مجله کنترل

ISSN 2008-8345

قطب علمی کنترل صنعتی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نشریه علمی- پژوهشی

انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- قطب کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲

فهرست مقالات

www.joc-isice.ir

مجله کنترل

(ISSN 2008-8345)

قطب علمی کنترل صنعتی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نشریه علمی- پژوهشی، انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- قطب کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ، جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲

پست الکترونیک: control@isice.ir

صاحب امتیاز: انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران

مدیر مسئول: پروفسور ایرج گودرزنیا

سردبیر: پروفسور علی خاکی صدیق- تلفن: ۸۴۰۶۲۳۱۷- پست الکترونیکی: sedigh@kntu.ac.ir

آدرس محل کار: خیابان دکتر شریعتی، پل سیدخندان، دانشکده برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

سمت: استاد دانشگاه

شورای سردبیری: پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور حمید خالوزاده، دکتر مهدی علیاری شوره دلی

دبیر اجرایی: دکتر مهدی علیاری شوره دلی- تلفن ۸۴۰۶۲۴۰۳- پست الکترونیکی aliyari@kntu.ac.ir

ایران - تهران، صندوق پستی ۳۵۹۵-۱۵۸۱۵

تلفن : ۸۱۰۳۲۲۲۳۱

فاکس: ۸۱۰۳۲۲۰۰

www.joc-isice.ir

به نام خدا

فهرست مقالات

مجله کنترل، مجله ای علمی – پژوهشی است که در برگیرنده تازه ترین نتایج تحقیقات نظری و کاربردی در علوم مختلف مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق می باشد. مقالات ارسالی به مجله کنترل می بایست به زبان فارسی و دارای چکیده انگلیسی باشند. از میان مباحث مورد نظر این مجله میتوان به موارد زیر اشاره نمود:

۱) مدل سازی، شناسایی، شبیه سازی، پیش بینی، بهینه سازی و پایش عملکرد سیستم ها.
۲) تحلیل و طراحی سیستم های کنترل پیشرفته از قبیل سیستم های کنترل خطی و غیرخطی، سیستم های کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم و کنترل بهینه، سیستم های کنترل هوشمند، سیستم های کنترل تصادفی، سیستم های کنترل گسسته پیشامد و ترکیبی، سیستم های ابعاد وسیع، سیستم های کنترل چندمتغیره.
۳) مکاترونیک و رباتیک.
۴) ابزار دقیق و سیستم های ترکیب داده و اطلاعات سنسوری.
۵) اتوماسیون صنعتی از قبیل سیستم های کنترل گسترده، رابط انسان – ماشین، سیستم های ایمنی و تشخیص خطا، تحلیل و طراحی سیستم های کنترل کسری، شناسایی و تشخیص عیب در سیستم ها، سیستم های کنترل پیچیده، سیستم های زمان حقیقی و سیستم های کنترل نظارتی.

کاربردهای مورد علاقه این مجله، وسیع بوده و می تواند در برگیرنده موارد زیر با شد:

۱) سیستم های هدایت و ناوبری.
۲) فرآیندهای صنعتی شامل فرآیندهای شیمیایی و بیوتکنولوژی.
۳) تولید و توزیع نیروی برق.
۴) مهندسی محیط زیست و هواشناسی.
۵) سیستم های اقتصادی و مالی.
۶) سیستم های اطلاعاتی، مخابراتی و شبکه های صنعتی.
۷) مهندسی پزشکی.

از کلیه پژوهشگران و کارشناسان فعال در زمینه های مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق دعوت بعمل می آید تا مقالات و نتایج آخرین دستاوردهای علمی و پژوهشی خود را به این مجله ارسال نمایند. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی به آدرس www.joc-isice.ir ارسال فرمایید. برای کسب اطلاعات بیشتر و دریافت نحوه تهیه و ارسال مقالات می توانید به سایت مجله با آدرس www.joc-isice.ir مراجعه نمایید.

شیوه تدوین

متن مقالات شامل چکیده، بدنه مقاله، مراجع و زیرنویس ها باید با فونت B Zar ۱۲ و با فاصله double میان خطوط، در صفحات A4 یک ستونی و تحت نرم‌افزار Word تهیه گردد.

آدرس نویسندگان

آدرس پستی کامل همه نویسندگان همراه با شماره تلفن و دورنگار(فکس) و نشانی پست الکترونیک(email) نویسنده عهده‌دار مکاتبات در برگه مستقلی چاپ و به همراه مقاله ارسال گردد.

چکیده

هر مقاله باید شامل، عنوان (فارسی و انگلیسی)، چکیده (فارسی و انگلیسی) مقاله در حداکثر ۲۰۰ واژه، کلیدواژه (فارسی و انگلیسی) در حداکثر ۵ واژه باشد.

تصاویر و عکسها

در هنگام ارسال مقاله جهت داوری نیازی به ارسال اصل تصاویر و عکس ها نمی‌باشد، ولی رونوشت ارسالی باید واضح باشد. پس از تایید مقاله، ارسال اصل تصاویر و عکس ها جهت چاپ مقاله ضروری می‌باشد.

مراجع

به کلیه مراجع باید در متن ارجاع داده شده باشد. مراجع باید با شماره مشخص گردند و جزئیات آنها به شرح زیر در پایان مقاله به ترتیب حروف الفبای نویسندگان ظاهر گردد:

مقالات: [شماره مرجع] نام خانوادگی و علامت اختصاری اول نام، سال انتشار یا تاریخ برگزاری، "عنوان مقاله"، *نام کامل نشریه یا کنفرانس*، شماره مجله یا شماره جلد، شماره صفحات.

کتابها: [شماره مرجع] نام خانوادگی و نام کامل همه نویسندگان، *عنوان کتاب*، نام مترجم (در صورت وجود)، نام کامل ناشر، سال انتشار.

واحدها: کلیه مقالات باید از واحد استاندارد SI (متریک) در تمام بخشهای مقاله استفاده نمایند. در کنار واحد SI می‌توان از واحد انگلیسی در داخل پرانتز نیز استفاده نمود.

طول مقالات

حداکثر حجم مقالات در هنگام چاپ ۱۵ صفحه می‌باشد که معادل حدود ۷۵۰۰ واژه می‌باشد. برای چاپ صفحات بیشتر و یا رنگی لازم است هزینه‌ای معادل ۵۰۰,۰۰۰ ریال برای هر صفحه به حساب مجله واریز گردد.

فرایند ارسال مقاله

مقالات قابل چاپ در مجله شامل مقالات کامل پژوهشی، مقالات کوتاه و یادداشتهای پژوهشی می باشد. مقالات ارسالی نباید در هیچ مجله داخلی و یا خارجی چاپ شده باشد و یا در حال داوری باشد.

- برای ارسال مقاله خود به سایت مجله به آدرس www.joc-isice.ir مراجعه نموده و طبق دستورالعمل مندرج در سایت عمل نمایید.
- مقالات جهت داوری به داوران متخصص ارسال می گردد. در پایان تایید یا رد هر مقاله توسط هیئت تحریریه مجله انجام خواهد پذیرفت. سردبیر مجله نتیجه داوری را برای نویسنده عهده‌دار مکاتبات ارسال خواهد نمود.
- در صورتی که نیاز به تصحیح مقاله باشد، تصحیحات باید تنها محدود به موارد ذکر شده باشد. در سایر موارد نویسنده لازم است سردبیر را در جریان هر گونه تغییر و یا تصحیح دیگری قرار دهد. در هر صورت مسئولیت صحت و سقم مطالب بر عهده نویسنده خواهد بود.

حق کپی: در صورت تایید مقاله، نویسندگان لازم است فرم انتقال حق انتشار آن به "انجمن مهندسان کنترل و ابزاردقیق ایران" را تکمیل و به همراه اصل مقاله ارسال نماید. نویسندگان لازم است موافقت کتبی دارندگان حق کپی بخش هایی از مقاله که از مراجع و منابع دیگر نسخه‌برداری شده است را دریافت و به دفتر مجله ارسال نمایند.

بدینوسیله از کلیه اساتید، پژوهشگران و کارشناسان مهندسی کنترل و ابزاردقیق جهت ارائه مقالات خود در این نشریه دعوت به عمل می‌آورد. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی از طریق سایت مجله به آدرس: www.joc-isice.ir ارسال نمایید.

مجله کنترل
جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۱۰-۱

کنترل غیر مبتنی بر مدل برای یک ربات چرخ‌دار به همراه یک دنبال‌رو

علی کیماسی خلجی [۱]، سید علی اکبر موسویان [۲]

[۱] فارغ‌التحصیل دکترای مهندسی مکانیک، گروه طراحی کاربردی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، keymasi@gmail.com

[۲] استاد مهندسی مکانیک، گروه طراحی کاربردی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، moosavian@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۲/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۴/۱۶)

چکیده: ربات متحرک چرخ‌دار به همراه یک دنبال‌رو یک سیستم رباتیکی چند بخشی است که از یک کشنده به همراه یک دنبال‌رو تشکیل می‌شود. تعقیب مسیرهای حرکت زمانی یکی از مسائل مطرح در زمینه‌ی ربات‌های متحرک چرخ‌دار است که در این مقاله به آن می‌پردازیم. در ابتدا معادلات سینماتیکی ربات متحرک استخراج می‌گردد. سپس، مسیرهای حرکت زمانی مرجع تولید می‌گردد. در ادامه یک کنترل غیر مبتنی بر مدل بر اساس روش ترانهاده‌ی ژاکوبیِ بهبود یافته برای ربات طراحی می‌گردد. قانون کنترلی پیشنهاد شده، ربات متحرک چرخ‌دار را به صورت مجانبی حول مسیرهای حرکت زمانی مرجع پایدار می‌سازد. در پایان نتایج تجربیِ پیاده‌سازیِ روش طراحی شده بر روی یک مدل آزمایشگاهی و مقایسه نتایج با کنترل مدل- مبنا ارائه می‌گردد. نتایج بدست آمده کارایی روش پیشنهاد شده را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: ربات متحرک چرخ‌دار، سیستم‌های غیر هولونومیک، تعقیب مسیرهای حرکت زمانی، روش ترانهاده‌ی ژاکوبیِ بهبود یافته.

Non-Model-Based Control Law for a Wheeled Robot Towing a Trailer

Ali Keymasi, Seyed Ali Akbar Moosavian

Abstract: Tractor-trailer wheeled robot (TTWR) is a modular robotic system that consists of a tractor module towing a trailer. Trajectory tracking is one of the challenging problems focused in the context of wheeled mobile robots (WMRs) that has been discussed in this paper. First, kinematic equations of TTWR are obtained. Then, reference trajectories for tracking problem are produced. Subsequently, a non-model-based control based on Modified Transpose Jacobian (MTJ) method is designed for the TTWR. The proposed controller steer the TTWR asymptotically follow reference trajectories. Finally, experimental results for implementation of the designed controller on an experimental setup in comparison with model-based algorithm are presented. Obtained results show the effectiveness of the proposed controller.

Keywords: Wheeled mobile robot, Nonholonomic systems, Trajectory Tracking, Modified Transpose Jacobian.

۱- مقدمه

امروزه کاربرد ربات‌های متحرک در سیستم‌های مهندسی در حال گسترش است. صنعت، کشاورزی و جنگلداری، معدنکاری، پزشکی و جراحی توسط کامپیوتر، توان‌بخشی و مراقبت سلامت، تجسس و نجات، کاربردهای خانگی (جاروبرقی‌ها، ماشین‌های چمن‌زنی و غیره)، استفاده در مکان‌های خطرناک یا دور از دسترس (فضا، ارتش، دفع پسماندهای هسته‌ای) و همچنین سرگرمی (فوتبال ربات‌ها، جنگ ربات‌ها) نمونه‌هایی از این کاربردها می‌باشند. بنابراین، مدلسازی و کنترل این سیستم‌ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است، [۱-۳]. ربات‌های متحرک چرخ‌دار یک نمونه از این سیستم‌ها هستند که به خاطر تماس میان چرخ‌ها با سطح زمین، مقید به قیود غیر هولونومیک می‌باشند. این قیود در اثر غلتش خالص چرخ‌ها در حرکت رو به جلو و عدم لغزش در جهت جانبی به وجود می‌آیند. در مرجع [۴] مدلسازی و ویژگیهای انواع مختلف ربات‌های چرخ‌دار ارائه شده و مورد بحث قرار گرفته است. به منظور عملکرد خودکار ربات‌های متحرک چرخ‌دار، مسائل کنترلی مختلفی در زمینه کنترل حرکت این سیستم‌ها در تحقیقات مورد توجه قرار گرفته است. تعقیب مسیر در فضای دکارتی [۵, ۶]، پایدارسازی حول وضعیت‌های مطلوب[۱] [۵, ۷] و تعقیب مسیرهای حرکت زمانی[۲] [۸, ۹] نمونه‌هایی از مسائل مطرح در این زمینه است.

ربات متحرک دارای دنبال‌رو یک سیستم رباتیکی چند بخشی و مقید به قیود غیر هولونومیک می‌باشد، که در این مقاله مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی مرجع آن مورد بررسی قرار گرفته است. کنترل این سیستم در محیط آزمایشگاهی به خاطر دینامیک غیرخطی، عدم قطعیت‌های ساختاری و پارامتری، اغتشاشات خارجی، نویز و پدیده‌های مختلف موجود در سیستم‌های مهندسی واقعی مسئله‌ای پیچیده به شمار می‌آید. بنابراین، الگوریتم‌های کنترلی مختلفی برای حل این مسئله پیشنهاد شده است. برخی از الگوریتم‌های ارائه شده عبارتند از: کنترل تطبیقی [۸, ۱۰]، کنترل مود لغزشی [۹, ۱۱]، کنترل بهینه [۱۲]، کنترل پیش‌بین [۱۳]، شبکه‌های عصبی [۱۴, ۱۵] و کنترل فازی [۱۰, ۱۶]. در میان تمامی این قوانین کنترلی، کنترل‌کننده‌هایی که وابستگی کمتری به مدل‌های ریاضی سیستم‌های رباتیکی داشته باشند به خاطر حجم محاسباتی کمتر، سادگی و مقاومتِ بیشترِ کنترل‌کننده در برابر عدم قطعیت‌ها مناسب‌تر به حساب می‌آیند.

الگوریتم ترانهاده‌ی ژاکوبی[۳] یکی از ساده‌ترین قوانین کنترلی موجود برای حرکت بازوان رباتیکی است. ماتریس‌های بهره‌ی این کنترل‌کننده نقش مهمی را در پایداری سیستم کلی ایفا می‌کنند. این الگوریتم را حتی می‌توان برای بازوان رباتیکی دارای افزونگی[۴] نیز همانگونه که در مرجع [۱۷] نشان داده شده است اعمال کرد.

در مرجع [۱۸] نیز عملکرد الگوریتم ترانهاده‌ی ژاکوبی با الگوریتم‌های مدل- مبنا مقایسه شده است. نتایج بدست آمده نشان داده است که بهبود عملکرد این کنترل‌کننده در مورد سیستم‌های رباتیکی پیچیده و غیرخطی نیازمند تحقیق بیشتری است. هرچند عملکرد نامطلوب این کنترل‌کننده با سرعت تعقیب مسیر بیشتری همراه است. استفاده از بهره‌های کنترلی بالا در حضور نویز اندازه‌گیری عملکرد این الگوریتم را بدتر نیز می‌نماید. مشکل دیگر نبود یک رویکرد مناسب در انتخاب بهره‌های کنترلی است.

بنابراین، روش ترانهاده‌ی ژاکوبیِ بهبود یافته[۵] در مرجع [۱۸] ارائه گردید. این الگوریتم عملکرد روش ترانهاده‌ی ژاکوبی را با استفاده از ورودی کنترلی در یک گامِ زمانی پیشین بهبود بخشید. بر اساس این روش، الگوریتم‌های مشابهی نیز برای سیستم‌های کم عملگر ارائه شد، [۱۹, ۲۰]. الگوریتم ترانهاده‌ی ژاکوبیِ بهبود یافته، تقریبی از روش خطی‌سازی فیدبک است، که نیازی به دانش قبلی از دینامیک سیستم ندارد. عملکرد این الگوریتم با وجود اینکه حجم محاسباتی آن کم بوده و نیازی به دینامیک سیستم ندارد با الگوریتم‌های کنترلی مدل- مبنا قابل مقایسه است. برخلاف کنترل ترانهاده‌ی ژاکوبی، این کنترل‌کننده در تعقیب مسیرهای حرکت دارای سرعتِ عملکردِ بسیار مناسبی است. همچنین، بهره‌های این کنترل‌کننده می‌توانند به صورت سیستماتیک تعیین شوند و بدین ترتیب حساسیت به نویز کنترل ترانهاده‌ی ژاکوبی از بین می‌رود.

در این مقاله یک الگوریتم غیر مبتنی بر مدل بر اساس روش ترانهاده‌ی ژاکوبی بهبود یافته برای تعقیب مسیرهای حرکت زمانی ربات متحرک چرخ‌دار دارای دنبال‌رو ارائه شده است. روش ترانهاده‌ی ژاکوبیِ بهبود یافته اساساً برای کنترل دینامیکی بازوان رباتیکی در مرجع [۱۸] پیشنهاد شده است. در این مقاله روش مزبور برای کنترل دینامیکی ربات متحرک چرخ‌دارِ دارای دنبال‌رو به عنوان یک سیستم غیرهولونومیک تغییر یافته و نتایج تجربی پیاده‌سازی کنترل‌کننده طراحی شده ارائه گردیده است.

در ادامه‌ی این مقاله ابتدا مدل سینماتیکی ربات متحرک چرخ‌دارِ دارای دنبال‌رو استخراج شده است. سپس، مسیرهای حرکت مرجع برای تعقیب ربات تولید شده است. در ادامه، یک قانون کنترلی برای تعقیب مجانبی مسیرهای مرجع بر اساس روش ترانهاده‌ی ژاکوبیِ بهبود یافته طراحی شده است. در نهایت نتایج تجربی پیاده‌سازی روش پیشنهاد شده بر روی ربات متحرک چرخ‌دارِ دارای یک دنبال‌رو ومقایسه آن با

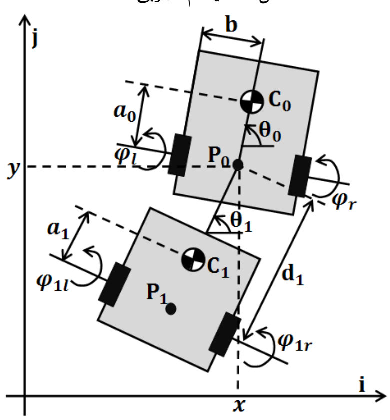
1. Point stabilization
2. Trajectory tracking
3. Transposed Jacobian (TJ)
4. Redundant manipulators
5. Modified Transpose Jacobian (MTJ)

الگوریتم کنترلی مدل- مبنا ارائه شده است. نتایج بدست آمده نشان دهنده کارایی قانون کنترلی طراحی شده است.

۲- توصیف سیستم و مدل سازی

سیستم مورد نظر یک ربات چرخ‌دار دیفرانسیلی به همراه یک دنبال‌رو است همانگونه که در شکل ۱ نمایش داده شده است. چرخ‌های کشنده با عملگرهای مجزا مجهز شده‌اند و یک چرخ کروی نیز برای حفظ پایداری آن استفاده شده است. اتصال میان کشنده و دنبال‌رو از طریق پین غیر فعال P_0 برقرار می‌باشد، همانگونه که در شکل ۲ نمایش داده شده است. نقاط C_0 و C_1 به ترتیب نشان دهنده‌ی مرکز جرم کشنده و دنبال‌رو می‌باشند. همچنین، φ_r و φ_l به ترتیب نمایش دهنده‌ی جابجایی زاویه‌ای چرخ‌های سمت راست و چپ کشنده هستند، و φ_{1r} و φ_{1l} به ترتیب جابجایی چرخ‌های سمت راست و چپ دنبال‌رو را نشان می‌دهند. d فاصله‌ی میان نقاط P_0 و P_1 را نمایش می‌دهد و a_0 و a_1 به ترتیب فاصله‌ی میان نقاط P_0 و C_0 و نقاط P_1 و C_1 می‌باشند. این ابعاد در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند. وضعیت ربات متحرک دارای دنبال‌رو با بردار مختصات تعمیم یافته‌ی $q=(x,y,\theta_0,\theta_1)^T$ نشان داده می‌شود، که در آن $(x,\ y)$ مختصات نقطه‌ی P_0 می‌باشد و θ_0 و θ_1 به ترتیب جهت‌گیری کشنده و دنبال‌رو نسبت به دستگاه مرجع را نشان می‌دهند.

شکل ۱: سیستم تجربی



شکل ۲: ربات متحرک چرخ‌دار به همراه یک دنبال‌رو و پارامترهای سیستم

فرضیات زیر برای حرکت ربات متحرک دارای دنبال‌رو در نظر گرفته شده است:

- حرکت ربات صفحه‌ای می‌باشد.
- چرخ‌های ربات در جهت جانبی لغزش نمی‌کنند.
- چرخ‌های ربات در حرکت رو به جلو غلتش خالص می‌نمایند.

مهمترین ویژگی در سینماتیک ربات‌های متحرک چرخ‌دار، وجود قیدهای غیر هولونومیک می‌باشد. این قیود رابطه‌ای میان مختصات تعمیم یافته‌ی سیستم و سرعت‌های تعمیم یافته‌ی سیستم می‌باشند. این رابطه نسبت به مختصات تعمیم یافته‌ی سیستم خطی است و می‌توان آن را به صورت زیر بیان نمود:

$$j=1,\dots,m\quad a_j^T(q)\dot{q}=0 \tag{۱}$$

قیود سیستم به شکل ماتریسی نیز به صورت زیر می‌باشند:

$$A(q)\dot{q}=0 \tag{۲}$$

که در آن $A(q)$ ماتریس قیدی $n\times m$ می‌باشد. n تعداد قیدهای سیستم و m تعداد مختصات تعمیم‌یافته‌ی سیستم است.

برای ربات متحرک چرخ‌دارِ دارای یک دنبال‌رو، ماتریس قیدی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A(\xi)=\begin{bmatrix}\sin\theta_0 & -\cos\theta_0 & 0 & -d\cos(\theta_0-\theta_1)\\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{۳}$$

در اینصورت ماتریس $S(q)$ با رتبه m وجود دارد که شامل بردارهای مستقل خطی می‌باشد که فضای تهی ماتریس قیدی را افراز می‌کنند، به طوریکه:

$$S^T(q)A^T(q)=0 \tag{۴}$$

ماتریس $S(q)$ برای ربات متحرک چرخ‌دارِ دارای یک دنبال‌رو به صورت زیر بدست می‌آید:

$$S(q)=\begin{pmatrix}\cos\theta_0 & 0\\ \sin\theta_0 & 0\\ 0 & 1\\ -\dfrac{1}{d}\sin(\theta_1-\theta_0) & 0\end{pmatrix} \tag{۵}$$

بنابراین مدل سینماتیکی ربات متحرک چرخ‌دارِ دارای دنبال‌رو را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\dot{q}(t)=S(q)u \tag{۶}$$

که در آن $v=(u_1,u_2)^T$ بردار ورودی‌های مستقل سینماتیکی سیستم است. u_1 سرعت خطی نقطه‌ی P_0 و u_2 سرعت زاویه‌ای کشنده می‌باشد.

مدل بدست آمده مدل سینماتیکی وضعیتِ[۱] سیستم نامیده می‌شود. این ورودی‌های سینماتیکی با سرعت زاویه‌ای چرخ‌های دارای عملگرِ ربات به صورت زیر مرتبط می‌باشند:

[۱] Posture Kinematic Model

$$u = Jv \tag{۷}$$

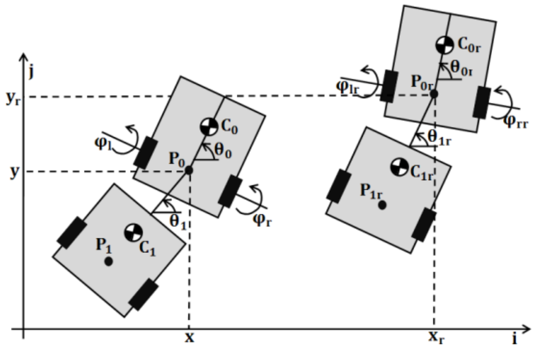
که در آن v بردار سرعت‌های زاویه‌ای چرخ‌های دارای عملگرِ ربات و J ماتریس ژاکوبی بین u و v است. این متغیرها به صورت زیر توصیف می‌شوند.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_r \\ \dot{\varphi}_l \end{pmatrix} \tag{۸}$$

که در آن r شعاع چرخ‌های دارای عملگرِ ربات است. b نصف فاصله‌ی میان چرخ‌های کشنده است. $\dot{\varphi}_r$ و $\dot{\varphi}_l$ به ترتیب سرعت‌های زاویه‌ای چرخ‌های سمت راست و چپِ دارای عملگر ربات می‌باشند.

