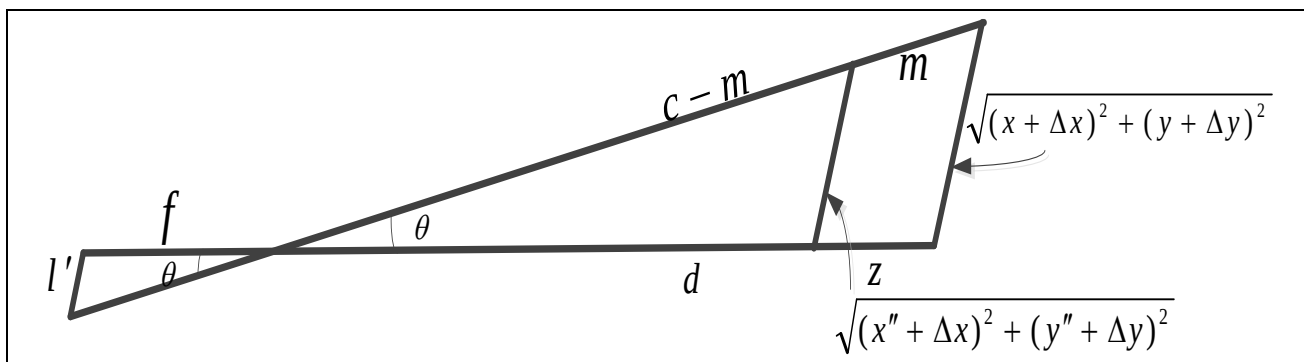
در شکل ۵، دایره‌ای به شعاع طول قلم رسم شده است. فاصله‌ی نقطه‌ی ابتدایی قلم یا همان مرکز دایره از روزنه‌ی دوربین d است. همانطور که از روی شکل مشخص است دو مقدار برای مولفه‌ی سوم و در نتیجه دو مقدار برای تمام مولفه‌های قلم بدست می‌آید. بنابراین با تصویر قلمی که در مقابل دوربین قرار گرفته دو پاسخ مختلف بدست خواهد آمد.



شکل ۴. پیچیده‌ترین حالت قرارگیری قلم در مقابل دوربین.



شکل ۵. نماهای بزرگ‌شده‌ی ابتدا و انتهای شکل ۴.



شکل ۶. نمای دوبعدی شکل ۴.

$$C = [C_1 \ C_2 \ C_3]$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \beta \cos \alpha \\ l_1 \cos \beta \sin \alpha \\ -l_1 \sin \beta \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} l_2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - l_2 \sin \alpha \cos \gamma \\ l_2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + l_2 \cos \alpha \cos \gamma \\ l_2 \cos \beta \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} l_3 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + l_3 \sin \alpha \sin \gamma \\ l_3 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - l_3 \cos \alpha \sin \gamma \\ l_3 \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix}$$

همچنین با استفاده از بخش قبل، برای قلمی که دورانی دوبعدی پیدا کند و نقطه‌ای ابتدایی‌اش دلخواه باشد به مقادیر سه مولفه‌ی این قلم در راستاهای x ، y و z می‌توان رسید. ماتریس دوران در حقیقت همین مولفه‌های سه بعدی قلم در موقعیت و وضعیت نهایی هستند به عبارتی داریم:

$$C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

که زیرنویس‌های یک و دو و سه به ترتیب برای یال‌های اول و دوم و سوم هستند. بنابراین اگر با استفاده از نتایج بخش قبل، مولفه‌های هر کدام از سه راستای دستگاه را پیدا شود، در حقیقت ماتریس دوران بین دو دستگاه CCD و دستگاه چسبیده به مکعب بدست خواهد آمد و با استفاده از روابطی که مولفه‌های این ماتریس دوران با زوایای دوران دارند، زوایای دوران محاسبه می‌شوند.

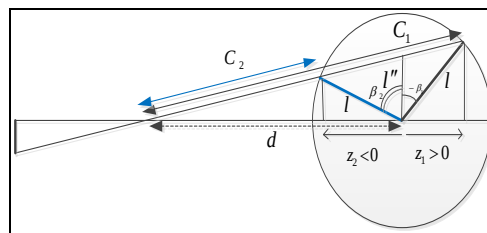
نکته‌ای که پس از انجام این کار بوجود آمد و قابل پیش‌بینی نیز بود، این است که به دلیل وارد شدن $\sin$ و $\cos$ ها در روابط، در محاسبه‌ی زوایا خطایی بوجود می‌آید که منشأ آن خطای عددی است و برای جلوگیری از این خطاها می‌توان از چهارگان‌ها استفاده نمود.

با استفاده از چهارگان‌ها ماتریس دوران به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C = \begin{bmatrix} 1-2\varepsilon_2^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_2^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

همچنین رابطه‌ی (۱۵) همواره باید برای چهارگان‌ها برقرار باشد و همین محدودیت است که از بوجود آمدن خطای عددی جلوگیری می‌کند.

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = 1 \quad (15)$$



شکل ۷. وجود دو پاسخ مختلف برای قلمی که در مقابل دوربین قرار گرفته.

دانستن d بوده و تعیین وضعیت قلم بدست آوردن زوایای دوران آن می‌باشد. که با استفاده از روابط (۶)، (۸)، (۹) و (۱۱) موقعیت و وضعیت قلم تعیین می‌گردند.

۶- تعیین موقعیت و وضعیت یک مکعب

قضیه: اگر فاصله‌ی کانونی دوربین مشخص باشد، با استفاده از تصویر یک مکعب، موقعیت نقطه‌ی مشخصی از این مکعب و وضعیت دستگاه متعامد چسبیده به آن یا به عبارتی زوایای دوران سه بعدی آن بدست خواهند آمد.

فرضیات: شیء به جای قلم، سه قلم متعامد یا یک مکعب است. طول این سه قلم یا یال‌های مکعب نیز مشخص هستند. فاصله‌ی مکعب تا دوربین نامشخص است.

حکم: با استفاده از روابط بدست آمده در قضیه قبل و برقراری فرضیات، موقعیت و وضعیت یک مکعب تعیین می‌گردد.

اثبات: این حالت، مجهولات و معلوماتی به حالت قبل که تنها یک قلم بود، اضافه نمود. در حالتی که شیء یک قلم بود تنها دو زاویه دوران مطرح بود ولی در این حالت سه زاویه دوران حول سه قلم یا سه یال مکعب (همان زوایای اوپلر) مطرح می‌باشد ولی از طرفی ویژگی متعامد بودن یال‌ها و طول یال‌ها به ویژگی‌هایمان اضافه شده است و این بار سه تصویر به جای یک تصویر در اختیار قرار دارد. انتظارمان این است که اگرچه در حالت قبل علاوه بر دانستن فاصله‌ی کانونی دوربین و تصویر، به دانستن فاصله‌ی شیء تا دوربین یا d هم نیاز بود، در این حالت نیازی به دانستن فاصله‌ی شیء تا دوربین وجود داشته باشد.

بنابراین در این حالت که شیء به جای یک قلم، سه یال متعامد است، به دنبال موقعیت و وضعیت شیء و همچنین فاصله‌ی آن تا دوربین هستیم. همچنین باید بتوان ابتدا و انتهای این سه یال متعامد را در تصویر مشاهده کرد یا حداقل چهار نقطه از مکعب را در اختیار داشت که غیر هم صفحه بوده و بیانشان را در دستگاه شیء بدانیم.

همانطور که می‌دانیم اگر دستگاهی به صورتی که در شکل ۳ نشان داده شد دوران پیدا کند، ماتریس دوران آن به صورت زیر می‌باشد [۱۳].

بنابراین:

$$\frac{a}{\sqrt{l^2 - z^2 + \left(\frac{d\Delta x'}{f}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)^2 + 2x\left(\frac{d\Delta x'}{f}\right) + 2y\left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)}} = \frac{1}{d+z}$$

$$\rightarrow (ad+az)^2 = l^2 - z^2 + \left(\frac{d\Delta x'}{f}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)^2 + 2x\left(\frac{d\Delta x'}{f}\right) + 2y\left(\frac{d\Delta y'}{f}\right) \quad (20)$$

$$\rightarrow a^2 d^2 + a^2 z^2 + 2a^2 dz - l^2 + z^2 - \left(\frac{d\Delta x'}{f}\right)^2 - \left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)^2 - 2x\left(\frac{d\Delta x'}{f}\right) - 2y\left(\frac{d\Delta y'}{f}\right) = 0$$

$$\rightarrow z^2 (a^2 + 1) + d^2 \left(a^2 - \left(\frac{\Delta x'}{f}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y'}{f}\right)^2 \right) + dz (2a^2) + dx \left(\frac{-2\Delta x'}{f} \right) + dy \left(\frac{-2\Delta y'}{f} \right) - l^2 = 0$$

با توجه به رابطه (۲۰)، می توان ثابت های رابطه (۲۱) را تعریف نمود:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= (a^2 + 1) \\ m_2 &= a^2 - \left(\frac{\Delta x'}{f}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y'}{f}\right)^2 \\ m_3 &= 2a^2 \\ m_4 &= \frac{-2\Delta x'}{f} \\ m_5 &= \frac{-2\Delta y'}{f} \\ m_6 &= -l^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow m_1 z^2 + m_2 d^2 + m_3 dz + m_4 dx + m_5 dy + m_6 = 0 \quad (21)$$

بنابراین برای هر یک از این یال ها رابطه ای به صورت (۲۱) وجود دارد که به جای x و y و z مقادیر چهارگانی آن ها را می توان جایگذاری نمود. چهارگان ها و d مجهولات هستند و تا به اینجا سه رابطه بدست آمد که با جایگذاری به صورت روابط (۲۲) بیان می شود.

$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{(x'_1 + \Delta x')}{f}\right)^2 + \left(\frac{(y'_1 + \Delta y')}{f}\right)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= (a_1^2 + 1) \\ m_{21} &= a_1^2 - \left(\frac{\Delta x'}{f}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y'}{f}\right)^2 \\ m_{31} &= 2a_1^2 \\ m_{41} &= \frac{-2\Delta x'}{f} \\ m_{51} &= \frac{-2\Delta y'}{f} \\ m_{61} &= -l_1^2 \\ x_1 &= 1 - 2\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_3^2 \\ y_1 &= 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \varepsilon_4) \\ z_1 &= 2(\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_4) \\ \varepsilon_5 &= d \\ m_{11} z^2 + m_{21} d^2 + m_{31} dz + m_{41} dx + m_{51} dy + m_{61} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

برای دو یال دیگر نیز دو رابطه دیگر بر حسب پنج مجهول (چهارگان ها و d) بدست می آید. بنابراین رابطه (۲۳) با استفاده از سه یال استخراج می شود.

بنابراین به جای بدست آوردن مستقیم زوایای دوران، ابتدا چهار چهارگان و فاصله ی شیء تا دوربین را بدست می آورده، سپس با توجه به رابطه ای که این چهارگان ها با عناصر ماتریس دورانی که شامل زوایای دوران است دارند به مقدار زوایای دوران می رسمیم.

با توجه به حالت نه قلم رابطه ی (۱۶) برای هر قلمی که در مقابل دوربین قرار داشته باشد برقرار است.

$$\frac{\sqrt{(x'' + \Delta x)^2 + (y'' + \Delta y)^2}}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2}} = \frac{d}{d+z} \quad (16)$$

این رابطه یک رابطه ی بسیار کلیدی است. آنچه که داریم تنها تصویری از قلم است. بنابراین باید سعی کنیم تا جایی که می توانیم در رابطه ی فوق مولفه های تصویر را وارد نماییم. بر اساس بخش قبل رابطه ی (۱۷) برقرار است.

$$\begin{aligned} (y'' + \Delta y'') &= \frac{d}{f} (y' + \Delta y') \\ (x'' + \Delta x'') &= \frac{d}{f} (x' + \Delta x') \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین رابطه ی (۱۸) استخراج خواهد شد.

$$\frac{\sqrt{(x'' + \Delta x)^2 + (y'' + \Delta y)^2}}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2}} = \frac{d}{d+z}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{f}(x' + \Delta x')\right)^2 + \left(\frac{d}{f}(y' + \Delta y')\right)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + 2x\Delta x + 2y\Delta y}} = \frac{d}{d+z}$$

$$\rightarrow \frac{d \sqrt{\left(\frac{(x' + \Delta x')}{f}\right)^2 + \left(\frac{(y' + \Delta y')}{f}\right)^2}}{\sqrt{l^2 - z^2 + \left(\frac{d\Delta x'}{f}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)^2 + 2x\left(\frac{d\Delta x'}{f}\right) + 2y\left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)}} = \frac{d}{d+z}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{\left(\frac{(x' + \Delta x')}{f}\right)^2 + \left(\frac{(y' + \Delta y')}{f}\right)^2}}{\sqrt{l^2 - z^2 + \left(\frac{d\Delta x'}{f}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)^2 + 2x\left(\frac{d\Delta x'}{f}\right) + 2y\left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)}} = \frac{1}{d+z} \quad (18)$$

برای ساده تر شدن روابط، پارامتر a به صورت رابطه ی (۱۹) تعریف می شود.

$$a = \sqrt{\left(\frac{(x' + \Delta x')}{f}\right)^2 + \left(\frac{(y' + \Delta y')}{f}\right)^2} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 - 1 &= 0 \\
 f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0
 \end{aligned} \quad (28)$$

راهکار پیشنهادی، استفاده از روابط مربوط به متعامد بودن سطرها و ستون هاست. بنابراین سه رابطه‌ی دیگر به صورت (۲۹) وجود دارد.

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 &= 0 \rightarrow h_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = 0 \\
 x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - l_2^2 &= 0 \rightarrow h_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = 0 \\
 x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - l_3^2 &= 0 \rightarrow h_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = 0
 \end{aligned} \quad (29)$$

معادلاتی که موجود هستند به صورت (۳۰) می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 - 1 &= 0 \\
 f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 h_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 h_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 h_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0
 \end{aligned} \quad (30)$$

در شبیه‌سازی با استفاده از ده معادله و پنج مجهول رابطه‌ی (۳۰) توانستیم به مقادیر چهارگان‌ها و فاصله‌ی شیء تا دوربین دست یابیم. با استفاده از مقادیر چهارگان‌ها و روابط موجود برای ماتریس دوران می‌توان مولفه‌های یکتایی برای هر سه یال استخراج کرد. به عبارتی ماتریس دوران رابطه‌ی ۱۳ بدست آمد.

تنها گام باقی‌مانده این است که با استفاده از عناصر ماتریس دوران، زوایای دوران را محاسبه نمود. با استفاده از رابطه‌ی ۱۲ مجهولات یعنی زوایای دوران و فاصله‌ی شیء تا دوربین با رابطه‌ی ۳۱ بدست می‌آیند. حال باید با استفاده از ابزار ریاضیاتی به حل این ده معادله به منظور بدست آوردن پنج مجهول پرداخت.

$$\begin{aligned}
 d &= \varepsilon_5 \\
 \tan \alpha &= \frac{l_1 \cos \beta \sin \alpha}{l_1 \cos \beta \cos \alpha} = \frac{y_1}{x_1} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \\
 \sin \beta &= \frac{z_1}{-l_1} \rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{z_1}{-l_1}\right) \\
 \tan \gamma &= \frac{l_2 \cos \beta \sin \gamma}{l_3 \cos \beta \cos \gamma} = \frac{z_2}{z_3} \rightarrow \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_3}\right)
 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0
 \end{aligned} \quad (23)$$

رابطه‌ی مهم دیگری که در پیچیده‌ترین حالت قلم بدست آمد به صورت رابطه‌ی (۲۴) می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 \tan(\phi) &= \frac{y' + \Delta y'}{x' + \Delta x'} = \frac{(y + \Delta y)}{(x + \Delta x)} \rightarrow y = x \tan(\phi) + \Delta x \tan(\phi) - \Delta y \\
 \rightarrow y - x \tan(\phi) - \left(\frac{d \Delta x'}{f}\right) \tan(\phi) + \left(\frac{d \Delta y'}{f}\right) &= 0 \\
 \rightarrow y - x \tan(\phi) - \left(\frac{\Delta x' \tan(\phi) + \Delta y'}{f}\right) d &= 0 \\
 \frac{t_1 = \tan(\phi); t_2 = \frac{\Delta x' \tan(\phi) + \Delta y'}{f}}{\rightarrow y - t_1 x - t_2 d} &= 0
 \end{aligned} \quad (24)$$

برای ساده‌تر نمودن روابط، پارامترهایی به صورت (۲۵) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 \tan(\phi_1) &= \frac{y'_1 + \Delta y'}{x'_1 + \Delta x'}; t_{11} = \tan(\phi_1); t_{21} = \frac{\Delta x' \tan(\phi_1) + \Delta y'}{f} \\
 \tan(\phi_2) &= \frac{y'_2 + \Delta y'}{x'_2 + \Delta x'}; t_{12} = \tan(\phi_2); t_{22} = \frac{\Delta x' \tan(\phi_2) + \Delta y'}{f} \\
 \tan(\phi_3) &= \frac{y'_3 + \Delta y'}{x'_3 + \Delta x'}; t_{13} = \tan(\phi_3); t_{23} = \frac{\Delta x' \tan(\phi_3) + \Delta y'}{f}
 \end{aligned} \quad (25)$$

سه رابطه‌ی دیگر برای سه یال به این صورت رابطه‌ی (۲۶) خواهد شد.

$$\begin{aligned}
 y_1 - t_{11} x_1 - t_{21} d &= 0 \\
 y_2 - t_{12} x_2 - t_{22} d &= 0 \\
 y_3 - t_{13} x_3 - t_{23} d &= 0
 \end{aligned} \quad (26)$$

با جایگذاری سه مولفه بر حسب چهارگان‌ها و d خواهیم داشت رابطه‌ی (۲۷) استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned}
 g_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0
 \end{aligned} \quad (27)$$

معادلاتی که تا به اینجا بر حسب چهارگان و d بدست آمدند به صورت رابطه‌ی (۲۸) هستند.

هفت معادله و پنج مجهول موجود است. ولی نتوانستیم در شبیه‌سازی، با این معادلات هم به پنج مجهولمان دست یابیم.

۷- نکات مربوط به شبیه سازی و حل معادلات

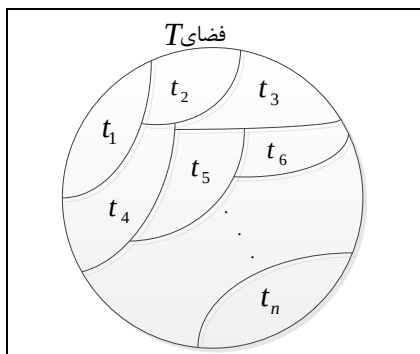
در شبیه سازی ای که انجام شد سعی شد با استفاده از تابع $fsolve$ در نرم افزار MATLAB که برای حل معادلات غیرخطی مفید است، با استفاده از روش گاوس- نیوتن، با دادن ده معادله به پنج مجهول مورد نظرم دست یابیم.

یکی از ایرادات الگوریتم های بهینه سازی وابستگی شدید آن ها به حدس اولیه ای درست است و حتی ممکن است با نادرست بودن این حدس، الگوریتم به پاسخی همگرا نشود.

با توجه به بازه ای که هر یک از زوایای دوران می توانند تغییر کنند حالت های مختلفی برای دسته زوایای دوران بوجود می آید. فرض کنید فضای T فضایی باشد که تمام این حالت های مختلف را می پوشاند (شکل ۸). از آن جایی که رسیدن به تمام حالت های فضای T تنها با یک شرط اولیه امکان پذیر نیست، چندین شرایط اولیه لازم داریم که هر کدام از آن ها زیرفضایی از T را می پوشانند. فرض کنید با شروع از شرایط اولیه شماره یک می توان به ده حالت مختلف در فضای T رسید ولی به حالت یازدهم در فضای T نمی توان رسید. این ده حالت زیر فضایی از T هستند که با شرایط اولیه شماره ی یک قابل دست یابی هستند (t_1). حالت یازدهم و چند حالت دیگر فرضاً زیرفضای دومی را تشکیل می دهند که برای رسیدن به آن ها شرایط اولیه ی شماره ی دو لازم است (t_2). به این ترتیب اگر فضای T شامل n زیرفضا (t_1 تا t_n) باشد که برای دست یابی به هر کدام از زیرفضاها شرایط اولیه ی Q_n لازم باشد، با در اختیار داشتن شرایط اولیه های Q_1 تا Q_n کل فضای T پوشانده شده و دست یابی به تمام حالت ها امکان پذیر است. تنها نکته ای که باقی می ماند این است که مقدار n چند است یا چند زیرفضا در فضای T وجود دارد و مقدار Q های متناظر این n زیرفضا چه مقداری هستند.

در برنامه ی شبیه سازی مستقیم (برنامه ای که در آن با استفاده از ماتریس دوران مقادیر چهارگان ها بدست می آیند)، اگر زوایای دوران را بدانیم مقدار چهارگان ها بدست می آیند. اما در برنامه ی شبیه سازی معکوس با دانستن چهارگان ها به عنوان شرایط اولیه، باید به زوایای دوران برسیم. هدف ما در این مقاله اجرای برنامه ی شبیه سازی معکوس می باشد، ولی به دلیل ندانستن چهارگان ها نیاز داریم تا برنامه ی شبیه سازی مستقیم را اجرا نموده و از نتیجه ی آن به عنوان ورودی برنامه ی شبیه سازی معکوس استفاده کنیم. به این منظور با یک شرط اولیه برنامه شبیه سازی معکوس را اجرا نمودیم. سپس برای حالتی که برنامه معکوس به جواب نرسید (که همان رسیدن به زیر فضای دیگر می باشد) برنامه مستقیم را اجرا نموده تا شرایط اولیه ی مربوط به زیرفضای جدید را پیدا کنیم. با افزودن این شرایط اولیه به برنامه ی معکوس برنامه را اجرا نموده و مجدداً به رسیدن به حالتی که به جواب نرسید کار قبلی را تکرار می کنیم. اگر چه اجرای کامل برنامه ها برای رسیدن به n تا شرایط اولیه کار زمان بری است ولی زمانی که از این برنامه در عمل استفاده کنیم، حالتی که در عمل وجود دارد حتماً در یکی از زیر فضاهای فضای T قرار

گرفته و شرایط اولیه ی مربوط به آن وجود دارد و حتماً در زمانی بسیار کم به پاسخ درست منتهی می شود. همچنین شرط استفاده از شرط اولیه ی دیگر را این قرار داریم که مجموع قدر مطلق سطرها ی تابعی که شامل ده معادله بود بزرگتر از 10^{-3} شود.



شکل ۸. فضای دربرگیرنده ی تمام حالت های ممکن
زوایای دوران

در انتخاب مقدار اولیه به این نکته توجه کردیم که چون چهار مجهول اول چهارگان ها هستند باید جمع مجذورشان یک باشد و مجهول پنجم هم که فاصله شیء تا دوربین است باید عدد مثبتی باشد. برای انتخاب بهتر مقدار اولیه فاصله ی شیء تا دوربین با این فرض که یال ها کاملاً در صفحه ی موازی CCD قرار دارد مقدار فاصله را برای هر کدام از یال ها بدست آوردیم. سپس با میانگین گیری از هر دو فاصله ای که نزدیکتر به هم بودند مقدار اولیه ی فاصله ی شیء تا دوربین را تخمین زدیم.

نکته ی قابل توجه دیگری که در شبیه سازی باید به آن توجه شود، این است که باید مقادیر درستی از α ، β و γ انتخاب شوند از آنجایی که مقادیر این زوایا با توابع $\arcsin$ و $\arctan$ بدست آمدند، دانستن بازه ی این توابع مفید است. زوایای که با $\arctan$ بدست می آیند در بازه ی صفر تا 180° درجه جواب یکتایی خواهند داشت. زوایایی که با $\arcsin$ بدست می آیند در بازه ی 90° تا 90° درجه جواب یکتایی خواهند داشت. لذا باید زوایای α و γ که برای بررسی صحت برنامه استفاده می شوند، در بازه ی صفر تا 180° درجه باشند و زاویه β ای که برای بررسی صحت برنامه استفاده می شوند، در بازه ی 90° تا 90° درجه باشد.

۸- آزمایش عملی

در آزمایش عملی به جای قسمتی از برنامه ی شبیه سازی که شبیه ساز دوربین بود، از خود دوربین استفاده می شود و چهار نقطه ی تصویر که قبلاً نتیجه ی برنامه ی شبیه ساز بود این بار از روی تصویر انتخاب خواهد شد. انتخاب دستی این نقاط خطایی را بر فرآیند اعمال می کند. این نقاط روی قسمت هایی از تصویر انتخاب می شوند که اندازه ی واقعی آن ها را روی شیء بدانیم و روی سه راستای عمود بر هم قرار داشته باشند.

تئودولیت گرفته و با این عکس مقدار فاصله‌ی کانونی را در این حالت با استفاده از روابط موجود بدست آورده و دیگر تنظیمات لنز را تغییر نمی-دهیم (شکل ۹).