۳- تعقیب مسیرهای حرکت زمانی

تعقیب مسیرهای حرکت زمانی یکی از مسائل مربوط به کنترل حرکت ربات‌های متحرک خودکار به حساب می‌رود. در این مسئله مطلوب این است که ربات متحرک با شروع از یک شرایط اولیه‌ی مشخص به یک مسیر دلخواه در فضای دکارتی برسد و آن را تعقیب نماید. از نظر ریاضی حالت‌های سیستم یا تابعی از آنها یک سری حالت‌ها یا توابع مطلوب را تعقیب می‌نمایند. همانگونه که در شکل ۳ نمایش داده شده است این مسئله را می‌توان به صورت تعقیب یک ربات مرجع نیز در نظر گرفت که دارای همان سینماتیک ربات متحرک دارای یک دنبال‌رو است. به عبارت دیگر متغیرهای حالتِ ربات مرجع را می‌توان به عنوان مسیرهای حرکت مطلوب برای ربات متحرک دارای دنبال‌رو در نظر گرفت که باید تعقیب شوند. بنابراین ورودی‌های کنترلی سیستم باید به گونه‌ای طراحی شوند که خطای تعقیب $(x-x_r, y-y_r)$ با گذشت زمان به مبدأ میل نماید، که (x, y) مختصات نقطه‌ی P_0 در دستگاه لخت است. بنابراین هدف این بخش طراحی ورودی کنترلی u برای نزدیک کردن نقاط $P_{0r} = (x_r, y_r)$ به P_0 است. فرض بر این است که حرکت ربات متحرک دارای دنبال‌رو رو به جلو می‌باشد یا به بیان دیگر سرعت طولی ربات مثبت می‌باشد. این فرض برای اجتناب از اثر جک‌–نایفِ سیستم کشنده –دنبال‌رو در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۳: ربات متحرک چرخ‌دارِ دارای یک دنبال‌رو و ربات مرجع

۴- تولید مسیرهای حرکت مرجع

فرض می‌کنیم مسیر مرجع در فضای دکارتی که باید توسط ربات تعقیب شود به صورت زیر بیان گردد:

$$x_r = x_r(t), y_r = y_r(t) \tag{۹}$$

که زیرنویس r برای نشان دادن متغیرهای سیستم روی مسیر مرجع استفاده شده است. ما می‌خواهیم این مسیر را به فضای متغیرهای ربات نگاشت دهیم. در این صورت مسیرهای زمانی تولید شده برای ربات قابل پیمایش خواهند بود.

با استفاده از معادله‌ی (۵) و (۶) می‌توان نوشت:

$$u_{1r}(t) = \sqrt{\dot{x}_r^2(t) + \dot{y}_r^2(t)} \tag{۱۰}$$

همچنین $\theta_{0r}(t)$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\theta_{0r}(t) = ATAN2(\dot{y}_r(t), \dot{x}_r(t)) \tag{۱۱}$$

که ATAN2 معکوس تابع تانژانت در یک دور کامل می‌باشد.

حال $\dot{\theta}_{0r}(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\dot{\theta}_{0r}(t) = \frac{\ddot{y}_r(t)\dot{x}_r(t) - \ddot{x}_r(t)\dot{y}_r(t)}{u_{1r}^2(t)} \tag{۱۲}$$

زاویه‌ی جهت‌گیری کشنده نیز به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\theta_{1r}(t) = \theta_{0r}(t) + a\sin\left(\frac{d\dot{\theta}_{0r}(t)}{u_{1r}(t)}\right) \tag{۱۳}$$

در نهایت ورودی دومِ سیستم نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} u_{2r} &= \dot{\theta}_{0r} \\ &+du_{1r}\frac{(\dddot{y}_r\dot{x}_r - \dddot{x}_r\dot{y}_r)u_{1r}^2 - 3(\ddot{y}_r\dot{x}_r - \ddot{x}_r\dot{y}_r)(\dot{x}_r\ddot{x}_r - \dot{y}_r\ddot{y}_r)}{u_{1r}^6 + d^2(\ddot{y}_r\dot{x}_r - \ddot{x}_r\dot{y}_r)^2} \end{aligned} \tag{۱۴}$$

۵- قانون کنترل سینماتیکی فیدبک خروجی

در این بخش یک کنترل‌کننده سینماتیکی برای سیستم طراحی می‌گردد. فرض می‌کنیم ربات چرخدار دارای سرعت روبه جلوی مثبت است. می‌خواهیم کنترل‌کننده‌ای طراحی کنیم که نقطه‌ی P روی ربات را حول نقطه‌ی P_{0r} روی ربات مرجع پایدار مجانبی نماید. بنابراین بردار خطای تعقیب نسبت به دستگاه متصل به ربات مرجع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = R(-\theta_r)\begin{pmatrix} x_{C_0} - x_{C_{0r}} \\ y_{C_0} - y_{C_{0r}} \end{pmatrix} \tag{۱۵}$$

که در آن R ماتریس دوران دو بُعدی می‌باشد. همانگونه که از رابطه فوق می‌توان دید خطای تعقیب برای نقطه‌ی C_0 نوشته شده است در حالی که هدف، تعقیب نقطه‌ی P_{0r} توسط نقطه‌ی P است. این موضوع در ادامه بیشتر بررسی خواهد شد. بنابراین هدف ما طراحی

کنترل‌کننده‌ای می‌باشد که خطای تعقیب (۱۵) را حول مبدأ پایدار مجانبی نماید. برای این منظور دینامیک خطای تعقیب را به صورت زیر محاسبه می‌نماییم:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial q} S(q) u + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \qquad (۱۶)$$

برای پایدارسازی دینامیک خطای تعقیب، ورودی کنترلی u را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = -\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q} S(q)\right)^{-1} \left(K\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) \qquad (۱۷)$$

که در آن K ماتریس بهره کنترل‌کننده، یک ماتریس قطری مثبت معین است. با این انتخاب دینامیک خطای سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{\varepsilon} = -K\varepsilon \qquad (۱۸)$$

که یک دینامیک خطای پایدار است و خطای تعقیب سیستم حول مبدأ پایدار می‌گردد. شرط قابل اعمال بودن قانون کنترلی بدست آمده این است که ماتریس $\frac{\partial \varepsilon}{\partial q} S(q)$ تکین نباشد که به همین علت خطای تعقیب حول نقطه‌ی C_0 نوشته شد.

۶- مدل دینامیکی ربات چرخدار به همراه یک دنبال‌رو

معادلات دینامیکی ربات چرخدار به همراه یک دنبال‌رو از طریق روش لاگرانژ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) = B(q)\tau + A^T(q)\lambda \qquad (۱۹)$$

که در آن $M(q)$ ماتریس جرمی سیستم، $C(q,\dot{q})$ شامل نیروهای جانبِ مرکز و کوریولیس، $B(q)$ ماتریس تبدیلِ ورودی، $A(q)$ ماتریس قیدی سیستم و λ بردار مضارب لاگرانژ سیستم است و به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -a_0 m_0 \sin\theta_0 & -F\sin\theta_1 \\ 0 & m & a_0 m_0 \cos\theta_0 & F\cos\theta_1 \\ -a_0 m_0 \sin\theta_0 & a_0 m_0 \cos\theta_0 & I_{\theta_0} & 0 \\ -F\sin\theta_1 & F\cos\theta_1 & 0 & I_{\theta_1} \end{bmatrix}$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -a_0 m_0 \cos\theta_0 \dot{\theta}_0^2 - F\cos\theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\ -a_0 m_0 \sin\theta_0 \dot{\theta}_0^2 - F\sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B(q) = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \sin\theta_0 \\ b & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{pmatrix} \qquad (۲۰)$$

که در آن

$$\begin{aligned} m &= m_0 + m_1 \\ F &= m_1(a_1 - d) \\ I_{\theta_1} &= m_1(d-a_1)^2 + I_1 \\ I_{\theta_0} &= m_0 a_0^2 + I_0 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

که در آن m_0 و m_1 به ترتیب معرف جرم کشنده و دنبال‌رو، I_0 و I_1 به ترتیب معرف لختی‌های دورانی جرمی کشنده و دنبال‌رو حول محور عمود بر صفحه‌ی حرکت، a_0 و a_1 به ترتیب معرف فاصله‌ی میان مراکز جرم و نقطه‌ی میانی چرخ‌های کشنده و دنبال‌رو و r معرف شعاع چرخ‌های ربات است.

برای حذف مضارب لاگرانژ روش مکمل متعامد طبیعی[۱] می‌تواند استفاده شود، [۲۱]. بنابراین با جایگزینی از (۶) در (۱۹) و استفاده از (۴) خواهیم داشت:

$$\overline{M}(q)\dot{u}(t) + \overline{C}(q,u)u(t) = \overline{B}(q)\tau \qquad (۲۲)$$

که در آن

$$\begin{aligned} &\overline{M}(q) = S^T(q)M(q)S(q);\ \ \overline{B}(q) = S^T(q)B(q); \\ &\overline{C}(q,u) = S^T(q)(M(q)\dot{S}(q) + C^*(q,u)) \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

که در آن

$$C(q, S(q)u(t)) = C^*(q,u)u(t) \qquad (۲۴)$$

۷- قانون کنترل ترانهاده‌ی ژاکوبیِ بهبود یافته

در کاربردهای مهندسی، بدست آوردن مدل ریاضی سیستم به خاطر اغتشاشات خارجی، ساده‌سازی‌های مدلسازی، دینامیک‌های مدل نشده و عوامل ناشناخته و غیر قابل پیش‌بینی دیگر معمولاً پیچیده و غیر ممکن است. بنابراین طراحی قوانین کنترلی غیر مبتنی بر مدل دینامیکی مورد توجه می‌باشد. در این قسمت مروری به روش ترانهاده‌ی ژاکوبیِ بهبود یافته که در مرجع [۱۸] برای بازوان رباتیکی ارائه شده می‌پردازیم. هدف، کنترل بردار خروجی $\hat{q}$ برای تعقیب بردار خروجی مطلوب $\hat{q}_{des}$ است. در کاربردهای تجربی سیستم‌های مهندسی، بدست آوردن مدل ریاضی دقیق معمولاً مشکل یا غیر ممکن می‌باشد. این به خاطر ساده‌سازی‌ها در مدل‌سازی، دینامیک‌های مدل نشده، اغتشاشات خارجی و پدیده‌های ناشناخته و غیر قابل پیش‌بینی دیگر است. بنابراین در طراحی قوانین کنترلی برای این سیستم‌ها، کنترل‌کننده‌هایی که به دینامیک سیستم وابسته نیستند بسیار مورد توجه‌اند. روش ترانهاده‌ی ژاکوبی یک روش کنترلی ساده است. خطای تعقیب و نرخ آن در بهره‌های بالایی ضرب شده و حاصل در ترانهاده ماتریس ژاکوبی ضرب می‌گردد و ورودی‌های

[۱] Natural Orthogonal Complement Method

کنترلی تولید می‌گردند. این ورودی‌ها مجری نهایی را به سمتی که خطای تعقیب کاهش می‌یابد هدایت می‌کنند. الگوریتم ترانهاده‌ی ژاکوبی ورودی‌های کنترلی زیر را تولید می‌نماید:

$$\tau(t)=J^T(q)\left\{K_p e+K_d\dot{e}\right\} \qquad (۲۵)$$

که در آن K_p و K_d ماتریس‌های بهره مثبت معین بوده و e بردار خطای تعقیب است که به صورت $e=\hat{q}_{des}-\hat{q}$ تعریف می‌شود. ماتریس ژاکوبی J نیز ماتریسی است که سرعت‌های مفصلی را به روی سرعت‌های خروجی نگاشت می‌دهد یعنی $\dot{\hat{q}}=J\dot{q}$. از آنجایی که کنترل ترانهاده‌ی ژاکوبی اطلاعی از دینامیک سیستم ندارد در تعقیب مسیرهای حرکتی که سرعت قابل ملاحظه دارند عملکرد ضعیفی مشاهده می‌شود. همچنین بهره‌های کنترلی بالا عملکرد ضعیفی را مخصوصاً در حضور نویز تولید می‌کنند. برای داشتن همزمانِ سادگی و دقت، هنگامی که خطای کنترلی کوچک است الگوریتم کنترلی ترانهاده‌ی ژاکوبی با اضافه کردن عبارتی در بر گیرنده‌ی دینامیک سیستم، تغییر داده شده است. کنترل بدست آمده ترانهاده‌ی ژاکوبیِ بهبود یافته نام گرفته است. این الگوریتمِ کنترلی تقریبی از روش خطی‌سازی فیدبک با استفاده از ورودی کنترلی در یک گامِ زمانی پیشین است. این قانون کنترلی در مرجع [۱۸] به صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$\tau(t)=J^T(q)\left\{k_p e+k_d\dot{e}+h(t)\right\} \qquad (۲۶)$$

که در آن τ بردار گشتاورهای عملگری است. h(t) ناشی از ورودی کنترلی در گام زمانی پیشین است و داریم:

$$h(t)=K\,\tau(t-\Delta t) \qquad (۲۷)$$

که K ماتریس بهره‌ی سوئیچینگ قطری با عناصر قطری زیر است:

$$K^{ii}=\exp\left(-\left(\frac{|e_i|}{e_{\max_i}}+\frac{|\dot{e}_i|}{\dot{e}_{\max i}}\right)\right) \qquad (۲۸)$$

که $e_{\max_i}$ و $\dot{e}_{\max i}$ محدوده‌های حساسیت کنترل‌کننده را مشخص می‌کنند. با انتخاب مناسبِ این ضرایب، قانون کنترلی عملکرد مناسبی ارائه می‌نماید. با انتخاب گام‌های زمانی کوچک، معادله‌ی خطای زیر را خواهیم داشت:

$$k_d\,\dot{e}+k_p\,e\cong 0 \qquad (۲۹)$$

که نشان می‌دهد با انتخاب مناسب ضرایب کنترلی، سیستم پایدار است.

۸- قانون کنترل دینامیکی غیر مبتنی بر مدل

در این قسمت یک قانون کنترلی غیر مبتنی بر مدل بر اساس روش ترانهاده‌ی ژاکوبیِ بهبود یافته برای کنترل دینامیکی تعقیب مسیرهای حرکت زمانی مرجع ارائه می‌گردد. برای این منظور خطای تعقیب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(t)=u_c(t)-u(t) \qquad (۳۰)$$

که در آن $u_c(t)$ بردار ورودی‌های سینماتیکی می‌باشد که در طراحی کنترل‌کننده سینماتیکی برای سیستم بدست آمد. هدف طراحی گشتاورهای عملگری برای پایدارسازی خطای تعقیب حول مبدأ می‌باشد.

قانون کنترل ترانهاده‌ی ژاکوبی بهبود یافته به صورت زیر را برای سیستم در نظر می‌گیریم:

$$\tau(t)=J^T(q)\left\{K_p e+h(t)\right\} \qquad (۳۱)$$

که در آن $\tau(t)$ بردار گشتاورهای عملگری سیستم و $h(t)$ عاملی به منظور در نظر گرفتن اثر ورودی در گام زمانی پیشین است و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$h(t)=K\,J^{-T}\tau(t-\Delta t) \qquad (۳۲)$$

که در آن K یک ماتریس قطری با عناصر قطری زیر است:

$$K^{ii}=\begin{cases}0 & \|e\|\ge\delta \quad or \quad \|\dot{e}\|\ge\dot{\delta}\\ 1 & \|e\|<\delta \quad or \quad \|\dot{e}\|<\dot{\delta}\end{cases} \qquad (۳۳)$$

که δ و $\dot{\delta}$ اعداد حقیقی و مثبت می‌باشند.

به جای سوئیچینگ ناپیوسته‌ی رابطه (۳۳)، می‌توان عبارت پیوسته زیر را استفاده نمود:

$$K^{ii}=\exp\left(-k^{ii}\|e\|\right) \qquad (۳۴)$$

که در آن k^{ii} بهره‌های مثبت و حقیقی می‌باشند.

قضیه ۱. قانون کنترلی غیر مبتنی بر مدلِ (۳۱) برای سیستم دینامیکی (۲۲)، خطای تعقیب (۳۰) را به صورت مجانبی حول مبدأ پایدار می‌سازد.

اثبات. تابع مثبت معین زیر را در نظر بگیرید:

$$V=\frac{1}{2}e^T(t)\bar{M}(q)e(t) \qquad (۳۵)$$

با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}&=e^T(t)\bar{M}(q)\dot{e}(t)+\frac{1}{2}e^T(t)\dot{\bar{M}}(q)e(t)\\&=e^T(t)\bar{M}(q)\left(\dot{u}_c-\dot{u}\right)+\frac{1}{2}e^T(t)\dot{\bar{M}}(q)e(t)\end{aligned} \qquad (۳۶)$$

با جایگزینی از رابطه‌ی (۲۲) داریم:

$$\dot{V}=e^T(t)\left(\bar{M}(q)\dot{u}_c+\bar{C}u(t)-\bar{B}(q)\tau\right)+\frac{1}{2}e^T(t)\dot{\bar{M}}(q)e(t) \qquad (۳۷)$$

با جایگزینی از رابطه‌ی (۳۰) و ساده‌سازی داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}&=e^T(t)\left(\bar{M}(q)\dot{u}_c+\bar{C}(u_c(t)-e(t))-\bar{B}(q)\tau\right)\\&+\frac{1}{2}e^T(t)\dot{\bar{M}}(q)e(t)=e^T(t)\left(\bar{M}(q)\dot{u}_c+\bar{C}u_c(t)-\bar{B}(q)\tau\right)\\&+e^T(t)(\frac{1}{2}\dot{\bar{M}}(q)-\bar{C})e(t)\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

با استفاده از این اصل که ماتریس $\frac{1}{2}\dot{\overline{M}}(q)-\overline{C}$ یک ماتریس پاد متقارن[۱] است، خواهیم داشت:

$$\dot{V}=e^{T}(t)\left(\overline{M}(q)\dot{u}_{c}+\overline{C}u_{c}(t)-\overline{B}(q)\tau\right) \qquad (۳۹)$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$\overline{B}(q)\tau^{c}=\overline{M}(q)\dot{u}_{c}+\overline{C}u_{c}(t) \qquad (۴۰)$$

با جایگزینی در معادله (۳۹) خواهیم داشت:

$$\dot{V}=e^{T}(t)\overline{B}(q)\left(\tau^{c}-\tau\right) \qquad (۴۱)$$

بنابراین برای n-امین زمان نمونه‌برداری می‌توان نوشت:

$$\dot{V}_{n}=e_{n}^{T}(t)\overline{B}(q)\left(\tau_{n}^{c}-\tau_{n}\right) \qquad (۴۲)$$

ورودی کنترلی برای n-امین زمان نمونه‌برداری نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\tau_{n}(t)=J^{T}(q)\left\{K_{p}e_{n}+K_{n}\,J^{-T}\tau_{n-1}\right\} \qquad (۴۳)$$

که K_n ماتریس بهره رابطه‌ی (۳۲) برای n-امین زمان نمونه‌برداری می‌باشد.

رابطه‌ی (۴۳) یک رابطه‌ی بازگشتی می‌باشد که می‌توان آن را به صورت غیر بازگشتی زیر نوشت:

$$\tau_{n}(t)=J^{T}(q)\left\{K_{p}e_{n}+\sum_{i=2}^{n}\left\{\prod_{j=i}^{n}K_{j}K_{p}e_{i-1}\right\}\right\} \qquad (۴۴)$$

با جایگزینی از معادله (۴۴) در (۴۲) و استفاده از اینکه ماتریس $\overline{B}J^{T}$ یک ماتریس واحد است داریم:

$$\dot{V}_{n}=e_{n}^{T}(t)\left(\overline{B}(q)\tau_{n}^{c}-\left\{K_{p}e_{n}+\sum_{i=2}^{n}\left\{\prod_{j=i}^{n}K_{j}K_{p}e_{i-1}\right\}\right\}\right) \qquad (۴۵)$$

برای اثبات پایداری سیستم باید نشان دهیم که $\dot{V}_n$ یک تابع مثبت نیمه معین است. برای این منظور از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. برای اولین نمونه زمانی داریم:

$$\dot{V}_{1}=e_{1}^{T}\overline{B}(q)\tau_{1}^{c}-e_{1}^{T}K_{p}e_{1} \qquad (۴۶)$$

بنابراین با انتخاب ماتریس بهره‌ی به اندازه کافی بزرگِ K_p ، $\dot{V}_1$ منفی خواهد بود.

حال با فرض اینکه $\dot{V}_n$ منفی نیمه معین باشد باید نشان دهیم $\dot{V}_{n+1}$ نیز یک تابع منفی نیمه معین است. رابطه‌ی (۴۵) برای نمونه‌ی زمانی n+1 به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{V}_{n+1}=e_{n+1}^{T}\left(\overline{B}(q)\tau_{n+1}^{c}-\left\{K_{p}e_{n+1}+\sum_{i=2}^{n+1}\left\{\prod_{j=i}^{n+1}K_{j}K_{p}e_{i-1}\right\}\right\}\right)$$

$$=-e_{n+1}^{T}K_{p}e_{n+1}+e_{n+1}^{T}\overline{B}(q)\tau_{n+1}^{c}-e_{n+1}^{T}\sum_{i=2}^{n+1}\left\{\prod_{j=i}^{n+1}K_{j}K_{p}e_{i-1}\right\} \qquad (۴۷)$$

از سویی دیگر بر اساس روش تفاضل محدود[۲] برای متغیر دلخواه α می‌توان نوشت:

$$\alpha_{n}=\alpha_{n-1}+\Delta t_{n}\dot{\alpha}_{n-1}+O(\Delta t_{n}^{2}) \qquad (۴۸)$$

با استفاده از (۴۸) رابطه‌ی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{n+1}&=-(e_{n}+\Delta t_{n+1}\dot{e}_{n})^{T}K_{p}(e_{n}+\Delta t_{n+1}\dot{e}_{n})\\&-(e_{n}+\Delta t_{n+1}\dot{e}_{n})^{T}\left(K_{n+1}K_{p}e_{n}+\sum_{i=2}^{n}\left\{\prod_{j=i}^{n+1}K_{j}K_{p}e_{i-1}\right\}\right)\\&+(e_{n}+\Delta t_{n+1}\dot{e}_{n})^{T}\overline{B}(q)(\tau_{n}^{c}+\Delta t_{n+1}\dot{\tau}_{n}^{c})^{T}+O(\Delta t_{n}^{2})\end{aligned} \qquad (۴۹)$$

با ساده‌سازی و استفاده از رابطه‌ی (۴۵) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{n+1}&=\dot{V}_{n}-\Delta t_{n+1}\dot{e}_{n}^{T}K_{p}e_{n}-\Delta t_{n+1}e_{n}^{T}K_{p}\dot{e}_{n}\\&+\Delta t_{n+1}(e_{n}^{T}\overline{B}\dot{\tau}_{n}^{c}+\dot{e}_{n}^{T}\overline{B}\tau_{n}^{c})-e_{n}^{T}K_{n+1}K_{p}e_{n}\\&-\Delta t_{n+1}\dot{e}_{n}^{T}K_{n+1}K_{p}e_{n}+O(\Delta t_{n}^{2})\end{aligned} \qquad (۵۰)$$

با ساده‌سازی و صرف‌نظر از جملات رسته بالا به این نتیجه می‌رسیم که $\dot{V}_{n+1}$ یک تابع منفی نیمه معین است اگر:

$$\begin{aligned}&\Delta t_{n+1}(e_{n}^{T}\overline{B}\dot{\tau}_{n}^{c}+\dot{e}_{n}^{T}\overline{B}\tau_{n}^{c})-\Delta t_{n+1}\dot{e}_{n}^{T}K_{p}e_{n}\\&-\Delta t_{n+1}e_{n}^{T}K_{p}\dot{e}_{n}-\Delta t_{n+1}\dot{e}_{n}^{T}K_{n+1}K_{p}e_{n}<e_{n}^{T}K_{n+1}K_{p}e_{n}\end{aligned} \qquad (۵۱)$$

از آنجایی که Δt یک عدد مثبت و K_p ماتریس بهره مثبت معین است، با انتخاب مقادیر بزرگ $K_{n+1}^{ii}K_{p}^{ii}/\Delta t$، تابع $\dot{V}$ حول مبدأ به صفر میل می‌کند و در بقیه نقاط منفی خواهد بود و پایداری سیستم مجانبی خواهد بود. بنابراین معادله‌ی (۵۱) معیاری برای انتخاب بهره‌های کنترلی و زمان نمونه‌برداری می‌باشد. در صورتیکه برای $K_{n+1}^{ii}K_{p}^{ii}/\Delta t$ مقادیر بزرگی انتخاب شود، در رابطه‌ی (۵۱)، سمت راست رابطه به اندازه قابل توجهی از سمت چپ بزرگتر خواهد بود، با توجه به اینکه بازه زمانی نمونه‌برداری همواره مقدار کوچکی است چنین شرایطی معمولاً برقرار می‌گردد. بنابراین جملات مراتب بالا در رابطه‌ی (۵۰) در صورت برقراری چنین شرطی کوچکتر از سایر جملات خواهند بود.