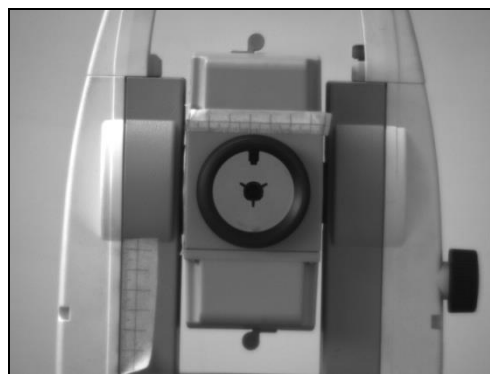
سپس تئودولیت را به اندازه‌ی دلخواه دوران داده، عکسی را در این حالت ذخیره نموده و مقدار زوایای افقی و عمودی را روی تئودولیت خوانده و یادداشت می‌کنیم. سپس این عکس را در نرم‌افزار MATLAB خوانده و سعی می‌کنیم سه یال مربوط به شیء را طوری انتخاب کنیم که طول آن‌ها روی تصویر با استفاده از برجسب‌های مدرج در اختیار باشد. در این حالت شش مولفه‌ی پیکسلی دوبعدی از یال‌ها در اختیار داریم. نقطه‌ی ابتدایی یکی از یال‌ها را به عنوان نقطه‌ی موردنظر روی شیء انتخاب می‌کنیم و با تفاضل نقطه‌ی انتهایی از نقطه‌ی ابتدایی دو یال دیگر دو مولفه‌ی پیکسلی دوبعدی برای دو یال دیگر بدست می‌آوریم که در حقیقت با این کار به جای سه نقطه و سه راستا از شیء، یک نقطه از شیء و سه راستا در اختیار داریم. به عبارت دیگر حداقل چهار نقطه‌ی مشخصه از شیء انتخاب می‌شوند (شکل ۱۰).

شماره آزمایش	متغیر	α (درجه)	β (درجه)	γ (درجه)	d (میلیمتر)
۱	مقدار واقعی	۰	۱۹/۹۲	۰/۲۵	۳۴۸۴
	نتیجه برنامه	۱/۷۱	۲۰/۴۷	۰	۳۵۰۲
۲	مقدار واقعی	۰	۰/۵	۲۰	۳۴۸۴
	نتیجه برنامه	-۰/۳	-۱/۱۹	۲۲/۸	۳۴۸۲
۳	مقدار واقعی	۰	۳۰/۰۶	۲۵	۳۴۸۴
	نتیجه برنامه	-۳	۳۰/۹۹	۲۵/۶۷	۳۴۸۳
۴	مقدار واقعی	۰	۰/۰۳	۳۰/۰۱	۳۴۸۴
	نتیجه برنامه	-۱/۴۸	۲/۰۰۶	۳۳/۳	۳۵۱۳
۵	مقدار واقعی	۰	۴۴/۹۹	۴۱/۸۵	۳۴۸۴
	نتیجه برنامه	-۳/۴۶	۴۷/۵۱	۴۱/۴۶	۳۵۰۳

تجهیزات مورد نیاز برای آزمایش عملی، دوربین و پایه آن، تئودولیت و پایه آن و خط کش می‌باشد.

دوربین مورد استفاده مدل DMK 41BU02 است. پیکسل‌های این دوربین مربعی و به ضلع 4.65×10^{-3} میلی‌متر هستند. پایه دوربین را می‌توان با استفاده از تراز حبابی نصب شده روی این پایه تراز نمود. سپس باید شیء‌ای که سه راستای عمود بر هم دارد را در محل مناسب، روبروی دوربین قرار داد. اما باید بدانیم این سه راستا به چه اندازه دوران یافته‌اند. همچنین فاصله‌ی شیء تا دوربین را باید بطور دقیق اندازه گرفت تا خروجی‌های مورد انتظار از برنامه مشخص باشند.

تئودولیت دوربینی است شامل سه تراز، که می‌توان با استفاده از آن‌ها تئودولیت را به خوبی روی افق تراز کرد. همچنین با انتخاب نقطه‌ی مشخصی می‌تواند فاصله مرکز خودش را تا آن نقطه بدهد. همچنین می‌توان زاویه افقی‌ای را برایش به عنوان زاویه‌ی صفر تنظیم نمود و هر دورانی که از این صفر تنظیم شده پیدا کند، را در دو راستای افقی و عمودی نمایش دهد. همچنین سه راستای عمود بر هم می‌توان روی گوشه‌های این دوربین مشخص نمود. با توجه به این موارد، تئودولیت گزینه‌ی مناسبی برای جسم موردنظرمان می‌باشد.



شکل ۹. هم‌راستا نمودن خط دید لنز و تئودولیت برای محاسبه‌ی فاصله‌ی کانونی.

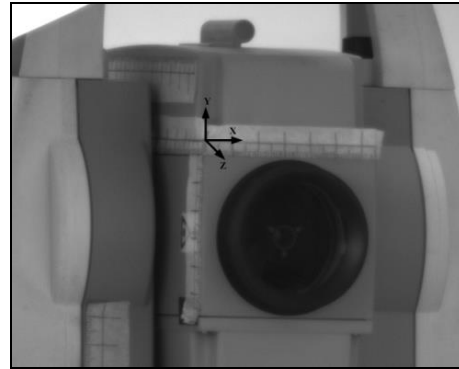
تئودولیت را روی پایه‌ی آن در راستای دوربین قرار می‌دهیم و سپس آن را به دقت تراز می‌کنیم. روی قسمت‌های مختلف تئودولیت و از جمله روی سه راستای عمود بر هم آن، برجسب‌های مدرج با دقت یک میلی-متر چسبانده تا بتوان از روی تصویر فاصله‌ی بین نقاط انتخابی را دانست. تنظیمات لنز دوربین را به گونه‌ای تغییر داده که تصویر واضحی از تئودولیت روی کامپیوتر مشاهده شود.

سپس خط دید لنز دوربین و تئودولیت که به عنوان جسم موردنظر است را هم‌راستا می‌نماییم. سپس با استفاده از گزینه موجود روی تئودولیت مقدار فاصله‌ی مرکز تئودولیت تا مرکز لنز را پیدا کرده و سپس این فاصله را با طول لنز که با خط کش اندازه‌گیری شده، جمع نموده تا فاصله مرکز تئودولیت تا CCD دوربین بدست آید. در این حالت عکسی از

- [2] Daniel F. DeMenthon and Larry S. Davis. "Model-based object pose in 25 lines of code". International Journal of Computer Vision, 15:123–141. 1995.
- [3] Fischer and Bolles. "Random sample consensus: A paradigm for model fitting with Applications to image analysis and automated cartography". Graphics and Image Processing, 24(6):381–395. 1981.
- [4] Haralick. "Analysis and solutions of the three point perspective pose estimation problem". Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition, pages 592–598. 1991.
- [5] Lowe. "Fitting parameterized three-dimensional models to images". IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 13(5):129–142. May 1991.
- [6] Quan and Lan. "Linear n-point camera pose determination". IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 21(7). 1999.
- [7] R. Y. Tsai. "Versatile camera calibration technique for high accuracy 3-d machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses". IEEE Journal of Robotics and Automation, 3:323–344. 1987.
- [8] Roberts, L.G. "Machine Perception of Three-Dimensional Solids". In Optical and Electro optical Information Processing, J. Tippet et al, eds, MIT Press. 1965.
- [9] Sebastian Grembowietz. Technical University at Munchen. "3D Pose Estimation". 2005.
- [10] Yuan. "A general photogrammetric solution for the determining object position and orientation". IEEE Trans. Robotics and Automation, 5(2):129–142. 1989.
- [11] Thomas Petersen. "A Comparison of 2D-3D Pose Estimation Methods". Aalborg University - Institute for Media Technology Computer vision and graphics. Aalborg University. 2008.
- [12] M.L. Liu, K.H. Wong. "Pose estimation using four corresponding points". Pattern Recognition Letters 20 (1999) 69±74. 1999.
- [13] Bujnak, M., Kukeleva, Z., Pajdla, T. "New efficient solution to the absolute pose problem for camera with unknown focal length and radial distortion". In: The Tenth Asian Conference on Computer Vision, Queenstown, New Zealand, pp. 11–24. 2010.
- [14] Abidi, M.A., Chandra, T. "A new efficient and direct solution for pose estimation using quadrangular targets: algorithm and evaluation". IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 17(5), 534–538. 1995.
- [15] Yang Guo, "A Novel Solution to the P4P Problem for an Uncalibrated Camera", Springer Science+Business Media, LLC. 2012.

[۱۶] جعفر حیرانی نویری. جزوه درس ناوبری. دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی. دانشکده برق و کامپیوتر. ۱۳۸۹.

[۱۷] مهدیه حسینی زاده آلاشتی. تعیین حرکت فضایی یک جسم مشخص با فیلم برداری. پایان نامه کارشناسی ارشد. دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی. دانشکده برق و کامپیوتر. ۱۳۹۱.



شکل ۱۰. تنودولیت دوران داده شده و راستاهای مرجع چسبیده به آن.

شرط توقف در برنامه‌ی شبیه‌سازی به دلیل دقیق بودن داده‌ها کمتر شدن خطا از حد مشخصی بود. ولی حال که در انتخاب نقاط خطایی وجود دارد، باید بعد از اجرای کامل برنامه بهترین جواب را انتخاب نمود، که ممکن است خطای این بهترین جواب بیشتر از شرط توقف برنامه باشد. نتیجه‌ی بدست آمده در آزمایش‌های مختلف را در جدول زیر مشاهده می‌کنید که خطای آن دو تا سه درجه برای زوایای دوران و دو تا سه سانتی‌متر برای فاصله‌ی تنودولیت تا دوربین است.

۹- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی جدید برای تعیین موقعیت و وضعیت یک جسم مشخص متعامد با دانستن مدل شیء ارائه شد. در ابتدا برای بهتر پیمودن مسیر شیء را قلمی فرض نموده که فاصله‌ی آن تا دوربین معین است. با نتیجه‌ی بدست آمده از پیچیده‌ترین حالت قرارگیری قلم در مقابل دوربین، ده معادله برای شیء‌ای مکعبی بدست آمد. با شبیه‌سازی به بررسی صحت این روابط پرداختیم. برای جلوگیری از مشکلات عددی چهارگان‌ها را بکار برده و با انتخاب مجموعه‌ای از شرایط اولیه درست و کامل برای تمام زوایای دوران در کمتر از سه ثانیه به موقعیت و وضعیت یک جسم مکعب با داشتن تصویر چهار نقطه‌ی مشخص روی آن رسیدیم.

با معرفی چهارگان‌ها شرایط اولیه را به صورت مجموعه‌ای از شرایط اولیه انتخاب و از بهترین شرط اولیه برای هر حالت ممکن استفاده نمودیم. در مرحله‌ی شبیه‌سازی به دلیل دقیق بودن نقاط انتخابی خطایی وجود نداشت.

در آزمایش‌های عملی که نقاط انتخابی دقیق نبوده و با خطایی بدست می‌آیند با خطای کمتر از سه درجه برای زوایای دوران و کمتر از سه سانتی‌متر برای فاصله‌ی شیء تا دوربین به صحت روابط موجود و شبیه‌سازی پی بردیم.

۱۰- مراجع

- [1] David Eugene Smith. "History of modern mathematics", Mathematical Monographs, (1).

وفقی سازی شعاع کرنل در تخمین موقعیت اجسام متحرک بر اساس الگوریتم بازنمونه برداری فیلتر ذره

عقیل عیری^۱، محمدرضا محزون^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه مخابرات، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، abiriaghil@yahoo.com

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه مخابرات، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، rezamahzoun@yahoo.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۹/۲۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۱۲/۲۵)

چکیده: تعیین مناسب شعاع کرنل یکی از پارامترهای بحرانی ردیابی مبتنی بر چگالی کرنل می باشد، که تاکنون راهکار کامل و بی عیبی برای آن بیان نشده است. در این مقاله از یک روش لبه یابی با الگوریتم ردیابی مبتنی بر کرنل برای وفقی سازی شعاع آن استفاده می شود و از ترکیب آن با الگوریتم بازنمونه برداری فیلتر ذره، به یک الگوریتم ردیابی مقاوم و با دقت دست می یابد. بعد از تخمین چگالی کرنل مناسب، هیستوگرام وزن دار شده مدل هدف در فریم اول بدست می آید و با در نظر گرفتن میزان واریانس یک نویز تصادفی در این مکان، موقعیت ذرات کاندید در مرحله بعد پیشگویی می شوند، سپس هیستوگرام وزن دار شده این ذرات کاندید با همان چگالی کرنل، به عنوان مدل ذرات کاندید با مدل هدف مقایسه می شوند و توسط فاصله باتاچاریا، ذرات کاندید وزن دار می گردند. الگوریتم بازنمونه برداری، موقعیت هدف را در فریم بعدی تخمین می زند. سرانجام شعاع کرنل براساس لبه یابی، بر تغییرات مدل هدف منطبق می شود و مدل هدف نیز در صورت لزوم بطور وفقی بر اساس بهترین مدل ذره شبیه هدف، بروز می گردد.

کلمات کلیدی: بازنمونه برداری، شعاع کرنل، مدل هدف، فیلتر ذره، هیستوگرام وزن دار شده.

Adaptive Kernel Radius in Estimating the Position of Moving Target Tracking based on Resampling Particle Filter Algorithm

Aghil Abiri, Mohammad Reza Mahzoun

Abstract: In this paper, we perform adaptive radius of the kernel by an edge detection method with tracking algorithm based on kernel density and provides a robust tracking algorithm, in combination with the resampling particle filter algorithm. In the first frame, by suitable kernel density estimation, is obtained the weighted histogram of the target model and by adding random noise variance at this place, are predicted the position of candidate particles in the next step. The weighted histogram of this candidate particles are compared with the same density kernel by the target model and are weighted the candidate particles by Bhattacharyya distance. The resampling algorithm, estimates the target position in the next frame. Finally, radius of the kernel is consistent with the target model changes. If needed, the target model is updated according to the best model of particle similar to the target model, adaptively.

Keywords: Resampling, Kernel Radius, Target Model, Particle Filter, Weighted Histogram.

۱- مقدمه

استفاده شده است، به این صورت که ابتدا از یک کرنل Epanechnikov جهت بدست آوردن مدل اولیه هدف، بر اساس هیستوگرام وزندار شده استفاده شده است و سپس جهت کاستن از میزان نویز و خطا، در مواقعی که هدف به علت مانورهای زیاد و دور یا نزدیک شدن های فراوان، تغییر ابعاد می دهد، شعاع کرنل بر اساس یک الگوریتم مبتنی بر روش لبه یابی [۸] در هر فریم بصورت وفقی بروز می شود و سرانجام نیز با تعیین یک آستانه بهینه، هیستوگرام وزندار شده مدل هدف در فریم هایی که نیاز باشد، بروز می گردد. در ادامه در بخش های جداگانه ای الگوریتم فیلتر کالمن پیشرفته و الگوریتم فیلتر ذره در تخمین حالت جسم بررسی شده و تخمین چگالی کرنل و چگونگی وفقی سازی شعاع کرنل و نحوه بروز شدن مدل هدف در بخش های بعدی تشریح می گردند و سرانجام در بخش پایانی نتیجه شبیه سازی ها بررسی می شوند.

۲- فیلتر کالمن پیشرفته

الگوریتم فیلتر کالمن برای تخمین موقعیت اجسام با حرکت های خطی می باشد ولی از آنجا که در بسیاری از کاربردهای عملی موقعیت جسم بصورت غیرخطی تغییر می کند، استفاده از فیلتر کالمن بصورت مستقیم در این مسائل ممکن نیست. در فیلتر کالمن پیشرفته، با استفاده از بسط تیلور مرتبه اول حول بهترین تخمین موجود، مدل های غیرخطی با مدل های خطی تقریب زده می شوند. در این صورت فیلتر کالمن، قابل استفاده بر روی سیستم خطی بدست آمده، خواهد بود. لذا در این حالت فیلتر کالمن پیشرفته فقط تقریبی جهت حل معادلات بیز است و تخمین بهینه با معیار مربعات خطا نخواهد بود [۱۵]. حال اگر X_{t+1} حالت سیستم در لحظه $t+1$ باشد، مدل حالت سیستم را بصورت:

$$x_{t+1} = f(x_t) + g(x_t)w_t \quad (1)$$

در نظر گرفته و مدل مشاهده را بصورت:

$$z_t = h(x_t) + e_t \quad (2)$$

می نویسیم که در آن $f(\cdot)$ و $g(\cdot)$ و $h(\cdot)$ توابع انتقال هستند، w_t و V_t نیز نویز گوسی با میانگین صفر و کواریانس به ترتیب R_t و Q_t می باشند. اگر $\hat{x}_{t/t}$ تخمین حالت جسم در لحظه t باشد با بسط تیلور مرتبه اول حول این تخمین، با تقریب می توان نوشت [۱۵]:

$$f(x_t) \approx f(\hat{x}_{t/t}) + F_t(x_t - \hat{x}_{t/t}) \quad (3)$$

$$F_t^T = \nabla_x f^T(x) /_{x=\hat{x}_{t/t}}$$

$$h(x_t) \approx h(\hat{x}_{t/t}) + H_t(x_t - \hat{x}_{t/t}) \quad (4)$$

$$H_t^T = \nabla_x h^T(x) /_{x=\hat{x}_{t/t-1}}$$

$$g(x_t) \approx g(\hat{x}_{t/t}) = G_t \quad (5)$$

امروزه تلاشهای وسیعی در زمینه تشخیص و ردیابی اجسام متحرک از طریق پردازش تصویر صورت پذیرفته است و الگوریتم های متنوعی نیز در این زمینه طراحی و روی سخت افزارهایی مانند DSP، FPGA پیاده سازی شده اند و هر کدام در شرایط مختلف کاربری نقاط ضعف و قوت خود را دارا می باشند، که با توجه به نوع عملیات و میزان اهمیت دقت و سرعت و ... الگوریتم مناسب انتخاب می گردد. موقعیت جسم، بر اساس یافتن جایگاه آن در تصویر بوده که مکان و سرعت جسم را بررسی می کند و ردیابی نیز بر اساس تعیین موقعیت جسم در فریم های متوالی تصویر انجام می پذیرد. برای یافتن بلادرنگ موقعیت اجسام متحرک مانوری و جهت کاهش تاثیر نویز، از روش های بازگشتی تخمین نیز استفاده می گردد. تکنیک های تخمین اغلب بر اساس الگوی فیشر یا الگوی بیز بیان می گردند [۱۵]. در الگوی بیز، پارامتر مجهول تغییر تصادفی دارد و حال آن که در الگوی فیشر پارامتر مجهول، ثابت می باشد. دیدگاه تئوری بیز در تعیین موقعیت و ردیابی اجسام متحرک، بر اساس تخمین از یک معادله بازگشتی می باشد و مطابق آن تخمین برای سیستم های خطی با نویز گوسی، بر پایه الگوریتم فیلتر کالمن^۱ بیان می گردد و برای سیستمهای غیرخطی با نویز گوسی، سیستم قبل از بکارگیری فیلتر کالمن باید با بسط تیلور مرتبه اول حول بهترین تخمین موجود، به صورت خطی تبدیل شود که این خطی سازی نزدیک حالت تخمین زده، انجام می گیرد که تحت الگوریتم فیلتر کالمن پیشرفته^۲ (EKF) بیان می گردد [۱۵]، حال به جای خطی کردن سیستم جهت استفاده از فیلتر کالمن، مساله تخمین را می توان بصورت مستقیم انجام داد و تابع توزیع چگالی احتمال جسم را به صورت عددی و شمارشی بدست آورد، که می تواند برای مدل های قطعی و مدل های تصادفی انجام بگیرد و امروزه با رشد روش ها و شیوه های آماری، مساله تخمین یک پارامتر یا حالت یک سیستم غیرخطی تصادفی در کنار مشاهدات و اندازه گیری های نویزی، توسط تکنیک تخمین مونت کارلو^۳ برای حل مسائل پیچیده آماری انجام می گیرد که در قالب الگوریتم فیلتر ذره^۴ (PF) بیان می گردد [۳]. در این مقاله ابتدا ضمن مقایسه دو الگوریتم تخمینگر EKF و PF در ردیابی اجسام متحرک مانوری با حرکت های غیرخطی و بررسی میزان خطاهای هر یک در ردیابی، کارایی دو الگوریتم در ردیابی اجسام متحرک با مانورهای زیاد تصادفی سنجیده شده است، آنگاه روشی برای ردیابی اجسام متحرک با مانورهای تصادفی بر اساس الگوریتم باز نمونه برداری فیلتر ذره ارائه شده است، ابتکاری که در این مقاله برای افزایش میزان دقت صورت پذیرفته است و متناسب با آن زمان پردازش نیز در بیشتر فریم ها کاسته شده است، این است که از یک الگوریتم ترکیبی

¹ Kalman Filter (KF)

² Extended Kalman Filter (EKF)

³ Monte Carlo

⁴ Particle Filter (PF)

احتمال، برای تخمین پارامترهای یک توزیع دلخواه استفاده می شود. فیلتر ذره راه حل کاملی برای تخمین بهینه حالت جسم در شرایطی که مدل سیستم غیر خطی با توزیع نوین غیر گوسی است، می باشد. مدل انتقال یا حرکت سیستم را با زبان احتمالاتی بصورت $p(x_t/x_{t-1})$ و مدل مشاهده و یا اندازه گیری سیستم با $p(x_t/Z_{t-1})$ بیان می شود، x_t نماینده بردار حالت سیستم در حالت کنونی و Z_t نماینده مشاهده در سیستم است. با در نظر گرفتن معادلات بازگشتی بیز که از دو مرحله زیر تشکیل شده اند:

$$p(x_t/Z_{t-1}) = \int_{R^n} p(x_t/x_{t-1}) p(x_{t-1}/Z_{t-1}) dx_{t-1} \quad (10)$$

مرحله بروز رسانی^۲:

$$p(x_t/Z_t) = \frac{p(z_t/x_t) p(x_t/Z_{t-1})}{p(z_t/Z_{t-1})} \quad (11)$$

$$p(z_t/Z_{t-1}) = \int_{R^n} p(z_t/x_t) p(x_t/Z_{t-1}) dx$$

عمل انتگرال گیری بر روی متغیرهای فضای حالت فرایند صورت می گیرد، صرف نظر از اینکه چنین انتگرالی می تواند در هر حالت حل بسته داشته باشد، در صورتی که ابعاد فضای حالت بالا باشد هزینه محاسباتی بالایی خواهد داشت. روش شبیه سازی مونت کارلو به جای محاسبه انتگرال در تمامی نقاط، مقدار آن را با نمونه برداری در نقاطی که بیشترین سهم را در محاسبه انتگرال دارند، انجام می دهد. مبنای کار به این صورت است که برای محاسبه انتگرال

$$I = \int g(x) dx \quad (12)$$

آنها به صورت حاصل ضرب عبارت $g(x) = f(x) \cdot p(x)$ تبدیل کرده که در آن $p(x)$ نشان دهنده یک تابع احتمال است که شرایط $\int p(x) dx = 1$ and $p(x) \geq 0$ را برآورده می کند، لذا با این شرایط I امید ریاضی تابع دلخواه $f(x)$ می باشد.

حال اگر از مدل حالت سیستم تا لحظه k که با تابع احتمال $p(X_k/Z_k)$ بیان می شود، به تعداد N ذره ($N \gg 1$) مستقل و هم

توزیع^۴ مانند $(x_{0:k}^i)$ نمونه برداری شود:

$$(i=1,2,\dots,N) x_{0:k}^i = X_k^i \sim p(X_k/Z_k) \quad (13)$$

تخمینی از این توزیع بصورت زیر تعریف می شود:

$$P_N(X_k/Z_k) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(X_k - X_k^i) \quad (14)$$

که در آن $\delta(X_k - X_k^i)$ نشان دهنده تابع دلتای دیراک در نقطه $(X_k = X_k^i)$ می باشد. چنین تخمینی را برای توزیع فیلتر سازی نیز استفاده می کنند. اگر امید ریاضی تابع دلخواه $f(\cdot)$ را نسبت به $p(X_k/Z_k)$ با I نشان دهند:

از ترکیب این معادلات و جایگذاری در معادلات (۱) و (۲)، با یک تقریب مناسب خواهیم داشت:

$$x_{t+1} = F_t x_t + (f(\hat{x}_{t/t}) - F_t \hat{x}_{t/t}) + G_t w_t \quad (6)$$

$$z_t - (h(\hat{x}_{t/t-1}) - H_t \hat{x}_{t/t-1}) = H_t x_t + e_t \quad (7)$$

که این یک مدل خطی در فضای حالت x_t می باشد. حال با اعمال فیلتر کالمن بر روی آن داریم [۱۵]:

$$\hat{x}_{t+1/t} = F_t \hat{x}_{t/t} + (f(\hat{x}_{t/t}) - F_t \hat{x}_{t/t}) \quad (8)$$

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t (z_t - h(\hat{x}_{t/t-1})) \quad (9)$$

که $P_{t/t}$ کواریانس بازگشتی و K_t بهره فیلتر کالمن می باشد.

الگوریتم کلی فیلتر کالمن پیشرفته در جدول ۱ بیان گردیده است.

خطای خطی سازی در این الگوریتم ممکن است در بسیاری موارد قابل توجه باشد. این مورد در مواقعی که توابع $f(\cdot)$ و $h(\cdot)$ بسیار غیر خطی باشند، یا خطای نقاطی که توابع در آن ها خطی می شوند زیاد باشد، موجب ناسازگاری یا واگرایی فیلتر می گردد. علاوه بر آن، به دلیل وابستگی کواریانس ها به مقدار تخمین (به دلیل خطی سازی ها)، امکان محاسبه کواریانس ها قبل از رسیدن مشاهدات در فیلتر کالمن پیشرفته وجود ندارد. فرض گوسی بودن نوین نیز از محدودیت های ذاتی فیلتر کالمن پیشرفته می باشد.