۹- نتایج بدست آمده

در این قسمت نتایج تجربی حاصل از پیاده‌سازی قانون کنترلی روی یک ربات چرخدار ارائه می‌گردد.

۹-۱- سیستم آزمایشگاهی

سیستم آزمایشگاهی از یک ربات چرخ‌دار به همراه یک دنبال‌رو تشکیل می‌شود. کشنده از طریق دو چرخ دارای عملگر حرکت می‌کند و

[۱] Skew-symmetric

[۲] Finite Difference

از یک چرخ کروی به منظور حفظ پایداری آن استفاده شده است. مشخصات هندسی و مقادیر پارامترهای سیستم در جدول ۱ ارائه شده است. حرکت چرخ‌های دارای عملگر از طریق موتورهای DC دارای ولتاژ عملکردی ۱۲ ولت و گشتاور نگهدارنده ۱/۶۲ نیوتن-متر شکل می‌گیرد. برای اندازه‌گیری وضعیت ربات از یک دوربین نصب شده بالای صفحه حرکت و پردازش تصویر به هنگام، استفاده شده است. دوربین استفاده شده دارای تفکیک‌پذیری 480×640 پیکسل و نرخ تصویر برداری ۳۰ تصویر در ثانیه است. اطلاعات از طریق یک اتصال USB با کامپیوتر برقرار می‌گردد. یک کامپیوتر با اتصال USB به دوربین با ویژگیهای (32 bit, Intel Core 2, CPU 2.00 GHz, 2 GB RAM) به منظور پردازش تصویر، کنترل و انتقال اطلاعات استفاده شده است. کنترل سیستم از طریق نرم‌افزار MATLAB/Simulink پیاده‌سازی گردیده است.

جدول ۱: مقادیر پارامترهای سیستم

پارامتر	توصیف	مقدار
m_0, m_1	جرم دنبال‌رو و کشنده	0.9, 0.33 kg
I_0, I_1	لختی‌های دورانی	0.0035,0.00078 $kg.m^2$
d	طول $P_0\ P_1$	0.17 m
r	شعاع چرخ‌ها	0.026 m
2b	فاصله بین چرخ‌های کشنده	0.1190 m
a_0, a_1	طول $P_0\ C_0$ و $P_0\ C_1$	0.029, 0 m

۹-۲- نتایج تجربی

در این بخش به منظور بررسی کارایی کنترل‌کننده نتایج تجربی حاصل از پیاده‌سازی قانون کنترلی بر روی مدل آزمایشگاهی ارائه شده است. همچنین نتایج پیاده‌سازی الگوریتم غیر مبتنی بر مدل با نتایج حاصل از الگوریتم مدل- مبنا به روش گشتاور محاسبه شده[۱] مقایسه شده است. این کنترل کننده تحت عنوان کنترل خطی‌سازی فیدبک دینامیکی[۲] در مقاله [۲۲] نویسندگان تشریح شده است.

پارامترهای کنترل‌کننده در جدول ۲ ارائه شده و مسیرهای حرکت مرجع به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\begin{cases} x_r(t) = 0.02\left(R + \cos\left(\frac{36t}{T}\right)\right)\cos\left(\frac{6t}{T}\right) \\ y_r(t) = 0.02\left(R + \cos\left(\frac{36t}{T}\right)\right)\sin\left(\frac{6t}{T}\right) \end{cases} \quad (۵۲)$$

شرایط اولیه سیستم به صورت زیر فرض شده‌اند:

$$x(0)=0.35, y(0)=-0.58, \theta_0(0)=0.4\pi, \theta_1(0)=0.4\pi \quad (۵۳)$$

به منظور تحلیلِ اثر مقاومت کنترل‌کننده در ثانیه ۳۵-ام پارامترهای جرمی سیستم به صورت زیر تغییر داده شده است:

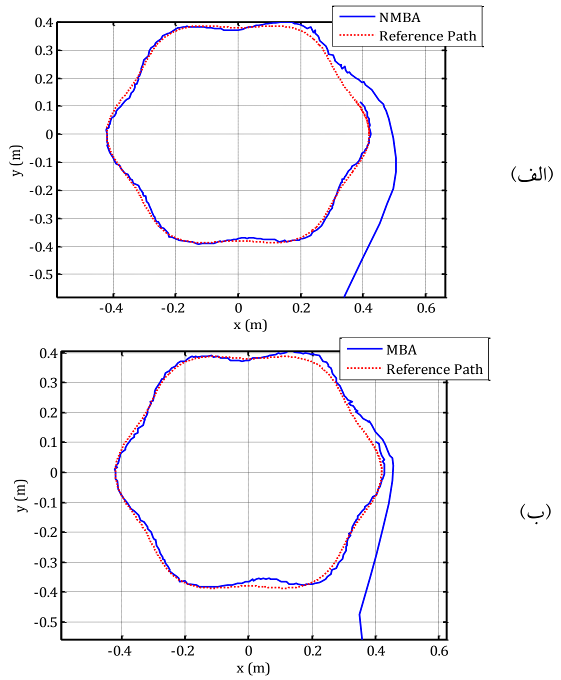
$$g \to (1+0.5u(t-35))g \quad (۵۴)$$

که در آن $u(t)$ تابع پله واحد می‌باشد و $g \in \{m_0, m_1\}$ پارامترهای جرمی ربات را در بر می‌گیرد.

جدول ۲: مقادیر پارامترهای کنترل‌کننده

پارامتر	توصیف	مقدار
K	بهره کنترل‌کننده سینماتیکی	diag(0.6,0.6)
K_p	بهره تناسبی کنترل‌کننده دینامیکی	diag(2.5,0.6)
k^{ii}	بهره کنترل‌کننده دینامیکی	0.1

در شکل ۴ مسیر حرکت ربات در صفحه برای الگوریتم‌های غیر مبتنی بر مدل و مدل- مبنا نشان داده شده‌اند. در شکل ۵ نیز خطای تعقیب متغیرهای سیستم برای الگوریتم‌های کنترلی مذکور ترسیم شده است. در شکل ۶ خطای تعقیب مسیر مرجع (فاصله از وضعیت مطلوب) برای قوانین کنترلی غیر مبتنی بر مدل و مدل- مبنا مقایسه شده است.در شکل ۷ ورودی‌های کنترلی سینماتیکی و دینامیکی ارائه شده‌اند.



شکل ۴: مسیر حرکت ربات در صفحه‌ی حرکت الف) کنترل غیر مبتنی بر مدل ب) کنترل مدل- مبنا

[۱] Computed Torque Method

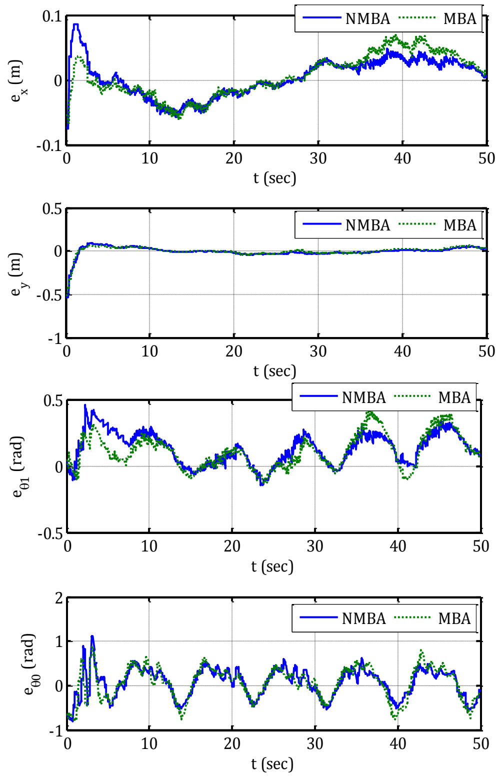
[۲] Feedback-Linearizing Dynamic Controller (FLDC)

(الف)

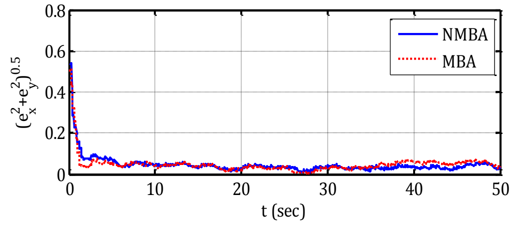
(ب)

(ج)

(د)



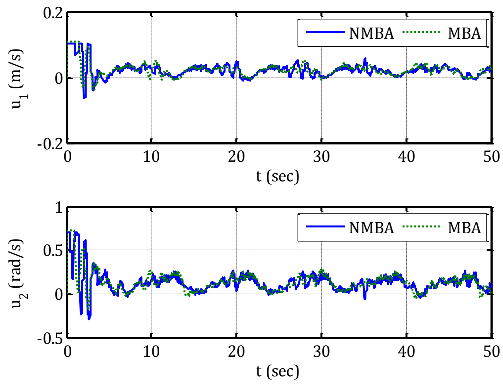
شکل ۵: خطای تعقیب متغیرهای سیستم برای قوانین کنترلی غیر مبتنی بر مدل و مدل- مبنا الف) خطای متغیر x ب) خطای متغیر y ج) خطای متغیر θ_1 د) خطای متغیر θ_2



شکل ۶: خطای تعقیب مسیر مرجع (فاصله از وضعیت مطلوب) برای قوانین کنترلی غیر مبتنی بر مدل و مدل- مبنا

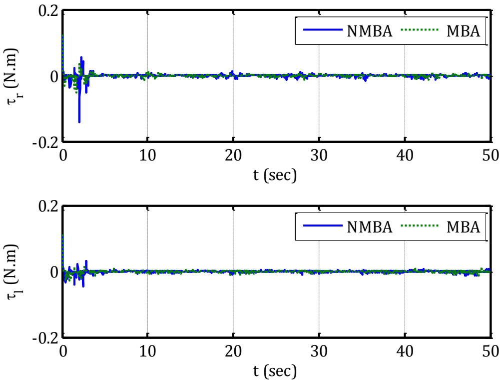
(الف)

(ب)



(ج)

(د)



شکل ۷: ورودی‌های کنترلی برای قوانین کنترلی غیر مبتنی بر مدل و مدل- مبنا الف) ورودی سینماتیکی u_1 ب) ورودی سینماتیکی u_2 ج) ورودی دینامیکی τ_2 د) ورودی دینامیکی τ_1

نتایج بدست آمده نشان می‌دهد عملکرد الگوریتم غیر مبتنی بر مدل مشابه الگوریتم مدل- مبنا می‌باشد، حتی در حضور عدم قطعیت‌ها عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد و حجم محاسباتی کمتری دارد. همانگونه که مشاهده می‌شود با شروع از شرایط اولیه پس از تقریباً ۳ ثانیه ربات متحرک خود را به مسیر مرجع رسانده و در حاشیه مناسبی از آن قرار گرفته است. ورودیهای کنترلی تولید شده نیز دارای مقادیر مناسبی می‌باشند و خارج از محدوده گشتاورهای عملگری ربات قرار نمی‌گیرند.

۱۰- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش جدید برای کنترل دینامیکی تعقیب مسیرهای حرکت یک ربات چرخدار دارای یک دنبال‌رو به عنوان یک سیستم غیرخطی، کم عملگر و غیرهولونومیک ارائه شده است. ابتدا معادلات دینامیکی سیستم استخراج گردید. سپس مسیرهای حرکت مرجع مناسب برای ربات تولید گردید و یک کنترل‌کننده سینماتیکی بر اساس فیدبک خروجی سیستم طراحی گردید. سپس یک قانون کنترل دینامیکی غیر مبتنی بر مدل بر اساس روش ترانهاده ژاکوبی بهبودیافته برای ربات طراحی گردید. همچنین پایداری قانون کنترلی از طریق روش لیاپانوف بررسی گردید. سرانجام به منظور بررسی کارایی روش، نتایج تجربی پیاده‌سازی قانون کنترلی پیشنهاد شده بر روی یک مدل آزمایشگاهی ربات چرخدار دارای دنبال‌رو ارائه و با نتایج یک کنترل‌کننده مدل- مبنا مقایسه گردید. نتایج بدست آمده کارآمد بودن روش ارائه شده را تایید می‌نمایند.

۱۱- مراجع

[1] S. A. A. Moosavian, A. Kalantari, H. Semsarilar, E. Aboosaeedan, and E. Mihankhah, "ResQuake: A Tele-Operative Rescue Robot," *Journal of mechanical design*, vol. 131, 2009.

[2] M. Eslamy and S. A. A. Moosavian, "Dynamics and Cooperative Object Manipulation Control of Suspended Mobile Manipulators," *Journal of Intelligent and Robotics Systems*, vol. 60, pp. 181-199, 2010.

[3] K. Alipour and S. A. A. Moosavian, "How to ensure stable motion of suspended wheeled mobile robots," *International Journal of Industrial robot* vol. 38, pp. 139-152, 2011.

[4] G. Campion, G. Bastin, and B. Dandrea Novel, "Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, pp. 47-62, 1996.

[5] C. Samson, "Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pp. 64-77, 1995.

[6] L. Chang Boon and W. Danwei, "GPS-Based Path Following Control for a Car-Like Wheeled Mobile Robot With Skidding and Slipping," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 16, pp. 340-347, 2008.

[7] P. Morin and C. Samson, "Control of nonlinear chained systems: from the Routh-Hurwitz stability criterion to time-varying exponential stabilizers," *IEEE Transactions on Automatic Control*,, vol. 45, pp. 141-146, 2000.

[8] F. N. Martins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli-Filho, and T. F. Bastos-Filho, "An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking," *Control Engineering Practice*, vol. 16, pp. 1354-1363, 2008.

[9] C.-Y. Chen, T.-H. S. Li, Y.-C. Yeh, and C.-C. Chang, "Design and implementation of an adaptive sliding-mode dynamic controller for wheeled mobile robots," *Mechatronics*, vol. 19, pp. 156-166, 2009.

[10] C.-Y. Chen, T.-H. S. Li, and Y.-C. Yeh, "EP-based kinematic control and adaptive fuzzy sliding-mode dynamic control for wheeled mobile robots," *Information Sciences*, vol. 179, pp. 180-195, 2009.

[11] J. Yang, R. Ma, Y. Zhang, and C. Zhao, "Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of Intelligent Vehicle," *Physics Procedia*, vol. 33, pp. 1160-1167, 2012.

[12] H. Chih-Lyang Hwang Chih-Lyang and C. Li-Jui Chang Li-Jui, "Trajectory Tracking and Obstacle Avoidance of Car-Like Mobile Robots in an Intelligent Space Using Mixed H2/H∞; Decentralized Control," *IEEE ASME Trans Mechatron*, vol. 12, pp. 345-352, 2007.

[13] G. Klančar and I. Škrjanc, "Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 55, pp. 460-469, 2007.

[14] J. Ye, "Adaptive control of nonlinear PID-based analog neural networks for a nonholonomic mobile robot," *Neurocomputing*, vol. 71, pp. 1561-1565, 2008.

[15] J. Ye, "Tracking control for nonholonomic mobile robots: Integrating the analog neural network into the backstepping technique," *Neurocomputing*, vol. 71, pp. 3373-3378, 2008.

[16] C. Chian-Song and L. Kuang-Yow, "Hybrid Fuzzy Model-Based Control of Nonholonomic Systems: A Unified Viewpoint," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*,, vol. 16, pp. 85-96, 2008.

[17] Y. Asari, H. Sato, T. Yoshimi, K. Tatsuno, and K. Asano, "Development of model-based remote maintenance robot system. IV. A practical stiffness control method for redundant robot arm," in *Intelligent Robots and Systems '93, IROS '93. Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on*, 1993, pp. 1245-1251 vol.2.

[18] S. A. A. Moosavian and E. Papadopoulos, "Modified transpose Jacobian control of robotic systems," *Automatica*, vol. 43, pp. 1226-1233, 2007.

[19] M. Karimi and S. Moosavian, "Control of underactuated manipulators using Modified Transpose Effective Jacobian," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008.*, 2008, pp. 3744-3749.

[20] M. Karimi and S. A. A. Moosavian, "Modified Transpose Effective Jacobian control of underactuated manipulators," in *Advanced Intelligent Mechatronics, 2008. AIM 2008. International Conference on IEEE/ASME*, 2008, pp. 1337-1342.

[21] S. K. Saha and J. Angeles, "Dynamics of Nonholonomic Mechanical Systems Using a Natural Orthogonal Complement," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 58, pp. 238-243, 1991.

[22] A. Keymasi Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Robust Adaptive Controller for a Tractor-Trailer Mobile Robot," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 19, pp. 943 - 953, 2014.

مجله کنترل
جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۱۹-۱۱

پایدارسازی سیستم‌های همگن سوئیچ شونده با استفاده از تابع لیاپانوف مشترک

خاطره سخنور ماهانی[۱]، علی کریم پور[۲]، ناصر پریز[۳]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، kh.sokhanvar@stu-mail.um.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، karimpor@um.ac.ir

[۳] استاد، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۲/۲۳، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۴/۱۹)

چکیده: در این مقاله روشی جدید برای پایدارسازی و طراحی قانون کلیدزنی پایدارساز برای سیستم‌های همگن سوئیچ شونده به عنوان دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده معرفی شده است. سیستم سوئیچ شونده مورد نظر دارای تعداد مشخصی زیرسیستم است که همگی همگن از درجه دلخواه با ضرایب گسترش یکسان هستند. در این روش هیچ محدودیتی در رابطه با بعد سیستم، درجه همگنی و ضرایب گسترش وجود ندارد. روش ارائه شده مبتنی بر وجود تابع لیاپانوف مشترک همگن برای زیرسیستم‌ها است و براساس آن قانون کلیدزنی پایدارساز همگن مشخص می‌گردد. در این روش یک سیستم ترکیبی از زیرسیستم‌ها ساخته می‌شود و در قضیه ای نشان داده شده که پایداری سیستم ترکیبی، پایداری سیستم سوئیچ شونده به همراه قانون کلیدزنی معرفی شده را نتیجه می‌دهد. همچنین تابع لیاپانوف سیستم ترکیبی، به عنوان تابع لیاپانوف مشترک برای سیستم سوئیچ شونده معرفی شده است.

کلمات کلیدی: پایداری، تابع لیاپانوف مشترک، سیستم غیرخطی سوئیچ شونده، سیستم همگن، قانون کلیدزنی پایدارساز.

Stabilization of Switched Homogeneous Systems using Common Lyapunov Function

Khatereh Sokhanvar Mahani, Ali Karimpour, Naser Pariz

Abstract: In this paper, a new method is introduced to study the stabilization and design of stabilizing switching law for switched homogeneous systems as a class of switched nonlinear systems. The considered switched system has a number of homogeneous subsystems with desired degree and similar dilation coefficients. In this method, there is not any limitation about system dimension, homogeneous degree and dilation coefficients. The proposed method is based on existence of homogeneous common Lyapunov function for subsystems and using that, the stabilizing switching law is specified. In this method, a combined system of subsystems is introduced and in a theorem it is shown that the stability of combined system results in the stability of switched system with defined switching law. Thus the Lyapunov function of combined system is introduced as common Lyapunov function for switched system.

Keywords: stability, common Lyapunov function, switched nonlinear system, homogeneous system, stabilizing switching law.

۱- مقدمه

مطالعه وضعیت پایداری یکی از مسائل اصلی مطرح در رابطه با هر سیستم است. سیستم‌های هایبرید و سوئیچ شونده در سالهای اخیر بسیار مورد توجه محققان و پژوهشگران قرار گرفته اند. سیستم سوئیچ شونده دارای دو نوع دینامیک است. یکی دینامیک وابسته به زمان مربوط به زیرسیستم‌ها که با معادلات دیفرانسیل یا تفاضلی مشخص می‌شود و

دیگری دینامیک منطقی مربوط به متغیرهای گسسته که از قوانین شرطی و منطقی تشکیل می‌شود. این دو نوع دینامیک در تقابل با یکدیگر خصوصیات پیچیده‌ای را ایجاد می‌کنند، مثل کلیدزنی هنگامی که متغیر مورد نظر شرایط خاصی را احراز می‌کند و یا پرش حالت در زمان تغییر متغیر کلیدزنی.

برخی زمینه‌های مورد مطالعه و تحقیق در رابطه با سیستم‌های سوئیچ شونده عبارتند از: بررسی پایداری، مدلسازی، روش‌های سیستماتیک در بررسی عملکرد، کنترل پذیری، کنترل بهینه و ردیابی و ... که در مقالات و پژوهش‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند[۱]، [۲]، [۳]،[۴] و [۵] و [۶].

موضوع پایداری یکی از مهم‌ترین مسائل مطرح در تئوری کنترل است. این مسئله در رابطه با سیستم‌های سوئیچ شونده با توجه به تاثیر دینامیک زیرسیستم‌ها و قانون کلیدزنی از پیچیدگی زیادی برخوردار است. به طور مثال، هنگامی که همه زیرسیستم‌ها پایدار نمایی هستند ممکن است یک قانون کلیدزنی وجود داشته باشد که باعث ناپایداری سیستم سوئیچ شونده شود. از طرف دیگر با کلیدزنی مناسب بین زیرسیستم‌های ناپایدار ممکن است بتوان سیستم سوئیچ شونده را پایدار ساخت. مسئله پایداری سیستم‌های سوئیچ شونده به سه شکل مختلف مطرح شده است:

الف) بررسی وضعیت پایداری تحت قانون کلیدزنی مشخص

ب) بررسی وضعیت پایداری تحت قانون کلیدزنی دلخواه

ج) طراحی قانون کلیدزنی پایدارساز که در این نوع مسائل، هدف پایدار کردن پاسخ سیستم با کلیدزنی بین زیرسیستم‌ها است [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱] و [۱۲].

یکی از روشهای بررسی پایداری سیستم‌های سوئیچ شونده استفاده از تابع لیاپانوف مشترک[۱] است. در این حالت یک تابع لیاپانوف که برای هریک از زیرسیستم‌ها در همه‌جا یا در بخشهایی از فضای حالت که آن زیرسیستم امکان فعال شدن دارد، صادق باشد معرفی شده و بر این اساس پایداری سیستم ثابت می‌گردد [۱۳] و [۱۴]. روش دیگر معرفی تابع لیاپانوف چندگانه[۲] است. در این روش در هر ناحیه از فضا با توجه به زیرسیستم فعال یک تابع لیاپانوف معرفی می‌شود که البته این توابع لیاپانوف باید روی مرزهای کلیدزنی شرایط خاصی داشته باشند که در منبع [۱۵] ذکر شده است.

مسئله پایداری سیستم‌های سوئیچ شونده همانند تمام مسائل کنترلی ابتدا به طور گسترده در مورد سیستم‌های خطی سوئیچ شونده مورد مطالعه قرار گرفته است و با توجه به پیچیدگیهای موجود همچنان ادامه دارد [۷]، [۱۰] و [۱۱]، [۱۶]،[۱۷] و [۱۸].

بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده نیز در مرحله بعدی مطرح و بسیار مورد توجه است [۹] و [۱۰]، [۱۴] و [۱۵] و [۱۹]. هر چند در مسئله پایداری سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده نیز مبنای کار همان توابع لیاپانوف مشترک یا چندگانه است، ولی روش کلی برای ارائه آن وجود ندارد و از این رو معمولا سیستم سوئیچ شونده با دسته خاصی از زیرسیستم‌های غیرخطی که دارای ویژگیهایی باشند مورد مطالعه و بحث قرار می‌گیرد. در این مقاله آنالیز پایداری برای سیستم‌های همگن سوئیچ شونده مطرح شده است. سیستم‌های همگن دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی هستند که شامل سیستم‌های خطی و چندجمله‌ای می‌باشند. اهمیت سیستم‌های همگن در این است که می‌توان سیستم‌های غیرخطی را توسط آن تقریب محلی زد. از این‌رو مسائل مختلف کنترلی در رابطه با این سیستم‌ها مورد توجه محققان بوده‌است. به سیستم سوئیچ شونده که زیرسیستم‌های آن همگی همگن با ضرایب گسترش[۳] یکسان باشند، سیستم همگن سوئیچ شونده گفته می‌شود. چنین سیستم‌هایی با توجه به ماهیت غیرخطی زیرسیستم‌ها از یک طرف و خواص جالب آنها از طرف دیگر در سالهای اخیر مورد توجه ویژه قرار گرفته‌اند. موضوع پایداری سیستم‌های همگن سوئیچ شونده در مراجع مختلف با اعمال محدودیتهایی در مورد زیرسیستم‌ها مطالعه شده‌است. در مرجع [۲۰] پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده دوبعدی بررسی شده‌است. در این مقاله دو زیرسیستم پایدار چند جمله‌ای دوبعدی در نظر گرفته شده و مسئله پایداری بر مبنای انتگرال اول تعمیم یافته مطالعه شده‌است. در این مقاله زیرسیستم‌ها دارای ضرایب گسترش استاندارد هستند. دسته دیگری از سیستم‌های همگن سوئیچ شونده مورد توجه، دارای زیرسیستم‌هایی از نوع چندجمله‌ای درجه فرد می‌باشند. در مرجع [۲۱] همه زیرسیستم‌ها چندجمله‌ای (گسترش استاندارد) از یک درجه فرد می‌باشند. در این مقاله نویسنده با استفاده از ضرب کرونکر و ضرب شبه تنسور به معادله شبه لیاپانوف ماتریسی دست یافته و شرایط کافی برای پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده را بیان کرده است. نتایج این مقاله برای سیستم همگن سوئیچ شونده با شرایط مورد نظر به صورت LMI[۴] در آمده‌است. هر چند مقاله مذکور دارای نتایج جالب توجهی است اما مرجع [۲۲] مثال نقضی برای یکی از لم‌های اصلی مورد استفاده در این مقاله ارائه داده-است. در مراجع [۲۳] و [۲۴] نیز پایداری سیستم سوئیچ شونده با زیرسیستم‌های همگن گسسته زمان درجه اول با گسترش استاندارد و تحت سوئیچ دلخواه با مطالعه نرخ رشد بررسی شده‌است. در مرجع [۲۵] نیز ابتدا مسئله پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده تحت قانون کلیدزنی دلخواه بررسی شده و شرایط کافی برای آن ارائه شده است. در مرجع [۲۵] ابتدا فرض شده که برای هر زیرسیستم یک تابع لیاپانوف مناسب ساخته شود و سپس شرایط کافی برای وجود تابع لیاپانوف مشترک ارائه شده است. تابع لیاپانوف مشترک به صورت ترکیبی از توابع لیاپانوف زیرسیستم‌ها معرفی شده و پایداری مجانبی همه‌جایی مبدا به ازای قانون کلیدزنی دلخواه را نتیجه می‌دهد. سپس موضوع پایداری سیستم همگن

[۱] Common Lyapunov Function

[۲] Multiple Lyapunov Function

[۳] Dilation coefficient

[۴] Linear Matrix Inequality

سوئیچ شونده تحت قانون کلیدزنی مشخص مورد مطالعه قرار گرفته است. در این بخش ابتدا لحظات کلیدزنی مشخص فرض شده و سپس مسئله برای حالتی که علاوه بر لحظات کلیدزنی، ترتیب زیرسیستم‌ها نیز معلوم باشد حل شده‌است. در تمام بخشهای این مقاله فرض شده‌است که زیرسیستم‌های همگن دارای درجه یکسان هستند.

در مقاله حاضر، هدف بررسی پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده است که در آن زیرسیستم‌ها همگن با گسترش یکسان هستند. برای این منظور از ایده وجود ترکیب محدب پایدار برای سیستم خطی سوئیچ شونده استفاده شده و به سیستم مورد بحث تعمیم داده می‌شود. براین اساس شرایط کافی برای وجود قانون کلیدزنی پایدارساز برای سیستم همگن سوئیچ شونده بیان می‌گردد.

برخلاف مقالات مورد مطالعه قبلی، در این تحقیق هیچ محدودیت اضافی به سیستم تحمیل نشده‌است. در واقع مهم‌ترین مزیت روش ارائه شده در مقاله حاضر پوشش دادن کامل‌تر مسئله پایدارسازی سیستم همگن سوئیچ شونده نسبت به کارهای قبلی است. در روش ارائه شده زیرسیستم‌ها همگن با ضرایب گسترش یکسان هستند ولی محدودیت دیگری مانند محدودیت بعد [۲۰]، فرد بودن ضرایب گسترش ویا استاندارد (برابر یک) بودن ضرایب گسترش [۲۰]، [۲۱]، [۲۴] و [۲۵] وجود ندارد. همچنین محدودیتی روی درجه همگنی زیرسیستم‌ها [۲۱] و یا برابری آن [۲۰]، [۲۱] و [۲۲] وجود ندارد. یعنی زیرسیستم‌ها می‌توانند دارای درجات همگنی مختلف باشند، درحالیکه در اکثر کارهای انجام شده قبلی درجه همگنی برای همه زیرسیستم‌ها یکسان فرض شده است. بنابراین نتایج بدست آمده برای سیستم همگن سوئیچ شونده با هر بعد و ضرایب گسترش دلخواه و درجات مختلف همگنی برقرار است.

مبنای روش ارائه شده، معرفی تابع لیاپانوف مشترک برای سیستم همگن سوئیچ شونده است که براساس آن هر یک از زیرسیستم‌ها در بخشی از فضای حالت امکان فعال شدن دارند. معرفی تابع لیاپانوف مشترک از دشواری‌های این روش است. همچنین ممکن است نتوان تابع لیاپانوف مشترک را یافت ولی قانون کلیدزنی پایدارساز وجود داشته باشد.

در ادامه مقاله، ابتدا در بخش ۲ تعاریف و ریاضیات مورد نیاز بیان شده‌است. در بخش ۳ نتایج اصلی به همراه مثال و شبیه سازی ارائه شده و درنهایت بخش ۴ شامل نتیجه گیری است.

۲- تعاریف و ریاضیات مورد نیاز

در این بخش ابتدا به بیان تعریف تابع و سیستم همگن می‌پردازیم.

تعریف ۱: [۲۶] تابع $f : R^n \to R$ همگن از درجه d با توجه به Δ_λ^r است، هرگاه

$$f\left(\Delta_\lambda^r(x)\right)=\lambda^d f(x) \qquad (۱)$$

به ازای تمام مقادیر $\lambda > 0$ و $r=(r_1,\dots,r_n)\in R^n$ که در آن $r_i > 0$ است، برقرار باشد. همچنین r_i ها ضرایب وزنی گسترش و $\Delta_\lambda^r(x)=(\lambda^{r_1}x_1,\dots,\lambda^{r_n}x_n)$ گسترش نامیده می‌شود.

تعریف ۲: [۲۶] میدان برداری n بعدی f همگن از درجه d با توجه به Δ_λ^r است، اگر برای همه مقادیر $1\le i\le n$ ، f_i همگن از درجه r_i+d باشد. یعنی

$$f_i\left(\Delta_\lambda^r(x)\right)=\lambda^{r_i+d}f_i(x) \qquad (۲)$$

تعریف ۳: [۲۶] به مجموعه نقاطی که توسط یکی عناصر آن مانند x_0 و گسترش Δ_λ^r بصورت زیر تعریف می‌شود شعاع همگن گفته می‌شود؛

$$R_{x_0}=\left\{x \mid x=\Delta_\lambda^r(x_0);\forall\lambda>0\right\}. \qquad (۳)$$

سیستم همگن سوئیچ شونده به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}=f_\sigma(x) \qquad (۴)$$

که در آن x بردار حالت و $\sigma=\sigma(t)$ تابع قطعه‌ای ثابت است که سیگنال کلیدزنی را مشخص می‌کند:

$$\sigma(t):[0,+\infty)\to Q=\{1,\dots,m\} \qquad (۵)$$

تابع $\sigma(t)$ مشخص می‌کند که در هر لحظه یکی از زیرسیستم‌ها فعال است و دینامیک (۴) توسط آن توصیف می‌شود.

لازم به ذکر است که ترتیب فعالیت زیرسیستم‌ها را قانون کلیدزنی مشخص می‌کند که در حالت کلی می‌تواند به یک یا چند مورد از متغیرهای زمان، شرایط اولیه، حالت، خروجی سیستم و سیگنال کلیدزنی لحظه قبل و... وابسته باشد. با اعمال قانون کلیدزنی به سیستم سوئیچ شونده سیگنال کلیدزنی برحسب زمان $\sigma(t)$ مشخص می‌شود.

در این مقاله فرض می‌کنیم که توابع $f_1(x),\dots,f_m(x)$ توابع پیوسته‌ای در $x\in R^n$ هستند و زیرسیستم‌ها، همگن از درجات $d_i, i=1,\dots,m$ با توجه به ضرایب گسترش $r=(r_1,\dots,r_n)$ می‌باشند. چنانچه ملاحظه می‌شود در اینجا هیچ محدودیتی از قبیل بعد سیستم [۲۰]، هم درجه بودن زیرسیستم‌ها [۲۰]، [۲۱] و [۲۲] و یا فرد بودن درجه همگنی[۲۱] در نظر گرفته نشده‌است.

تعریف ۴: قانون کلیدزنی وابسته به حالت $\sigma(t)=\sigma(x(t))$ را قانون کلیدزنی همگن می‌نامیم اگر در همه نقاط روی یک شعاع همگن یک زیرسیستم خاص فعال شود. یعنی

$$\sigma(x_0)=q \Rightarrow \sigma(x)=q,\ \forall x\in R_{x_0} \qquad (۶)$$

با توجه به تعاریف مربوط به سیستم همگن و قانون کلیدزنی همگن، در مسئله بررسی پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده تحت قانون کلیدزنی همگن و یا طراحی قانون کلیدزنی همگن برای سیستم سوئیچ شونده n بعدی، مطالعه فضای $n-1$ بعدی کافی است و نتایج بدست آمده قابل تعمیم به کل فضای حالت است. چنانچه قانون کلیدزنی را برای همه نقاط مجموعه $n-1$ بعدی $S_{n-1}=\{x|\|x\|=1\}$ مشخص کنیم، با توجه به همگن بودن قانون کلیدزنی نتایج قابل تعمیم به کل فضای S_n است و

$$\sigma\left(\Delta_\lambda^r(x_0)\right)=\sigma(x_0), x_0\in S_{n-1} \quad (۷)$$

۳- پایداری سیستم سوئیچ شونده

در بخش اصلی این مقاله راه حلی برای مسئله بررسی پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده ارائه و شرایط کافی برای وجود قانون کلیدزنی همگن پایدارساز مطرح می‌شود. روش مقاله حاضر برای حل مسئله مورد بحث بر توسعه فرض وجود ترکیب محدب پایدار برای سیستم‌های خطی به سیستم‌های غیرخطی و همگن استوار است. شرایط کافی برای وجود قانون کلیدزنی پایدارساز برای سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده در حالت کلی در لم ۱ بیان می‌شود. احراز شرایط لم ۱ برای سیستم غیرخطی سوئیچ شونده بدون هیچ محدودیتی بسیار دشوار است. در قضیه ۲ شرایط کافی برای وجود قانون کلیدزنی همگن پایدارساز برای سیستم‌های همگن سوئیچ شونده به عنوان کلاسی از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده بیان می‌گردد. همچنین از قضایای مربوط به پایداری سیستم همگن [۲۷] برای اثبات پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده استفاده می‌شود.

لم ۱- سیستم غیرخطی سوئیچ شونده n بعدی $\dot{x}=f_i(x), i=1,\dots,m$ را در نظر بگیرید که در آن $f_i(0)=0$ است. فرض کنید توابع اسکالر پیوسته $g_i(x), i=1,\dots,m$ که $g_i(x)\geq 0$ است وجود دارد بطوریکه سیستم $\dot{x}=\sum_{i=1}^m g_i(x)f_i(x)$ در $x=0$ پایدار مجانبی محلی باشد، آنگاه قانون کلیدزنی پایدارسازی وجود دارد که سیستم غیرخطی سوئیچ شونده به همراه آن در $x=0$ پایدار مجانبی محلی خواهد بود.

اثبات- سیستم $\dot{x}=\sum_{i=1}^m g_i(x)f_i(x)=h(x)$ پایدار مجانبی محلی است، بنابراین در یک همسایگی نقطه تعادل $x=0$ مثل D تابع لیاپانوف $V(x)$ وجود دارد بطوریکه

$$V(0)=0 \quad (۸)$$

$$V(x)>0, \forall x\in D \quad (۹)$$

$$\nabla V.h(x)<0, \forall x\in D \quad (۱۰)$$

رابطه (۱۰) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\nabla V.\sum_{i=1}^m g_i(x)f_i(x)<0 \quad (۱۱)$$

که معادل است با

$$\sum_{i=1}^m g_i(x)\left(\nabla V.f_i(x)\right)<0 \quad (۱۲)$$

با توجه به اینکه $g_i(x)\geq 0$ است، پس به ازای هر یک از عناصر فضای حالت حداقل یکی از جملات $\nabla V.f_i(x)$ کوچکتر از صفر خواهد بود.

مجموعه $I(x)=\{i\in Q|Q=\{1,\dots,m\}, \nabla V.f_i(x)<0\}$ را تشکیل می‌دهیم. قبلا نشان دادیم که تعداد عناصر $I(x)$ به ازای هر x، حداقل یک است. قانون کلیدزنی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\sigma(x)=i,\ i\in I(x) \quad (۱۳)$$

اکنون نشان می‌دهیم سیستم سوئیچ شونده غیرخطی به همراه قانون کلیدزنی (۱۳) پایدار است. تابع لیاپانوف $V(x)$ مطرح شده در بالا، تابع لیاپانوف مشترک سیستم سوئیچ شونده غیرخطی نیز هست. زیرا $V(0)=0$ و برای هر $V(x)>0, x\in D$ است. همچنین با توجه به قانون کلیدزنی انتخابی (۱۳) در هر نقطه از همسایگی D، $\nabla V.f_{\sigma(x)}(x)<0$ است. لازم به ذکر است چون تابع لیاپانوف تغییر نمی‌کند و پیوسته است نیازی به بررسی شرایط مرزی نیست و سیستم غیرخطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی (۱۳) پایدار مجانبی محلی است.

نکته ۱: چنانچه تابع لیاپانوف ارائه شده در لم ۱، شعاعی نامحدود نیز باشد سیستم غیرخطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی (۱۳) پایدار مجانبی همه جایی است.

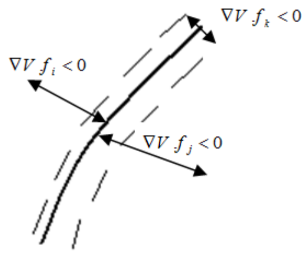
نکته ۲: تعیین قانون کلیدزنی با استفاده از لم فوق ممکن است منجر به تعداد کلیدزنی بیشمار در بازه زمانی محدود شود. برای جلوگیری از وقوع این مسئله می‌توان در نواحی که بیش از یک زیرسیستم امکان فعالیت دارد، قانون کلیدزنی را طوری تعریف کرد که با هر زیرسیستم که مسیر حالت وارد ناحیه مذکور شد تا خروج از آن ناحیه همان زیرسیستم فعال بماند و کلیدزنی جدید اتفاق نیفتد. این قانون کلیدزنی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma\left(x(t_0)\right)=\arg\min_i \nabla V.f_i\left(x(t_0)\right),\ i\in Q$$

$$\sigma\left(x(t)\right)=\begin{cases}\sigma\left(x(t^-)\right), & if\ \sigma\left(x(t^-)\right)\in I(x(t))\\ \min j \quad j\in I(x(t)), & oth.\end{cases} \quad (۱۴)$$

می‌توان نشان داد که نواحی ممکن برای فعالیت زیرسیستم‌ها در نزدیکی مرزهایشان با هم تداخل دارند. بنابراین قانون کلیدزنی (۱۴) از هرگونه

امکان وقوع کلیدزنی بیشمار در بازه زمانی محدود جلوگیری می‌کند. با توجه به شرایط لم ۱ در هر نقطه از فضا حداقل یک زیرسیستم وجود دارد که $\nabla V.f_i<0$ است. همچنین در مرز نواحی ممکن برای زیرسیستم‌ها $\nabla V.f_i=0$ و خود این مرز جزو ناحیه ممکن نیست. بنابراین چنانچه دو ناحیه ممکن برای فعالیت زیرسیستم‌های i,j ام تنها در مرز مشترک باشند، با توجه به شرایط لم ۱ حتما زیرسیستم دیگری مثل k وجود دارد که روی مرز مذکور $\nabla V.f_k<0$ برقرار است. چون V و f_k توابع پیوسته‌ای هستند، در یک همسایگی این مرز نیز $\nabla V.f_k<0$ است. این وضعیت در شکل (۱) نمایش داده شده است. باتوجه به قانون کلیدزنی اصلاح شده (۱۴) وقتی پاسخ سیستم توسط هریک از زیرسیستم‌های i,j ام به مرز مذکور برسد زیرسیستم k ام فعال می‌شود وتا زمانی که $\nabla V.f_k<0$ است فعال باقی می‌ماند.



شکل۱: وضعیت تداخل نواحی ممکن برای فعالیت زیرسیستم‌ها.

مثال ۱: سیستم غیرخطی سوئیچ شونده با سه زیرسیستم بصورت زیر را در نظر بگیرید.

$$s_1:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1-\frac{1}{2}x_1x_2^2\\ x_2-\frac{1}{2}x_1^2x_2\end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

$$s_2:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+2x_1x_2^2-x_2\\ x_1\end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

$$s_3:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ -3x_2\end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

مبدا تنها نقطه تعادل همه زیرسیستم‌های فوق است و زیرسیستم‌های اول (۱۵) و سوم (۱۷) ناپایدارند و همچنین سیستم دوم (۱۶) پایدار مجانبی محلی است. توابع $g_i(x),i=1,2,3$ را بصورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$g_1(x)=x_1^2 \quad (۱۸)$$

$$g_2(x)=x_2^2 \quad (۱۹)$$

$$g_3(x)=x_1^2x_2^2 \quad (۲۰)$$

سپس سیستم ترکیبی $\dot{x}=\sum_{i=1}^{3}g_i(x)f_i(x)=h(x)$ را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1^3-x_2^3-x_1x_2^2+2x_1x_2^4+\frac{1}{2}x_1^3x_2^2\\ x_1^2x_2+x_1x_2^2-3x_1^2x_2^3-\frac{1}{2}x_1^4x_2\end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

تابع لیاپانوف زیر را برای سیستم فوق معرفی می‌کنیم

$$V=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right) \quad (۲۲)$$

بنابراین برای سیستم ترکیبی فوق داریم

$$\dot{V}=-x_1^4-x_1^2x_2^4<0 \quad (۲۳)$$

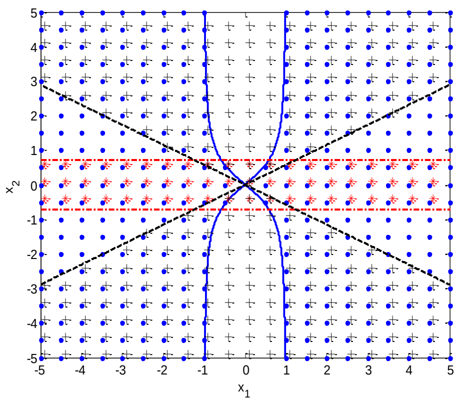
پس سیستم ترکیبی پایدار مجانبی همه جایی است. با توجه به لم ۱ نواحی ممکن برای هر یک از زیرسیستم‌ها را مشخص می‌کنیم. $\dot{V}_i,i=1,2,3$ مشتق تابع لیاپانوف معرفی شده در رابطه (۲۲) روی مسیرهای حالت زیرسیستم i ام است.

$$\dot{V}_1=-x_1^2\left(1+x_2^2\right)+x_2^2 \quad (۲۴)$$

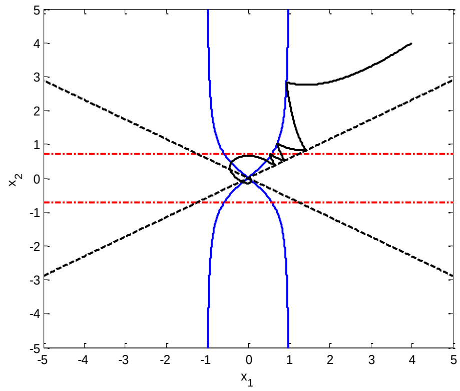
$$\dot{V}_2=-x_1^2+2x_1^2x_2^2 \quad (۲۵)$$

$$\dot{V}_3=x_1^2-3x_2^2 \quad (۲۶)$$

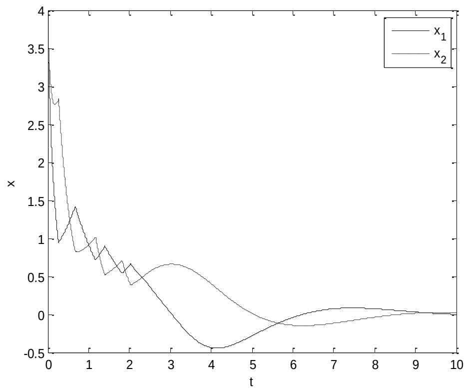
ناحیه ممکن برای فعال بودن هر یک از زیرسیستم‌ها، ناحیه‌ایست که در آن $\dot{V}_i<0$ است. این نواحی و مرزهای آنها در شکل (۲) مشخص شده اند. مشاهده می‌شود که زیرسیستم‌ها همه فضای حالت را تحت پوشش قرار داده اند و در برخی نواحی بیش از یک زیرسیستم امکان فعال شدن دارد. قانون کلیدزنی را براساس رابطه (۱۴) معرفی می‌کنیم. مسیر حالت و پاسخ سیستم برای شرط اولیه [۴، ۴] و همچنین سیگنال کلیدزنی به ترتیب در شکلهای (۳) تا (۵) نشان داده شده است.



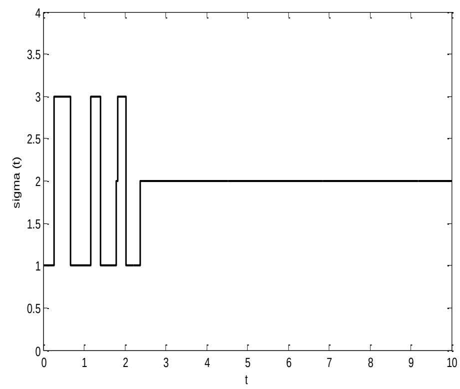
شکل ۲: نواحی ممکن برای فعالیت زیرسیستم‌ها: (۰) ناحیه مربوط به زیرسیستم (۱۵) با مرز آبی، (*) ناحیه مربوط به زیرسیستم (۱۶) با مرز قرمز و (+)ناحیه مربوط به زیرسیستم (۱۷) با مرز سیاه.



شکل ۳: مسیر حالت سیستم سوئیچ شونده (۱۷)–(۱۵) به ازای شرط اولیه [۴، ۴].



شکل ۴: حالتهای سیستم سوئیچ شونده (۱۷)–(۱۵) نسبت به زمان



شکل ۵: سیگنال کلیدزنی $\sigma(t)$ برای سیستم غیرخطی سوئیچ شونده (۱۷)–(۱۵) با شرایط اولیه [۴، ۴].

در ادامه برای بررسی پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده که هدف اصلی این مقاله است به بیان یک قضیه از مرجع [۲۲] می‌پردازیم. این قضیه به وجود تابع لیاپانوف همگن برای سیستم همگن پایدار مجانبی اشاره می‌کند.

قضیه ۱- [۲۲] فرض کنید $\dot{x}=f(x)$ پیوسته و همگن از درجه d با ضرایب گسترش $(r_1,\ldots,r_n)$ بوده و $x=0$ نقطه تعادل سیستم و پایدار مجانبی محلی باشد. همچنین فرض کنید p یک عدد طبیعی مثبت و k یک عدد حقیقی بزرگتر از $p.\max_{1\le i\le n} r_i$ باشد، آنگاه تابع $\overline{V}:R^n\to R$ وجود دارد بطوریکه:

۱) $\overline{V}\in C^P$ که در آن C^P کلاس توابعی با p مشتق پیوسته است.