جدول ۱: الگوریتم فیلتر کالمن پیشرفته (EKF)

الف) بروز کردن زمان
$\hat{x}_{t+1/t} = f(\hat{x}_{t/t})$ $P_{t+1/t} = F_t P_t F_t^T + G_t Q_t G_t^T$
ب) بروز کردن محاسبات
$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t (z_t - (h(\hat{x}_{t/t-1})))$ $P_{t/t} = P_{t/t-1} - K_t H_t P_{t/t-1}$ که در آن $K_t = P_{t/t-1} H_t^T (H_t P_{t/t-1} H_t^T + R_t)^{-1}$ $H_t^T = \nabla_x h^T(x)_{x=\hat{x}_{t/t-1}}$ $F_t^T = \nabla_x f^T(x)_{x=\hat{x}_{t/t}}$ $G_t^T = \nabla_x g^T(x)_{x=\hat{x}_{t/t}}$

۳- فیلتر ذره

فیلتر ذره یک روش جدید برای بدست آوردن تابع توزیع احتمال پسین بر پایه تئوری بیز می باشد. الگوریتم فیلتر ذره بر مبنای روش های مونت کارلوی زنجیره ای^۱ بوده که در آن از نمایش ذره ای چگالی

² Prediction

³ Update

⁴ Independent and Identically Distributed (i.i.d.)

¹ Sequential Monte Carlo (SMC)

$$w(x^i) = \frac{\tilde{w}(x^i)}{\sum_{j=1}^N \tilde{w}(x^j)} \quad (21)$$

در نمونه برداری با اهمیت در هر گام می بایستی نمونه برداری از توزیع $q(x)$ را به همراه محاسبه وزن ها انجام داد که محاسبات را در هر گام بالا می برد. روش نمونه برداری با اهمیت دنباله ای به حل این مشکل می پردازد.

۳-۲- نمونه برداری با اهمیت دنباله ای (SIS)^۳

اگر X_k برداری شامل تمام حالت های هدف تا لحظه k باشد، یعنی $X_k = \{x_i, i=1,2,\dots,k\}$ و توزیع پسین توام در لحظه k بصورت $p(X_k|Z_k)$ و توزیع کناری^۴ آن با $p(x_k|Z_k)$ نشان داده شوند، وزن های با اهمیت را می توان بصورت بازگشتی نیز بدست آورد، ایده اصلی در این روش که به نمونه برداری با اهمیت دنباله ای (SIS) مشهور است، استفاده دوباره از نمونه های تولید شده در گام های قبل برای نمونه برداری از تابع توزیع پسین در گام جدید است و نشان داده می شود که این فرایند موجب ثابت ماندن هزینه محاسباتی الگوریتم در هر مرحله می شود، به این منظور باید بتوان تابع توزیع پیشنهادی در لحظه k را بصورت زیر تجزیه کرد:

$$q(X_k|Z_k) = q(x_k|X_{k-1}, Z_k) q(X_{k-1}|Z_{k-1}) \quad (22)$$

لذا برای نمونه برداری از توزیع پیشنهادی در گام k فقط لازم است که از توزیع $q(x_k|X_{k-1}, Z_k)$ برای X_k^i نمونه برداری شود. در این حالت از کنار هم گذاشتن نمونه های $\{X_{k-1}^i\}$ تولیدی از توزیع پیشنهادی $q(X_{k-1}|Z_{k-1})$ در مراحل قبل و نمونه X_k^i تولیدی از $q(x_k|X_{k-1}, Z_k)$ به نمونه ای از توزیع $q(X_k|Z_k)$ دست خواهیم یافت. اگر نمایش موقعیت ذرات در لحظه k بصورت $\{X_k^i, i=1,2,\dots,N\}$ و وزن مربوط به ذرات در لحظه k بصورت $\{w_k^i, i=1,2,\dots,N\}$ باشد و وزن ها در هر لحظه زمانی بصورت $\sum_{i=1}^N w_k^i = 1$ نرمالیزه باشند. در این صورت توزیع پسین توام در لحظه k بصورت زیر تقریب می زند:

$$p(X_k|Z_k) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(X_k - X_k^i) \quad (23)$$

که در آن w_k^i وزن های با اهمیت ذرات بوده و بصورت:

$$w_k^i = \frac{p(X_k^i|Z_k)}{q(X_k^i|Z_k)} \quad (24)$$

که از یک توزیع پیشنهادی مانند $q(X_k|Z_k)$ نمونه برداری شده است. با استفاده از قاعده بیز و تعریف احتمال شرطی و خاصیت مارکف بودن در مدل فضای حالت، وزن ها را می توان بصورت بازگشتی بدست آورد. لذا داریم [۳]:

$$w_k^i = w_{k-1}^i \frac{p(z_k/X_k^i) \cdot p(X_k^i/X_{k-1}^i)}{q(X_k^i|X_{k-1}^i, Z_k)} \quad (25)$$

$$I = \int f(X_k) \cdot p(X_k|Z_k) dX_k \quad (15)$$

$$\approx \int f(X_k) \cdot P_N(X_k|Z_k) dX_k$$

آنگاه تخمین مونته کارلوی انتگرال بصورت حاصل جمع مقادیر تابع $f(\cdot)$ به ازای نمونه های بدست آمده، بصورت زیر خواهد بود:

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_k^i) \quad (16)$$

اگر نمونه های X_k^i مستقل باشند آنگاه I_N یک تخمین نااریب می گردد و مطابق با قانون اعداد بزرگ با I قابل تقریب خواهد بود و در صورتی که N عدد بسیار بزرگی باشد تخمین بخوبی به سمت مقدار واقعی همگرا خواهد شد. همچنین نشان داده می شود که سرعت همگرایی تخمین، مستقل از واریانس و ابعاد فضای ویژگی بوده و فقط به تعداد ذرات N وابسته است، چنین خصوصیتی مهمترین مزیت انتگرال گیری مونته کارلو نسبت به روش های انتگرال گیری عددی می باشد.

۳-۱- نمونه برداری با اهمیت^۱

در اغلب موارد، نمونه برداری بصورت مستقیم از توزیع چگالی $p(x)$ در هر گام به دلایلی مانند پیچیدگی، ابعاد بالا، در دسترس نبودن آن بصورت دقیق، چندمتغیره بودن و... ممکن نیست، به همین دلیل می توان به جای آن از توزیع دیگری مثل $q(x)$ که بسیار شبیه $p(x)$ است، نمونه برداری انجام داد و بعد با وزندهی صحیح به همان تخمین مونته کارلو نزدیک شد. $q(x)$ را توزیع پیشنهادی^۲ می نامند و اگر $p(x) > 0$ آنگاه $q(x) > 0$ برای $x \in R^{n_x}$ شرط لازم جهت این کار می باشد، که به آن معناست که $q(x)$ و $p(x)$ یکسانی دارند، لذا انتگرال بصورت زیر نوشته می شود:

$$I = \int f(x) \cdot p(x) dx = \int f(x) \cdot \frac{p(x)}{q(x)} \cdot q(x) dx$$

لذا تخمین مونته کارلوی آن برای $N \gg 1$ نمونه مستقل مطابق با توزیع $q(x)$ بصورت زیر است:

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^i) \cdot \tilde{w}(x^i) \quad (18)$$

$$\tilde{w}(x^i) = \frac{p(x^i)}{q(x^i)} \quad (19)$$

عبارت $\tilde{w}(x^i)$ وزن های با اهمیت نامیده می شوند و از آنجا که فاکتور نرمالیزاسیون مربوط به $p(x)$ را نداریم، لذا وزن های با اهمیت بدست آمده را نرمالیزه کرده و داریم [۳]:

$$I_N = \sum_{i=1}^N f(x^i) \cdot w(x^i) \quad (20)$$

که در آن $w(x^i)$ نشان دهنده وزن نرمالیزه شده نمونه i ام است که بصورت زیر محاسبه می گردد:

³ Sequential Importance Sampling

⁴ Distribution Marginal

¹ Importance Sampling

² Proposal Distribution

افزایش می یابد و تنها چند ذره وزن زیادی دارند، یعنی پس از گذشت زمان اندکی، بیشتر نمونه ها وزن نرمالیزه شده نزدیک به صفر خواهند داشت و تنها یک نمونه دارای وزن بزرگی می باشد که از این پدیده با نام انحطاط^۱ ذرات یاد می شود. لذا تخمین مناسبی از توزیع پسین توام را ارائه نمی کند. همچنین در این حالت اکثر توان محاسباتی ما به نمونه برداری و محاسبه وزن برای نمونه هایی اختصاص یافته که به دلیل وزن بسیار کم، تاثیر ناچیزی بر روی تخمین نهایی دارند. بدیهی است که چنین حالتی به معنی تلف شدن قسمت بزرگی از توان محاسباتی موجود خواهد بود. برای حل مشکل انحطاط، انتخاب توزیع پیشنهادی در گام k باید بصورتی باشد که واریانس شرطی وزن ها را کمینه کند [۱۱]. به این توزیع، توزیع پیشنهادی بهینه^۲ گفته می شود که از اطلاعات بدست آمده از مشاهده آخر نیز در نمونه برداری استفاده می کند، این توزیع به فرم زیر می باشد:

$$q(x_k^i | X_{k-1}^i, Z_k) = p(x_k^i / z_k, x_{k-1}^i) \quad (30)$$

و طبق معادله (۲۵) وزن ها برای این توزیع بصورت زیر در می آیند:

$$w_k^i = w_{k-1}^i \cdot p(z_k / x_{k-1}^i) \quad (31)$$

لذا وزن ها به نمونه های تولید شده در گام فعلی (x_k^i) وابسته نمی باشند، لذا امکان موازی سازی سازی نمونه برداری و محاسبه وزن ها در هر گام را میسر می کند [۱۴]. در شبیه سازی این مقاله از این نوع توزیع پیشنهادی استفاده شده است.

۳-۴- باز نمونه برداری دنباله ای (SIR)^۳

باز نمونه برداری، روشی برای حل مشکل انحطاط از طریق صفر کردن واریانس وزن هاست، این روش نقشی اساسی در کارایی روش های مونت کارلوی دنباله ای بازی می کند. در مرحله باز نمونه برداری از میان نمونه های وزندهی شده در انتهای یک گام SIS ، N بار نمونه برداری انجام می شود. شانس انتخاب شدن هر ذره به وزن آن ذره وابسته است. در نتیجه، در این گام نمونه هایی با وزن بیشتر چندین مرتبه کپی شده و نمونه هایی با وزن کمتر حذف می شوند. در انتهای این گام وزن همه نمونه های انتخاب شده برابر با N^{-1} خواهد بود. شکل ۲ نمای گرافیکی مرحله باز نمونه برداری را که منجر به حذف نمونه های با وزن کم و تمرکز روی نمونه های با وزن زیاد است را برای ۱۰ ذره نشان می دهد. به این روش که در آن از نمونه برداری با اهمیت دنباله ای، باز نمونه برداری می کند، باز نمونه برداری دنباله ای (SIR) گویند.

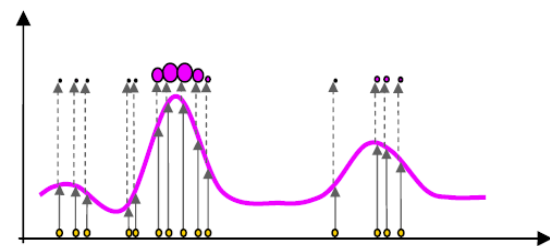
اگر چه SIR گامی حیاتی برای مقابله با انحطاط در فیلترهای ذره ای می باشد، ولی مشکلاتی را نیز در پی خواهد داشت [۱۲]:

به جمله ای که در عبارت (۲۵) در هر گام به وزن گام قبل ضرب می گردد، وزن نموی گویند. سپس این وزن ها مطابق قبل نرمالیزه می شوند. برای توزیع پسین کناری $p(x_k / Z_k)$ می توان نوشت:

$$p(x_k / Z_k) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(x_k - x_k^i) \quad (26)$$

در این روش تعداد ذرات N در فضای حالت به گونه ای انتخاب می شوند که تمامی فضای حالت را پوشش دهند، هر چه تعداد ذرات بیشتر باشد (N به بینهایت میل کند)، تخمین معادله (۲۶) دقیق تر است [۳].

شکل ۱ روش نمونه برداری با اهمیت دنباله ای را بصورت شماتیک نشان می دهد. نقاط دایره ای، توزیع ذرات و قطر آنها وزن ذرات را نشان می دهد. با فرض اینکه همه ذرات در لحظه k وزن یکسانی داشته باشند، توزیع احتمال پسین در لحظه k رسم می شود، به این ترتیب وزن ذرات در لحظه $k+1$ با استفاده از توزیع احتمال پسین در لحظه k (توزیع پیشین در لحظه $k+1$) بروز می گردند. لذا وزن ذرات، یعنی قطر نقاط دایره ای، در مکان هایی که مقدار تابع توزیع احتمال کوچکتر است، کمتر می باشند. لذا با استخراج ذرات و وزن مربوط به آنها، توزیع پسین بصورت معادله (۲۳) بیان می شود. ساختار توضیح داده شده در این قسمت که توزیع پسین توام در هر گام، با استفاده از نمونه های وزندهی شده توصیف می گردند، اساس کاری فیلترهای ذره ای محسوب می شوند.



شکل ۱: نمایش روش SIS از تابع چگالی احتمال پسین

۳-۳- توزیع پیشنهادی

موضوع اساسی در فیلترهای ذره، انتخاب توزیع پیشنهادی مناسب است، ساده ترین انتخاب برای این توزیع، توزیع پیشین می باشد [۱۳]، لذا با فرض مارکف بودن سیستم، در گام k لازم است که از تابع چگالی احتمال انتقال نمونه برداری کنیم، یعنی:

$$q(x_k^i | X_{k-1}^i, Z_k) = p(x_k^i / x_{k-1}^i) \quad (27)$$

که در حالت کلی معادل نمونه برداری از تابع چگالی احتمال نويز خواهد بود. یعنی اگر مدل نويز بصورت جمع شونده گوسی با میانگین صفر باشد، تابع چگالی احتمال انتقال بصورت زیر مدل می شود:

$$p(x_k^i / x_{k-1}^i) = N(x_k; f_{k-1}(x_{k-1}^i), Q_{k-1}) \quad (28)$$

و معادله (۲۵) برای وزن ها نیز به حالت زیر تغییر می کند:

$$w_k^i = w_{k-1}^i \cdot p(z_k / x_k^i) \quad (29)$$

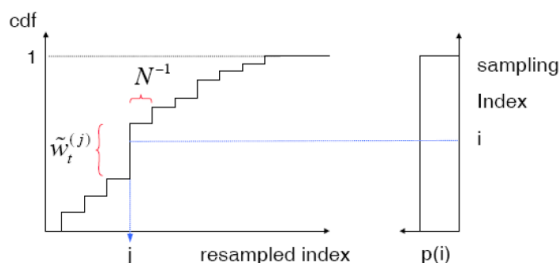
مشکل اصلی در این روش به افزایش واریانس وزن ها مربوط می شود [۱۰]، چرا که واریانس وزن ها برای این توزیع پیشنهادی، در هر گام

¹ Degeneracy

² Optimal Proposal Distribution

³ Sequential Importance Resampling

حضور داشته باشد بدست می آید، لذا همان طور که مشاهده می شود، ذره ای که وزن بیشتر داشته باشد، احتمال انتخاب شدن بیشتری را دارد، لذا موقعیت و وزن هر ذره به میزان چگالی در آن نقطه از فضای حالت وابسته است و این روش، موقعیت هر ذره و وزن متناظرش را برای هر مشاهده بصورت بازگشتی بروز می کند و در پایان این مرحله مجموعه جدیدی از ذرات با موقعیت ها و وزن های جدید بدست می آیند [۱].



شکل ۳: نحوه جایگزینی وزن ها در مرحله SIR

الگوریتم کلی فیلتر ذره با استفاده از الگوریتم باز نمونه برداری مطابق با جدول (۲) بیان می گردد [۳].

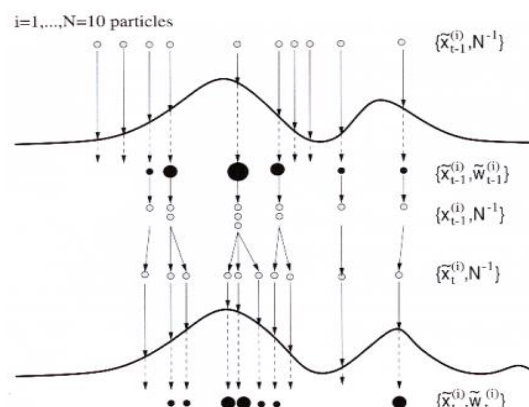
جدول ۲: الگوریتم فیلتر ذره با روش باز نمونه برداری

ورودی: نمونه های X_{k-1}^i با وزنهای w_{k-1}^i در گام $k-1$
خروجی: نمونه های X_k^i با وزنهای w_k^i در گام k
۱- برای تعداد N ذرات، از توزیع پیشنهادی در گام k نمونه برداری کنید: $x_k^i \sim q(x_k^i X_{k-1}^i, Z_k)$
۲- برای تعداد N ذرات، با توجه به نوع تابع توزیع پیشنهادی وزن ها را محاسبه کنید:
۳- برای تعداد N ذرات، وزن ها را نرمالیزه کنید: $w_k^i = w_{k-1}^i \frac{p(z_k/x_k^i) \cdot p(x_k^i/x_{k-1}^i)}{q(x_k^i X_{k-1}^i, Z_k)}$
۴- تعداد نمونه های موثر را بدست آورید: $w(x_k^i) = \frac{w_k^i}{\sum_{j=1}^N w_k^j}$
۵- آستانه ورود به حلقه باز نمونه برداری را تشکیل دهید (که N_{th} به طور معمول $N/2$ یا $3/N$ می باشد): $N_{eff} < N_{th}$
۶- یک مجموعه جدید از ذرات $\{X_k^{i*}, i=1,2,\dots,N\}$ با موقعیت ها و وزن های جدید مطابق با نمای گرافیکی شکل (۳) تشکیل دهید، به طوری که احتمال انتخاب اندیس i^* بصورت زیر باشد: $\text{prob}(X_k^{i*} = X_k^i) = w(x_k^i)$
۷- برای ذرات N ، وزن ها را $w(x_k^i) = N^{-1}$ قرار دهید.

تخمین موقعیت نهایی و عدم قطعیت مکانی (واریانس) در استفاده از الگوریتم فیلتر ذره می تواند بصورت زیر محاسبه گردد:

۱. SIR خود تخمینی از تخمین وزندار SIS است، در نتیجه SIR به ناچار خطایی را در تخمین آن گام ایجاد خواهد کرد.

۲. SIR باعث کپی شدن ذرات با وزن های بیشتر و حذف نمونه های با وزن کم می شود. این موضوع باعث می شود که نمونه ها گذشته یکسانی پیدا کنند و در عمل ممکن است به حالتی رسید که همگی ذرات موجود در گام k ، نمونه هایی یکسان برای تعیین موقعیت در آن گام داشته باشند، یعنی موقعیت تنها با یک نمونه تخمین زده شده است. به این پدیده فقر نمونه^۱ گفته می شود.



شکل ۲: نمای گرافیکی باز نمونه برداری N ذره [۳]

لذا با توجه به این موارد و اینکه واریانس وزن ها برای توزیع پیشنهادی در هر گام باز هم ممکن است افزایش یابد، باید تا جایی که امکان دارد در SIR با احتیاط رفتار نمود. لذا در این مقاله معیاری برای سنجش میزان انحطاط و جلوگیری از واگرایی بیان شده است که به عنوان تعداد نمونه های موثر^۲ معرفی می گردد. این معیار، به وضعیت نمونه ها در هر گام، عددی مثبت و کوچکتر از N_{th} نسبت می دهد (به طور معمول $N/2$ یا $3/N$) که می توان از آن به عنوان تعداد نمونه هایی که بصورت موثر توزیع هدف را تخمین می زنند، تعبیر کرد. تعداد نمونه های موثر را با N_{eff} نشان داده و بصورت:

$$N_{eff} \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_k^i)^2} \quad (32)$$

می باشد. اگر تعداد نمونه ها از مقدار آستانه از پیش تعیین شده ای کمتر باشد، یعنی $N_{eff} < N_{th}$ باز نمونه برداری انجام می پذیرد. لذا $1 \ll N_{eff} \ll N$ می باشد که حد بالای آن برای موقعی است که ذرات دارای وزن های یکسانی باشند و حد پایین آن برای مواقعی است که جمع احتمال ذرات در گام k ، برابر یک باشد.

شکل ۳ نحوه جایگزینی وزن ها در مرحله SIR را نشان می دهد، که در آن ابتدا عددی بین صفر و یک بصورت اتفاقی و با توزیع یکنواخت تولید شده و با تصویر کردن آن بر روی تابع سمت چپ که تابع تجمع وزن های نرمالیزه است، اندیس ذره ای که باید در جمعیت گام بعدی

¹ Sample Impoverishment
² Effective Sample Size

محدب و نزولی اکید، وزن های کوچکتر را به پیکسل های دورتر از مرکز نسبت می دهد، لذا استفاده از این وزن ها باعث مقاومت بیشتر چگالی تخمین می شود، چرا که پیکسل های دور از مرکز به خاطر پنهان شدگی های جزئی، شبه هدف ها و تداخل با زمینه، کمترین اعتبار را دارند. هیستوگرام مدل هدف با اعمال چگالی کرنل، وزندار شده و لذا به آن هیستوگرام وزندار شده مدل هدف گفته می شود و بصورت:

$$q^{(u)} = f \sum_{j=1}^I g(x_j) \delta[b(x_j - u)] \quad (39)$$

بیان می شوند که I تعداد پیکسل ها در محدوده مورد نظر، x_j موقعیت پیکسل ها در آن محدوده و f نیز فاکتوری جهت تضمین برقراری معادله (۳۸) می باشد [۲].

۴-۲- مدل ذرات کاندید هدف

در فریم بعدی، از آنجا که مطابق با الگوریتم فیلتر ذره، موقعیت N ذره پیشگویی می گردد و هر کدام از این ذرات بصورت تصادفی در محدوده ای اطراف مرکز جرم فریم قبلی هستند و هر کدام از آنها می توانند کاندیدی برای موقعیت جدید هدف باشند، لذا هیستوگرام وزندار شده همه این ذرات با پنجره ای به ابعاد مدل هدف حول هر ذره همانند مدل هدف، بدست می آیند. لذا اگر کاندید هدف در موقعیت γ تعریف شود و تابع چگالی احتمال آن با $P(\gamma)$ نمایش داده شود، برای هر ذره می توان نوشت:

$$p(\gamma) = \{p_u(\gamma)\}_{u=1,2,\dots,m} \text{ And } \sum_{u=1}^m p_u(\gamma) \quad (40)$$

و با اعمال کرنلی شبیه مدل هدف، هیستوگرام وزندار شده مدل ذرات کاندید، برای هر ذره بصورت:

و با اعمال کرنلی شبیه مدل هدف، هیستوگرام وزندار شده مدل ذرات کاندید، برای هر ذره بصورت:

$$p_y^{(u)} = f \sum_{j=1}^I g\left(\frac{y-x_j}{a}\right) \delta[b(x_j - u)] \quad (41)$$

خواهد بود که I تعداد پیکسل ها در محدوده مورد نظر، x_j موقعیت پیکسل ها در آن محدوده، a فاکتور نرمال سازی و f نیز فاکتوری جهت تضمین برقراری معادله (۴۰) می باشد [۲].

۴-۳- ضریب باتاچاریا^۱

این ضریب میزان مشابهت دو توزیع احتمال گسسته را بیان می کند، هرچه دو توزیع شباهت بیشتری با یکدیگر داشته باشند، مقدار عددی آن به یک نزدیک می گردد و هر چه شباهت کمتر باشد، این ضریب به صفر میل پیدا می کند. تابع $p[p(y), q]$ را به عنوان تابع مشابهت میان q و p تعریف می کنیم که نقش احتمال را بازی می کند و بیشینه آن در ناحیه کاندید هدف، حضور هدف را در آن فریم با توجه به مشابهت با q نشان می دهد و بصورت:

(۳۳)

$$x_{k/k}^{MMS} = E(x_k/z_k) = \int x_k p(x_k/z_k) dx_k \approx \sum_{i=1}^N w_k^i x_k^i$$

$$p_{k/k} \approx \sum_{i=1}^N w_k^i (x_k^i - x_{k/k}^{MMS})(x_k^i - x_{k/k}^{MMS})^T \quad (34)$$

۴- تخمین چگالی کرنل

تخمین چگالی یک مفهوم اساسی در مباحث آمار است و بطور وسیعی در الگوریتم های تشخیص و ردیابی مورد استفاده قرار می گیرد. طبق تعریف، تخمین چگالی از روی نمونه های مورد مشاهده تخمین زده می شود. از آنجا که چگالی تخمین زده شده به ساختار نمونه ها وابسته است [۶]، با هر تابع چگالی اختیاری تحت شرایطی خاص، قابل ارائه است. یکی از عمومی ترین روش های تخمین چگالی غیر پارامتریک، روش تخمین چگالی کرنل است [۷]. برای یک متغیر تصادفی، تابع کرنل که در شرط زیر صدق می کند:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1 \quad (35)$$

برای هر نمونه بکار می رود و تخمین چگالی کرنل بصورت زیر تعریف می گردد:

$$f(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n g\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (36)$$

که در آن h پهنای پنجره کرنل، پارامتر نرم کننده یا پهنای باند نامیده می شود و k نیز ثابت بهنجارش می باشد. توابع کرنل مختلفی با خواص متفاوت در مقالات بیان شده است. این توابع مقارن و تک مد هستند و در نقاط دور از مرکز به سرعت به سمت صفر میل می کنند. ما در این مقاله از تابع کرنل Epanechnikov بصورت [۴]:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & x < 1 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases} \quad (37)$$

استفاده کرده ایم. این کرنل نسبت به سایر توابع کرنل دیگر، میزان خطای ما را در محاسبه هیستوگرام مدل هدف و ردیابی آن در فریم های بعدی کاهش می دهد [۶].

۴-۱- مدل هدف

برای مشخص کردن مدل هدف، ابتدا یک فضای ویژگی انتخاب می شود، مدل مرجع هدف توسط تابع چگالی احتمال آن در فضای ویژگی با q نشان داده می شود، مدل هدف می تواند هیستوگرام سطوح خاکستری باشد. اگر تعداد ویژگی ها را با $u = 1, 2, \dots, m$ نشان دهیم، داریم [۴]:

$$q = \{q_u\}_{u=1,2,\dots,m} \text{ And } \sum_{u=1}^m q_u = 1 \quad (38)$$

حال که از هیستوگرام به عنوان ویژگی هدف استفاده شده است، جهت اعمال اعتبار بیشتر به نقاط حول مرکز جرم، از یک کرنل همگن برای انجام ماسک در فضای مکان استفاده می کنند. این کرنل با نمایه

¹ Bhattacharyya

h و w ارتفاع و پهنای مستطیل احاطه کننده هدف در قاب قبلی است. موقعیت اولیه مرزها x_R و x_L و y_T و y_B در فریم ابتدایی توسط کاربر تعیین می گردد و موقعیت نهایی مرزها در فریم جاری توسط معادله های (۴۵) تا (۴۹) تعیین می شوند و در آن $\lambda = 0.1$ می باشد [۹].

$$x_L = \operatorname{argmax} C_L \Theta W_t(x, y) \quad (45)$$

$$|x - x_L| \leq \lambda w, y = y_c$$

$$x_R = \operatorname{argmax} C_R \Theta W_t(x, y) \quad (46)$$

$$|x - x_R| \leq \lambda w, y = y_c$$

$$y_T = \operatorname{argmax} C_T \Theta W_t(x, y) \quad (47)$$

$$|y - y_T| \leq \lambda h, x = x_c$$

$$y_B = \operatorname{argmax} C_B \Theta W_t(x, y) \quad (48)$$

$$|y - y_B| \leq \lambda h, x = x_c$$

$$(49)$$

$$C_L \Theta W_t(x, y) = \sum_{i=-w'/2}^{+w'/2} \sum_{j=-h'/2}^{+h'/2} C_L(i, j) \cdot W_t(x + i, y + j)$$

که $I \in \{L, R, T, B\}$ و h' و w' نیز ارتفاع و پهنای الگوی همبستگی می باشد. لذا با یافتن موقعیت های بالا، پایین، چپ و راست می توان ابعاد هدف را تعیین و با داشتن پهنای و ارتفاع هدف، می توان شعاع کرنل را برای قاب بعدی بطور مناسب انتخاب نمود.

۶- بروز کردن مدل هدف

هنگامی که شدت و ظاهر جسم مرتب تغییر می کند، لازم است که مدل هدف نیز در فریم های متوالی بر اساس بهترین مچ شدگی بین مدل ذرات کاندید با مدل هدف اصلی بروز گردد، در شبیه سازی این مقاله از سنجش متوسط میزان وزن ها در هر فریم (اگر کمتر از ۵۵ درصد گردد) برای زمان ورود به این مرحله استفاده شده است [۵] و از ذره ای که بیشترین وزن را در آن گام نسبت به مدل هدف اصلی داشته برای بروز رسانی انتخاب شده است، یعنی:

$$q_k = (1 - \alpha_q) q_{k-1} + \alpha_q p_{est} \quad (50)$$

که α_q عددی بین صفر و یک بوده و برای تاثیر میزان مدل قبلی هدف در مدل فعلی می باشد، در شبیه سازی این مقاله این فاکتور ۰٫۱ در نظر گرفته شده است [۱۰] و p_{est} نیز بهترین مدل کاندید ذره برای جایگزینی در مدل هدف است.

۷- شبیه سازی

برای مقایسه دو تخمینگر EKF و PF ابتدا یک مدل غیرخطی برای حرکت حالت جسم در یک محور مختصات بصورت [۱۷]:

$$\rho[p(y), q] = \sum_{u=1}^m [\sqrt{p(u)} \times q(u)] \quad (42)$$

تعریف می گردد. برای اینکه این مقادیر مختلف میان مدل هدف و مدل ذرات کاندید هدف، قابل قیاس باشند، این ضریب باید دارای یک ساختار متریک باشد، لذا از تابع فاصله باتاچاریا جهت بررسی میزان اختلاف بین دو توزیع استفاده می شود:

$$d(y) = \sqrt{1 - \rho[p(y), q]} \quad (43)$$

که این معیار برای هر توزیع دلخواه معتبر بوده و دارای یک ساختار متریک می باشد و هرچه دو توزیع شباهت بیشتری با یکدیگر داشته باشند، مقدار آن به صفر میل می کند [۲].

۴-۴- تابع توزیع درستنمایی مشاهده^۱

تابع درستنمایی مشاهده برای فرایند ردیابی در فیلتر ذره بسیار حیاتی می باشد، چرا که این تابع موجب وزن دار شدن ذرات جهت ورود به مرحله باز نمونه برداری می شوند. این تابع بصورت [۲]:

$$w^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-d^2}{2\sigma^2}\right) \quad (44)$$

بوده که d را از روی فاصله باتاچاریا جایگزین کرده و عددی بین صفر و یک است، σ نیز پارامتری تاثیر گذار که میزان واریانس در نظر گرفته شده جهت مقایسه مدل هدف با مدل کاندید می باشد، که در شبیه سازی این مقاله ۰٫۱۵ در نظر گرفته شده است [۲].

۵- وفقی سازی شعاع کرنل

هنگامی که اندازه و ابعاد هدف تغییر می کند، اگر شعاع کرنل که در قاب ابتدایی با توجه به ابعاد هدف تعیین شده است، بدون تغییر باقی بماند، می تواند موجب شکست الگوریتم گردد و یا به یک موقعیت یابی ضعیف منجر شود [۸]. برای رفع این مشکل، روش مؤثری برای وفق دادن مستطیل احاطه کننده هدف با مقیاس جدید هدف، پیشنهاد می شود. این روش بر مشاهده تغییرات سریع مقدار پیکسل های تصویر زنده شده، در راستای مرزهای هدف استوار است. لذا چهار الگوی همبستگی C_L و C_R با ابعاد $h \times 3$ و C_T و C_B با ابعاد $3 \times w$ که موقعیت مرزهای چپ، راست، بالا و پایین می باشند مطابق شکل ۴ معرفی می شوند:

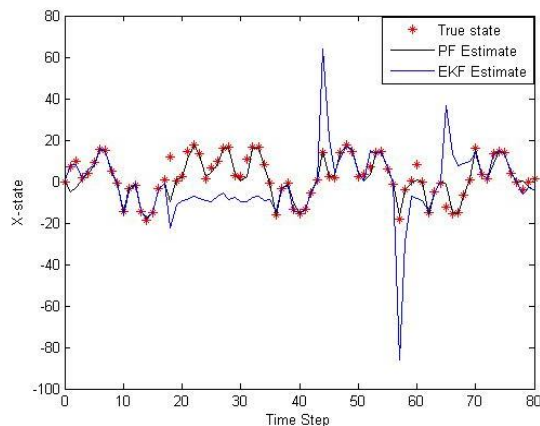
-2	-1	+2	

+2	-1	-2	

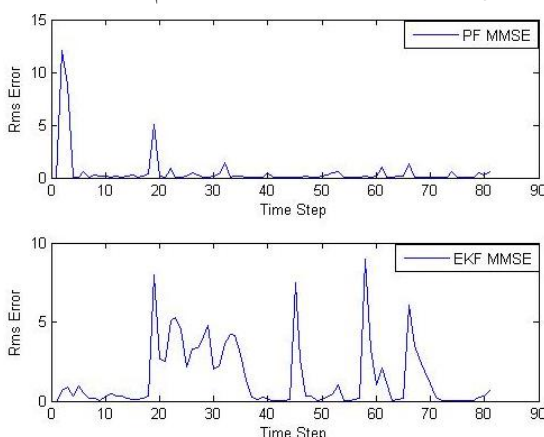
-2			
-1			
+2			

شکل ۴: الگوهای همبستگی (از چپ به راست) برای موقعیتهای چپ، راست، بالا، پایین

¹ Likelihood Distribution Observation



شکل ۵: مقایسه تخمین موقعیت از طریق دو الگوریتم EKF و PF



شکل ۶: مقایسه متوسط خطا در دو الگوریتم EKF و PF

حال برای شبیه سازی ردیابی یک جسم با مانور زیاد در تصویر بر اساس الگوریتم بازنمونه برداری فیلترزده و تشکیل مدل هدف با یک کرنل و وفقی سازی شعاع آن حین ردیابی، از یک فیلم هواپیمای جنگنده F22 با ۱۷۰۳ فریم که دارای مانورهای حرکتی با تغییرات در جهت و زاویه بصورت تصادفی می باشد، استفاده شده است. لذا به دلیل مانورهای زیاد و تصادفی و حرکت های دورشونده و نزدیک شونده و با توجه به تغییرات دائم اندازه و شکل هدف و نیز تغییرات شدت پشت زمینه، مدل هدف در هر چند فریم یکبار نیاز به بروزرسانی دارد. شکل ۷ میزبان تغییرات مدل هدف را در چند فریم به عنوان نمونه نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود، تغییرات بصورت حرکتی، زاویه ای، اندازه ای و... بوده و الگوریتم ردیابی باید بتواند هدف را در این شرایط دنبال کند اندازه گیری ها نیز در یک سیستم رایانه با مشخصات AMD Phenom(tm) //X6 1055T با CPU ۲/۸۱ گیگاهرتز و ۳GB حافظه RAM، صورت پذیرفته است.

ابتدا در فریم اول که قرار است ردیابی آغاز گردد، محدوده مستطیلی را بر روی هدف محاط کرده و خصوصیات جسم به عنوان مدل اولیه را، از قبیل طول، عرض و هیستوگرام سطوح خاکستری بدست آورده و با اعمال کرنل Epanechnikov متناسب با ابعاد مستطیل احاطه

(۵۱)

$$x_t = 0.5x_{t-1} + 25 \frac{x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + 8 \cos(1.2t) + V_t$$

در نظر گرفته شده است و مدل مشاهده نیز بصورت:

$$Z_t = \frac{x_t^2}{20} + W_t \quad (52)$$

فرض شده است، که در آن $x_t \sim N(0, \sigma^2)$ است، W_t و V_t نویزهای گوسی سفید می باشند، که توزیع آن ها بصورت $W_t \sim N(0, \sigma_w^2)$ و $V_t \sim N(0, \sigma_v^2)$ می باشند. که در این مقاله این مقادیر بصورت، $\sigma_w^2 = 1$ و $\sigma_v^2 = 10$ و $\sigma^2 = 10$ گرفته شده است. همانطور که مشاهده می شود، مدل حرکت بصورت غیرخطی با یک نویز تصادفی گوسی می باشد و هر موقعیتی، نیز توسط مدل مشاهده، در مکانی خاص دیده می شود [۱۶]. برای استفاده از فیلترکالمن پیشرفته، مقدار F_t^T از مشتق معادله حالت بصورت زیر بدست می آید:

$$F_t = 0.5 + 25 \frac{1-x_t^2}{(1+x_t^2)^2} \quad (53)$$

و مقدار H_t^T نیز از مشتق مدل مشاهده بصورت زیر بدست می آید:

$$H_t = \frac{x_t}{10} \quad (54)$$

حال با انتخاب اولیه مقادیر میانگین و واریانس، مطابق با الگوریتم جدول ۱، موقعیت جسم در مراحل زمانی بعد، تخمین زده می شود، که در این شبیه سازی مکان اولیه $x_0 = 0.1$ و واریانس اولیه $P_0 = 2$ در نظر گرفته شده است. از آنجا که نویز سیستم گوسی است، آمارگان کافی جهت معرفی سیستم مقدار میانگین و واریانس در هر مرحله زمانی می باشد [۳].

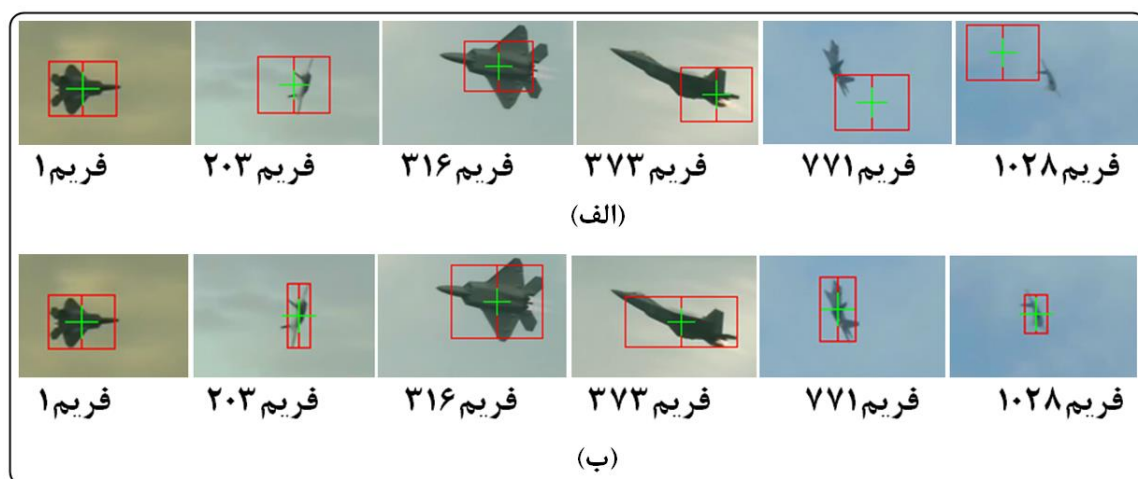
برای استفاده از فیلترزده نیز، ابتدا تعداد ۵۰ ذره در همان مکان $x_0 = 0.1$ مقداردهی اولیه می شوند و سپس یک نویز گوسی تصادفی با واریانس $\sigma = 10$ ، به آن اضافه می گردد، سپس در هر مرحله زمانی (که در این مقاله تعداد مراحل زمانی ۸۰ در نظر گرفته شده است) مکانی را که جسم باید از طریق معادله حرکت در آنجا باشد را از طریق معادله (۵۱) بدست آورده و همین طور مدل مشاهده مربوطه نیز از طریق معادله (۵۲) بدست می آید. لذا در هر مرحله زمانی یک مکان حالت اصلی که جسم باید در آنجا باشد و یک مکان مشاهده اصلی که جسم باید در آنجا مشاهده شود، داریم. شکل ۵ موقعیت اصلی جسم را در مقایسه با تخمین موقعیت از طریق دو الگوریتم فیلترزده و فیلترکالمن پیشرفته در یک نمودار برای مقایسه بهتر نمایش می دهد.

همانطور که مشاهده می شود تخمین موقعیت با الگوریتم فیلترزده بسیار دقیق تر بوده و در مراحل زمانی که جسم تغییرات ناگهانی و مانورهای تصادفی داشته، این الگوریتم ردیابی بهتری را در تخمین موقعیت جسم داشته است.

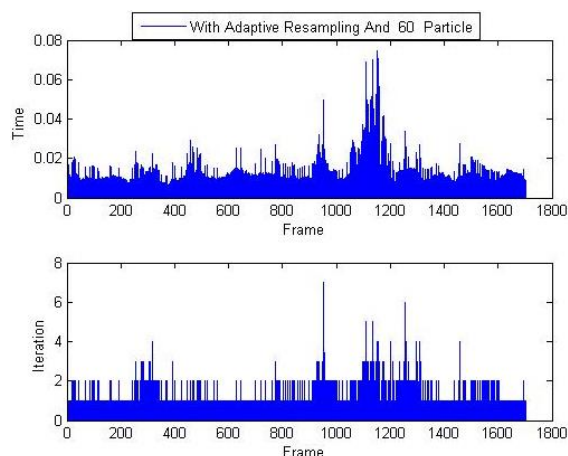
شکل ۶ نیز میزان متوسط خطا را در ۸۰ مرحله زمانی در هر دو الگوریتم EKF و PF نشان می دهد. همان طور که دیده می شود میزان این خطا در فیلترزده بسیار کمتر می باشد.

آن نمونه هایی که وزن بیشتری دارند، چندین بار انتخاب شده و آنهایی که وزن کمتری دارند حذف می شوند و در انتهای این مرحله ذرات وزن پایین در موقعیت ذرات با وزن بالا قرار می گیرند و سرانجام حالت جسم با توجه به معادله (۳۳)، تخمین زده می شود و سرانجام وزن همه ذرات نمونه انتخاب شده برابر $1/N$ ($N=60$) خواهد شد. در این مقاله با در نظر گرفتن تعداد ذرات $N=60$ و واریانس پراکندگی تصادفی ذرات به اندازه ابعاد مستطیل احاطه کننده هدف، شبیه سازی انجام گرفته است. مرحله باز نمونه برداری یکبار بصورت تعداد تکرار ثابت ۵ مرتبه بدون تغییر در شعاع کرنل و یکبار دیگر با وفقی شدن هم شعاع کرنل و هم تعداد تکرارها با توجه به میزان وزن ذرات انجام شده است. شکل ۸ نمونه ای از تغییرات شعاع کرنل در برخی فریم ها را نمایش می دهد، همان طور که مشاهده می شود الگوریتم به خوبی مقیاس هدف را می یابد و نیز در برابر چرخش هدف بسیار مقاوم می باشد، چرا که چرخش هدف می تواند با تغییر شکل، تغییر رنگ (یا سطح خاکستری) و تغییر اندازه هدف همراه باشد که هر کدام از آنها به نوبه خود مشکل سازند و این الگوریتم مقاومت بالایی در برابر این چرخش ها دارد.

کننده هدف، به پیکسل های نزدیک مرکز مستطیل اعتبار بیشتری داده می شود و مدل هدف بدست می آید. حال در همان فریم، ذرات $N=60$ را در مختصات مرکز جرم هدف، مقداردهی اولیه نموده و برای فریم بعدی که شروع ردیابی می باشد، ذرات بر اساس مختصات هدف در فریم قبلی با اعمال نویز تصادفی در واریانس مشخص پیشگویی می گردند، لازم به ذکر است که واریانس با توجه به سرعت و مانور هدف متغیر بوده و تا وقتی هدف را می بیند، حداکثر به اندازه ابعاد مستطیل احاطه کننده هدف است و هنگامی که هدف را از دست می دهد تا سه برابر این ابعاد بزرگ شده و جستجو را ادامه می دهد تا هدف را بیابد که زمان پردازش به طور طبیعی در این حالت بالا می رود، لذا همواره هدف را در احاطه دارد، و برای هر کدام از ذرات نیز مستطیلی با همان ابعاد مستطیل محاط بر هدف، به مرکز ذره قرار داده و سپس کرنل Epanechnikov به محدوده هر ذره اعمال می شود و با استفاده از فاصله باتاچاریا، میزان شباهت میان مدل هدف با تمام مدل ذرات کاندید بررسی می شوند و از طریق تابع توزیع درستمایی مشاهده یعنی معادله (۴۴)، به وزندار کردن ذرات کاندید پرداخته می شود، الگوریتم باز نمونه برداری، برای بدست آوردن یک مجموعه از نمونه های جدید بوده که در طول



شکل ۱۱ نمودار تعداد تکرار مرحله بازنمونه برداری و زمان پردازش آن را در مرحله وفقی بودن شعاع کرنل نشان می دهد که دارای دو ردیف است که ردیف اول منحنی مدت زمان پردازش هر فریم نمایش داده شده است و منحنی ردیف دوم تعداد تکرارهای مرحله بازنمونه برداری را نشان می دهد که متناسب با تغییرات شعاع کرنل این مرحله نیز بصورت وفقی تغییر می کند و نقش بسزایی در کاهش زمان پردازش دارد، لذا مشاهده می شود با انجام این فاکتورهای کنترلی در برنامه، زمان متوسط تا ۱۵ میلی ثانیه نیز کاهش یافته است.



شکل ۱۱: تغییرات زمان در هر فریم همراه با وفقی بودن شعاع کرنل و تغییر مراحل بازنمونه برداری

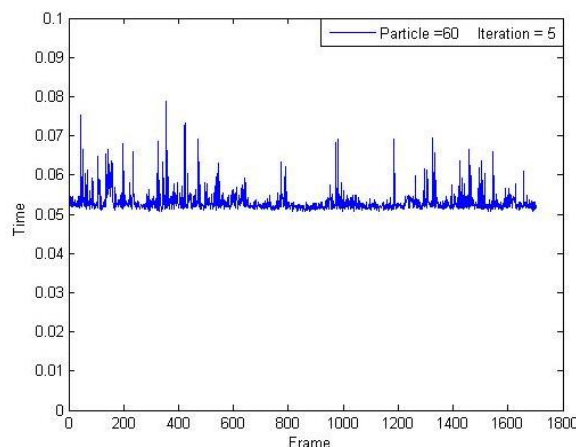
در جدول ۳ نیز مدت زمان پردازش برخی فریم های منتخب نشان داده شده در شکل ۹ با دو الگوریتم شعاع کرنل ثابت و شعاع کرنل وفقی، بصورت کمی با یکدیگر مقایسه شده است.

جدول ۳: مقایسه زمان پردازش در برخی فریم های منتخب با دو الگوریتم

فریم	فریم	فریم	فریم	فریم	فریم	
۱۰۲۸	۷۷۱	۳۷۳	۳۱۶	۲۰۳	۱	مدت زمان (میلی ثانیه)، ثابت بودن شعاع کرنل
۶۹	۵۵	۶۲	۵۵	۶۸	۵۴	مدت زمان (میلی ثانیه) با وفقی بودن شعاع کرنل
۴۵	۲۱	۲۲	۲۰	۱۹	۱۵	

در مرحله بازنمونه برداری با تکرار ثابت ۵ مرتبه بدون تغییر شعاع کرنل و با واریانس $\sigma = 0.1$ همان طور که در شکل (۹-الف) دیده می شود در برخی فریم ها (از جمله فریم ۱۰۲۸) هدف از دست می رود ولی هنگامی که شعاع کرنل و مرحله بازنمونه برداری متناسب با آن، بصورت وفقی مطابق با شکل (۹-ب) تغییر می کنند، هدف در کلیه فریم ها محفوظ می ماند.

شکل ۱۰ تغییرات زمان در هر فریم را با مرحله بازنمونه برداری ثابت ۵ مرتبه بدون تغییر شعاع کرنل نشان می دهد (محور زمان در این نمودار بر حسب ثانیه می باشد) زمان متوسط این مرحله، ۵۵ میلی ثانیه در هر فریم در طول ۱۷۰۳ فریم می باشد، همان طور که مشاهده می شود کمترین زمان پردازش ۵۲ میلی ثانیه بوده و هنگامی که جسم در برخی فریم ها از دست می رود تا یافتن مجدد آن، این زمان تا ۸۰ میلی ثانیه نیز می رسد.



شکل ۱۰: تغییرات زمان در هر فریم بدون وفقی بودن شعاع کرنل و تعداد تکرار بازنمونه برداری ثابت

۸- نتیجه گیری

مدل هدف که خود بصورت وفقی و با شرایط مطرح شده بروزرسانی می گردد، نتایج خوبی در ردیابی اهداف متحرک با حرکت های تصادفی از نظر میزان زمان پردازش گرفته شده است و میزان این زمان در هر فریم نیز تا حدود زیادی کاهش یافته است. روش بررسی شده در مقاله بر اساس فیلترذره و بهره گیری از تخمین چگالی کرنل با شعاع متغیر جهت بدست آوردن هیستوگرام وزن دار شده مدل هدف و مدل ذرات کاندید، در نرم افزار مطلب شبیه سازی گردید و در شرایطی که تغییرات مدل

مساله دقت و کاهش میزان زمان پردازش تشخیص و ردیابی موقعیت اهداف متحرک در تصویر از مسائل مهم در پردازش تصویر محسوب می گردد که گاه مطابق با نوع مأموریت کاری یکی را بر دیگری ترجیح می دهیم، نتایج حاصل از ردیابی در سناریوهای مختلف الگوریتم مطرح شده در این مقاله نشان می دهد وفقی سازی شعاع کرنل موجب افزایش دقت الگوریتم ردیابی مبتنی بر کرنل شده است و در این مقاله از ترکیب آن با خصوصیت فیلترذره و وزندهی و هدایت مناسب ذرات نمونه بسوی

- [9] D. D. Liang, Q. Huang, S. Jiang³, H. Yao, W. Gao, "MeanShift Blob Tracking With Adaptive Feature Selection and Scale Adaptation" in Proc. IEEE, 2007.

هدف اعم از اندازه، زاویه و ... زیاد بوده و هدف دارای چرخش و تغییرات تصادفی در جهت حرکت را دارا بود، نتایج حاکی از مقاومت الگوریتم در برابر این شرایط را داشت. نتایج شبیه سازی نیز تحت شرایط مطرح شده، در برخی شکل ها نمایش داده شد.

- [10] O. Hlinka, F. Hlawatsch, and P. M. Djurić, "Likelihood consensus-based distributed particle filtering with distributed proposal density adaptation" Available online: arXiv:1109.6191v1 [stat.AP], Sep. 2011.

- [11] O. Hlinka, O. Slučiak, F. Hlawatsch, P. M. Djurić, and M. Rupp, "Likelihood consensus and its application to distributed particle filtering." Available online: arXiv:1108.6214v1 [stat.AP], Aug. 2011.

- [12] M. Gao, H. Zhang, "Sequential Monte Carlo methods for parameter estimation in nonlinear state-space models" in Proc. ScienceDirect, March. 2012.