۲) $\overline{V}(0)=0,\overline{V}(x)>0 \ \ \forall x\neq 0 \ \& \lim_{\|x\|\to\infty}\overline{V}=\infty$

۳) $\overline{V}$ همگن از درجه k است، یعنی
$$\overline{V}\left(\lambda^{r_1}x_1,\ldots,\lambda^{r_n}x_n\right)=\lambda^k\overline{V}\left(x_1,\ldots,x_n\right)$$

۴) $\nabla\overline{V}.f(x)<0$.

همچنین در [۲۲] نشان داده شده است که برای سیستم‌های همگن، پایداری مجانبی محلی معادل پایداری مجانبی همه جایی است.

با استفاده از لم ۱ و قضیه ۱ به بیان نتیجه اصلی این مقاله در قضیه ۲ می‌پردازیم.

قضیه ۲- سیستم همگن سوئیچ شونده n بعدی $\dot{x}=f_i(x), i=1,\ldots,m$ را در نظر بگیرید که در آن $f_i(0)=0$ و $\dot{x}=f_i(x)$ سیستم همگن از درجه d_i بوده و ضرایب گسترش همه زیرسیستم‌ها $(r_1,\ldots,r_n)$ است. چنانچه

۱) عدد حقیقی مثبت l وجود داشته باشد بطوریکه $l\ge\max_i d_i$،

۲) توابع اسکالر مثبت $g_i(x), i=1,\ldots,m$ وجود داشته باشد که $g_i(x)$ همگن از درجه $l-d_i$ با ضرایب گسترش $(r_1,\ldots,r_n)$ بوده و سیستم ترکیبی $\dot{x}=\sum_{i=1}^{m}g_i(x)f_i(x)$ پایدار مجانبی باشد،

آنگاه قانون کلیدزنی همگن پایدارسازی وجود دارد که سیستم همگن سوئیچ شونده به همراه آن پایدار مجانبی همه جایی است.

اثبات- با توجه به اینکه f_i همگن از درجه d_i و g_i همگن از درجه $l-d_i$ است و ضرایب گسترش همه توابع $(r_1,\ldots,r_n)$ می‌باشد، پس g_if_i و همچنین $\sum_{i=1}^{m}g_i(x)f_i(x)=h(x)$ همگن از درجه l با ضرایب گسترش $(r_1,\ldots,r_n)$ است. بنا به قضیه ۱ برای سیستم همگن و پایدار $h(x)$ تابع لیاپانوف V همگن از درجه k با ضرایب گسترش $(r_1,\ldots,r_n)$ وجود دارد. با توجه به لم ۱ قانون کلیدزنی پایدارساز برای این سیستم سوئیچ شونده وجود دارد. قانون کلیدزنی پایدارساز را مطابق لم ۱ فقط برای عناصر روی گوی واحد تعیین می‌کنیم. مجموعه $I(x_0)$ را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم

$$I(x_0)=\left\{i\in Q\middle|Q=\{1,\ldots,m\},\nabla V.f_i(x_0)<0,\|x_0\|=1\right\} \quad (۲۷)$$

و قانون کلیدزنی را روی گوی واحد بصورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\sigma(x_0)=i,\ i\in I(x_0),\|x_0\|=1 \quad (۲۸)$$

قانون کلیدزنی کلی را نیز بصورت همگن مشخص می‌کنیم

$$\sigma(x)=i\,;\ x\in R_{x_0},\|x_0\|=1,\sigma(x_0)=i \tag{۲۹}$$

چنانچه ذکر شد بنا به قضیه ۱ تابع لیاپانوف V همگن است و بنا به لم ۱ قانون کلیدزنی روی گوی واحد طوری انتخاب شده که شرط منفی بودن مشتق تابع لیاپانوف برای سیستم در حال کار برقرار باشد، یعنی

$$\nabla V.f_i(x_0)<0 \tag{۳۰}$$

قانون کلیدزنی کلی نیز طوری انتخاب شده که در همه نقاط روی شعاع همگن همان زیرسیستمی فعال باشد که در اشتراک آن شعاع با گوی واحد فعال بوده است. می‌دانیم که هر یک از عناصر روی یک شعاع همگن را می‌توان بصورت $x=\Delta_\lambda^r(x_0)$ نوشت که در آن λ عدد حقیقی مثبت است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\nabla V.f_i(x)&=\nabla V.f_i\left(\Delta_\lambda^r(x_0)\right)\\&=\nabla V.\lambda^{d_i}f_i(x_0)=\lambda^{d_i}\left(\nabla V.f_i(x_0)\right)<0\end{aligned} \tag{۳۱}$$

پس نتیجه می‌گیریم که سیستم همگن سوئیچ شونده به همراه قانون کلیدزنی تعریف شده در (۲۸) و (۲۹) پایدار مجانبی می‌باشد. همچنین با توجه به اینکه قانون کلیدزنی در همه فضای حالت صادق است و تابع لیاپانوف V نیز بنابه قضیه ۱ شعاعی نامحدود است، پس پایداری سیستم فوق همه جایی است. قانون کلیدزنی همگن که توسط روابط (۲۸) و (۲۹) بیان شده را می‌توان برای جلوگیری از وقوع کلیدزنی بیشمار در زمان محدود بصورت (۱۴) اصلاح نمود.

واضح است که روش کلی به منظور انتخاب تابع لیاپانوف و توابع وزنی $g_i(x)$ وجود ندارد و انتخاب آنها از طریق جستجو انجام می‌شود. اما با توجه به اینکه تابع لیاپانوف، همگن با ضرایب گسترش مشابه زیرسیستم‌ها است می‌توان حدسهای مناسبی برای تابع لیاپانوف زد یکی از ساده ترین انتخاب‌ها برای یک تابع لیاپانوف از درجه k با ضرایب گسترش $(r_1,\ldots,r_n)$ بصورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i^2)^{\frac{k}{2r_i}},\ a_i\ge 0,i=1,\ldots,n \tag{۳۲}$$

همچنین درجه $\max_i d_i\le l$ برای سیستم ترکیبی در نظر گرفته می‌شود. براین اساس درجه همگنی هر یک از $g_i(x)$ ها مشخص می‌گردد. سپس برای هر یک از $g_i(x)$ها یک تابع همگن با ضرایب گسترش مشابه زیرسیستم‌ها و از درجه $l-d_i$ با ضرایب متغیر پیشنهاد داده می‌شود. سپس ضرایب مجهول در V و $g_i(x)$ ها طوری انتخاب می‌شوند که $\dot V$ برای سیستم ترکیبی در همه فضا منفی شود. چنانچه با Vو $g_i(x)$ های در نظر گرفته شده به نتیجه نرسیدیم آنها را تغییر می‌دهیم.

برای نشان دادن چگونگی عملکرد قضیه فوق به ذکر یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۲: سیستم همگن سوئیچ شونده با دو زیرسیستم بصورت زیر را در نظر بگیرید

$$s_1:\begin{bmatrix}\dot x_1\\\dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_1\\-x_1^3+x_2\end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

$$s_2:\begin{bmatrix}\dot x_1\\\dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5x_2\\-x_1^2x_2+0.5x_1^5-x_2^{5/3}\end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

هر دو زیرسیستم فوق همگن با ضرایب گسترش (۱,۳) و ناپایدار هستند. زیرسیستم اول (۳۳) همگن از درجه صفر و زیرسیستم دوم (۳۴) همگن از درجه دو است. توابع $g_i(x),i=1,2$ را بصورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$g_1(x)=x_1^2 \tag{۳۵}$$

$$g_2(x)=1 \tag{۳۶}$$

سیستم ترکیبی $\dot x=\sum_{i=1}^{2}g_i(x)f_i(x)=h(x)$ را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\\dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_1^3+0.5x_2\\-0.5x_1^5-x_2^{5/3}\end{bmatrix} \tag{۳۷}$$

سیستم ترکیبی فوق همگن با ضرایب گسترش (۱,۳) و از درجه ۲ است. تابع لیاپانوف همگن با ضرایب گسترش (۱,۳) از درجه ۲ را بصورت زیر برای سیستم ترکیبی معرفی می‌کنیم:

$$V=\frac{1}{6}x_1^6+\frac{1}{2}x_2^2 \tag{۳۸}$$

برای سیستم ترکیبی فوق داریم

$$\dot V=-2x_1^8-x_2^{8/3}<0 \tag{۳۹}$$

پس سیستم ترکیبی پایدار مجانبی است و چون تابع لیاپانوف شعاعی نامحدود است، پس سیستم ترکیبی پایدار مجانبی همه جایی است. با توجه به قضیه ۲ نواحی ممکن برای هر یک از زیرسیستم‌ها را مشخص می‌کنیم. $\dot V_i,i=1,2$ مشتق تابع لیاپانوف معرفی شده روی مسیرهای حالت زیرسیستم i ام است.

$$\dot V_1=-2x_1^6-x_2x_1^3+x_2^2 \tag{۴۰}$$

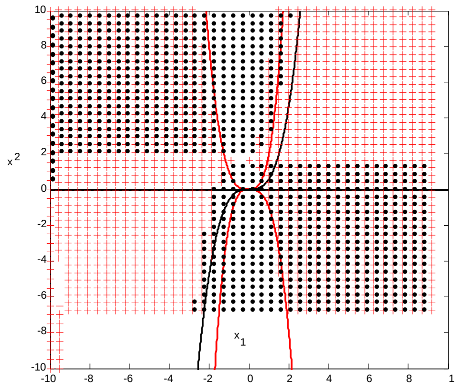
$$\dot V_2=-x_1^2x_2^2-x_2^{8/3}+x_1^5x_2 \tag{۴۱}$$

ناحیه ممکن برای فعال بودن هر یک از زیرسیستم‌ها، ناحیه‌ایست که در آن $\dot V_i<0$ است. این نواحی بصورت زیر مشخص می‌شود

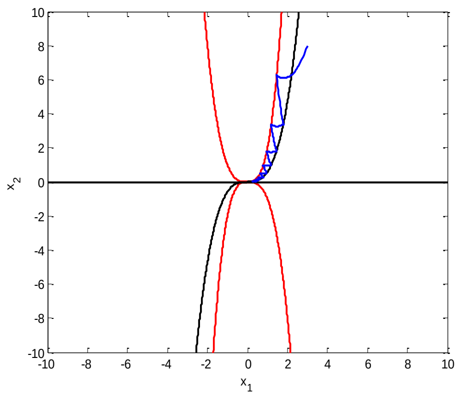
$$\dot V_1<0\Rightarrow\begin{cases}-x_1^3<x_2<2x_1^3,\ x_1>0\\2x_1^3<x_2<-x_1^3,\ x_1<0\end{cases} \tag{۴۲}$$

$$\dot{V}_2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 x_2 < 0 \\ x_2 > 0.5877 x_1^3,\ x_1 > 0 \\ x_2 < 0.5877 x_1^3,\ x_1 < 0 \end{cases} \qquad (۴۳)$$

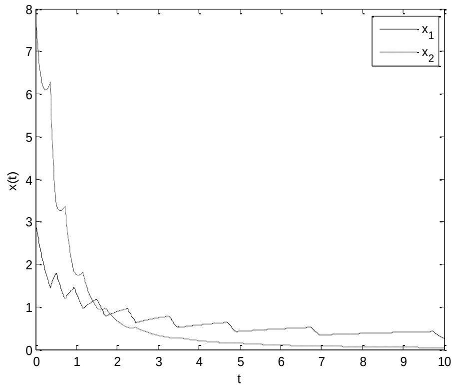
این نواحی و مرزهای آنها در شکل (۶) مشخص شده اند. مشاهده می‌شود که زیرسیستم‌ها همه فضای حالت را تحت پوشش قرار داده اند و در برخی نواحی بیش از یک زیرسیستم امکان فعال شدن دارد. قانون کلیدزنی را بصورت رابطه (۱۴) معرفی می‌کنیم. واضح است که قانون کلیدزنی ارائه شده همگن می‌باشد. مسیر حالت و پاسخ سیستم برای شرط اولیه [۸ ۳] و همچنین سیگنال کلیدزنی به ترتیب در شکلهای (۷) تا (۹) نشان داده شده است.



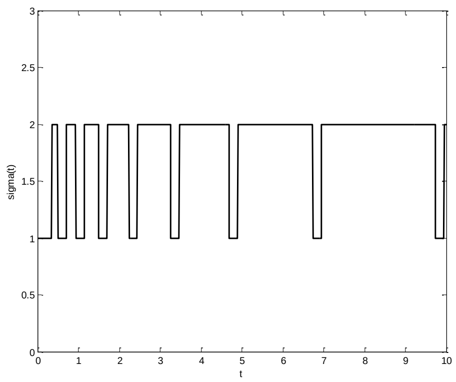
شکل ۶: نواحی ممکن برای فعالیت زیرسیستم‌ها: (+) ناحیه مربوط به زیرسیستم (۳۳) با مرز قرمز، (۰) ناحیه مربوط به زیرسیستم (۳۴) با مرز سیاه.



شکل ۷: مسیر حالت سیستم سوئیچ شونده (۳۳) و (۳۴) به ازای شرط اولیه [۸ ۳]



شکل ۸: حالتهای سیستم سوئیچ شونده (۳۳) و (۳۴) نسبت به زمان.



شکل ۹: سیگنال کلیدزنی $\sigma(t)$ برای سیستم غیرخطی سوئیچ شونده (۳۳) و (۳۴) با شرایط اولیه [۸، ۳].

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش جدیدی برای بررسی پایداری دسته خاصی از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده معرفی شده است. سیستم سوئیچ شونده مورد بحث دارای زیرسیستم‌های همگن با ضرایب گسترش یکسان است. روش ارائه شده مبتنی بر وجود تابع لیاپانوف مشترک همگن است و براساس آن قانون کلیدزنی پایدارساز همگن مشخص می‌گردد. در این روش هیچ محدودیتی در رابطه با بعد سیستم، درجه همگنی و ضرایب گسترش وجود ندارد. بنابراین جامعیت روش ارائه شده مهمترین مزیت آن نسبت به مطالعات قبلی است. همچنین ارائه قانون کلیدزنی همگن برای سیستم همگن سوئیچ شونده از دیگر مزایای این روش است که منجر به کاهش بعد فضای مورد مطالعه به $n-1$ می‌شود. از طرف دیگر معرفی توابع وزنی مناسب و تابع لیاپانوف از دشواریهای این روش محسوب می‌شود.

مراجع

[1] A. Bemporad, G. Ferrari-Trecate, M. Morari, "Observability and Controllability of Piecewise Affine and Hybrid Systems", Proc. of the 38th Conference on Decision & Control, pp. 3966-3971, 1999.

[2] S. Galeani, L. Menini, A. Potini, "Trajectory tracking in linear hybrid systems: an internal principle approach", Proc. of 2008 American Control Conference, pp. 4627-4632, 2008.

[3] S. Hedlund, A. Rantzer, "Optimal Control of Hybrid Systems", Proc. of the 38th Conference on Decision & Control, pp. 3972-3977, 1999.

[4] J. P. Hespanha, A. Stephen Morse, "Switching between stabilizing controllers", Automatica 38, pp. 1905-1917, 2002.

[5] S. Jiang, P. G. Voulgaris, "Performance Optimization of Switched Systems: A Model Matching Approach", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 54, NO. 9, pp. 2058-2071, 2009.

[6] M. Rinehart, M. Dahleh, I. Kolmanovsky, "Optimal Control of Switched Homogeneous Systems", Proc. of the 2007 American Control Conference, pp. 1377-1382, 2007.

[7] A.A. Zevin, M. A. Pinsky, "General Solution of Stability Problem for Plane Linear Switched Systems and Differential Inclusions", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 53, NO. 9, 2008.

[8] S. Nishiyama, T. Hayakawa, "Optimal Stable State-Space Partitioning for Piecewise Linear Planar System", Proc. 2008 American control Conference, pp. 3959-3964, 2008.

[9] J. L. Mancilla, "A Condition for the Stability of Switched Nonlinear Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 45, NO. 11,pp. 2077-2079, 2000.

[10] Z. H. Huang, C. Xiang, H. Lin, T. H. Lee, "Necessary and sufficient conditions for regional stabilisability of generic switched linear systems with a pair of planar subsystems", Int. Journal of Control, vol. 83, Issue 4, pp. 694-715, 2010.

[11] B. Hu, G. Zhai, A. N. Michel, "Hybrid static output feedback stabilization of second-order linear time-invariant systems", Linear Algebra and its Application 351-352, pp. 475-785, 2002.

[12] S. Cong, L. Yin, Y. Zou, "Exponential Stabilization of Second-Order Switched Systems: Necessary and Sufficient Conditions", Proc. of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, pp. 3859-3863, 2009.

[13] L. Vu, D. Liberzon, "Common Lyapunov functions for families of commuting nonlinear systems", Systems and Control Letters 54, pp. 405-416, 2005.

[14] E. Moulay, R. Bourdais, W. Perruqetti, "Stabilization of nonlinear switched systems using control Lyapunov functions", Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 1, pp. 482-490, 2007.

[15] N. H. El-Farra, P. Mhaskar, P. D. Christofides, "Output feedback control of switched nonlinear systems using multiple Lyapunov functions", Systems & Control Letters 54, pp. 1163-1182, 2005.

[16] H. Lin, P. J. Antsaklis, " Switching Stabilizability for Continuous-Time Uncertain Switched Linear Systems ", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 52, NO. 4, pp. 633-646, 2007.

[17] H. Lin, P. J. Antsaklis, "Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 54, NO. 2, pp. 308-322, 2009.

[۱۸] ح. ملااحمدیان، ع. کریم‌پور و ن. پریز، ۱۳۹۰، "پایدارسازی و کنترل سیستم‌های خطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی: دیدگاه مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی خطی"، مجله کنترلISSN 2008-8345، جلد ۵، شماره ۲، ص ۱۲-۲۱.

[19] J. Wu, "Feedback Stabilization for Multiinput Switched Nonlinear Systems: Two Subsystems Case", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 53, NO. 4, pp. 1037-1042, 2008.

[20] D. Holcman, M. Margaliot, "Stability Analysis of Second-Order Switched Homogeneouse Systems", SIAM Journal of Control Optimization, vol. 41, NO. 5, pp. 1609-1625, 2003.

[21] L. Zhang, S. Liu, H. Lan, "On Stability of Switched Homogeneous Nonlinear Systems", Mathematical Analysis and Applications, 334, pp. 414-430, 2007.

[22] A. Ignatyev, "Comments on “On stability of switched homogeneous nonlinear systems” by Lijun Zhang, Sheng Liu, and Hai Lan[J. Math. Anal. Appl. 334 (1) (2007) 414–430]", Math. Anal. Appl., 373:343-344.

[23] S. Emre Tuna, "Optimal regulation of homogeneous systems", Automatica 41, pp. 1879-1890, 2005.

[24] S. Emre Tuna, "Growth rate of switched homogeneous systems", Automatica 44, pp. 2857-2862, 2008.

[25] S. Emre Tuna, "Growth rate of switched homogeneous systems", Automatica 44, pp. 2857-2862, 2008.A. Yu. Aleksandrov, A. A. Kosov, A. V. Platonov, "On the asymptotic stability of switched homogeneous systems", Systems and Control Letters 61: 127-133, 2012.

[26] V. I. Zubov, "Mathematical Methods for the Study of Automatical Control Systems", Pergamon Press, Jerusalem Acad. Press, Oxford Jerusalem, 1962.

[27] L. Rosier, "Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field", Systems and Control Letters 19, pp. 467-473, 1992.

مجله کنترل
جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۳۱-۲۱

شناسایی خطای اندازه‌گیری سنسور در سیستم یاتاقان مغناطیسی فعال با استفاده از مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی

سید مهدی دربندی[۱]، مهدی بهزاد[۲]، حمید مهدیقلی[۳]، حسن سالاریه[۴]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، s_m_darbandi@mech.sharif.edu

[۲] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، m_behzad@sharif.edu

[۳] استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، mehdi@sharif.edu

[۴] دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، salarieh@sharif.edu

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۲/۲۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۵/۱۷)

چکیده: در این تحقیق شناسایی خطای اندازه‌گیری سنسورهای جابجایی سنج غیرتماسی در یک مدل آزمایشگاهی یاتاقان مغناطیسی فعال انجام گرفته است. در ابتدا معادلات دینامیکی یک یاتاقان مغناطیسی به همراه تقویت کننده‌های قدرت استخراج شده و پارامترهای مدل آزمایشگاهی شناسایی شده‌اند. سپس به منظور پایدار سازی سیستم از کنترلگر LQR به همراه مشاهده‌گر تناسبی استفاده شده است. نتایج تجربی نشان می‌دهد که استفاده از مشاهده‌گر تناسبی رایج سبب تقویت خطای اندازه‌گیری و انحراف سیستم از مرکز یاتاقان خواهد شد. بنابراین برای شناسایی خطای اندازه‌گیری از یک مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی استفاده شده و روش ارائه شده روی مدل آزمایشگاهی یاتاقان مغناطیسی پیاده سازی شده است. نتایج تجربی نشان می‌دهد که مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی به خوبی قادر به شناسایی خطای اندازه‌گیری سنسور و حذف اثر آن بر پاسخ سیستم است.

کلمات کلیدی: خطای اندازه‌گیری سنسور، مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی، یاتاقان مغناطیسی.

Identification of Sensor Runout in Active Magnetic Bearing System

Seyed Mahdi Darbandi, Mehdi Behzad, Hamid Mehdigholi, Hassan Salarieh

Abstract: The identification of sensor runout in non-contact proximity sensors of an active magnetic bearing test rig is presented in this paper. First, the dynamic equations of the magnetic bearing together with the power amplifiers are derived and parameters of the experimental test rig are identified. Then, to stabilize the system, the LQR controller and a proportional observer are utilized. Experimental results show that the conventional proportional observer amplifies the sensor runout and deviates the system from origin. Therefore, a proportional integral observer is used to identify the sensor runout and implemented on the laboratory model of the active magnetic bearing. The experimental results show that the proportional integral observer can effectively identify the sensor runout and eliminate its effect on the system response.

Keywords: Sensor runout, Proportional integral observer, Magnetic Bearing.

۱- مقدمه

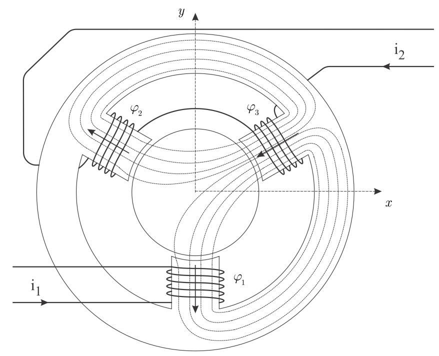
در چند دهه اخیر یاتاقان‌های مغناطیسی به منظور دستیابی به کارایی بهینه، دقت بالا و همچنین کنترل ارتعاشات ماشین‌های دوار در صنعت مورد استفاده قرار گرفته‌اند. با حذف تماس فیزیکی بین یاتاقان و اجزای دوار امکان دسترسی به سرعت‌های دورانی بسیار بالا فراهم شده که این امر درگذشته با استفاده از یاتاقان‌های رایج صنعتی با دشواری‌های فراوانی

همراه بوده است. یاتاقان‌های مغناطیسی از نظر ساختار و تعداد قطب دارای انواع متفاوتی هستند [۱]. به طور معمول در صنعت از یاتاقان‌های هشت قطبی که دارای دینامیک خطی هستند استفاده می‌شود. با وجود این، مواردی نظیر هزینه بالا، اتلاف توان زیاد، گرم شدن یاتاقان و کم بودن فضا در استاتور سبب شده تا محققان طرح‌های دیگری مانند یاتاقان مغناطیسی سه قطبی را مورد تحقیق قرار دهند. یاتاقان مغناطیسی سه قطبی به منبع تغذیه‌های کمتری نیاز داشته و درنتیجه هزینه تمام شده و اتلاف توان آن نسبت به یاتاقان هشت قطبی کمتر خواهد بود.

علیرغم این مزیت‌ها، به علت وابستگی شار مغناطیسی بین قطب‌های یاتاقان سه قطبی، این نوع یاتاقان مغناطیسی دارای دینامیک غیرخطی است و این امر سبب شده تا استفاده از روش‌های کنترل خطی در آن با دشواری‌هایی همراه باشد. Chen برای اولین بار مساله طراحی بهینه را در یاتاقان مغناطیسی سه قطبی مورد بررسی قرار داد [۲]. وی طرحی را برای یاتاقان سه قطبی پیشنهاد داد که در آن اتلاف توان به کمترین حد ممکن می‌رسد و تنها به دو منبع تغذیه نیاز دارد (شکل ۱). پس از وی Hsu از روش خطی سازی فیدبک به همراه مود لغزشی انتگرالی برای پایدار نمودن این مدل یاتاقان سه قطبی استفاده نمود [۳] و [۴]. به منظور اثبات کارایی، Chen این روش کنترلی را بر روی یک مدل آزمایشگاهی یاتاقان مغناطیسی سه قطبی با کنترل جریان و ولتاژ سیم‌پیچ‌ها پیاده سازی نمود [۵-۸]. همانطور که Chen بیان کرده است با وجود کارایی روش مود لغزشی، مشکلاتی نظیر ناپیوستگی سیگنال کنترلی و زمان محاسبات زیاد در پیاده سازی این کنترلگر به صورت تجربی وجود دارد [۹]. درنتیجه وی در تازه‌ترین تحقیق خود از یک روش کنترل غیرخطی لیاپانوفی برای غلبه بر این مشکلات استفاده کرده است.

به طور کلی با توجه به دینامیک غیرخطی یاتاقان سه قطبی، بیشتر کارهای انجام شده روی این مدل یاتاقان مغناطیسی بر روش‌های کنترل غیرخطی متمرکز شده است. یکی از مشکلات اصلی روش‌های کنترل غیرخطی وابستگی زیاد آنها به مدل دینامیکی سیستم است. دربندی و همکاران [۱۰] در تحقیقی بر روی یک مدل آزمایشگاهی یاتاقان سه قطبی نشان داده‌اند که با شناسایی دقیق دینامیک سیستم و استفاده از جریان بایاس می‌توان از کنترلگر LQG برای پایدار کردن یاتاقان سه قطبی استفاده نمود. وی در مقایسه‌ای بین روش کنترلی مود لغزشی و روش LQG، نشان داده است که کارایی کنترلگر خطی بهتر از روش مود لغزشی بوده و وابستگی آن به عدم قطعیت‌ها در مدل دینامیکی و پارامترهای سیستم بسیار کمتر از کنترلگر غیرخطی است.

به طور معمول در یاتاقان‌های مغناطیسی برای اندازه‌گیری موقعیت محور از سنسورهای جابجایی‌سنج غیرتماسی استفاده می‌شود. سنسورهای جابجایی‌سنج القایی از یک هسته مغناطیسی سیم‌پیچی شده تشکیل شده‌اند که توسط ولتاژ با فرکانس ۵-۱۰۰ kHz تحریک شده و از طریق اندازه‌گیری آمپدانس، فاصله هوایی تا سطح مورد اندازه‌گیری تعیین می‌شود [۱]. این سنسورها نسبت به ناهمواری‌های سطح و همچنین تغییر ضریب نفوذپذیری مغناطیسی بسیار حساس بوده و کوچکترین ناهمواری در سطح موردنظر یا تغییر خواص آن سبب ایجاد اغتشاش در خروجی سنسور خواهد شد. از آنجایی که به خاطر دقت ساخت، سطح مقطع محور در سیستم یاتاقان مغناطیسی به طور کامل دایره‌ای نیست همواره مقداری خطا در خروجی سنسور جابجایی وجود خواهد داشت که تحت عنوان Sensor Runout شناخته می‌شود. این خطای سنسور به صورت یک اغتشاش خارجی در سیستم کنترلی ظاهر شده و سبب می‌شود تا محور در نقطه‌ای غیر از مرکز یاتاقان قرار گیرد.



شکل ۱: ساختار یاتاقان مغناطیسی سه قطبی با دو جریان در سیم‌پیچ‌ها

هدف از این تحقیق شناسایی خطای اندازه‌گیری سنسور جابجایی در یک یاتاقان مغناطیسی است. این موضوع توسط برخی محققان مورد بررسی قرار گرفته است. Kim [۱۱] روشی را پیشنهاد داده که در آن خطای اندازه‌گیری با استفاده از سعی و خطا تخمین زده شده و سپس در حالت مدار باز این مقدار خطا از خروجی سیستم حذف می‌شود. Na [۱۲] و Kanemitsu [۱۳] در تحقیق‌های مجزا از روش تطبیقی رو به جلو استفاده نموده‌اند که به کمک الگوریتم مینیمم سازی مربعات، خطای اندازه‌گیری را شناسایی می‌نماید. یکی از مشکلات روش‌های رو به جلو غیرخطی کردن کنترلگر و عدم تضمین پایداری سیستم مدار بسته است. درنتیجه Setiawan [۱۴] در تحقیق دیگری یک روش تطبیقی را برای شناسایی خطای سنسور پیشنهاد نموده که پایداری سیستم در آن با استفاده از قانون لیاپانوف تضمین شده است. در تحقیق حاضر از یک مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی به منظور شناسایی و حذف خطای سنسور استفاده شده است. مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی به عنوان یک مدل گسترش یافته از مشاهده‌گر لونبرگر برای اولین بار توسط Wojciechowsky [۱۵] برای سیستم تک ورودی-تک خروجی ارائه شد. یکی از مشکلات استفاده از مشاهده‌گر آن است که هرگونه اغتشاش در خروجی سیستم توسط ماتریس ضرائب مشاهده‌گر تقویت شده و به صورت یک اغتشاش خارجی به سیستم وارد می‌شود. برای رفع این مشکل Saif برای اولین بار یک مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی را معرفی نمود که قادر به شناسایی یک خطای اندازه‌گیری ثابت در خروجی سیستم است [۱۶]. همچنین Busawon در تحقیق دیگری مشاهده‌گری را ارائه کرد که در مقابل نویز اندازه‌گیری مقاوم باشد [۱۷]. محققان دیگر نیز به منظور حذف خطا

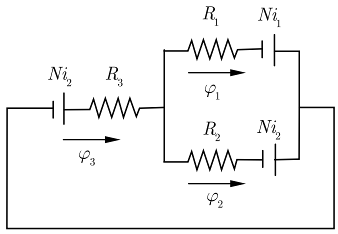
و نویز در اندازه‌گیری خروجی سیستم بررسی هایی را بر روی مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی انجام داده‌اند [۱۸-۲۰].

Khedher [۲۰] در تحقیق خود روشی را برای طراحی یک مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی پیشنهاد کرده که در آن مشاهده‌گر قادر به شناسایی خطای اندازه‌گیری متغیر با زمان است. با وجود کارایی این روش، اشتباهی در طراحی مشاهده‌گر وجود دارد که استفاده از آن را به صورت عملی روی مدل آزمایشگاهی با مشکل مواجه می‌سازد. در تحقیق حاضر از مدل اصلاح شده این مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی برای تخمین خطای اندازه‌گیری سنسور در یک سیستم یاتاقان مغناطیسی سه قطبی استفاده شده است. همچنین کارایی روش ارائه شده با استفاده از نتایج تجربی روی مدل آزمایشگاهی نشان داده شده است.

۲- دینامیک سیستم

۲-۱- یاتاقان مغناطیسی سه قطبی

در شکل ۱ نمایی از ساختار یک یاتاقان مغناطیسی سه قطبی ارائه شده توسط Chen [۲] نشان داده شده است. در این یاتاقان قطب‌ها با زاویه ۱۲۰ درجه از یکدیگر قرار گرفته‌اند. هر قطب دارای سطح مقطع A و تعداد N دور سیم است. φ_j نشان دهنده شار مغناطیسی قطب j ام است. از سیم پیچ‌های مربوط به قطب‌های ۲ و ۳ جریان یکسانی عبور می‌کند اما جهت جریان به گونه‌ای است که شار مغناطیسی ایجاد شده در این قطب‌ها در جهت مخالف یکدیگر باشد. با فرض آنکه از نشتی شار، اشباع در هسته و مقاومت مغناطیسی هسته آهنی صرفنظر شود می‌توان مدار مغناطیسی یاتاقان سه قطبی را مطابق شکل ۲ نشان داد.



شکل ۲: مدار مغناطیسی یاتاقان سه قطبی

با توجه به شکل ۲ می‌توان معادلاتی را مشابه قوانین ولتاژ-جریان کیرشهف برای مدار مغناطیسی درنظرگرفته شده به صورت زیر ارائه داد.

$$\begin{cases}\varphi_1+\varphi_2=\varphi_3\\ Ni_2-R_3\varphi_3+Ni_2-R_2\varphi_2=0\\ Ni_2-R_3\varphi_3+Ni_1-R_1\varphi_1=0\end{cases} \qquad (۱)$$

i_1 و i_2 جریان در سیم پیچ‌ها و R_j بیانگر مقاوت مغناطیسی در فاصله هوایی مربوط به قطب j ام است که توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$R_j=\frac{s_j}{\mu_0 A}\,,\; j=1..3 \qquad (۲)$$

که در آن $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$ نشان دهنده ضریب مغناطیس پذیری خلاء و s_j طول فاصله هوایی در قطب j ام است. با فرض جابجایی‌های کوچک محور، فاصله‌های هوایی در سه قطب به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases}s_1=s_0+y\\ s_2=s_0+\sqrt{3}x/2-y/2\\ s_3=s_0-\sqrt{3}x/2-y/2\end{cases} \qquad (۳)$$

که در آن s_0 فاصله هوایی اولیه و x و y جابجایی محور نسبت به مرکز یاتاقان هستند. با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۲) و حل دستگاه معادله رابطه (۱)، می‌توان شار مغناطیسی در هر قطب را به صورت تابعی از جریان سیم پیچ‌ها و میزان جابجایی محور به صورت زیر بدست آورد.

$$\varphi_1=2\gamma\left[\sqrt{3}xi_2+(2s_0-y)i_1\right] \qquad (۴)$$

$$\varphi_2=\gamma\left[(6s_0-\sqrt{3}x+3y)i_2+(-2s_0+\sqrt{3}x+y)i_1\right] \qquad (۵)$$

$$\varphi_3=\gamma\left[(6s_0+\sqrt{3}x+3y)i_2+(2s_0+\sqrt{3}x-y)i_1\right] \qquad (۶)$$

$$\gamma=2\mu_0 AN/3(4s_0^2-x^2-y^2) \qquad (۷)$$

با محاسبه میزان انرژی ذخیره شده در فاصله هوایی قطب‌ها و به کاربردن اصل کار مجازی، نیروی مغناطیسی وارد شده به محور از جانب هر قطب از رابطه زیر بدست می‌آید [۱].

$$f_j=\frac{\varphi_j^2}{2\mu_0 A}\,,\; j=1..3 \qquad (۸)$$

درنتیجه برآیند نیروی مغناطیسی وارد شده از طرف قطب‌ها به محور در راستای x و y عبارت است از

$$f_x=(f_3-f_2)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4\mu_0 A}(\varphi_3^2-\varphi_2^2) \qquad (۹)$$

$$f_y=(f_3+f_2)\cos\frac{\pi}{3}-f_1=\frac{1}{4\mu_0 A}(\varphi_3^2+\varphi_2^2-2\varphi_1^2) \qquad (۱۰)$$

با جایگذاری مقدار شار مغناطیسی هر قطب از رابطه‌های (۴-۷) در رابطه‌های (۹) و (۱۰) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}f_x=&\frac{3\gamma^2}{2\mu_0 A}[2x(2s_0-y)i_1^2+2\sqrt{3}(x^2-y^2+4s_0^2)i_1i_2\\ &+6x(2s_0+y)i_2^2]\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

$$\begin{aligned}f_y=&\frac{3\gamma^2}{2\mu_0 A}\{[x^2-(2s_0-y)^2]i_1^2+4\sqrt{3}xyi_1i_2\\ &+[3(2s_0+y)^2-3x^2]i_2^2\}\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

با توجه به رابطه‌های فوق مشخص است که نیروی یاتاقان مغناطیسی سه قطبی تابعی غیرخطی از جریان سیم پیچ‌ها و همچنین جابجایی محور است که سبب وابسته شدن دینامیک محور در راستای x و y نیز

خواهد شد. برای برطرف نمودن این مشکل متغیرهای $\bar{i}_1$ و $\bar{i}_2$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} i_1 &= \bar{i}_1 \\ i_2 &= i_b + \bar{i}_2 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

در رابطه فوق i_b نشان دهنده جریان بایاس در سیم پیچ‌های بالایی است. با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) و نوشتن بسط تیلور این معادلات حول نقطه صفر تا مرتبه اول نیروهای خطی شده به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$f_x = \frac{\mu_0 A N^2 i_b^2}{2 s_0^3} x + \frac{\mu_0 A N^2 i_b}{\sqrt{3} s_0^2} \bar{i}_1 + O(2) \tag{۱۴}$$

$$f_y = \frac{\mu_0 A N^2 i_b^2}{2 s_0^2} + \frac{\mu_0 A N^2 i_b^2}{2 s_0^3} y + \frac{\mu_0 A N^2 i_b}{s_0^2} \bar{i}_2 + O(2) \tag{۱۵}$$

همانطور که از رابطه‌های فوق مشخص است خطی سازی نیروها سبب غیروابسته شدن دینامیک سیستم در راستای x و y خواهد شد. البته رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) زمانی معتبر هستند که جریان در سیم پیچ‌ها ($\bar{i}_1$ و $\bar{i}_2$) و همچنین میزان جابجایی محور در محدوده نسبتا کوچکی قرار داشته باشند. با درنظرگرفتن محور به صورت یک دیسک صلب دو درجه آزادی بدون دوران معادلات حرکت محور عبارتند از

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_x \approx k_x x + k_{i_1} \bar{i}_1 \\ m\ddot{y} = f_y - mg \approx k_y y + k_{i_2} \bar{i}_2 \end{cases} \tag{۱۶}$$

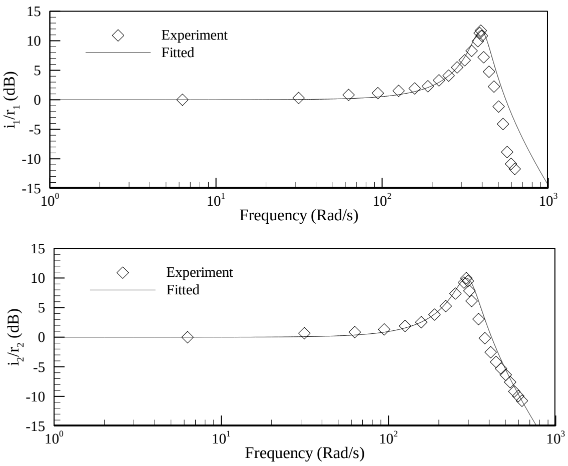
در رابطه فوق m جرم موثر محور در محل یاتاقان مغناطیسی و g شتاب گرانش هستند. همچنین پارامترهای i_b، k_x، k_y، k_{i_1} و k_{i_2} به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} i_b &= \frac{s_0}{N}\sqrt{\frac{2mg}{\mu_0 N}}\ , \ k_x = k_y = \frac{\mu_0 A N^2 i_b^2}{2 s_0^3} \\ k_{i_1} &= \frac{\mu_0 A N^2 i_b}{\sqrt{3} s_0^2}\ , \ k_{i_2} = \frac{\mu_0 A N^2 i_b}{s_0^2} \end{aligned} \tag{۱۷}$$

۲-۲- دینامیک تقویت کننده قدرت و سیم‌پیچ‌ها

به منظور کنترل جریان سیم پیچ‌ها در یاتاقان مغناطیسی سه قطبی از دو تقویت کننده قدرت PWM با پهنای باند 2.5 kHz در مدل آزمایشگاهی استفاده شده است. این تقویت کننده‌ها فرمان ورودی آنالوگ ±10 V را دریافت کرده و جریان مورد نیاز در سیم پیچ‌ها را با روش PWM تنظیم می‌کنند.

به طور معمول در یاتاقان‌های مغناطیسی از روش کنترل جریان استفاده می‌شود. اما در تحقیق حاضر به علت بالا بودن ضریب القاء مدار مغناطیسی مدل آزمایشگاهی که سبب تاخیر زیادی در ایجاد جریان مورد نیاز سیم پیچ‌ها می‌شود، از روش کنترل ولتاژ استفاده شده است. در ابتدا این فرض درنظرگرفته شده که تغییر شار در قطب پایین (در اثر قانون القای فارادی) اثر ناچیزی بر جریان سیم پیچ‌های بالا و بالعکس خواهد داشت. درنتیجه جریان سیم پیچ‌ها به صورت مستقل از یکدیگر درنظرگرفته شده‌اند. به منظور شناسایی دینامیک تقویت کننده قدرت به همراه سیم پیچ متصل به آن، یک فرمان آنالوگ هارمونیک با فرکانس 1-100 Hz به تقویت کننده داده شده و جریان سیم پیچ‌ها با استفاده از سنسورهای اثر هال اندازه‌گیری شده‌اند. در شکل ۳ نمودار پاسخ فرکانسی بدست آمده برای دو تقویت کننده قدرت نشان داده شده است.



شکل ۳: نمودار پاسخ فرکانسی جریان سیم‌پیچ‌ها

با توجه به شکل ۳ می‌توان نتیجه گرفت که دینامیک تقویت کننده قدرت و سیم پیچ‌ها را می‌توان به صورت یک سیستم مرتبه دو درنظر گرفت. بنابراین معادلات دینامیکی جریان در سیم پیچ‌ها به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases} \ddot{i}_1 + 2\zeta_1 \omega_1 \dot{i}_1 + \omega_1^2 i_1 = \omega_1^2 r_1 \\ \ddot{i}_2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{i}_2 + \omega_2^2 i_2 = \omega_2^2 r_2 \end{cases} \tag{۱۸}$$

که در آن r_1 و r_2 فرمان ولتاژ آنالوگ تقویت کننده‌ها و ζ_1، ω_1، ζ_2 و ω_2 پارامترهای ثابتی هستند که با استفاده از انطباق نمودار پاسخ فرکانسی یک سیستم رسته دو بر مقادیر تجربی مشخص شده‌اند.

$$\zeta_1 = 0.13, \omega_1 = 399.6, \zeta_2 = 0.16, \omega_2 = 300.04 \tag{۱۹}$$

۳ – طراحی کنترلگر

با استفاده از رابطه‌های (۱۶) و (۱۸) معادلات کلی خطی شده سیستم در فضای حالت عبارتند از

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = k_x / m x_1 + k_{i_1} / m x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\omega_1^2 x_3 - 2\zeta_1 \omega_1 x_4 + \omega_1^2 u_1 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = k_y / m x_5 + k_{i_2} / m x_7 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = -\omega_2^2 x_7 - 2\zeta_2 \omega_2 x_8 + \omega_2^2 u_2 \end{cases} \tag{۲۰}$$

که در آن متغیرهای حالت به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} &x_1 = x\ ,\ x_2 = \dot{x}\ ,\ x_3 = \bar{i}_1\ ,\ x_4 = \dot{\bar{i}}_1 \\ &x_5 = y\ ,\ x_6 = \dot{y}\ ,\ x_7 = \bar{i}_2\ ,\ x_8 = \dot{\bar{i}}_2 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

از آنجایی که دینامیک سیستم خطی شده در دو جهت x و y از یکدیگر مستقل است برای کنترل سیستم که در حالت ناپایدار قرار دارد از کنترلگر PID به صورت نامتمرکز استفاده شده است. درنتیجه ورودی‌های کنترلی u_1 و u_2 به صورت زیر درنظر گرفته شده‌اند

$$u_1 = -\ k_1\ k_2\ k_3\ k_4 \quad \hat{x}_1\ \hat{x}_2\ \hat{x}_3\ \hat{x}_4 \quad ^T - k_{I1}\int_0^t \hat{x}_1 d\tau \qquad (۲۲)$$

$$u_2 = -\ k_5\ k_6\ k_7\ k_8 \quad \hat{x}_5\ \hat{x}_6\ \hat{x}_7\ \hat{x}_8 \quad ^T - k_{I2}\int_0^t \hat{x}_5 d\tau \qquad (۲۳)$$

در رابطه‌های فوق $\hat{x}_1$ تا $\hat{x}_8$ متغیرهای حالت تخمین زده شده هستند. جملات انتگرالی به منظور حذف خطای دائم در سیستم درنظرگرفته شده‌اند. برای پایدار نمودن سیستم ضرائب کنترلی باید به نحوی تعیین شوند که تابع هزینه نشان داده شده در رابطه زیر کمترین مقدار را داشته باشد.

$$J = E[\int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt] \qquad (۲۴)$$

که در آن E نشان دهنده مقدار متوسط، $\mathbf{x}$ بردار متغیرهای حالت و $\mathbf{u}$ بردار ورودی‌های کنترلی است. همچنین $\mathbf{R}$ و $\mathbf{Q}$ نیز ماتریس‌های وزنی مثبت نیمه معین هستند. قانون کنترلی بهینه برای به حداقل رساندن تابع هزینه نشان داده شده در رابطه (۲۴) عبارت است از

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \qquad (۲۵)$$

که در آن $\mathbf{P}$ ماتریس یکتای مثبت معینی است که از حل معادله دیفرانسیل ماتریسی ریکاتی بدست می‌آید. با توجه به آنکه ماتریس‌های سیستم و همچنین ماتریس‌های وزنی ثابت بوده و تابعی از زمان نیستند، می‌توان از حل دائمی استفاده نمود که با حل معادله جبری ریکاتی بدست خواهد آمد.

۴ – طراحی مشاهده‌گر

از میان متغیرهای حالت نشان داده شده در رابطه (۲۱)، تنها جابجایی محور و جریان سیم پیچ‌ها قابل اندازه‌گیری هستند. با این وجود، سیگنال جریان بدست آمده از سنسورهای اثر هال دارای سطح نویز بسیار بالایی است و نمی‌توان از آن در قانون کنترلی رابطه‌های (۲۲) و (۲۳) استفاده نمود. همچنین استفاده از فیلتر برای کاهش نویز نیز سبب ایجاد اختلاف فاز در سیگنال خواهد شد که خود سبب ناپایداری می‌شود. درنتیجه جریان سیم پیچ‌ها و مشتق آنها و سرعت محور متغیرهای حالت نامشخص سیستم هستند که باید توسط یک مشاهده‌گر تخمین زده شوند.

۴-۱ – مشاهده‌گر تناسبی

با توجه به معادلات سیستم از رابطه (۲۰) می‌توان این معادلات را به صورت ماتریسی زیر نشان داد

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} \end{cases} \qquad (۲۶)$$

که در آن $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ ماتریس‌های سیستم خطی شده، $\mathbf{y}$ بردار خروجی سنسورها و $\mathbf{d}$ نشان دهنده بردار خطای اندازه‌گیری سنسور است که مقدار آن ثابت درنظر گرفته شده است. به طور معمول برای تخمین متغیرهای حالت در سیستم فوق از مشاهده‌گر لونبرگر استفاده می‌شود که یک مشاهده‌گر تناسبی است و ساختار آن به صورت زیر است

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \qquad (۲۷)$$

در رابطه (۲۷)، $\mathbf{L}$ ماتریس ضرائب مشاهده‌گر است که با توجه به آن می‌توان دینامیک مشاهده‌گر را تعیین نمود. در صورتی که خطای تخمین متغیرها را برابر $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ درنظر بگیریم، دینامیک این خطا عبارت است از

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{d} \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

با توجه به رابطه فوق می توان مشاهده کرد که خطای اندازه‌گیری $\mathbf{d}$ در ماتریس ضرائب مشاهده‌گر ضرب می‌شود. به طور معمول برای آنکه دینامیک مشاهده‌گر از دینامیک سیستم اصلی سریعتر باشد، ضرائب ماتریس $\mathbf{L}$ دارای مقادیر بزرگی هستند. درنتیجه ضرب شدن ماتریس $\mathbf{L}$ در خطای اندازه‌گیری سبب تقویت مقدار خطا خواهد شد. علاوه بر آن همواره بین متغیرهای حالت سیستم و متغیرهای تخمین زده شده یک خطای ثابت وجود خواهد داشت که مقدار این خطا با بزرگتر شدن ضرائب ماتریس $\mathbf{L}$ افزایش می‌یابد. با توجه به آنکه در قانون کنترلی رابطه‌های (۲۲)و (۲۳) از مقدار تخمین زده شده متغیرهای حالت استفاده می‌شود، خطای اندازه‌گیری به صورت یک اغتشاش خارجی به سیستم وارد شده و سبب انحراف آن از نقطه صفر خواهد شد.