- [13] M. Li, T. Tan, W. Chen, and K. Huang, "Efficient Object Tracking by Incremental Self-Tuning Particle Filtering on the Affine Group" in Proc. IEEE, March. 2012.

- [14] J. Pocock, S. Dance, and A. Lawless, "State estimation using the particle filter with mode tracking" Comput. Fluids, vol. 46, no.1, pp.392–397, Jul. 2011.

- [15] B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon, "Beyond the Kalman Filter, Particle Filters For Tracking Applications" Artech House, Boston, London, 2004.

- [16] M. Afonso, "Particle Filter and Extended Kalman Filter for Nonlinear Estimation: A Comparative" IEEE, 2008.

- [17] H. Han, Y. Sh. Ding, K. R. Hao, X. Liang, "An evolutionary particle filter with the immune genetic algorithm for intelligent video target tracking" College of Information Sciences and Technology, Donghua University, 2011.

مراجع

- [1] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu, "Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering" Journal Statistics and Computing, Vol. 10, No. 3, pp.197–208, 2000.

- [2] C. R. del Blanco, "Visual Object Tracking in Challenging Situations using a Bayesian Perspective" Ph.D. Thesis, Tesis Doctoral, 2010.

- [3] A. Doucet, N. D. Freitas, and N. Gordon, "Sequential Monte Carlo methods in practice" New York, NY: Springer, 2001.

- [4] B. Sugandi, H. Kim, J. K. Tan and S. Ishikawa, "Object Tracking Based on Color Information Employing Particle Filter Algorithm" in Object Tracking, Dr. Hanna Goszczynska (Ed.), ISBN: 978-953-307-360-6, 2011.

- [5] D. Comaniciu, V. Ramesh and P. Meer, "Kernel-Based Object Tracking" IEEE Trans. PAMI, v. 25, pp. 564-575, 2003.

- [6] B. Han, "Adaptive Kernel Density Approximation and its Applications to RealTime Computer Vision" Doctor of Philosophy Dissertation, 2005.

- [7] Y. Cheng, "Mean shift, mode seeking, and clustering" IEEE Trans. on Patt. Anal. and Mach. Intell. 17 (8) 790–799, 1995.

- [8] R. T. Collins, "Mean-shift Blob Tracking through Scale Space" Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'03), IEEE, June. 2003.

تحلیل و جبران سازی خطای کانال ارتفاع سیستم ناوبری اینرسی در ارتفاعات بالا با کمک اطلاعات ردیاب ستاره

امیر مقتدایی راد^۱، جعفر حیرانی نوبری^۲، امیرعلی نیکخواه^۳

^۱ دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی برق- گروه کنترل- دانشگاه آزاد واحد علوم و تحقیقات Amir.Moghtadaei@yahoo.com

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی برق- گروه کنترل- دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی Nobari@eetd.kntu.ac.ir

^۳ استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا- گروه دینامیک پرواز و کنترل- دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی Nikkhah@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۹/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۱۲/۲۷)

چکیده: در این مقاله با استفاده از اطلاعات وضعیت بدست آمده از یک ردیاب ستاره، خطای تعیین موقعیت سیستم ناوبری اینرسی بدون سکو در مرحله پروازی زیر مداری کاهش داده شده است. در این راستا، ابتدا معادلات خطای موقعیت کانال های مختلف ناوبری اینرسی استخراج شده و سهم خطای هر یک از سنسورهای ناوبری اینرسی در خطای تعیین موقعیت کل بررسی شده است. در ادامه، ناوبری سماوی و بهره گیری از ردیاب ستاره در تعیین وضعیت و موقعیت در دستگاه های مختصات مختلف مورد توجه قرار گرفته است. سپس معادلات جدید ناوبری اینرسی با بهره گیری از وضعیت بدست آمده از ردیاب ستاره استخراج شده اند. بر اساس معادلات جدید، وضعیت و موقعیت در دستگاه ناوبری و اینرسی مجدداً مورد محاسبه قرار گرفته و طی مقایسه ای با جواب های بدست آمده از ناوبری اینرسی، کاهش چشمگیر خطا به خصوص برای کانال ارتفاع نشان داده شده است.

واژه های کلیدی: ناوبری اینرسی، ناوبری سماوی، ردیاب ستاره، تعیین موقعیت و وضعیت، خطای ناوبری، آنالیز خطا

Error Analysis and Compensation of Inertial Navigation System Height Channel in High Altitudes Aiding Star Tracker

Amir Moghtadaei Rad, Jafar Heyrani Nobari, Amir Ali Nikkhah

Abstract: In this paper, using the information obtained in the star tracker, strap down inertial navigation system positioning error in suborbital flight is reduced. In this regard, the position error equations of different channel in inertial navigation are modeled and error share of each sensor in position and attitude determination drifts are investigated. In continue celestial navigation and utilizing star tracker in attitude determination and positioning on different frames are considered. Then new equation of inertial navigation aiding by attitude determined with star tracker are introduced. According to the new equations, attitude and position in navigation and inertial frame were calculated again and comparing with the parameters obtained by inertial navigation, considerable reducing position error, especially in the height channel, is shown.

Keywords: Inertial navigation, Celestial Navigation, Star Tracker, Attitude Determination, Navigation Error, Error Analysis

معرفی علامت ها :

C_b^a : ماتریس تبدیل از چارچوب دلخواه b به چارچوب دلخواه a

ω_{ab}^b : سرعت زاویه ای چارچوب b نسبت به چارچوب a در چارچوب b

ϕ : عرض جغرافیایی

λ : طول جغرافیایی

h: ارتفاع از سطح زمین

V_N : سرعت در جهت شمال

V_E : سرعت در جهت شرق

V_D : سرعت در جهت پایین

f: نیروی مخصوص اندازه گیری شده توسط شتاب سنج ها

ω : سرعت زاویه ای اندازه گیری شده توسط ژيروسکوپ ها

φ : زاویه غلت

θ : زاویه فراز

ψ : زاویه سمت

δ : بعد ستاره در مختصات بعدی

α : میل ستاره در مختصات بعدی

$\Omega = [\omega \times]$: ماتریس Skew سرعت زاویه ای

$E = [\varepsilon \times]$: ماتریس Skew خطای وضعیت

δf : خطای شتاب سنج ها

$\delta \omega$: خطای ژيروسکوپ ها

N: شعاع انحنا بیضی در صفحه عمود بر مبدا اولیه

M: شعاع انحنا بیضی در صفحه نصف النهار

B_a : بیاباس شتاب سنج

η_a : نویز شتاب سنج

S_a : ضریب تبدیل شتاب سنج

N_a : عدم تعادل شتاب سنج ها

B_ω : بیاباس ژيروسکوپ

η_ω : نویز ژيروسکوپ

S_ω : ضریب تبدیل ژيروسکوپ

N_ω : عدم تعادل ژيروسکوپ ها

۱- مقدمه

موضوع ناوبری از سالهای بسیار دور همواره یکی از موضوعاتی بوده که ذهن بشر را به خود مشغول کرده است. با مطرح شدن قوانین نیوتن در سال ۱۶۸۷، مبانی سیستم ناوبری اینرسی مهیا گردید. این تکنولوژی که شامل سنسورهای شتاب سنج و وضعیت سنج بود به دو صورت بدون سکوها و با صفحه پایدار شونده^۲ مورد استفاده قرار گرفت. کاربرد این نوع ناوبری با پیشرفت بشر در ساخت سنسورهای با دقت بالاتر طی سالهای ۱۹۶۰ تا ۲۰۱۲

افزایش یافت بطوریکه امروزه در اکثر ناوها از این سیستم به عنوان یک سیستم ناوبری معتبر استفاده می شود و نوع MEMS آنها جزو جدیدترین IMU^۳ های موجود است. با وجود مزایا و نقاط قوت بسیار، سیستم ناوبری اینرسی ۲ محدودیت عمده دارد. اولین مشکل آن وابستگی شدید به اطلاعات دقیق از شتاب گرانش g است که بخصوص در خارج از جو بدلیل ضعیف بودن این پارامتر و همچنین وابستگی شدید آن به ارتفاع، استفاده از این سیستم ناوبری را با مشکل مواجه می کند. دومین مشکل مربوط به استفاده از ۲ انتگرال گیر است که به مرور زمان خطای اولیه سنسورهای ورودی را تقویت می کند و باعث عدم اعتبار نتایج این ناوبری در سفرهای طولانی مدت می شود [۱-۴]. از طرفی با دست یافتن بشر به تکنولوژی فرستادن ماهواره به فضا، استفاده از سیستم ناوبری جهانی (GPS^۴) نیز در اکثر وسایل نقلیه زمینی و هوایی بطور گسترده مورد استفاده قرار گرفت. اولین سیستم ناوبری جهانی در سال ۱۹۵۷ همزمان با ساخت اولین ماهواره بنام Sputnik توسط سازمان فضایی روسیه مورد استفاده قرار گرفت و از سال ۱۹۶۰ تا ۱۹۹۴ که ۲۴ ماهواره توسط سازمان دفاعی امریکا در مدار زمین قرار گرفتند استفاده بسیار گسترده تری یافت. اما مشکل عمده این سیستم عدم کارایی در سیستمهای نظامی بدلیل امکان ایجاد نویز روی آنها هنگام جنگ و همچنین عدم کارایی آنها در ارتفاعات بالاتر از ۱۸ کیلومتر و سرعت های بالاتر از ۵۱۵ متر بر ثانیه بدلیل محدودیتی که شرکتهای سازنده سیستم ناوبری جهانی روی آن ایجاد کرده بودند بود [۵]. بنابراین پس از گذشت حدود ۲ قرن از عدم توجه بشر به ناوبری بر اساس ستارگان یا همان ناوبری سماوی، مجدداً این ناوبری مورد توجه دانشمندان این حوزه قرار گرفت. در سال ۱۹۶۴ اولین سنسور ستاره توسط سازمان NASA جهت استفاده در ماموریت سفینه فضایی مریخ پیما ساخته شد [۶-۷]. سپس به مرور زمان و با تکمیل اطلاعات کاتالوگ های ستاره ای و همچنین قابلیت اطمینان این سنسورها، استفاده گسترده از آنها در دستور کار قرار گرفت. اما این سنسور نیز یک محدودیت بزرگ داشت. این سنسورها تنها قادر به تعیین وضعیت بودند و تعیین موقعیت از عهده آنها خارج بود در حالیکه در یک ناوبری کامل تعیین وضعیت و موقعیت بطور توأم لازم است. لذا از سال ۱۹۹۰ میلادی بطور رسمی توجه دانشمندان به امر تلفیق سیستمهای ناوبری مختلف یعنی سیستم ناوبری جهانی، سیستم ناوبری اینرسی و ردیاب ستاره^۵ معطوف گردید [۸-۱۰]. تلفیق سیستم ناوبری اینرسی و ردیاب ستاره در سال ۲۰۰۴ توسط Fang Jiancheng و Jamshaid Ali معرفی گردید [۵ و ۱۱-۱۴]. اما در تمامی آنها اولاً بهبود وضعیت مورد تاکید بوده است و ثانیاً این بهبود در دستگاه مختصات اینرسی صورت گرفته است. به عبارت دیگر در این مقاله ها، به بحث تعیین وضعیت در چارچوب ناوبری و در پی آن تعیین موقعیت جغرافیایی پرداخته نشده است و یا اگر هم پرداخته شده چون زمان شبیه سازی کوتاه بوده است (۱۵۰ ثانیه)، ناپایداری کانال ارتفاع و خطای

³ Inertial Measurement unit

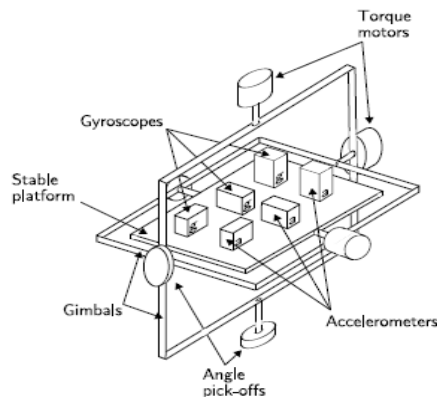
⁴ Global Positioning system

⁵ Star tracker

¹ Strap down

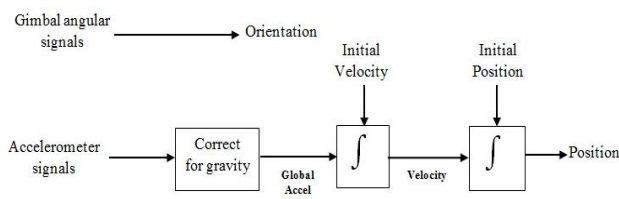
² Stable platform

[۲]، جهت مدلسازی خطای موقعیت در کانالهای مختلف و اثبات ناپایداری کانال ارتفاع مورد استفاده قرار گرفته است.

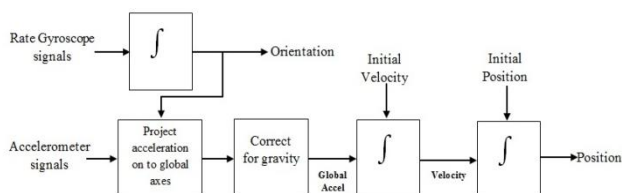


شکل ۱- نمایشی از سیستم ناوبری اینرسی با صفحه پایدار شده [۳]

ولی در این مقاله سیستم ناوبری اینرسی بدون سکو مد نظر می باشد. در این نوع INS، خروجی شتاب سنج ها و ژيروسکوپ ها پس از اندازه گیری در دستگاه بدنی، توسط ماتریس های تبدیل به دستگاه ناوبری، منتقل می شوند و معادلات نیز بایستی در دستگاه ناوبری حل شوند، در نتیجه رابطه (۱) در اینجا بصورت روابط (۲) بازنویسی خواهد شد. آنچه در نوشتن معادلات خطای موقعیت در دستگاه ناوبری اهمیت دارد تغییر رابطه خطای مربوط به شتاب سنج هاست چرا که در این حالت خطای شتاب سنج ها غیر از خطاهای ورودی شتاب سنج ها به خطاهای ژيروسکوپ ها هم بستگی دارد و همین امر موضوع و روابط خطا در دستگاه ناوبری را بدلیل غیرخطی شدن معادلات دیفرانسیل نسبت به دستگاه اینرسی پیچیده تر می نماید.



شکل ۲- بلوک دیاگرام سیستم ناوبری اینرسی با صفحه پایدار شونده [۳]



شکل ۳- بلوک دیاگرام سیستم ناوبری اینرسی بدون سکو [۳]

اما معادلات خطا در SINS بصورت زیر آغاز می شود:

وضعیت نهایی که در اثر هم افزایی خطاها نمود پیدا می کنند به نمایش در نیامده است. ضمناً بیشتر مقالات ایشان بر پایه تلفیق اطلاعات سنسور ستاره ای و ناوبری اینرسی با روشهای مختلف تلفیق از جمله روشهای فازی [۵]، فیلتر کالمن Unscented [۱۱]، فیلتر ذره ای [۱۳] بوده است.

همچنین آنچه مسلم است بدلیل وجود خطا در محاسبه شتاب گرانش زمین چه در مدل کروی و چه در مدل بیضوی لزوماً خطایی در محاسبه موقعیت توسط سیستم ناوبری اینرسی وجود خواهد داشت. اما بدلیل اینکه این خطا در کانال ارتفاع بصورت فیدبک مثبت تقویت می شود نسبت به ۲ کانال افقی دیگر دارای خطای بیشتر و بطور کلی ناپایدار خواهد بود. این بدین معناست که ارتفاع بدست آمده از سیستم ناوبری اینرسی قابل اطمینان نخواهد بود و لذا به همین دلیل است که در مراجع زیادی از سنسورهای مانومتر و یا راداری جهت سنجش ارتفاع و جبران خطا البته در ارتفاعات پایین استفاده می شود [۱۷]. اما استفاده از دو منبع فوق جهت تعیین ارتفاع در ارتفاعات بالای ۱۰۰ کیلومتر یعنی منطقه پروازی مازول های زیر مداری امکان پذیر نیست لذا بنظر میرسد استفاده از سنسورهای ستاره ای جایگزین مناسبی برای آنها جهت جبران خطای ناوبری اینرسی باشد.

در این مقاله هدف اصلی نویسندگان بر آن است تا با ترکیب اطلاعات وضعیت بدست آمده از ردیاب ستاره و اطلاعات موقعیت و وضعیت بدست آمده از سیستم ناوبری اینرسی، بهبودی در وضعیت و موقعیت بدست آمده از INS در دستگاه ناوبری بخصوص در کانال ارتفاع ایجاد نمایند. لازم بذکر است که منظور از تعیین موقعیت^۶، تعیین مختصات حرکت انتقالی مرکز جرم وسیله متحرک و منظور از تعیین وضعیت^۷ یعنی سمت گیری^۸ زاویه ای وسیله در فضا می باشد.

۲- تحلیل خطای موقعیت و ناپایداری کانال ارتفاع :

دینامیک خطای شتاب سنج ها و ارتباط شتاب حقیقی با نیروی مخصوص مورد اندازه گیری توسط شتاب سنج ها بصورت زیر قابل بیان است :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \ddot{x} \\ \delta \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta g + \delta f \end{bmatrix}$$

برای سیستم ناوبری اینرسی با صفحه پایدار شده (شکل ۱)، بدلیل اینکه دستگاه بدنه موازی با دستگاه ناوبری تعریف و در هر لحظه منطبق بر آن است، لذا مقادیر اندازه گیری شده توسط شتاب سنج ها مستقیماً در معادلات بالا قرار گرفته و موقعیت خروجی را با ۲ بار انتگرالگیری مطابق بلوک دیاگرام اشکال ۲ و ۳ ارائه می دهند. این مدل دقیقاً همان مدلی است که در

⁶ Position

⁷ Attitude

⁸ Orientation

$$\frac{\partial f^n}{\partial f^b} \delta f^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^n(1)}{\partial f^b(1)} & \frac{\partial f^n(1)}{\partial f^b(2)} & \frac{\partial f^n(1)}{\partial f^b(3)} \\ \frac{\partial f^n(2)}{\partial f^b(1)} & \frac{\partial f^n(2)}{\partial f^b(2)} & \frac{\partial f^n(2)}{\partial f^b(3)} \\ \frac{\partial f^n(3)}{\partial f^b(1)} & \frac{\partial f^n(3)}{\partial f^b(2)} & \frac{\partial f^n(3)}{\partial f^b(3)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta f^b(1) \\ \delta f^b(2) \\ \delta f^b(3) \end{bmatrix} = C_b^n(t + \delta t) \times \begin{bmatrix} \delta f^b(1) \\ \delta f^b(2) \\ \delta f^b(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta f^b(1)(C_{11} - C_{21}\omega_3\delta t + C_{31}\omega_2\delta t) + \delta f^b(2)(C_{12} - C_{22}\omega_3\delta t + C_{32}\omega_2\delta t) \\ + \delta f^b(3)(C_{13} - C_{23}\omega_3\delta t + C_{33}\omega_2\delta t) \\ \delta f^b(1)(C_{21} + C_{11}\omega_3\delta t - C_{31}\omega_1\delta t) + \delta f^b(2)(C_{22} + C_{12}\omega_3\delta t - C_{32}\omega_1\delta t) \\ + \delta f^b(3)(C_{23} + C_{13}\omega_3\delta t - C_{33}\omega_1\delta t) \\ \delta f^b(1)(C_{31} - C_{11}\omega_2\delta t + C_{31}\omega_1\delta t) + \delta f^b(2)(C_{32} - C_{12}\omega_2\delta t + C_{22}\omega_1\delta t) \\ + \delta f^b(3)(C_{33} - C_{13}\omega_2\delta t + C_{23}\omega_1\delta t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f^n}{\partial \omega_{ib}^b} \delta \omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^n(1)}{\partial \omega_{ib}^b(1)} & \frac{\partial f^n(1)}{\partial \omega_{ib}^b(2)} & \frac{\partial f^n(1)}{\partial \omega_{ib}^b(3)} \\ \frac{\partial f^n(2)}{\partial \omega_{ib}^b(1)} & \frac{\partial f^n(2)}{\partial \omega_{ib}^b(2)} & \frac{\partial f^n(2)}{\partial \omega_{ib}^b(3)} \\ \frac{\partial f^n(3)}{\partial \omega_{ib}^b(1)} & \frac{\partial f^n(3)}{\partial \omega_{ib}^b(2)} & \frac{\partial f^n(3)}{\partial \omega_{ib}^b(3)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta \omega_{ib}^b(1) \\ \delta \omega_{ib}^b(2) \\ \delta \omega_{ib}^b(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & f^b(3)\delta t & -f^b(2)\delta t \\ -f^b(3)\delta t & 0 & f^b(1)\delta t \\ f^b(2)\delta t & -f^b(1)\delta t & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta \omega_{ib}^b(1) \\ \delta \omega_{ib}^b(2) \\ \delta \omega_{ib}^b(3) \end{bmatrix} \quad (۵)$$

$$= \begin{bmatrix} (\delta \omega_{ib}^b(2)f^b(3) - \delta \omega_{ib}^b(3)f^b(2))\delta t \\ (\delta \omega_{ib}^b(3)f^b(1) - \delta \omega_{ib}^b(1)f^b(3))\delta t \\ (\delta \omega_{ib}^b(1)f^b(2) - \delta \omega_{ib}^b(2)f^b(1))\delta t \end{bmatrix}$$

بنابراین خطای کلی شتاب سنسورها در دستگاه نوبری که ناشی از خطای شتاب سنسورها و ژيروسکوپها می باشد بصورت زیر خواهد بود:

$$\delta f^n = \frac{\partial f^n}{\partial f^b} \delta f^b + \frac{\partial f^n}{\partial \omega_{ib}^b} \delta \omega_{ib}^b =$$

$$\begin{bmatrix} \delta f^b(1)(C_{11} - C_{21}\omega_3\delta t + C_{31}\omega_2\delta t) + \delta f^b(2)(C_{12} - C_{22}\omega_3\delta t + C_{32}\omega_2\delta t) \\ + \delta f^b(3)(C_{13} - C_{23}\omega_3\delta t + C_{33}\omega_2\delta t) + \delta \omega_{ib}^b(2)f^b(3) - \delta \omega_{ib}^b(3)f^b(2))\delta t \\ \delta f^b(1)(C_{21} + C_{11}\omega_3\delta t - C_{31}\omega_1\delta t) + \delta f^b(2)(C_{22} + C_{12}\omega_3\delta t - C_{32}\omega_1\delta t) \\ + \delta f^b(3)(C_{23} + C_{13}\omega_3\delta t - C_{33}\omega_1\delta t) + (\delta \omega_{ib}^b(3)f^b(1) - \delta \omega_{ib}^b(1)f^b(3))\delta t \\ \delta f^b(1)(C_{31} - C_{11}\omega_2\delta t + C_{31}\omega_1\delta t) + \delta f^b(2)(C_{32} - C_{12}\omega_2\delta t + C_{22}\omega_1\delta t) \\ + \delta f^b(3)(C_{33} - C_{13}\omega_2\delta t + C_{23}\omega_1\delta t) + (\delta \omega_{ib}^b(1)f^b(2) - \delta \omega_{ib}^b(2)f^b(1))\delta t \end{bmatrix} \quad (۶)$$

همچنین خطای محاسبه نیروی گرانش که با افزایش ارتفاع افزایش می یابد و تابع موقعیت در هر ۳ کانال و بخصوص ارتفاع بخاطر ناپایدار بودن آن است نیز به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود. این رابطه با توجه به اینکه در ارتفاعات زیر ۱۰۰۰ کیلومتر مطابق شبیه سازی مدل بیضوی و کروی تفاوت زیادی ندارند و در نهایت مقدار تفاوت آنها به ۰٫۵ متر بر مجذور ثانیه می رسد و البته مدل کروی در

$$\delta \ddot{x}^n = \frac{\partial g^n}{\partial x^n} \delta x^n + \delta g^n + \delta f^n$$

$$\delta f^n = C_b^n \delta f^b$$

$$\dot{C}_b^n = \Omega_{nb}^b C_b^n \Rightarrow C_b^n(t + \delta t) = (I + \Omega_{nb}^b \times \delta t) C_b^n(t)$$

$$C_b^n(t + \delta t) = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_3\delta t & \omega_2\delta t \\ \omega_3\delta t & 1 & -\omega_1\delta t \\ -\omega_2\delta t & \omega_1\delta t & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_b^{nT} (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n)$$

(۲)