۴-۲- مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی

به منظور رفع مشکل تقویت خطای اندازه‌گیری، متغیر $\mathbf{z}$ که یک مقدار فیلتر شده از خروجی سیستم است به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\dot{\mathbf{z}} = \Gamma(-\mathbf{z} + \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}) \qquad (۲۹)$$

که در آن $-\Gamma$ ماتریسی است که مقادیر ویژه آن دارای قسمت حقیقی منفی است. با استفاده از رابطه‌های (۲۶) و (۲۹) می‌توان معادلات سیستم را به صورت زیر بازنویسی نمود

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \Gamma\mathbf{C} & -\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix}\mathbf{d} \qquad (۳۰)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{d} \tag{۳۱}$$

در صورتی که بردار متغیر حالت جدید $\mathbf{X}=[\mathbf{x}^T \quad \mathbf{z}^T]^T$ و خروجی جدید سیستم را به صورت $\mathbf{Y}=[\mathbf{y}^T \quad \mathbf{z}^T]^T$ تعریف کنیم، معادلات رابطه‌های (۳۰) و (۳۱) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر بیان نمود.

$$\dot{\mathbf{X}}=\bar{\mathbf{A}}\mathbf{X}+\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}+\bar{\mathbf{E}}\mathbf{d} \tag{۳۲}$$

$$\mathbf{Y}=\bar{\mathbf{C}}\mathbf{X}+\bar{\mathbf{D}}\mathbf{d} \tag{۳۳}$$

در سیستم معادلات جدید مقدار فیلتر شده خروجی‌های سیستم قبلی نیز جزو متغیرهای حالت سیستم هستند. تفاوت اصلی بین مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی به کار گرفته شده در این تحقیق و مشاهده‌گر مرجع [۲۰] در انتخاب خروجی $\mathbf{Y}$ است. در مرجع [۲۰] خروجی سیستم جدید به صورت $\mathbf{Y}=[(\mathbf{Cx})^T \quad \mathbf{z}^T]^T$ درنظرگرفته شده است. این در حالی است که خروجی اندازه‌گیری شده و در دسترس سیستم شامل خطای اندازه‌گیری بوده و به صورت $\mathbf{y}=\mathbf{Cx}+\mathbf{d}$ است. در نتیجه نمی‌توان خروجی سیستم جدید را به صورت $\mathbf{Y}=[(\mathbf{Cx})^T \quad \mathbf{z}^T]^T$ تعریف نمود.

به منظور تخمین متغیرهای حالت در سیستم جدید و همچنین تخمین خطای اندازه‌گیری، مشاهده‌گری با ساختار زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}}=\bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{X}}+\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}+\bar{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{d}}+\mathbf{L}_1(\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{Y}}) \tag{۳۴}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{d}}}=\mathbf{L}_2(\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{Y}}) \tag{۳۵}$$

$$\hat{\mathbf{Y}}=\bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{X}}+\bar{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{d}} \tag{۳۶}$$

در رابطه فوق $\hat{\mathbf{X}}$ ، $\hat{\mathbf{d}}$، $\mathbf{L}_1$ و $\mathbf{L}_2$ به ترتیب نشان دهنده تخمین متغیرهای حالت، تخمین خطای اندازه‌گیری و ماتریس ضرائب مشاهده‌گر هستند. با توجه به آنکه در رابطه (۳۴) ماتریس ضرائب $\mathbf{L}_1$ در خروجی $\mathbf{Y}$ ضرب شده است، مشخص است که در معادلات مشاهده‌گر هم خروجی اندازه‌گیری شده $\mathbf{y}$ و هم مقدار فیلتر شده آن یعنی $\mathbf{z}$ حضور دارند. بنابراین رابطه (۳۴) نشان‌دهنده یک مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی است. با تعریف خطای تخمین متغیرهای حالت سیستم جدید به صورت $\tilde{\mathbf{X}}=\mathbf{X}-\hat{\mathbf{X}}$ ، دینامیک این خطا به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{X}}}&=\dot{\mathbf{X}}-\dot{\hat{\mathbf{X}}} \\ &=(\bar{\mathbf{A}}-\mathbf{L}_1\bar{\mathbf{C}})\tilde{\mathbf{X}}+(\bar{\mathbf{E}}-\mathbf{L}_1\bar{\mathbf{D}})\tilde{\mathbf{d}} \end{aligned} \tag{۳۷}$$

همچنین با توجه به ثابت بودن خطای اندازه‌گیری ($\dot{\mathbf{d}}=0$)، دینامیک خطای تخمین $\mathbf{d}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{d}}}&=\dot{\mathbf{d}}-\dot{\hat{\mathbf{d}}} \\ &=-\mathbf{L}_2\bar{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{X}}-\mathbf{L}_2\bar{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{d}} \end{aligned} \tag{۳۸}$$

رابطه‌های (۳۷) و (۳۸) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر بازنویسی نمود

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{X}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{d}}} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}-\mathbf{L}_1\bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{E}}-\mathbf{L}_1\bar{\mathbf{D}} \\ -\mathbf{L}_2\bar{\mathbf{C}} & -\mathbf{L}_2\bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{E}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{C}} \quad \bar{\mathbf{D}}] \right) \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{۳۹}$$

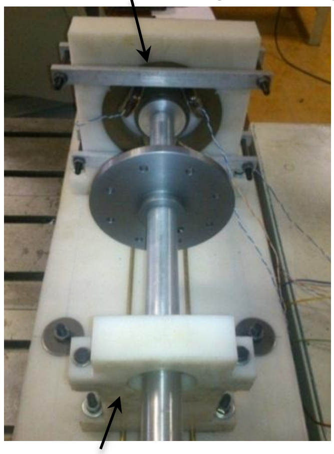
در صورتی که متغیر جدید $\tilde{\Phi}=[\tilde{\mathbf{X}}^T \quad \tilde{\mathbf{d}}^T]^T$ را تعریف نماییم، معادله ماتریسی دینامیک خطای تخمین در رابطه فوق را می‌توان به صورت ساده شده زیر بیان کرد.

$$\dot{\tilde{\Phi}}=(\mathbf{A}_t-\mathbf{L}_t\mathbf{C}_t)\tilde{\Phi} \tag{۴۰}$$

با مقایسه رابطه‌های (۲۸) و (۴۰) مشخص است که برخلاف مشاهده‌گر تناسبی، خطای اندازه‌گیری سنسور در دینامیک خطای مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی وارد نمی‌شود. در نتیجه علاوه بر تخمین صحیح متغیرهای حالت سیستم، می‌توان خطای اندازه‌گیری سنسور را نیز شناسایی و حذف نمود. با استفاده از رابطه (۴۰) می‌توان ماتریس ضرائب مشاهده‌گر $\mathbf{L}_t=[\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2]^T$ را به نحوی طراحی کرد که مشاهده‌گر علاوه بر پایدار بودن و همگرایی، دارای سرعت مناسبی نیز در تخمین متغیرهای حالت سیستم باشد. تنها نکته‌ای که باید مورد توجه قرار گیرد آن است که رابطه (۳۱) نشان دهنده یک سیستم چند خروجی است. بنابراین برای طراحی ماتریس ضرائب $\mathbf{L}_t$ باید از روش‌های جانمایی قطب‌ها در سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی استفاده نمود.

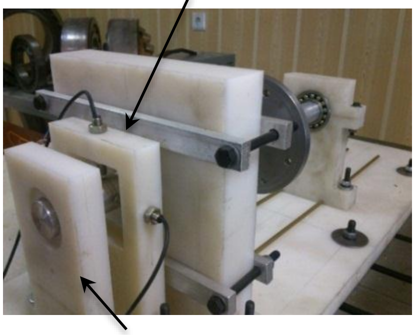
۵- مدل آزمایشگاهی

مدل آزمایشگاهی یاتاقان مغناطیسی مورد استفاده در تحقیق حاضر در شکل ۴ نشان داده شده است. این مدل شامل یک محور آلومینیمی با یک دیسک صلب در وسط آن است که یک انتهای آن توسط یاتاقان مغناطیسی و انتهای دیگر آن توسط یک یاتاقان ساچمه‌ای خود تنظیم نگه داشته شده است. یاتاقان خود تنظیم به محور اجازه می‌دهد تا آزادانه در راستای افقی و عمودی حرکت داشته باشد. به منظور جلوگیری از برخورد محور و هسته یاتاقان مغناطیسی، یک یاتاقان پشتیبان در کنار یاتاقان مغناطیسی قرار داده شده که در شکل ۵ نشان داده شده است. به منظور جلوگیری از نشتی شار از طریق محور، جنس محور آلومینیم درنظر گرفته شده است.



شکل ۴: مدل آزمایشگاهی یاتاقان سه قطبی

به منظور ساده‌تر شدن فرآیند ساخت و همچنین کاهش نشتی شار در هسته آهنی، پایه یاتاقان‌ها و صفحه زیرین نگهدارنده از جنس پلی اتیلن فشرده ساخته شده‌اند. به منظور کاهش اتلاف ناشی از جریان گردابی، روتور و استاتور یاتاقان مغناطیسی از ورقه‌هایی از جنس فولاد آلیاژی سیلیکون دار ساخته شده‌اند. ضخامت هر ورق برابر 0.5 mm است. همچنین فاصله هوایی میان روتور و استاتور یاتاقان مغناطیسی 1 mm درنظر گرفته شده است. با توجه به آنکه محور به صورت یک جسم دو درجه آزادی مدل شده است، جرم موثر محور در محل یاتاقان مغناطیسی به طور مستقیم با استفاده از یک نیرو سنج اندازه‌گیری شده است. برای اندازه گیری جابجایی محور دو سنسور جابجایی سنج غیرتماسی در محل یاتاقان مغناطیسی نصب شده که در شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل ۵: محل نصب سنسور جابجایی‌سنج

سیستم کنترلی یاتاقان مغناطیسی از چهار جزء اصلی تشکیل شده است: سنسورهای جابجایی، کنترلگر دیجیتال، تقویت کننده قدرت، منبع تغذیه. کنترلگر دیجیتال شامل مبدل‌های A/D و D/A ۱۲ بیتی و همچنین یک کامپیوتر با پردازنده پنتیوم IV و فرکانس 2.8 GHz است. کامپیوتر مورد استفاده تحت سیستم عامل RTAI اجرا می‌شود. RTAI یک نسخه بلادرنگ از سیستم عامل لینوکس است که دارای قابلیت اجرای برنامه‌های کنترلی تحت فرکانس زمانی بسیار دقیق بوده و همچنین دارای زمان سنج با دقت نانو ثانیه است. الگوریتم کنترلی تحت زبان برنامه نویسی C نوشته شده و سپس به یک ماژول قابل اجرا در کرنل سیستم عامل کامپایل می‌شود. با توجه به نوع کارت‌های داده برداری استفاده شده این کنترلگر قابلیت اجرا با فرکانس 10 kHz را دارا است.

جریان سیم پیچ‌ها توسط دو تقویت کننده قدرت PWM با فرکانس سوئیچینگ 22 kHz تامین می‌شود. این تقویت کننده‌ها دارای سنسور جریان داخلی بوده و قادر به تامین جریان پیوسته تا حد 10 A هستند. منبع تغذیه DC مورد استفاده نیز 24 V برای تغذیه سنسورها و 40 V برای تقویت کننده‌ها تامین می‌نماید.

۶- نتایج تجربی

به منظور بررسی کارایی روش ارائه شده در تخمین و حذف خطای سنسورها، هر دو مشاهده‌گر تناسبی و تناسبی-انتگرالی به همراه کنترلگرهای PD و PID روی مدل آزمایشگاهی یاتاقان سه قطبی پیاده‌سازی شده‌اند. در ابتدا برای طراحی کنترلگر باید پارامترهای سیستم مشخص گردند. با توجه به مشخصات فیزیکی و هندسی یاتاقان مغناطیسی آزمایشگاهی، پارامترهای سیستم خطی شده با استفاده از رابطه (۱۷) عبارتند از

$$\begin{aligned} i_b &= 0.6297\ \mathrm{A}\ ,\ k_x = k_y = 13734\ \mathrm{N/m} \\ k_{i_1} &= 25.18\ \mathrm{N/A}\ ,\ k_{i_2} = 43.62\ \mathrm{N/A} \end{aligned} \qquad (۴۱)$$

کارایی کنترلگر خطی به کار رفته به میزان زیادی به ماتریس‌های وزنی $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ وابسته است. ماتریس وزنی $\mathbf{Q}$ تعیین کننده کارایی کنترلگر و ماتریس وزنی $\mathbf{R}$ تعیین کننده میزان انرژی استفاده شده توسط کنترلگر است. با توجه به شرط مثبت نیمه معین بودن، ماتریس‌های $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ به صورت قطری با المان‌های مثبت به صورت زیر درنظر گرفته شده‌اند.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۴۲)$$

که در آن Q_1 و Q_2 عبارتند از

$$Q_1 = Q_2 = \mathrm{diag}[1, 1, 10^{-4}, 10^{-4}]\ \text{for PD} \qquad (۴۳)$$

$$Q_1 = Q_2 = \mathrm{diag}[1, 1, 10^{-5}, 10^{-5}, 2\times 10^{8}]\ \text{for PID} \qquad (۴۴)$$

با انتخاب ماتریس‌های $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ و با استفاده از رابطه (۲۵) ضرائب کنترلی بدست می‌آیند. مقادیر فوق برای مولفه‌های ماتریس‌های $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که ضرائب کنترلی بدست آمده اعداد منطقی باشند و ورودی کنترلی به اندازه‌ای بزرگ نشود که باعث بوجود آمدن جریان بیش از حد اشباع در سیم پیچ‌ها شود. در کنترلگر PD درنظر گرفته شده جملات انتگرالی موجود در رابطه‌های (۲۲) و (۲۳) حذف شده‌اند. طراحی مشاهده‌گرها نیز به گونه‌ای صورت گرفته است

که دینامیک آن سریعتر از دینامیک سیستم بوده و قطب‌های آن دورتر از قطب‌های سیستم مدار بسته قرار داشته باشند. با توجه به ماتریس‌های وزنی انتخاب شده ضرائب کنترلی به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\mathbf{K}_x = [2241.6, 22.6, 2.1, 0.01] \text{ for PD} \quad (۴۵)$$

$$\mathbf{K}_y = [1328.1, 13.4, 2.2, 0.01] \text{ for PD} \quad (۴۶)$$

$$\mathbf{K}_x = [1866.3, 17.4, 0.86, 0.004, 14142.1] \text{ for PID} \quad (۴۷)$$

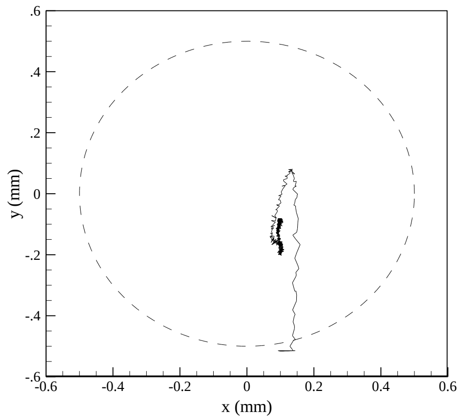
$$\mathbf{K}_y = [1267.8, 11.4, 1.09, 0.004, 14142.1] \text{ for PID} \quad (۴۸)$$

ضرایب مشاهده‌گر نیز در دو جهت x و y یکسان و به صورت زیر درنظر گرفته شده‌اند.

$$\mathbf{L} = [1200, 369810, 0, 0]^T \text{ for P-Observer} \quad (۴۹)$$

$$\mathbf{L}_t = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, 0, & 0, & 0 \\ 4584387.4, & 334041200.8, & 0, 0, & 1710, & -3466177.4 \end{bmatrix}^T \text{ for PI-Observer} \quad (۵۰)$$

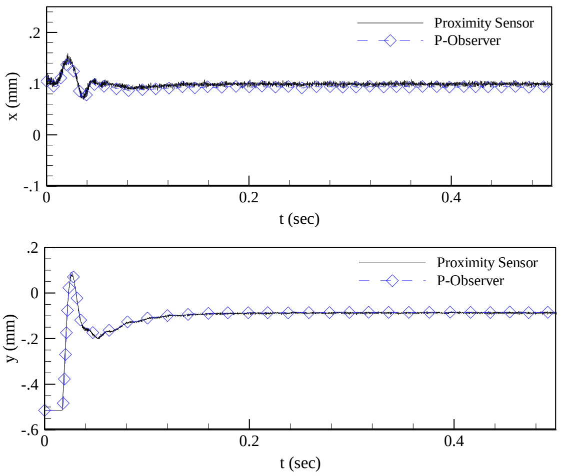
در ابتدا به منظور بررسی رفتار سیستم، کنترلگر PD به همراه فیدبک متغیرهای حالت مشاهده‌گر تناسبی روی مدل یاتاقان مغناطیسی آزمایشگاهی پیاده سازی شده است. در شکل ۶ نمودار تغییر مکان محور در صفحه xy با استفاده از خروجی سنسورها نشان داده شده است.



شکل ۶: نمودار تغییر مکان محور در صفحه xy با خروجی سنسورها (کنترلگر PD و فیدبک متغیرها از مشاهده‌گر تناسبی)

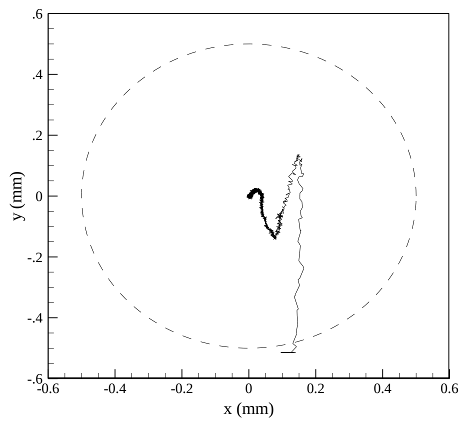
همانطور که در شکل نیز مشخص است کنترلگر و مشاهده‌گر مورد استفاده قادر به پایدار کردن سیستم هستند. اما محور کاملا در مرکز یاتاقان قرار نگرفته و خطای دائمی در هر دو جهت افقی و عمودی وجود دارد.

برای بهتر مشخص شدن پاسخ سیستم، جابجایی‌های افقی و عمودی محور بر حسب زمان در شکل ۷ نشان داده شده است. مشاهده‌گر تناسبی به خوبی قادر است تا با استفاده از خروجی سنسورها، متغیرهای حالت را تخمین زده و سیستم را پایدار نماید. اما مساله مهم وجود خطا در خروجی سنسورها است. مشاهده‌گر تناسبی نه تنها قادر به شناسایی این خطا نیست بلکه با تقویت آن سبب انحراف محور از مرکز یاتاقان نیز می‌شود.



شکل ۷: نمودار تغییر مکان افقی و عمودی محور بر حسب زمان (کنترلگر PD و فیدبک متغیرها از مشاهده‌گر تناسبی)

مشاهده‌گر تناسبی تنها قادر است تا خروجی سنسورها را تعقیب کرده و با استفاده از آن متغیرهای حالت را تخمین بزنند. با توجه به شکل ۷ مشخص است که سیگنال بدست آمده از مشاهده‌گر تناسبی کاملا بر خروجی سنسورها تطابق دارد. این در حالی است که خروجی سنسورها خود شامل یک خطای اندازه‌گیری ناشی از ناهمواری سطح مقطع محور یا کالیبراسیون غیر دقیق سنسور است. در نتیجه این خطا در قانون کنترلی فیدبک وارد شده و سبب انحراف سیستم از مرکز یاتاقان می‌شود.

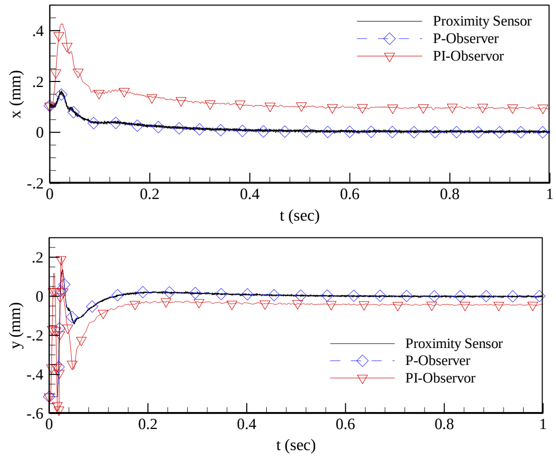


شکل ۸: نمودار تغییر مکان محور در صفحه xy با خروجی سنسورها (کنترلگر PID و فیدبک متغیرها از مشاهده‌گر تناسبی)

یکی از گزینه‌های موجود برای حذف خطای دائم در سیستم‌ها استفاده از انتگرال‌گیر در کنترلگر است. به منظور بررسی تاثیر انتگرال‌گیر در حذف خطای اندازه‌گیری، در مرحله بعد از کنترلگر PID استفاده می‌شود. نمودار تغییر مکان محور در صفحه xy با پیاده‌سازی کنترلگر PID در شکل ۸ نشان داده شده است. لازم به ذکر است که در این مرحله نیز در ورودی کنترلی از فیدبک متغیرهای حالت مشاهده‌گر تناسبی استفاده شده است.

همانطور که در شکل ۸ نشان داده شده با اضافه شدن انتگرال‌گیر به کنترلگر، محور در مرکز یاتاقان قرار گرفته است. اما نکته‌ای که باید مورد توجه قرار گیرد آن است که با توجه به وجود خطا در خروجی

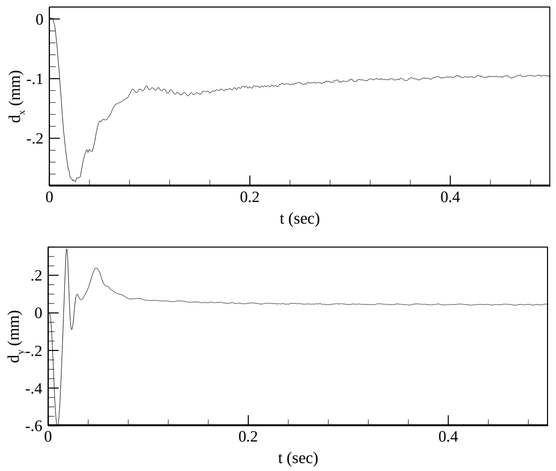
سنسورها، نمی‌توان نسبت به قرار گرفتن محور در مرکز یاتاقان مطمئن بود. برای بررسی بهتر، جابجایی‌های افقی و عمودی محور بر حسب زمان در شکل ۹ نشان داده شده است. در شکل ۹ سیگنال‌های بدست آمده از هر دو مشاهده‌گر تناسبی و تناسبی انتگرالی با یکدیگر مقایسه شده‌اند.



شکل ۹: نمودار تغییر مکان افقی و عمودی محور بر حسب زمان (کنترلگر PID و فیدبک متغیرها از مشاهده‌گر تناسبی)

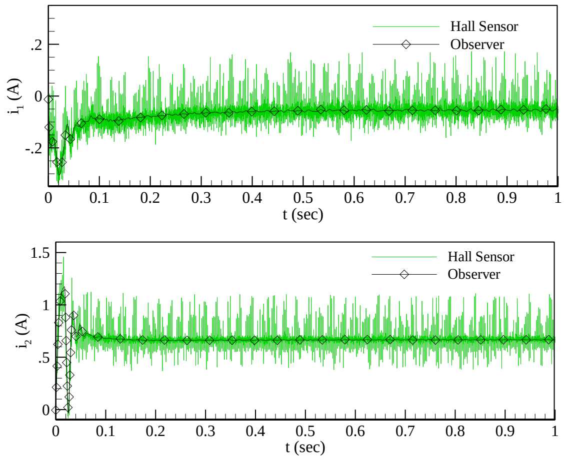
با توجه به شکل ۹ مشخص است که سیگنال بدست آمده از سنسورها و همچنین مشاهده‌گر تناسبی نشان می‌دهد که محور در نقطه صفرقرار گرفته است. اما سیگنال بدست آمده از مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی وجود خطای دائمی را در جابجایی محور نشان می‌دهد. تخمین این خطا با استفاده از مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی بدست آمده و در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

با توجه به نمودارهای شکل ۹ و شکل ۱۰ می توان نتیجه گرفته که اضافه کردن انتگرال‌گیر به کنترلگر قادر به حذف خطای دائم ناشی از وجود خطا در خروجی سنسورها نیست. علت این امر آن است که انتگرال‌گیر خطای دائم موجود در متغیرهای حالت بدست آمده از مشاهده‌گر تناسبی را به صفر می‌رساند. اما خطای دائم همچنان در متغیرهای حالت سیستم واقعی وجود دارند.