که مقدار ω_{en}^n و ω_{ie}^n از روابط ذکر شده در [۲ و ۱] قابل برداشت است. برای بدست آوردن معادلات خطای نوبری اینرسی بدون سکو، و محاسبه تاثیر هر نوع خطای ورودی از جمله خطاهای محاسباتی ابتدا روابط ماتریس تبدیل و نیروی مخصوص بدست آمده از ژيروسکوپها و شتاب سنسورها را برای زمان ۱ گام بعد از شروع کار سیستم (δt) بصورت زیر خواهد بود:

$$C_b^n(t + \delta t) = (I + \Omega_{nb}^b \times \delta t) C_b^n(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_3\delta t & \omega_2\delta t \\ \omega_3\delta t & 1 & -\omega_1\delta t \\ -\omega_2\delta t & \omega_1\delta t & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$f^n(t + \delta t) = C_b^n(t + \delta t) f^b(t + \delta t)$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} - C_{21}\omega_3\delta t + C_{31}\omega_2\delta t & C_{12} - C_{22}\omega_3\delta t + C_{32}\omega_2\delta t & C_{13} - C_{23}\omega_3\delta t + C_{33}\omega_2\delta t \\ C_{21} + C_{11}\omega_3\delta t - C_{31}\omega_1\delta t & C_{22} + C_{12}\omega_3\delta t - C_{32}\omega_1\delta t & C_{23} + C_{13}\omega_3\delta t - C_{33}\omega_1\delta t \\ C_{31} - C_{11}\omega_2\delta t + C_{31}\omega_1\delta t & C_{32} - C_{12}\omega_2\delta t + C_{22}\omega_1\delta t & C_{33} - C_{13}\omega_2\delta t + C_{23}\omega_1\delta t \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} f^b(1) \\ f^b(2) \\ f^b(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f^b(1)(C_{11} - C_{21}\omega_3\delta t + C_{31}\omega_2\delta t) \\ + f^b(2)(C_{12} - C_{22}\omega_3\delta t + C_{32}\omega_2\delta t) + f^b(3)(C_{13} - C_{23}\omega_3\delta t + C_{33}\omega_2\delta t) \\ f^b(1)(C_{21} + C_{11}\omega_3\delta t - C_{31}\omega_1\delta t) \\ + f^b(2)(C_{22} + C_{12}\omega_3\delta t - C_{32}\omega_1\delta t) + f^b(3)(C_{23} + C_{13}\omega_3\delta t - C_{33}\omega_1\delta t) \\ f^b(1)(C_{31} - C_{11}\omega_2\delta t + C_{31}\omega_1\delta t) \\ + f^b(2)(C_{32} - C_{12}\omega_2\delta t + C_{22}\omega_1\delta t) + f^b(3)(C_{33} - C_{13}\omega_2\delta t + C_{23}\omega_1\delta t) \end{bmatrix} \quad (۳)$$

در نتیجه سهم خطای شتاب سنسورها و ژيروسکوپها در دستگاه بدنه در مقدار خطای شتاب سنسورها در دستگاه نوبری با مشتق گیری جز به جز بصورت زیر خواهد شد:

$$\delta f^n = \frac{\partial f^n}{\partial f^b} \delta f^b + \frac{\partial f^n}{\partial \omega_{ib}^b} \delta \omega_{ib}^b \quad (۴)$$

معادله دیفرانسیل کانال دوم :

$$\begin{aligned} \ddot{\delta x}_2 + \frac{KM}{r^3} \delta x_2 = \delta g_2 + \delta f_2 = \omega_3 \delta f^b(1)t + \delta f^b(2) - \omega_1 \delta f^b(3)t \\ + \delta \omega_{ib}^b(3)f^b(1)t - \delta \omega_{ib}^b(1)f^b(3)t \\ = [\omega_{ib}^b(3) - C_{13}(\omega_e \cos \phi + \frac{V_E}{N+h}) + C_{23}(\frac{V_N}{M+h}) \\ + C_{33}(\omega_e \sin \phi + \frac{V_E \tan \phi}{N+h})] \delta f^b(1)t - [\omega_{ib}^b(1) - C_{11}(\omega_e \cos \phi + \frac{V_E}{N+h}) + C_{21}(\frac{V_N}{M+h}) \\ + C_{31}(\omega_e \sin \phi + \frac{V_E \tan \phi}{N+h})] \delta f^b(3)t + \delta \omega_{ib}^b(3)f^b(1)t - \delta \omega_{ib}^b(1)f^b(3)t \end{aligned} \quad (10)$$

معادله دیفرانسیل کانال سوم :

$$\begin{aligned} \ddot{\delta x}_3 - 2\frac{KM}{r^3} \delta x_3 = \delta g_3 + \delta f_3 = -\omega_2 \delta f^b(1)t + \omega_1 \delta f^b(2)t + \delta f^b(3) \\ + \delta \omega_{ib}^b(1)f^b(2)t - \delta \omega_{ib}^b(2)f^b(1)t \\ = -[\omega_{ib}^b(2) - C_{12}(\omega_e \cos \phi + \frac{V_E}{N+h}) + C_{22}(\frac{V_N}{M+h}) \\ + C_{32}(\omega_e \sin \phi + \frac{V_E \tan \phi}{N+h})] \delta f^b(1)t + [\omega_{ib}^b(1) - C_{11}(\omega_e \cos \phi + \frac{V_E}{N+h}) + C_{21}(\frac{V_N}{M+h}) \\ + C_{31}(\omega_e \sin \phi + \frac{V_E \tan \phi}{N+h})] \delta f^b(2)t + \delta f^b(3) + \delta \omega_{ib}^b(1)f^b(2)t - \delta \omega_{ib}^b(2)f^b(1)t \end{aligned} \quad (11)$$

برای سیستم INS از نوع صفحه پایدار شده، معادلات فوق قابل کاربرد بوده ضمن اینکه خلاصه تر می شدند. در ادامه به تحلیل معادلات در حالت های مختلف و شبیه سازی خطاها می پردازیم.

با توجه به اینکه خطای ورودی می تواند در اثر:

- ۱- بایاس ها و ناپایداری بایاس شتاب سنج ها
- ۲- بایاس ها و ناپایداری بایاس ژيروسکوپ ها
- ۳- بایاس ها و ناپایداری بایاس مجموع شتاب سنج ها و ژيروسکوپ ها
- ۴- شرایط اولیه مساله

باشد اثر هر یک را به تفکیک در خطای موقعیت خروجی بررسی کرده و نتایج شبیه سازیهای انجام شده را نشان خواهیم داد:

ذکر این نکته در این بخش لازم است که مجموع خطاهای وابسته به زمان را با عنوان ناپایداری بایاس و مجموع خطاهای مستقل از زمان را با عنوان بایاس در خطای ورودی ژيروسکوپ ها و شتاب سنج ها در نظر گرفته ایم. بنابراین خطاهای ورودی اعم از بایاس، نویز سفید، ضریب تبدیل و ناهمترای سنسورها به دو دسته کلی تقسیم شده اند که بصورت عددی در ادامه نمایش داده می شوند و نتایج شبیه سازی آنها نیز در آخر مقاله به نمایش در خواهد آمد.

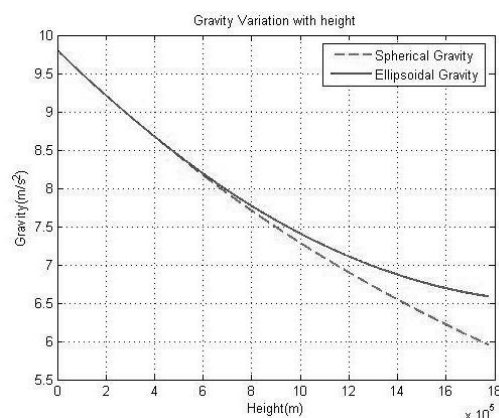
همچنین لازم است قبل از ورود به بحث آنالیز خطا تعریفی از انواع خطاهای ورودی ذکر شده در بالا داشته باشیم. معمولاً بایاس به موارد ناخواسته در سیگنال خروجی گفته می شود که بدون حضور هیچ سیگنالی در ورودی سنسور در خروجی آن ظاهر می شود و با زمان نیز تغییر نمی کند. نویز سفید نیز نوعی بایاس است با این تفاوت که دارای میانگین صفر و واریانس یک است و در واقع بایاسی است که در طول زمان نه خودش بلکه میانگین و واریانس آن ثابت است. ضریب تبدیل در واقع نسبت تغییرات خروجی سنسورها به ورودی آنهاست که به نوعی از

تحلیل خطا ساده تر می نماید، لذا مدل کروی مورد استفاده قرار گرفته است)

شکل (۴) :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = KM \begin{bmatrix} -\frac{1}{r^3} + \frac{3x_1^2}{r^5} & -\frac{3x_1x_2}{r^5} & -\frac{3x_1x_3}{r^5} \\ -\frac{3x_2x_1}{r^5} & -\frac{1}{r^3} + \frac{3x_2^2}{r^5} & -\frac{3x_2x_3}{r^5} \\ -\frac{3x_3x_1}{r^5} & -\frac{3x_3x_2}{r^5} & -\frac{2}{r^3} - \frac{3x_1^2 + x_2^2}{r^5} \end{bmatrix} \quad (V)$$

$$\cong \frac{KM}{r^3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



شکل ۴- مقایسه شتاب گرانش در مدل کروی و بیضوی

ضمناً از خطای محاسباتی مربوط به محاسبه شتاب گرانش زمین که جدا از خطایی است که بدلیل ناپایداری کانال ارتفاع و موارد دیگر ایجاد می شود نیز در این محاسبات چشم پوشی شده است. بنابراین معادلات دیفرانسیل خطای موقعیت در دستگاه ناوبری بصورت غیرخطی زیر خلاصه خواهد شد :

$$\ddot{\delta x}^n = \frac{\partial g^n}{\partial x^n} \delta x^n + \delta g^n + \delta f^n \quad (8)$$

$$\delta g^n = \delta g^i \approx 0$$

بنابراین معادلات دیفرانسیل مربوط به هر کانال موقعیت با ترکیب تمام روابط قبلی بصورت زیر بدست خواهند آمد:

معادله دیفرانسیل کانال اول :

$$\begin{aligned} \ddot{\delta x}_1 + \frac{KM}{r^3} \delta x_1 = \delta g_1 + \delta f_1 = \delta f^b(1) - \omega_3 \delta f^b(2)t + \omega_2 \delta f^b(3)t \\ + \delta \omega_{ib}^b(2)f^b(3)t - \delta \omega_{ib}^b(3)f^b(2)t \\ = \delta f^b(1) - [\omega_{ib}^b(3) - C_{13}(\omega_e \cos \phi + \frac{V_E}{N+h}) + C_{23}(\frac{V_N}{M+h}) \\ + C_{33}(\omega_e \sin \phi + \frac{V_E \tan \phi}{N+h})] \delta f^b(2)t + [\omega_{ib}^b(2) - C_{12}(\omega_e \cos \phi + \frac{V_E}{N+h}) + C_{22}(\frac{V_N}{M+h}) \\ + C_{32}(\omega_e \sin \phi + \frac{V_E \tan \phi}{N+h})] \delta f^b(3)t + \delta \omega_{ib}^b(2)f^b(3)t - \delta \omega_{ib}^b(3)f^b(2)t \end{aligned} \quad (9)$$

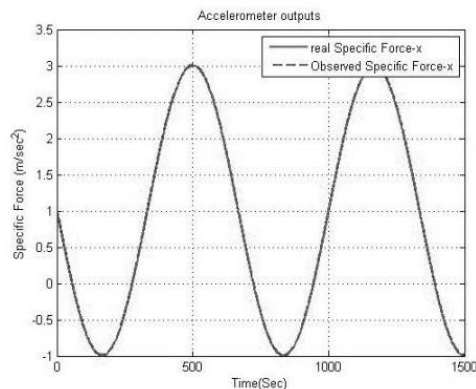
▪ شتاب سنج محور z ها :

$$f_{b_z} = \sin(0.00942t) - 11$$

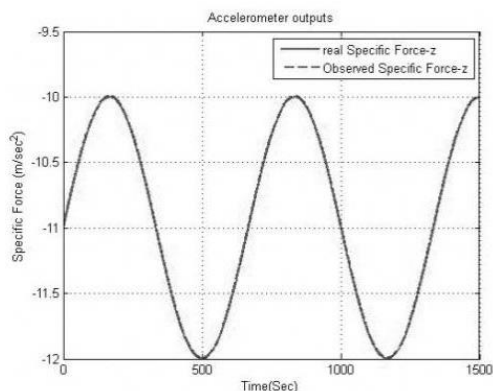
$$\delta f_{b_l} = \underbrace{(B_a + \eta_a - 11(S_a + N_a))}_{\text{Bias}} + \underbrace{(S_a + N_a)(\sin(0.00942t))}_{\text{Bias instability}}$$

$$B_a = 0.01 \frac{m}{s^2} \quad \eta_a = 0.003667 \frac{m}{s^2} \quad S_a = 0.0003 \text{ ppm} \quad N_a = 0.0001 \text{ rad}$$

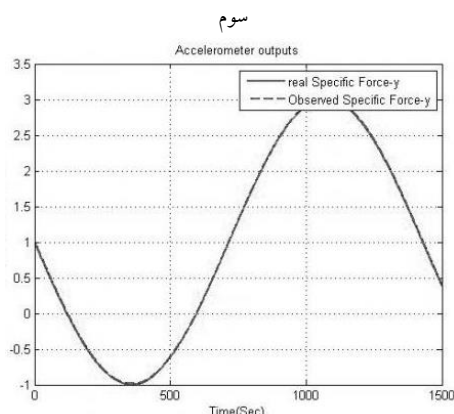
مقادیر اندازه گیری شده توسط شتاب سنج ها در اشکال ۵ تا ۷ نمایش داده شده اند.



شکل ۵- نمایش مقدار نیرو مخصوص اندازه گیری شده توسط شتاب سنج محور اول



شکل ۶- نمایش مقدار نیرو مخصوص اندازه گیری شده توسط شتاب سنج محور سوم



شکل ۷- نمایش مقدار نیرو مخصوص اندازه گیری شده توسط شتاب سنج محور دوم

آن به حساسیت نیز تعبیر می شود و در نهایت خطای ناهمترازی سنسورها مربوط به عدم تعامل محور سنسورها با یکدیگر و عدم انطباق بر محورهای صفحه ای است که روی آن قرار دارند.

واحد اندازه گیری نویز سفید و بایاس برای شتاب سنج معادل متر بر مجذور ثانیه یا میکروجی می باشد و برای ژيروسکوپ رادیان بر ثانیه یا درجه بر ثانیه است. همچنین واحد اندازه گیری ضریب تبدیل ppm^۹ به مفهوم تعداد در میلیون و واحد اندازه گیری ناهمترازی سنسورها نیز همان واحد اندازه گیری زاویه یعنی درجه یا رادیان است.

۲-۱- اثر بایاس و ناپایداری بایاس^{۱۰} شتاب سنج ها :

اگر رابطه ۱۲ را برای نیروی مخصوص اندازه گیری شده از شتاب سنج ها در نظر بگیریم به یک رابطه کلی برای خطای شتاب سنج ها می رسم:

$$f_{b_{obs}} = f_b + B_a + \eta_a + (S_a + N_a)f_b \quad (12)$$

$$\delta f_b = B_a + \eta_a + (S_a + N_a)f_b$$

به عنوان یک مدل فراگیر، خطای شتاب سنج ها و ژيروسکوپ ها را بصورت ترکیبی از مقدار ثابت و نوسانی در نظر گرفته و تاثیری که روی خروجی موقعیت اندازه گیری شده و میزان انحراف موقعیت می گذارد را به تفکیک بررسی می کنیم:

▪ شتاب سنج محور x ها :

$$f_{b_l} = 1 - 2\sin(0.00942t)$$

$$\delta f_{b_l} = \underbrace{(B_a + \eta_a + 1(S_a + N_a))}_{\text{Bias}} + \underbrace{(S_a + N_a)(-2\sin(0.00942t))}_{\text{Bias instability}}$$

$$B_a = 0.01 \frac{m}{s^2} \quad \eta_a = 0.003667 \frac{m}{s^2} \quad S_a = 0.0003 \text{ ppm} \quad N_a = 0.0001 \text{ rad}$$

که پارامترهای بالا به ترتیب بایاس، نویز سفید، ضریب تبدیل^{۱۱}، و ناهمترازی سنسورها^{۱۲} می باشد که در این بخش بدلیل اینکه مربوط به شتاب سنج ها می باشند با اندیس a و در بخش بعد که مربوط به ژيروسکوپ ها می باشند با اندیس ω نشان داده می شود.

▪ شتاب سنج محور y ها :

$$f_{b_2} = 1 - 2\sin(0.00439t)$$

$$\delta f_{b_l} = \underbrace{(B_a + \eta_a + 1(S_a + N_a))}_{\text{Bias}} + \underbrace{(S_a + N_a)(-2\sin(0.00439t))}_{\text{Bias instability}}$$

$$B_a = 0.01 \frac{m}{s^2} \quad \eta_a = 0.003667 \frac{m}{s^2} \quad S_a = 0.0003 \text{ ppm} \quad N_a = 0.0001 \text{ rad}$$

^۹ Part per million

^{۱۰} Bias instability

^{۱۱} Scale factor

^{۱۲} misalignment

یابند و به همین دلیل است که تاثیر خطای ژيروها در انحراف موقعیت خروجی بسیار بیشتر از تاثیر خطای شتاب سنج ها است که اعتبار سنجی این فرضیه در نتایج شبیه سازی اثبات خواهد شد.

۲-۲- اثر بایاس و ناپایداری بایاس ژيروسکوپ ها :

$$\omega_{b_{obs}} = \omega_b + B_\omega + \eta_\omega + (S_\omega + N_\omega)\omega_b$$

$$\delta\omega_b = B_\omega + \eta_\omega + (S_\omega + N_\omega)\omega_b$$

(۱۶)

▪ ژيروسکوپ محور x ها :

$$\omega_{b_1} = 0.0006252\sin(0.1256t + 2.081) + 0.0005144\sin(0.0628t + 0.3932)$$

$$+ 2.073 \times 10^{-6} \sin(0.09464t - 1.982) + 0.0003813\sin(0.09419t + 1.143)$$

$$+ 0.0003399\sin(0.0314t + 0.4299)$$

$$B_\omega = 4.846 \times 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \eta_\omega = 0.003667 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad S_\omega = 150 \times 10^{-6} \text{ ppm}$$

$$N_\omega = 0.0001 \text{ rad}$$

▪ ژيروسکوپ محور y ها :

$$\omega_{b_2} = 0.0003476\sin(0.000597t + 1.12) + 0.000145\sin(0.09509t - 1.352)$$

$$+ 0.0005322\sin(0.09403t - 0.4498) - 1.766 \times 10^{-5} \sin(0.0324t + 3.694)$$

$$+ 0.0005566\sin(0.03149t - 1.769)$$

$$B_\omega = 4.846 \times 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \eta_\omega = 0.003667 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad S_\omega = 150 \times 10^{-6} \text{ ppm}$$

$$N_\omega = 0.0001 \text{ rad}$$

▪ ژيروسکوپ محور z ها :

$$\omega_{b_3} = 0.001217\sin(0.03138t - 3.307) + 3.872 \times 10^{-5} \sin(0.03228t + 2.384)$$

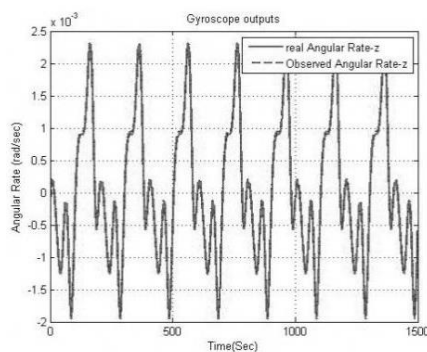
$$+ 0.0006949\sin(0.1256t - 0.0788) + 0.0004645\sin(0.0628t - 1.288)$$

$$- 7.966 \times 10^{-7} \sin(0.02383t - 0.1874)$$

$$B_\omega = 4.846 \times 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \eta_\omega = 0.003667 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad S_\omega = 150 \times 10^{-6} \text{ ppm}$$

$$N_\omega = 0.0001 \text{ rad}$$

مقادیر اندازه گیری شده توسط ژيروسکوپ ها در اشکال ۸ تا ۱۰ نشان داده شده اند:



شکل ۸- نمایش مقدار سرعت زاویه ای اندازه گیری شده توسط ژيروسکوپ محور سوم

▪ خطای موقعیت خروجی در اثر خطای شتاب سنج محور x ها (شکل ۳۰):
با صفر قراردادن $\delta\omega_{ib}^b$ در معادله دیفرانسیل اول خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \delta\ddot{x}_1 + \frac{KM}{I^3} \delta x_1 &= \delta g_1 + \delta f_1 = \delta f^b(1) - \omega_3 \delta f^b(2)t + \omega_2 \delta f^b(3)t \\ &= \delta f^b(1) - [\omega_{ib}^b(3) - C_{13}(\omega_e \cos\phi + \frac{V_E}{N+h}) + C_{23}(\frac{V_N}{M+h}) \\ &\quad + C_{33}(\omega_e \sin\phi + \frac{V_E \tan\phi}{N+h})] \delta f^b(2)t + [\omega_{ib}^b(2) - C_{12}(\omega_e \cos\phi + \frac{V_E}{N+h}) \\ &\quad + C_{22}(\frac{V_N}{M+h}) + C_{32}(\omega_e \sin\phi + \frac{V_E \tan\phi}{N+h})] \delta f^b(3)t \end{aligned} \quad (13)$$

▪ خطای موقعیت خروجی در اثر خطای شتاب سنج محور y ها (شکل ۳۱)
با صفر قراردادن $\delta\omega_{ib}^b$ در معادله دیفرانسیل دوم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \delta\ddot{x}_2 + \frac{KM}{I^3} \delta x_2 &= \delta g_2 + \delta f_2 = \omega_3 \delta f^b(1)t + \delta f^b(2) - \omega_1 \delta f^b(3)t \\ &= [\omega_{ib}^b(3) - C_{13}(\omega_e \cos\phi + \frac{V_E}{N+h}) + C_{23}(\frac{V_N}{M+h}) \\ &\quad + C_{33}(\omega_e \sin\phi + \frac{V_E \tan\phi}{N+h})] \delta f^b(1)t + \delta f^b(2) - [\omega_{ib}^b(1) - C_{11}(\omega_e \cos\phi + \frac{V_E}{N+h}) \\ &\quad + C_{21}(\frac{V_N}{M+h}) + C_{31}(\omega_e \sin\phi + \frac{V_E \tan\phi}{N+h})] \delta f^b(3)t \end{aligned} \quad (14)$$

▪ خطای موقعیت خروجی در اثر خطای شتاب سنج محور z ها (شکل ۳۲):
با صفر قراردادن $\delta\omega_{ib}^b$ در معادله دیفرانسیل سوم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \delta\ddot{x}_3 - 2 \frac{KM}{I^3} \delta x_3 &= \delta g_3 + \delta f_3 = -\omega_2 \delta f^b(1)t + \omega_1 \delta f^b(2)t + \delta f^b(3) \\ &= -[\omega_{ib}^b(2) - C_{12}(\omega_e \cos\phi + \frac{V_E}{N+h}) + C_{22}(\frac{V_N}{M+h}) \\ &\quad + C_{32}(\omega_e \sin\phi + \frac{V_E \tan\phi}{N+h})] \delta f^b(1)t + [\omega_{ib}^b(1) - C_{11}(\omega_e \cos\phi + \frac{V_E}{N+h}) \\ &\quad + C_{21}(\frac{V_N}{M+h}) + C_{31}(\omega_e \sin\phi + \frac{V_E \tan\phi}{N+h})] \delta f^b(2)t + \delta f^b(3) \end{aligned} \quad (15)$$

نکته بسیار مهمی که در تحلیل معادلات بالا باید به آن اشاره نمود این مطلب است که برابر صفر قرار دادن خطای ژيروها در هر ۳ محور جهت بدست آوردن میزان تاثیر خطای شتاب سنج ها در خطای موقعیت خروجی مربوط به خطای ژيروها در همان لحظه است و لذا ما در روابط خطای بالا فقط از خطای ژيروها در همان لحظه صرفنظر می کنیم در حالیکه تاثیر خطای ژيروها در زمان های قبلی طبق رابطه (۲)، در ω_i ها و C_{ij} هایی که در روابط خطای بالا به عنوان ضرایبی در δf^b ظاهر می شوند همچنان وجود دارد و بطور تصاعدی نیز با زمان افزایش می

$$\begin{aligned} \delta \ddot{x}_3 - 2 \frac{KM}{r^3} \delta x_3 &= \delta g_3 + \delta f_3 = \delta \omega_{ib}^b(1) f^b(2)t - \delta \omega_{ib}^b(2) f^b(1)t \\ &= \delta \omega_{ib}^b(1) f^b(2)t - \delta \omega_{ib}^b(2) f^b(1)t \end{aligned} \quad (19)$$

۳-۲- اثر شرایط اولیه (شکل ۳۳):

خطای موقعیت خروجی در اثر شرایط اولیه معادلات دیفرانسیل:

با صفر قراردادن $\delta \mathcal{F}^b$ و $\delta \omega_{ib}^b$ در معادلات دیفرانسیل اول تا سوم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta \ddot{x}_1 + \frac{KM}{r^3} \delta x_1 &= 0 \Rightarrow \delta x_1 = A_1 \cos \omega_s t + B_1 \sin \omega_s t \\ A_1 &= \delta x_1(0) \quad B_1 = \frac{\delta \dot{x}_1(0)}{\omega_s} \\ \delta \ddot{x}_2 + \frac{KM}{r^3} \delta x_2 &= 0 \Rightarrow \delta x_2 = A_2 \cos \omega_s t + B_2 \sin \omega_s t \\ A_2 &= \delta x_2(0) \quad B_2 = \frac{\delta \dot{x}_2(0)}{\omega_s} \\ \delta \ddot{x}_3 - 2 \frac{KM}{r^3} \delta x_3 &= 0 \Rightarrow \delta x_3 = A_3 \cos \omega_s t + B_3 \sin \omega_s t \\ A_3 &= \delta x_3(0) \quad B_3 = \frac{\delta \dot{x}_3(0)}{\omega_s} \\ \omega_s &= \sqrt{\frac{KM}{r^3}} = 124 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (20)$$

همانطور که ملاحظه شد معادلات دیفرانسیل خطا برای هر منبع خطا بطور مجزا استخراج گردید و بطور تحلیلی بررسی گردید ولی بدلیل عدم امکان حل عددی آنها نتایج شبیه سازی مربوط به هر منشا خطا در انتهای مقاله خواهد آمد و در بخش جمع بندی مورد تحلیل مجدد قرار خواهد گرفت.

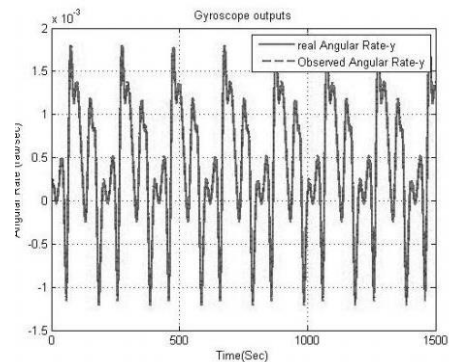
۳- استفاده از ردیاب ستاره برای کاهش خطای کانال ارتفاع سیستم ناوبری اینرسی بدون سکو:

همانطور که پیش تر بیان شد خطای همه کانال های موقعیت از جمله ارتفاع در دستگاه ناوبری که در نوع بدون سکو با آن سروکار داریم غیر از خطای شتاب سنچ ها به خطای ژيروسکوپ ها هم بستگی دارد. این نکته ما را بر آن می دارد که جهت اصلاح خطای کانال ارتفاع می توانیم به بهبود خطای مقادیر اندازه گیری شده توسط ژيروسکوپ ها در دستگاه بدنه و سپس ماتریس تبدیل وضعیت از بدنه به ناوبری که بر مقادیر اندازه گیری شتاب سنچ ها و ژيروسکوپ ها در دستگاه ناوبری تاثیر گذار است فکر کنیم.

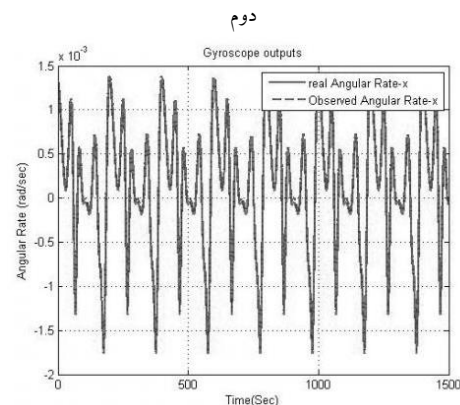
۳-۱- تعیین وضعیت توسط ردیاب ستاره:

همانگونه که در مقالات مختلف اشاره شده است جهت تعیین وضعیت با استفاده از ناوبری سماوی روشهای مختلفی وجود دارد که به شرح زیر می باشد [۱۶ و ۱۵]:

- ۱- روش استفاده از چند بردار (N Vector)
- ۲- روش Triad



شکل ۹- نمایش مقدار سرعت زاویه ای اندازه گیری شده توسط ژيروسکوپ محور



شکل ۱۰- نمایش مقدار سرعت زاویه ای اندازه گیری شده توسط ژيروسکوپ محور اول

خطای موقعیت خروجی در اثر خطای ژيروسکوپ محور X ها (شکل ۲۷):

با صفر قراردادن δf^b در معادله دیفرانسیل اول خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta \ddot{x}_1 + \frac{KM}{r^3} \delta x_1 &= \delta g_1 + \delta f_1 = \delta \omega_{ib}^b(2) f^b(3)t - \delta \omega_{ib}^b(3) f^b(2)t \\ &= \delta \omega_{ib}^b(2) f^b(3)t - \delta \omega_{ib}^b(3) f^b(2)t \end{aligned} \quad (17)$$

خطای موقعیت خروجی در اثر خطای ژيروسکوپ محور Y ها (شکل ۲۸):

با صفر قراردادن $\delta \mathcal{F}^b$ در معادله دیفرانسیل دوم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta \ddot{x}_2 + \frac{KM}{r^3} \delta x_2 &= \delta g_2 + \delta f_2 = \delta \omega_{ib}^b(3) f^b(1)t - \delta \omega_{ib}^b(1) f^b(3)t \\ &= \delta \omega_{ib}^b(3) f^b(1)t - \delta \omega_{ib}^b(1) f^b(3)t \end{aligned} \quad (18)$$

خطای موقعیت خروجی در اثر خطای ژيروسکوپ محور Z ها (شکل ۲۹):

با صفر قراردادن $\delta \mathcal{F}^b$ در معادله دیفرانسیل سوم خواهیم داشت:

با فرض اینکه ستاره های در دسترس قبلا در فاز شناسایی مورد شناسایی قرار گرفته و ID آنها برای ما معلوم است و لذا بردار یکه هر ستاره در کاتالوگ برای ما مشخص است داریم:

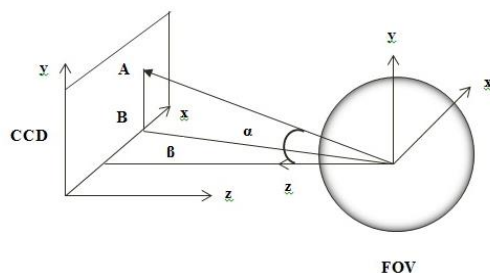
$$S = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{CRF} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{bmatrix} \quad (23)$$

همچنین با توجه به اینکه میدان دید سنسور در اینجا ۸ درجه در ۸ درجه می باشد و لذا زاویه جدایی محور سوم دوربین از ستارگان موجود در هر صفحه تشکیل دهنده تصویر نمی تواند بیشتر از ۴ درجه باشد بنابراین در هر لحظه زاویه بین محور سوم^{۱۵} صفحه تشکیل دهنده تصویر در دستگاه اینرسی و تمامی ستارگان در پایگاه داده پردازشگر بررسی و ستارگان موجود در آن دستگاه با توجه به وضعیت ناو مشخص می شوند:

$\cos^{-1}(S_i \cdot R_{CRF_{boresight}}) < 4^\circ \Rightarrow S_i$ is in Frame
سپس جهت رسم ستاره در دستگاه تشکیل دهنده تصویر ستاره، مختصات ستاره های موجود در دستگاه بصورت میلیمتر به طریق زیر محاسبه می شود:

$$\begin{bmatrix} x_{mm} \\ y_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{SCF} f \\ Z_{SCF} \\ Y_{SCF} f \\ Z_{SCF} \end{bmatrix} \quad (24)$$

ضمنا بر حسب بعد و ارتفاع ستاره نیز موقعیت ستاره در صفحه مذکور بصورت زیر خواهد بود:



شکل ۱۱- نمایش نحوه تشکیل تصویر ستاره در CCD

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{x}{z} \quad (25)$$

$$x_{mm} = \tan \beta \times f$$

$$y_{mm} = \tan \alpha \times \frac{f}{\cos \beta}$$

با توجه به روشهای مختلف تعیین وضعیت، بدلیل اینکه از روش NVector در این مقاله استفاده شده است به معرفی روابط آن می پردازیم:
این روش همه بردارهای مشاهده ستارگان را در یک ماتریس قرار می دهد و سپس با استفاده از بردار متناظر ستاره مورد نظر در کاتالوگ ستاره یا همان

۳- روش Quest

۴- روش Q Method

۵- روش Least Square

هر یک از روشهای فوق به تفصیل مورد شبیه سازی و تحلیل و بررسی قرار گرفتند و مزایا و معایب هر یک با توجه به اینکه نویز و اغتشاش بر روی کدام سنسور ستاره قرار گیرد بررسی گردیدند. در ادامه بدلیل مزایای روش N Vector از این روش جهت تعیین وضعیت استفاده خواهیم کرد.

۳-۲- شبیه سازی سنسور ستاره ای:

جهت تولید اطلاعات سنسور ستاره ای، ۱۵۰۰۰ تصویر با نرخ نمونه برداری ۰٫۱ ثانیه جهت پرواز ۱۵۰۰ ثانیه ای جسم پرنده مورد استفاده قرار گرفته اند: مشخصات نامی لنز سنسور ستاره ای به شرح ذیل می باشد:

$$\begin{aligned} FOV &= 8^\circ \times 8^\circ \\ f &= 107 \text{ mm} \\ \text{Pixel No} &= 1024 \\ \text{Pixel Size} &= 1.5 \times 10^{-5} \\ FOV &= 2 \times \tan^{-1} \left(\frac{W}{2 \times f} \right) \\ \text{Sampletime} &= 0.1 \text{ s} = 10 \text{ hz} \end{aligned} \quad (21)$$

FOV^{۱۳} که همان میدان دید سنسور ستاره ای می باشد ۸ درجه در ۸ درجه در نظر گرفته شده است که با فرض ۱۰۷ میلیمتری بودن فاصله کانونی عدسی دوربین (f) و داشتن مقدار قطر عدسی (W) قابل بدست آوردن است. همچنین تعداد پیکسل و سائز هر پیکسل به وضوح تشکیل تصویر ستارگان در دوربین کمک می نماید که در این مقاله ۱۰۲۴ پیکسل انتخاب شده است.

با فرض صفر بودن مختصات X و Y محور سوم (boresight) صفحه تشکیل دهنده تصویر (CCD)^{۱۴} در دوربین، مختصات این محور در دستگاه بدنه بصورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} X_{SCF_{boresight}} &= \frac{X_{mm_{boresight}}}{\sqrt{X_{mm_{boresight}}^2 + Y_{mm_{boresight}}^2 + f^2}} \\ Y_{SCF_{boresight}} &= \frac{Y_{mm_{boresight}}}{\sqrt{X_{mm_{boresight}}^2 + Y_{mm_{boresight}}^2 + f^2}} \\ Z_{SCF_{boresight}} &= \frac{f}{\sqrt{X_{mm_{boresight}}^2 + Y_{mm_{boresight}}^2 + f^2}} \\ R_{SCF_{boresight}} &= \begin{bmatrix} X_{SCF_{boresight}} \\ Y_{SCF_{boresight}} \\ Z_{SCF_{boresight}} \end{bmatrix} \\ R_{CRF_{boresight}} &= C_b^i \times R_{SCF_{boresight}} \end{aligned} \quad (22)$$

¹³ Field of View

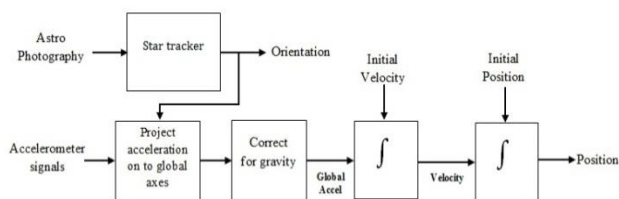
¹⁴ Charge-Coupled device

¹⁵ Boresight

شکل ۱۴- نمایش ستارگان در فریم اول (ثانیه ۱۰۰۰ ام)

۳-۲- بازنویسی روابط ناوبری اینرسی با استفاده از ترکیب اطلاعات ردیاب ستاره و ناوبری اینرسی:

راهبرد اصلی در این مقاله کاهش خطای وضعیت و موقعیت ناوبری اینرسی به کمک ردیاب ستاره می باشد. لذا با استفاده از تخمین وضعیت در دستگاه اینرسی توسط ردیاب ستاره و استفاده از روابط ناوبری اینرسی اقدام به کاهش خطای وضعیت و سپس موقعیت در هر سه کانال می نمایم که در روابط ۲۶ تا ۳۳ و شکل ۳-۵ آمده است.



شکل ۱۵- بلوک دیاگرام سیستم ترکیبی ناوبری اینرسی و ردیاب ستاره

$$\Omega_{ibcorrected}^b(t) = \frac{C_{bStarTracker}^i(t+1) - C_{bStarTracker}^i(t)}{C_{bStarTracker}^i(t) \times \text{Sampletime}} \quad (26)$$

از رابطه بالا مقدار اصلاح شده $\omega_{ibcorrected}^b$ بدست می آید که از آن می توان $\omega_{nbcorrected}^b$ را بصورت زیر نوشت:

پس از این مرحله نوبت به محاسبه شتاب گرانش تصحیح شده و نوشتن معادلات انتگرالی شتاب، سرعت و موقعیت جدید است:

$$\omega_{nbcorrected}^b = \omega_{ibcorrected}^b - C_{bcorrected}^n (\omega_{iecorrected}^n + \omega_{encorrected}^n) \quad (27)$$

$$\omega_{iecorrected}^n = \begin{bmatrix} \omega_{ie} \cos \phi_{corrected} \\ 0 \\ \omega_{ie} \sin \phi_{corrected} \end{bmatrix}$$

$$\omega_{encorrected}^n = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{corrected} \cos \phi_{corrected} \\ \dot{\phi}_{corrected} \\ \dot{\lambda}_{corrected} \sin \phi_{corrected} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{Ecorrected}}{N + h_{corrected}} \\ \frac{v_{Ncorrected}}{N + h_{corrected}} \\ \frac{v_{Ecorrected} \tan \phi_{corrected}}{N + h_{corrected}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

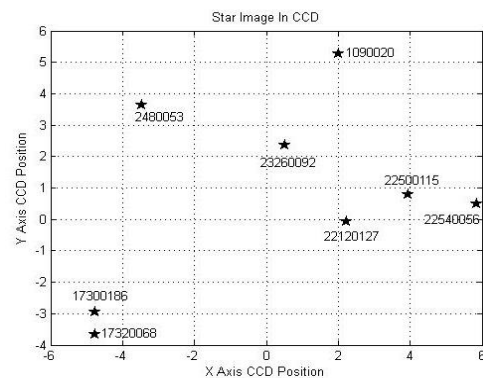
$$\omega_{nbcorrected}^n = \begin{bmatrix} \omega_{ibcorrected}^b(1) \\ \omega_{ibcorrected}^b(2) \\ \omega_{ibcorrected}^b(3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}_{corrected}$$

دستگاه اینرسی که با استفاده از تکنیک های شناسایی ستاره شناسایی شده است اقدام به تعیین وضعیت در دستگاه اینرسی می نماید.

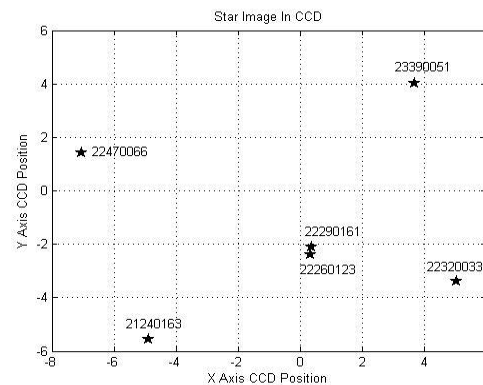
زمانی که ماتریس غیر مربعی است: $C_b^i = R^i (R^b)^T [R^b (R^b)^T]^{-1}$
زمانی که ماتریس مربعی است: $C_b^i = R^i (R^b)^T$

این روش برای تعیین وضعیت نیاز به حداقل ۳ بردار ستاره کاملاً مجزا دارد ولی بدلیل اینکه همه بردارها دارای سهم واحد در تعیین وضعیت هستند بنابراین وجود نویز روی هر یک از سنسورهای ستاره در صورتیکه ۳ بردار دریافتی از سنسورهای مختلفی باشند تفاوتی ندارد.

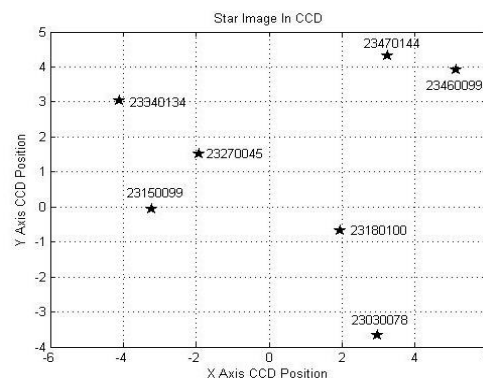
۳ فریم ستاره ها در ثانیه های ۱۰۰ و ۵۰۰ و ۱۰۰۰ از بین ۱۵۰۰۰ فریم ستاره عکسبرداری شده به همراه ID ستاره هایی که در هر فریم مورد شناسایی قرار گرفته اند بصورت زیر می باشد.



شکل ۱۲- نمایش ستارگان در فریم اول (ثانیه ۱۰۰ ام)



شکل ۱۳- نمایش ستارگان در فریم اول (ثانیه ۵۰۰ ام)



$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{corrected}}^n = \mathbf{D}_{\text{corrected}}^{-1} \mathbf{y}_{\text{corrected}}^n$$

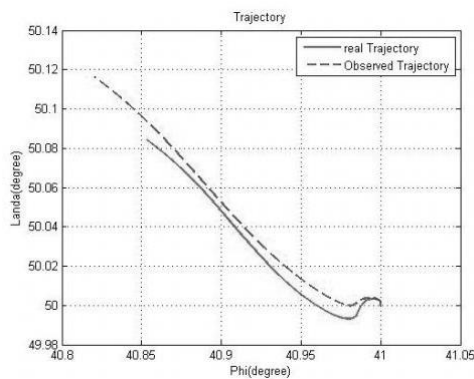
$$\mathbf{D}_{\text{corrected}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M+h_{\text{corrected}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(N+h_{\text{corrected}})\cos\phi_{\text{corrected}}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{\text{corrected}}^n(t+1) = \mathbf{r}_{\text{corrected}}^n(t) + \dot{\mathbf{r}}_{\text{corrected}}^n(t) \times t_{\text{SampleTime}} \quad (33)$$

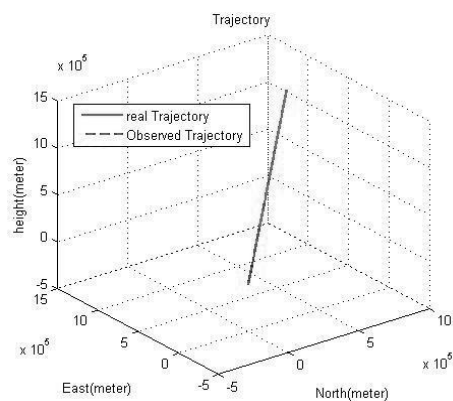
و بدین ترتیب موقعیت های جدید در کانال های مختلف بدست آمده و میزان تصحیح در هر کانال مشخص می گردد.

۴- نتایج شبیه سازی های انجام شده :

مسیر سه بعدی حرکت ماهواره بری که ناوبری آن مدلسازی شده و تغییرات طول و عرض جغرافیایی مسیر در اشکال ۴-۱ و ۴-۲ آورده شده اند.



شکل ۱۶- نمایش مسیر حرکت پرتابه در مختصات جغرافیایی



شکل ۱۷- نمایش مسیر حرکت پرتابه بر حسب طول و عرض جغرافیایی

خطای موقعیت بهبود یافته در اشکال ۱۸ تا ۲۰ آورده شده اند.

$$\times \begin{bmatrix} \omega_{ie} \cos\phi_{\text{corrected}} + \frac{V_{E_{\text{corrected}}}}{N+h_{\text{corrected}}} \\ \frac{V_{N_{\text{corrected}}}}{N+h_{\text{corrected}}} \\ \omega_{ie} \sin\phi_{\text{corrected}} + \frac{V_{E_{\text{corrected}}} \tan\phi_{\text{corrected}}}{N+h_{\text{corrected}}} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_{ib_{\text{corrected}}}^b(1) - C_{11}(\omega_{ie} \cos\phi_{\text{corrected}} + \frac{V_{E_{\text{corrected}}}}{N+h_{\text{corrected}}}) \\ -C_{12}(\frac{V_{N_{\text{corrected}}}}{N+h_{\text{corrected}}}) - C_{13}(\omega_{ie} \sin\phi_{\text{corrected}} + \frac{V_{E_{\text{corrected}}} \tan\phi_{\text{corrected}}}{N+h_{\text{corrected}}}) \\ \omega_{ib_{\text{corrected}}}^b(2) - C_{21}(\omega_{ie} \cos\phi_{\text{corrected}} + \frac{V_{E_{\text{corrected}}}}{N+h_{\text{corrected}}}) \\ -C_{22}(\frac{V_{N_{\text{corrected}}}}{N+h_{\text{corrected}}}) - C_{23}(\omega_{ie} \sin\phi_{\text{corrected}} + \frac{V_{E_{\text{corrected}}} \tan\phi_{\text{corrected}}}{N+h_{\text{corrected}}}) \\ \omega_{ib_{\text{corrected}}}^b(3) - C_{31}(\omega_{ie} \cos\phi_{\text{corrected}} + \frac{V_{E_{\text{corrected}}}}{N+h_{\text{corrected}}}) \\ -C_{32}(\frac{V_{N_{\text{corrected}}}}{N+h_{\text{corrected}}}) - C_{33}(\omega_{ie} \sin\phi_{\text{corrected}} + \frac{V_{E_{\text{corrected}}} \tan\phi_{\text{corrected}}}{N+h_{\text{corrected}}}) \end{bmatrix}$$

و رابطه وضعیت بهبود یافته بصورت زیر بدست می آید:

$$\Omega_{nb_{\text{corrected}}}^b = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{nb_{\text{corrected}}}^b(3) & -\omega_{nb_{\text{corrected}}}^b(2) \\ -\omega_{nb_{\text{corrected}}}^b(3) & 0 & \omega_{nb_{\text{corrected}}}^b(1) \\ \omega_{nb_{\text{corrected}}}^b(2) & -\omega_{nb_{\text{corrected}}}^b(1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{b_{\text{corrected}}}^n = \Omega_{nb_{\text{corrected}}}^b \mathbf{C}_{b_{\text{corrected}}}^n$$

(30)

ولی اینکه وضعیت توسط ردیاب ستاره چگونه بدست می آید موضوع مفصل و مورد بحث مقاله دیگری است که جداگانه در آن به این موضوع

پرداخته شده است

رابطه مربوط به شتاب نیز بصورت زیر است:

$$\dot{\mathbf{V}}_{e_{\text{corrected}}}^n = \mathbf{C}_{b_{\text{corrected}}}^n \mathbf{f}^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \mathbf{V}_{e_{\text{corrected}}}^n + \mathbf{g}_{e_{\text{corrected}}}^n$$

$$\mathbf{g}_{i_{\text{corrected}}}^n = \mathbf{g} - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \mathbf{r}_{i_{\text{corrected}}}^n)$$

(31)

همچنین رابطه مربوط به سرعت از حل معادله دیفرانسیل زیر بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{N_{\text{corrected}}} \\ \dot{V}_{E_{\text{corrected}}} \\ \dot{V}_{D_{\text{corrected}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_{N_{\text{corrected}}} \\ V_{E_{\text{corrected}}} \\ V_{D_{\text{corrected}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_N + \bar{g}_N \\ f_E + \bar{g}_E \\ f_D + \bar{g}_D \end{bmatrix}$$

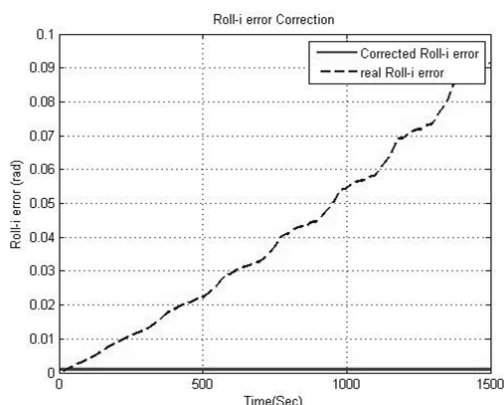
$$A_{12} = -(\dot{\lambda}_{\text{corrected}} + 2\omega_e) \sin\phi_{\text{corrected}}$$

$$A_{13} = \dot{\phi}_{\text{corrected}}$$

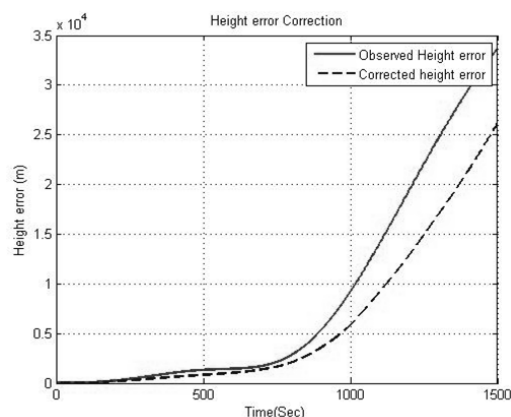
$$A_{23} = (\dot{\lambda}_{\text{corrected}} + 2\omega_e) \cos\phi_{\text{corrected}}$$

(32)

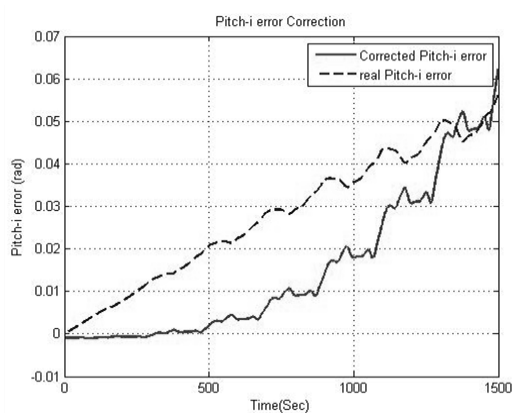
و در نهایت موقعیت جدید از روابط زیر بدست می آید:



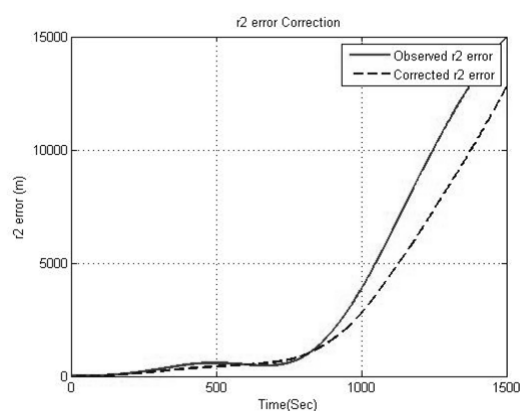
شکل ۲۱- نمایش خطای تصحیح شده Roll در دستگاه اینرسی به کمک وضعیت بدست آمده از Star tracker



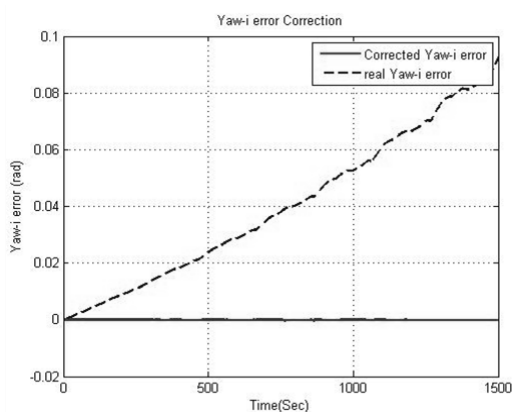
شکل ۱۸- نمایش خطای تصحیح شده مولفه سوم موقعیت (در دستگاه مختصات زمینی) به کمک وضعیت بدست آمده از Star tracker



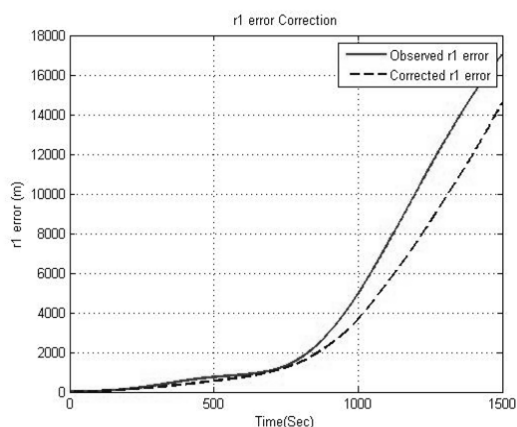
شکل ۲۲- نمایش خطای تصحیح شده Pitch در دستگاه اینرسی به کمک وضعیت بدست آمده از Star tracker



شکل ۱۹- نمایش خطای تصحیح شده مولفه دوم موقعیت (در دستگاه مختصات زمینی) به کمک وضعیت بدست آمده از Star tracker



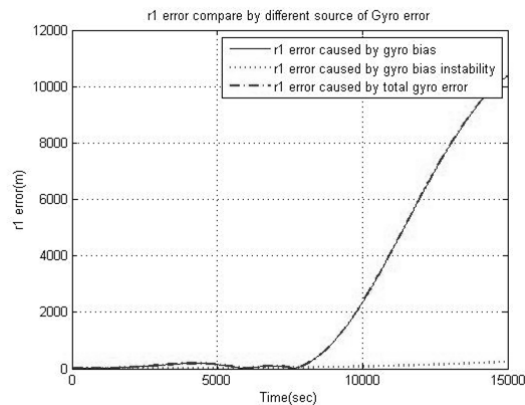
شکل ۲۳- نمایش خطای تصحیح شده Yaw در دستگاه اینرسی به کمک وضعیت بدست آمده از Star tracker



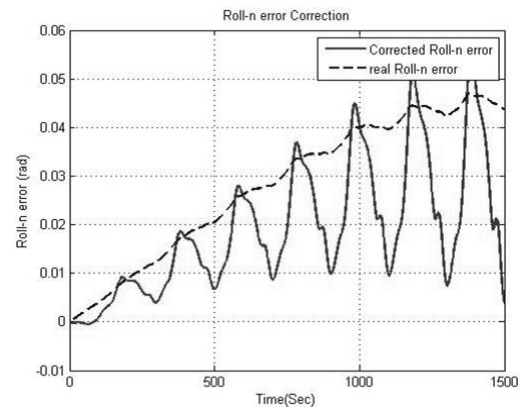
شکل ۲۰- نمایش خطای تصحیح شده کانال ارتفاع به کمک وضعیت بدست آمده از Star tracker

خطای وضعیت بهبود یافته در چارچوب ناوبری در اشکال ۲۴ تا ۲۶ رسم شده اند.

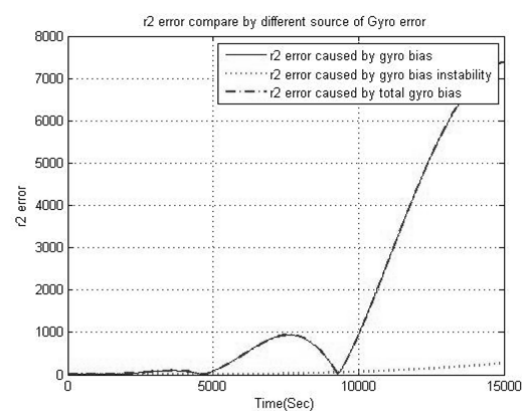
خطای وضعیت بهبود یافته در چارچوب اینرسی در اشکال ۲۱ تا ۲۳ نمایش داده شده اند.



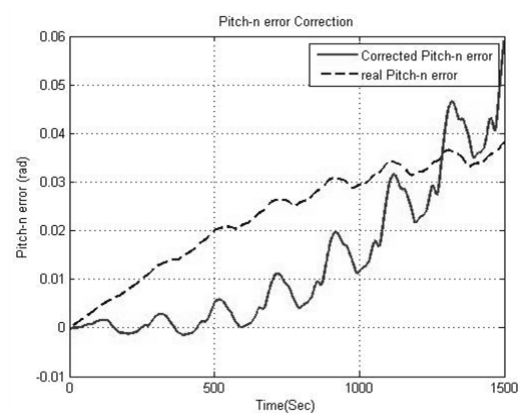
شکل ۲۷- نمایش خطای مولفه اول موقعیت (در دستگاه مختصات زمینی) ناشی از خطاهای مختلف ژيروسکوپ ها



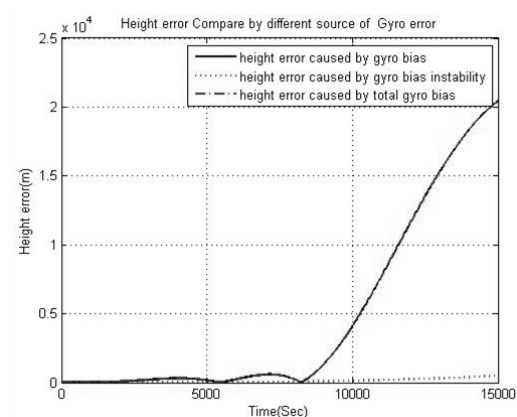
شکل ۲۴- نمایش خطای تصحیح شده Roll در دستگاه ناوبری به کمک وضعیت بدست آمده از Star tracker



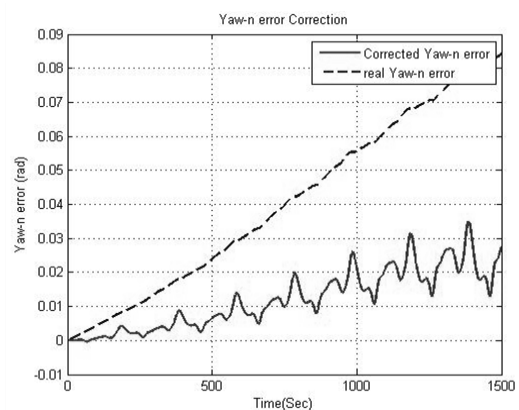
شکل ۲۸- نمایش خطای مولفه دوم موقعیت (در دستگاه مختصات زمینی) ناشی از خطاهای مختلف ژيروسکوپ ها



شکل ۲۵- نمایش خطای تصحیح شده Pitch در دستگاه ناوبری به کمک وضعیت بدست آمده از Star tracker



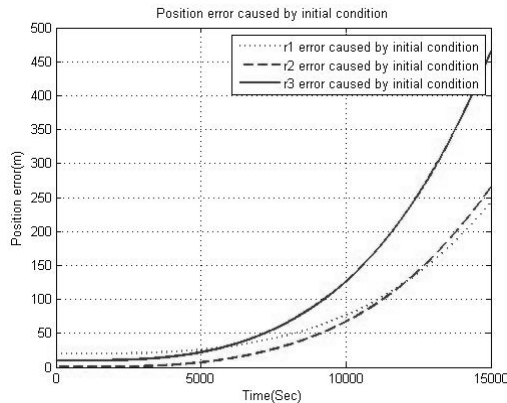
شکل ۲۹- نمایش خطای کانال ارتفاع ناشی از خطاهای مختلف ژيروسکوپ ها



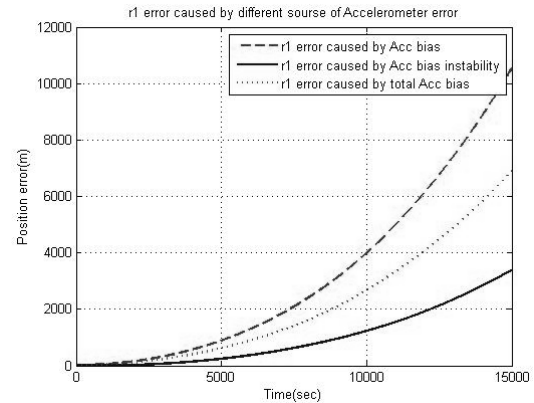
شکل ۲۶- نمایش خطای تصحیح شده Yaw در دستگاه ناوبری به کمک وضعیت بدست آمده از Star tracker

خطای موقعیت ناشی از خطای شتاب سنج ها در اشکال ۳۰ تا ۳۲ آورده شده اند.

خطای موقعیت ناشی از خطای ژيروسکوپ ها در اشکال ۲۷ تا ۲۹ دیده می شوند.



شکل ۳۳- نمایش خطای کانال های مختلف موقعیت ناشی از شرایط اولیه



شکل ۳۰- نمایش خطای مولفه اول موقعیت (در دستگاه مختصات زمینی) ناشی از خطاهای مختلف شتاب سنج ها

۴-۱- نتایج بخش ترکیب اطلاعات INS و ردیاب ستاره :

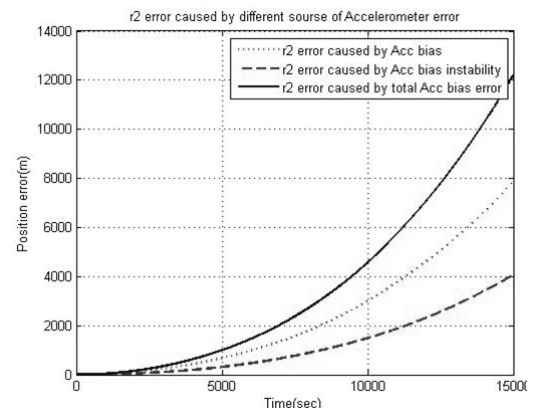
آنچه از نتایج این بخش قابل بیان است بصورت نکات زیر خلاصه می شود :

۱- میزان تاثیر خطای ژيروسکوپ ها در انحراف موقعیت خروجی در هر سه کانال (شکلهای ۲۷ تا ۲۹) بیشتر از میزان تاثیر خطای شتاب سنج ها (شکلهای ۳۰ تا ۳۲) می باشد. علت این امر را می توان از روی روابط قبل به اینصورت توجیه نمود که در روابط ناوبری اینرسی در دستگاه ناوبری، ماتریس وضعیت و به دنبال آن سرعت زاویه ای که خطای ژيروسکوپ ها در آن منعکس می شوند حضور بیشتری نسبت به نیروی مخصوصی که شتاب سنج ها اندازه گیری می کنند دارد یا به عبارت بهتر خطای ژيروسکوپ ها بصورت تصاعدی و بازگشتی در خطای موقعیت خروجی نقش ایفا می کنند

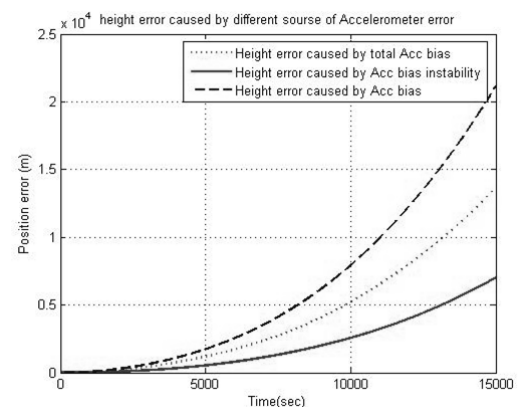
۲- خطای کانال ارتفاع بدلیل ناپایداری این کانال نسبت به دو کانال دیگر بدلیل اینکه خطای شتاب گرانش نسبت به موقعیت سوم یعنی ارتفاع دارای فیدبک مثبت و به عبارتی فزاینده می باشد در تمامی موارد فوق دارای خطای بیشتری نسبت به کانال های دیگر می باشد (شکلهای ۲۷ و ۳۲). لذا هنگام شبیه سازی نیز می بینیم که خطای کانال ارتفاع در مدت زمان ثابت ۲۵ دقیقه دارای انحراف بیشتری نسبت به خطای دو کانال دیگر می باشد (حدود ۸ کیلومتر) که این اختلاف به مرور زمان بصورت تصاعدی افزایش می یابد.

۳- بدلیل آنکه خطای موقعیت خروجی وابسته به خطای شتاب سنج ها و ژيروسکوپ ها می باشد و راهکار اندیشیده شده جایگزینی وضعیت بدست آمده از ردیاب ستاره با وضعیت بدست آمده از ژيروسکوپ ها در دستگاه اینرسی است، لذا خطای موقعیت بخصوص ارتفاع بطور کامل تصحیح نمی یابد، ولی در ارتفاع تا حدود ۹ کیلومتر (شکل ۱۸) و در ۲ کانال دیگر تا حدود ۳ کیلومتر (شکلهای ۱۹ و ۲۰) بهبود خطا داریم که در نوع خود قابل توجه است.

۴- بهبود وضعیتی که توسط ردیاب ستاره در دستگاه اینرسی انجام می گیرد (شکلهای ۲۱ تا ۲۳) نسبت به INS قابل توجه و بسیار بهتر است اما در دستگاه ناوبری (شکلهای ۲۴ تا ۲۶) بدلیل اینکه خطای موقعیت



شکل ۳۱- نمایش خطای مولفه دوم موقعیت (در دستگاه مختصات زمینی) ناشی از خطاهای مختلف شتاب سنج ها



شکل ۳۲- نمایش خطای کانال ارتفاع ناشی از خطاهای مختلف شتاب سنج ها

نمایش خطای موقعیت ناشی از خطای شرایط اولیه نیز در شکل ۳۳ ملاحظه می شود.

جدول شماره ۴: میزان بهبود ایجاد شده در کانال های مختلف

خطای مولفه Z موقعیت(متر)	خطای مولفه Y موقعیت(متر)	خطای مولفه X موقعیت(متر)	منشا خطای موقعیت
۱۸۰۰۰	۱۴۰۰۰	۱۴۰۰۰	تمام خطای ایجاد شده توسط شتاب سنج ها و ژيروسکوپ ها
۸۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	میزان کاهش خطا

نتیجه گیری:

روابط و معادلات دیفرانسیلی که برای Strap down INS نوشته شد قبلاً در [۲] فقط برای Stable platform INS بیان شده بود، که در اینجا برای $SINS^{16}$ تعمیم داده شد. همچنین به تفکیک، اثر خطای شتاب سنج ها و ژيروسکوپ ها بر روی خطای موقعیت در ناوبری و مقایسه میزان تاثیر آنها در خروجی مورد بررسی دقیق قرار گرفت و نتایج تحلیلی و شبیه سازی نیز با یکدیگر مقایسه گردید. در پایان بهبود خطای کانال های مختلف موقعیت از جمله ارتفاع مورد بررسی و با موفقیت اجرا شد و با برقرار کردن ارتباط میان تعیین وضعیت توسط ردیاب ستاره و SINS، بهبود وضعیت در دستگاه مختصات اینرسی و ناوبری و کاهش خطای موقعیت انجام گرفت. در این تحقیق ترکیب اطلاعات SINS و ردیاب ستاره بدون استفاده از هیچ گونه فیلتر انجام شده است که ایده پیشنهادی این مقاله است.

مراجع:

- [1] Titterton D.H., Weston J.L., 2004, Strapdown Inertial navigation Technology, The American Institute of Aeronautics and Astronautics, ISBN 1-56347-693-1
- [2] Jekeli C., 2001, Inertial navigation systems with geodetic applications, Berlin; New York: de Gruyter, ISBN 3-11-015903-1.
- [3] Woodman O.J., 2007, An introduction to inertial navigation, Technical report No.696, University of Cambridge computer laboratory.
- [4] Keyton M., Walter R.1997. Avionics Navigation Systems, John wiley&sons, ISBN 978-0471547952
- [5] Ali J, 2010, Strapdown inertial navigation system/astronavigation system data synthesis using innovation-based fuzzy adaptive Kalman filtering,

و بخصوص ارتفاع در ماتریس تبدیل وضعیت بدنه نسبت به ناوبری وارد می شود و بطور غیر مستقیم بر وضعیت در دستگاه ناوبری تاثیر گذار است و همچنین خطاهای انتگرال گیری ماتریس وضعیت نیز بی تاثیر نیست لذا اگرچه باز هم نسبت به وضعیت محاسبه شده توسط INS بهبود داریم ولی این بهبود به میزان انجام شده در دستگاه اینرسی نمی باشد.

ضمناً در جدول زیر مقایسه تاثیر منسأهای مختلف خطا در خطای کانال های مختلف موقعیت (در فریم زمینی) و همچنین تاثیر ترکیب ردیاب ستاره و ناوبری اینرسی در کاهش خطای موقعیت خروجی ارائه شده است:

جدول شماره ۱: خطای کانال های مختلف موقعیت ناشی از خطای شتاب سنج ها

خطای مولفه Z موقعیت(متر)	خطای مولفه Y موقعیت(متر)	خطای مولفه X موقعیت(متر)	منشا خطای موقعیت
۲۱۰۰۰	۸۰۰۰	۱۰۲۰۰	خطای ناشی از بایاس شتاب سنج ها
۷۰۰۰	۴۰۰۰	۳۸۰۰	خطای ناشی از ناپایداری بایاس شتاب سنج ها
۱۴۰۰۰	۱۲۰۰۰	۶۳۰۰	کل خطای ناشی از شتاب سنج ها

جدول شماره ۲: خطای کانال های مختلف موقعیت ناشی از خطای ژيروسکوپ ها

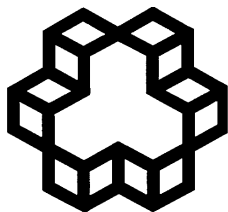
خطای مولفه Z موقعیت(متر)	خطای مولفه Y موقعیت(متر)	خطای مولفه X موقعیت(متر)	منشا خطای موقعیت
۲۱۰۰۰	۷۲۰۰	۱۰۲۰۰	خطای ناشی از بایاس ژيروسکوپ ها
۲۰۰	۲۰۰	۷۰۰	خطای ناشی از ناپایداری بایاس ژيروسکوپ ها
۲۱۲۰۰	۷۵۰۰	۱۱۰۰۰	کل خطای ناشی از ژيروسکوپ ها

جدول شماره ۳: خطای کانال های مختلف موقعیت ناشی از شرایط اولیه

خطای مولفه سوم موقعیت(متر)	خطای مولفه دوم موقعیت(متر)	خطای مولفه اول موقعیت(متر)	منشا خطای موقعیت
۴۶۰	۲۶۰	۲۵۰	خطای ناشی از شرایط اولیه

¹⁶ Strapdown inertial navigation system

- [12] Ali J, Fang J.C, 2004, In-flight alignment of inertial navigation system by celestial observation technique, International Symposium on Inertial Navigation Technology and Intelligent Traffic, Nanjing, China.
- [13] Ali J, Fang J.C., 2009, Realization of an autonomous integrated suite of strap down astro-inertial navigation systems using unscented particle filtering, Journal of Computers and Mathematics with Applications, pp. 169-183
- [14] Ali J, Changyun Z, Jiancheng F., 2006, An algorithm for astro-inertial navigation using CCD star sensors, Journal of Aerospace Science and Technology, Vol. 10, No. 5, pp. 449-454
- [15] Mortari D, Samaan M. A., Bruccoleri C, Junkins J. L, 2004, The Pyramid Star Identification Technique, Texas A&M University, ION Navigation, Vol. 51, No. 3, pp. 171-183
- [16] Cole C. L, Crassidis J. L, 2005, Fast Star Pattern Recognition Using Spherical Triangles, University at Buffalo, State University of New York, Amherst, NY 14260-4400,
- [17] George M. Siouris, 2004, Missile Guidance and Control System, Springer-Verlag Inc, New York, ISBN 978-0-387-00726-7
- IET Science, Measurement and Technology, Vol. 4, No. 5, PP. 246 - 255 .
- [6] Huffman M, 2006, Designing Star Trackers to Meet Microsatellite Requirements, Mater of Science in Aeronautics and Astronautics Thesis, Massachusetts Institute of technology.
- [7] Samaan M. A, 2003 , Toward Faster and More Accurate Star Sensors using Recursive Centroiding and Star Identification, Doctoral Dissertation in Aerospace Engineering, Texas A&M University.
- [8] Nemra A, Aouf N, 2010, Robust INS/GPS Sensor Fusion for UAV Localization Using SDRE Nonlinear Filtering, IEEE Sensors Journal, Vol. 10, No. 4, PP.789-798.
- [9] Kaplan G, 1995, Determining the Position and Motion of a Vessel from Celestial Observations Navigation, Journal of the Institute of Navigation, Vol. 42, No. 4, pp. 631-648
- [10] Levine S, 1990, Strapdown Astro-Inertial Navigation Utilizing the Optical Wide-angle Lens Star tracker, Journal of the Institute of Navigation, Vol. 37, No. 4, pp. 347-362.
- [11] Ali J, Fang J.C, 2006, SINS/ANS integration for augmented performance navigation solution using unscented Kalman filtering, Journal of Aerospace Science and Technology, Vol. 10, No. 3, pp. 233-238.



Industrial Control Center of Excellence
K.N. Toosi University of Technology

Journal of Control (ISSN 2008-8345)



A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology, Vol. 6, No. 4, Winter 2013.

Publisher: Iranian Society of Instrumentation and Control Engineers

Managing Director: Prof. Iraj Goodarznia

Editor-in-Chief: Prof. Ali Khaki-Sedigh

Tel: 84062317

Email: sedigh@kntu.ac.ir

Assistant Editor: Prof. Hamid Khaloozadeh, Dr. Alireza Fatehi

Executive Director: Prof. Hamid Khaloozadeh

Editorial Board:

Prof. A. Khaki-Sedigh, Prof. I. Goodarznia, Prof. H. Khaloozadeh, Prof. P. Jabedar-Maralani, Prof. A. Ghafari, Dr. H.R. Momeni (Associate Prof), Prof. S.K. Nikraves, Prof. M. Shafiee, Prof. B. Moshiri.

Advisory Board:

Dr. H.R. Momeni, Prof. B. Moshiri, Prof. M. Shafiee, Prof. A. Khaki-Sedigh, Prof. P. Jabedar-Maralani, Prof. A. Ghaffari, Prof. H. Khaloozadeh, Prof. H.R. Taghirad, Dr. K. Masroori, Dr. M.T. Bathaei, Dr. M.T. Hamidi-Beheshti, Dr. F. Jafarkazemi, Dr. R. Amjadifard, Prof. S.A. Mousavian, Prof. M. Teshnelab, Prof. M. Haeri, Prof. S.A. Safavi, Prof. H. Seifi, Dr. A. Kazemi, Dr. A. Fatehi, Prof. M.R. Akbarzadeh-Toutounchi, Prof. M. Golkar, Dr. N. Pariz, Dr. M. Javadi, Dr. J. Heirani-Nobari, Prof. F. Hossein-Babaei, Dr. B. Moaveni, Dr. M. Aliari-Shourehdeli, Dr. M. Arvan, Prof. M. Tavakoli-Bina.

The ISICE Board of Director:

Prof. Masoud Shafiee., Dr. Mohammad Reza Jahed Motlagh, Prof. Iraj Goodarznia, Prof. Behzad Moshiri, Prof. Ali Akbar Safavi, Dr. Mehrdad Javadi, Dr. Iman Mohammadzaman, Dr. Ali Ashrafmodarres, Ali Kiani.

P.O. Box 15815-3595, Tehran – IRAN

Tel : (+9821) 81032231

Fax: (+9821) 81032200

<http://www.isice.ir>

control@isice.ir



**A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and
the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology**

Vol. 6, No. 4, Winter 2013

Contents

- | | |
|---|-----------|
| Extension of Concepts and Theorems for Strictly Positive Real Transfer Function Matrices | 1 |
| Mojtaba Hakimi Moghaddam, Hamid Khaloozadeh | |
| Design and Manufacture of TDS Measurement and Control System for Water Purification in Reverse Osmosis by Classic PID with the Ability to Compensate Effects of Temperature on Measurement | 11 |
| Seyed Kamal-e-ddin Mousavi Mashhadi, Hamid Yadollahi | |
| Stability Analysis and Robust PID Control of Parallel Cable Robots with Positive Tensions | 23 |
| Mohammad A. Khosravi, Hamid D. Taghirad | |
| New Approach to Determine 6-DOF Position and Orientation of an Object Using its Image | 35 |
| Abdolhamid Bahjat Panah, Jafar Heyrani Nobari, Mahdieh Hosseingholizadeh Alashti | |
| Adaptive Kernel Radius in Estimating the Position of Moving Target Tracking based on Resampling Particle Filter Algorithm | 49 |
| Aghil Abiri, Mohammad Reza Mahzoun | |
| Error Analysis and Compensation of Inertial Navigation System Height Channel in High Altitudes Aiding Star Tracker | 61 |
| Amir Moghtadaei Rad, Jafar Heyrani Nobari, Amir Ali Nikkhah | |