شکل ۱۰: نمودار تخمین خطای اندازه‌گیری سنسورها در جهت افقی و عمودی با مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی

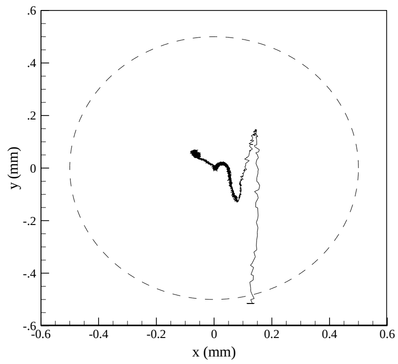
برای تایید این موضوع سیگنال جریان سنسورها با استفاده از سنسورهای اثر هال اندازه‌گیری شده و با استفاده از یک مشاهده‌گر نیز تخمین زده شده‌اند. برای آنکه اثر خطای موجود در سنسورهای جابجایی وارد سیگنال جریان نشود، تنها از خروجی سنسورهای جریان در مشاهده‌گر جریان سیم پیچها استفاده شده است. جریان سیم پیچها به همراه تخمین آنها در شکل ۱۱ نشان داده شده است.



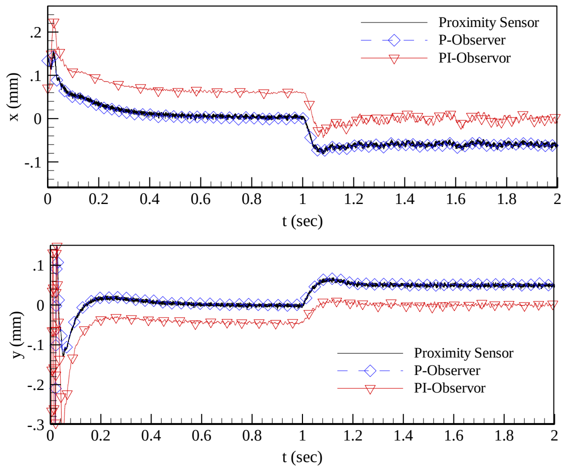
شکل ۱۱: نمودار جریان سیم پیچها (کنترلگر PID و فیدبک متغیرها از مشاهده‌گر تناسبی)

از آنجایی‌که برای تنظیم جریان در سیم پیچها از تقویت کننده قدرت PWM استفاده شده، سیگنال جریان اندازه‌گیری شده حاوی نویز بالایی است. با توجه به شکل ۱۱ مقدار سیگنال‌های جریان در حالت دائم برابر $i_1=-0.07$ A و $i_2=0.67$ A هستند. این در حالی است که مطابق رابطه (۱۳)، جریان‌ها در نقطه مرکز یاتاقان باید برابر $i_1=0$ و $i_2=i_b$ A باشند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در این حالت محور دقیقا در مرکز یاتاقان قرار نگرفته است.

در مرحله بعد در قانون کنترلی از فیدبک متغیرهای حالت مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی استفاده می‌شود. برای مقایسه بهتر در۱ ثانیه اول از فیدبک متغیرهای حالت مشاهده‌گر تناسبی استفاده شده و پس از آن در قانون کنترلی از متغیرهای مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی استفاده می‌شود. نمودار تغییر مکان محور در صفحه xy با پیاده‌سازی کنترلگر PID و استفاده از مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی در شکل ۱۲ نشان داده شده است. خروجی سنسورها نشان می‌دهد که در ابتدا محور در مرکز یاتاقان قرار گرفته و سپس منحرف شده و در نقطه‌ای خارج از مرکز قرار می‌گیرد. شکل ۱۳ نمودار تغییر مکان افقی و عمودی محور را بر حسب زمان نشان می‌دهد. در ۱ ثانیه اول مشاهده‌گر تناسبی و خروجی سنسورها، محور را در مرکز یاتاقان نشان می‌دهند اما مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی محور را خارج از مرکز نشان می‌دهد. بعد از ثانیه اول که از فیدبک متغیرهای مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی در ورودی کنترلی استفاده شده، این مساله معکوس شده و مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی محور را در مرکز یاتاقان نشان می‌دهد.

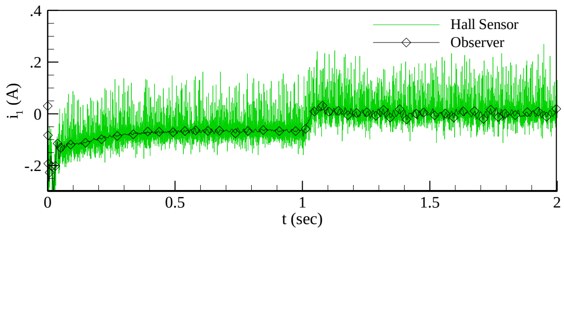


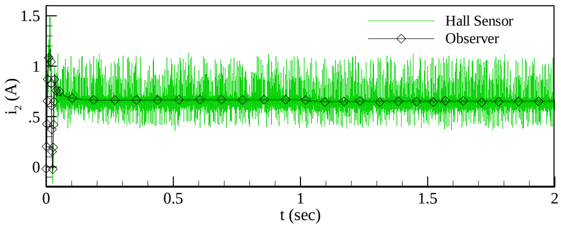
شکل ۱۲: نمودار تغییر مکان محور در صفحه xy با خروجی سنسورها (کنترلگر PID و فیدبک متغیرها از مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی بعد از ثانیه اول)



شکل ۱۳: نمودار تغییر مکان افقی و عمودی محور بر حسب زمان (کنترلگر PID و فیدبک متغیرها از مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی بعد از ثانیه اول)

به منظور بررسی بیشتر، سیگنال جریان سیم پیچ‌ها در شکل ۱۴ نشان داده شده است. همانطور که مشخص است پس از ثانیه اول مقدار جریان‌ها در حالت دائم برابر $i_1=0$ و $i_2=0.65\ \mathrm{A}$ هستند. با توجه صفر بودن جریان i_1 می‌توان نتیجه گرفت که محور در جهت افق دقیقا در مرکز قرار گرفته است. اما با توجه به رابطه (۴۱)، جریان i_2 با جریان بایاس درنظر گرفته شده متفاوت است. علت این امر تفاوت وزن واقعی روتور و وزن درنظر گرفته شده برای محاسبه جریان بایاس است. با توجه به انتگرالی بودن کنترلگر، جریان بایاس به طور خودکار به مقدار مورد نظر افزایش داده شده تا روتور کاملا در مرکز قرار بگیرد.



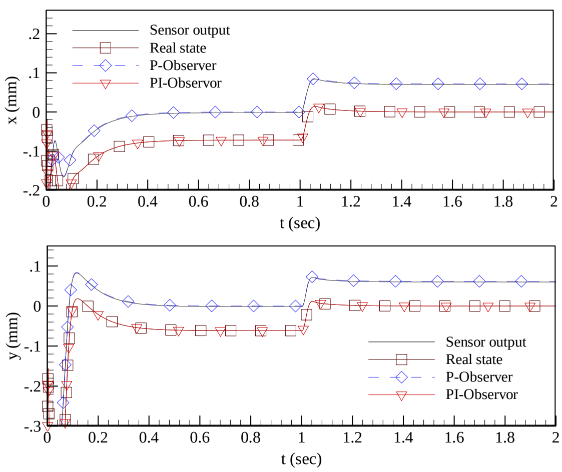


شکل ۱۴: نمودار جریان سیم پیچ‌ها (کنترلگر PID و فیدبک متغیرها از مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی بعد از ثانیه اول)

به منظور اعتبارسنجی و مقایسه با نتایج تجربی، شبیه‌سازی عددی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB انجام شده و نتایج آن در شکل ۱۵ نشان داده شده است. برای انجام شبیه‌سازی عددی پارامترهای سیستم مطابق رابطه (۴۱) درنظر گرفته شده و ضرائب کنترلگر و مشاهده‌گر نیز مطابق رابطه‌های (۴۵)–(۵۰) هستند. برای ایجاد خطای اندازه‌گیری خروجی سنسورها به صورت زیر درنظر گرفته شده‌اند

$$\begin{aligned} x_{\text{sensor}} &= x + 0.07\times10^{-3} \\ y_{\text{sensor}} &= y + 0.06\times10^{-3} \end{aligned} \tag{۵۱}$$

این خروجی‌ها به عنوان ورودی به مشاهده‌گر تناسبی و مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی وارد شده و پاسخ سیستم در شکل ۱۵ نشان داده شده است. تا قبل از ثانیه اول از فیدبک متغیرهای مشاهده‌گر تناسبی برای کنترل استفاده شده که در نتیجه آن، محور درنقطه‌ای خارج از مرکز قرار می‌گیرد. همانطور که در شکل ۱۵ نشان داده شده مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی به خوبی موقعیت واقعی محور را نشان داده و قادر است خطای اندازه‌گیری را حذف نماید. پس از ثانیه اول که از فیدبک متغیرهای مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی استفاده شده محور کاملا در مرکز یاتاقان قرار گرفته است. مقایسه شکل‌های ۱۳ و ۱۵ نشان می‌دهد که رفتار سیستم در شبیه‌سازی عددی و مدل آزمایشگاهی تطابق خوبی با یکدیگر دارند که بیانگر کارایی روش ارائه شده در تخمین متغیرهای حالت و خطای سنسور به طور همزمان است.



شکل ۱۵: نمودار تغییر مکان افقی و عمودی محور بر حسب زمان بدست آمده از شبیه‌سازی عددی (کنترلگر PID و فیدبک متغیرها از مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی بعد از ثانیه اول)

۷- نتیجه‌گیری

با توجه به جابجایی‌های بسیار کوچک محور در سیستم یاتاقان‌های مغناطیسی، این نوع یاتاقان‌ها دارای دقت کاری بسیار بالایی بوده و کوچکترین خطای اندازه‌گیری در سنسورها تاثیر قابل توجهی بر عملکرد آنها خواهد داشت. در این تحقیق مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی به منظور شناسایی و حذف خطای اندازه‌گیری سنسورها در سیستم یاتاقان مغناطیسی مورد استفاده قرار گرفت. نتایج تجربی نشان می‌دهد که اضافه کردن انتگرال‌گیر به کنترلگر نیز توانایی حذف خطای دائم ناشی از خطای اندازه‌گیری سنسور را ندارد. برخلاف مشاهده‌گر تناسبی که سبب تقویت خطای اندازه‌گیری و انحراف سیستم از مرکز یاتاقان می‌شود، مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی قادر به تخمین خطای اندازه‌گیری سنسورها و حذف آن از پاسخ سیستم است. درنتیجه، استفاده از مشاهده‌گر تناسبی انتگرالی تا حد زیادی سبب بهبود عملکرد سیستم یاتاقان مغناطیسی شده و حساسیت آن را نسبت به وجود خطا در سیگنال اندازه‌گیری شده توسط سنسورها کاهش می‌دهد.

مراجع

[1] G. Schweitzer and E. H. Maslen, Magnetic bearings theory, design, and application to rotating machinery, Springer, 2009.

[2] S. L. Chen and C. T. Hsu, Optimal design of a three-pole active magnetic bearing, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 38, no.5, pp. 3458-3466, 2002.

[3] C. T. Hsu and S. L. Chen, Exact linearization of a voltage-controlled 3-pole active magnetic bearing system, IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 10, no. 4, pp. 618 – 625, 2002.

[4] C. T. Hsu and S. L. Chen, Nonlinear control of a 3-pole active magnetic bearing system, Automatica, vol. 39, pp. 291 – 298, 2003.

[5] S. L. Chen, S. H. Chen, and S. T. Yan, Stabilization of a current-controlled three-pole magnetic rotor-bearing system by integral sliding mode control, Proceedings of the IEEE International Conference on Networking, Sensing & Control, pp. 949-954, 2004.

[6] S. L. Chen, S. H. Chen, and S. T. Yan, Experimental validation of a current-controlled three-pole magnetic rotor-bearing system, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 41, no. 1, pp. 99-112, 2005.

[7] S. L. Chen and C. C. Weng, Robust stabilization and experimentation of a voltage-controlled three-pole active magnetic bearing system, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, vol. 4, pp. 3753 – 3758, 2005.

[8] S. L. Chen and C. C. Weng, Robust control of a voltage-controlled three-pole active magnetic bearing system, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 15, no. 3, pp. 381-388, 2010.

[9] S. L. Chen, Nonlinear smooth feedback control of a three-pole active magnetic bearing system, IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 19, no. 3, pp. 615 – 621, 2010.

[10] S. M. Darbandi, M. Behzad, H. Salarieh, and H. Mehdigholi, Linear output feedback control of a three-pole magnetic bearing, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, In Press, 2013.

[11] C. S. Kim and C.W. Lee, In situ runout identification in active magnetic bearing system by extended influence coefficient method, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 2, no. 1, pp. 51-57, 1997.

[12] H. S. Na and Y. Park, An adaptive feedforward controller for rejection of periodic disturbances, Journal of Sound and Vibration, vol. 201, no. 4, pp. 316-324, 1997.

[13] Y. Kanemitsu, S. Kijimoto, K. Matsuda, and P. T. Jin, Identification of mass unbalance and sensor runout on a rotor equipped with magnetic bearings, 7th International Symp. on Magnetic Bearings, pp. 543-548, 2000.

[14] J. D. Setiawan, R. Mukherjee, and E. H. Maslen, Adaptive compensation of sensor runout for magnetic bearings with uncertain parameters: theory and experiments, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 123, pp. 211-218, 2001.

[15] B. Wojciechowski, Analysis and synthesis of proportional-integral observers for single-input-single-output time-invariant continuous systems, PhD Thesis, Gliwice, Poland, 1978.

[16] M. Saif, Reduced order proportional integral observer with application, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 16, no. 5, pp. 985-988, 1993.

[17] K. K. Busawon and P. Kabore, Disturbance attenuation using proportional integral observers , International Journal of Control, vol. 74, no. 6, pp. 618-627, 2001.

[18] D. Koenig and S. Mammar, Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, no. 12, pp. 2057-2062, 2002.

[19] Z. Gao and D. W. C. Ho, Proportional multiple-integral observer design for descriptor systems with measurement output disturbances, IEE Proceedings - Control Theory and Applications, vol. 151, no. 3, pp. 279-288, 2004.

[20] A. Khedher, K. Benothman, D. Maquin, and M. Benrejeb, State and sensor faults estimation via a proportional integral observer, 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, pp. 1-6, 2009.

مجله کنترل
جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۴۲-۳۳

مدل سازی کوره قوس الکتریکی بر مبنای نظریه آشوب به منظور کنترل پارامترهای کیفیت توان

محمد عطایی[1]، هاجر قطب[2]، غضنفر شاهقلیان[3]، آرش کیومرثی[4]

[1]دانشیار گروه فنی ومهندسی- دانشگاه اصفهان Ataei@eng.ui.ac.ir

[2] فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق ، دانشگاه آزاد واحد نجف آباد hajarghotb@yahoo.com

[3] استادیار گروه مهندسی برق- قدرت، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آبادshahgholian@iaun.ac.ir

[4]دانشیار گروه مهندسی برق ، دانشکده فنی ومهندسی- دانشگاه اصفهان Ataei@eng.ui.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۳/۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۵/۲)

چکیده: کوره های قوس الکتریکی یکی از بزرگترین بارهای متمرکز درشبکه قدرت و از مهمترین منابع تولید هارمونیک، فلیکر ولتاژ و نامتعادلی به شمار می روند. در این مقاله، براساس نظریه آشوب، در ابتدا یک مدل توصیف کننده رفتار کوره قوس الکتریکی AC از لحاظ پارامترهای کیفیت توان ارائه می گردد. در این راستا حالت استاتیک قوس الکتریکی با استفاده از یک تابع هذلولی- نمایی مدل گردیده و نوسانات موجود در آن بوسیله یک مدل آشوبی توصیف می گردد. در این خصوص انتخاب مناسب پارامترهای مدل آشوبی به منظور تطبیق سیگنال آشوبی حاصل با نوسانات ولتاژ قوس الکتریکی از منظر پارامترهای کیفیت توان موضوع مهمی به شمار می رود. بدین منظور، ازالگوریتم بهینه سازی رقابت استعماری[1]والگوریتم ژنتیک با تابع هزینه مشتمل بر انحراف هارمونیک های ولتاژ و جریان استفاده گردیده، تا مناسب ترین برازش از حیث هامونیک حاصل گردد. داده های مورد استفاده در این مقاله داده های واقعی جمع آوری شده از یک کوره قوس الکتریکی مجتمع فولاد مبارکه اصفهان می باشد. اعتبار مدل آشوبی ارائه شده با اندازه گیری میزان فلیکر ولتاژ از روی داده های واقعی و مدل پیشنهادی ارزیابی می گردد. در مرحله دوم، ایده استفاده از کنترل کننده های آشوبی برای کنترل پارامترهای کیفیت توان دنبال می گردد. در این راستا سیستم کنترل الکترودهای کوره قوس الکتریکی در نظر گرفته شده و با استفاده از داده های واقعی رابطه ایی بین جریان و طول قوس الکتریکی برازش می گردد. سپس با ارائه دو کنترل کننده آشوبی به روش تطبیقی و تاخیر دار به کنترل الکترودهای کوره قوس الکتریکی و در نهایت کنترل جریان شبکه توان پرداخته می شود. در ادامه به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهاد شده، ضمن ارائه نتایج شبیه سازی، اثرات این دو کنترل کننده را در کاهش هارمونیک ها و فلیکر ولتاژهای کوره قوس الکتریکی، قبل و بعد از اعمال کنترل کننده آشوبی محاسبه و با یکدیگر مقایسه می نماییم.

کلمات کلیدی: کوره قوس الکتریکی، نظریه آشوب، هارمونیک ها، فلیکر ولتاژ، کنترل کننده های آشوب

Modeling of the Electric Arc Furnaces using Chaos Theory and Control of Power Quality Parameters

Mohammad Ataei, Hajar Ghotb, Ghazanfar Shahgholian, Arash Kiyoumarsi

Abstract: *:* Chaos-Based modeling of Electric Arc Furnaces (EAF)in order to control the power quality parameters is the purpose of this paper. Electric arc furnaces represent one of the major sources of perturbations for the feeding system. For modeling the electric arc furnace, at first, the arc is modeling using current-voltage characteristic of time-domain, then the random characteristic has been taken into account by modulating the arc voltage by a chaotic attractor. This paper deals with the problem of the arc modeling using three well-known chaotic attractors (Rössler, Chua, and Lorenz) attractors. A new tuning procedure is carried out to determine the most adequate parameters of the attractors to model the arc furnace by imperialist competitive algorithm (ICA). Finally two methods (time delay feedback controller (TDFC), adaptive controller) for controlling electrode in electric arc furnaces are proposed. Then, the power quality indices before and after applying controller are compared to show the effectiveness of the proposed idea.

Keywords: Electric Arc Furnaces, Chaos Theory, Voltage Flicker, Harmonics, Control of Chaos

[1] Imperialist Competitive Algorithm (ICA)

۱- مقدمه

کوره های قوس الکتریکی یکی از بزرگترین بارهای متمرکز درشبکه قدرت می باشند که اغلب به منظور ذوب و تصفیه فلزات مورد استفاده قرار می‌گیرد. با گسترش جریان استفاده از کوره های قوس الکتریکی درصنعت، مشکلات کیفیت توان ناشی از آنها نیز افزایش یافته است. امروزه یکی از مهمترین منابع تولیدهارمونیک[۱]، فلیکر[۲] ولتاژ و نامتعادلی درشبکه های قدرت، کورهای قوس الکتریکی می‌باشند. به دلیل حرکت ظاهرا اتفاقی قوس الکتریکی همانگونه که طول قوس هنگام ذوب تغییر می‌کند نوسانات شدید ولتاژی در مدار تغذیه مشاهده می‌شود. هنگامی که این تغییرات درمحدوده ۱ تا ۲۵ هرتز به وقوع بپیوندد، می‌تواند باعث مساله فلیکر گردد. علاوه بر این براثر تغییرات ناگهانی قوس و مشخصه به شدت غیرخطی ولتاژ – جریان، هارمونیک های فرکانس اصلی شکل می‌گیرند[۱-۳] به منظور یافتن روشهایی برای کم کردن این تبعات مخرب، باید اثرات این بارهای غیرخطی و تغییر پذیر با زمان را به روی شاخصه های کیفیت توان درسرتاسر سیستم قدرت مورد بررسی قرار دهیم. لذا در دست داشتن مدل توصیف کننده رفتار یک کوره قوس الکتریکی، که مبین طبیعت غیرقابل پیش بینی، غیرپریودیک و غیرخطی قوس الکتریکی بوده، به شدت احساس می‌شود. در راستای آنالیز شاخصهای کیفیت توان و مدلسازی قوس الکتریکی مدلهای متعددی پیشنهاد شده است[۴-۱۴]. برخی از این مدلها براساس خطی سازی معادله مشخصه می باشند، که دارای تقریب زیادی می باشند[۴-۵]. برخی دیگر از این مدلها برپایه مدلهای تقریبی و با استفاده از معادلات دیفرانسیل در حوزه زمان بیان شده و نیاز به شرایط اولیه خاص دارند [۶] وتطابق مطلوبی بین مدلهای آنها و حالت واقعی وجود ندارد و دارای تقریب زیادی می باشد[۷،۸،۹] . یکی از جدیدترین روشهایی که برای مدلسازی قوس الکتریکی، در این مقاله مد نظر می باشد، ارائه روشی برای مدل سازی کوره های قوس الکتریکی بر مبنای تئوری آشوب بوده، که تا حدزیادی دربرگیرنده طبیعت تصادفی قوس الکتریکی بوده و همچنین قابلیت کنترل را نیز دارا باشد [۱۳].به این منظور، از سه نوع از سیستمهای آشوبی در مدل سازی کوره قوس الکتریکی استفاده می نماییم. یکی از نکات مهم دراستفاده از مدلهای آشوب، حساسیت شدید این مدلها به پارامترهای اولیه بوده، که بااعمال اندک تغییراتی در پارامترهای آنها، رفتارهای متفاوتی را از این مدلها شاهد خواهیم بود. بنابراین تنظیم دقیق پارامترها امری ضروری می باشد[۱۵-۱۷]. بدین منظور، برای طراحی دقیق پارامترهای مدلهای آشوب، دو نوع ازالگوریتمهای بهینه سازی (الگوریتم رقابت استعماری و الگوریتم ژنتیک) با تابع هزینه مشتمل بر انحراف هارمونیکهای ولتاژ و جریان انتخاب، ونتایج با یکدیگر مقایسه می گردد. این دو نوع الگوریتم، به هر نوع مساله بهینه سازی بدون هیچ محدودیتی قابل اعمال بوده و از آنها در حل بسیاری از مسائل در حوزه های مهندسی استفاده گردیده است[۱۸-۲۲]. پس از ارائه مدل پیشنهادی، به منظور کنترل شاخصهای کیفیت توان در شبکه قدرت، ایده طراحی کنترل کننده آشوبی برای کنترل حرکت الکترودهای کوره قوس الکتریکی مطرح می گردد. در زمینه کنترل کوره قوس الکتریکی و آنالیز تاثیر بر پارامترهای کیفیت توان تاکنون مطالعات محدودی برمبنای نظریه کلاسیک کنترل انجام شده است [۲۳-۲۷]. در این مقاله، با توجه به ارائه مدل توصیف کننده کوره قوس الکتریکی بر مبنای نظریه آشوب، با ارائه دو کنترل کننده آشوبی (کنترل تطبیقی سیستم آشوبی همسان Lorenz[۳] وکنترل فیدبک تاخیر زمان[۴]) به کنترل الکترودهای کوره قوس الکتریکی پرداخته و بنابراین طول قوس الکتریکی کنترل می گردد و به دلیل رابطه غیر خطی بین طول قوس الکتریکی و جریان الکتریکی، کنترل جریان شبکه توان نیز محقق می‌شود[۲۸-۳۱]. پس از ارائه مقدمه، ساختار ادامه مقاله به این صورت است که، طراحی مدل قوس الکتریکی در حالت استاتیک در بخش دوم شرح داده می شود. در بخش سوم به مدلسازی قوس الکتریکی برمبنای نظریه آشوب پرداخته می شود، همچنین طراحی پارامترهای مدلهای آشوب، بر اساس الگوریتمهای بهینه سازی در این بخش مورد توجه قرارگرفته است. در بخش چهارم بر روی طراحی کنترل کننده برای کنترل حرکت الکترودها و بررسی اثرات این کنترل کننده به روی پارامترهای کیفیت توان بحث و بررسی انجام می گردد. و در نهایت در بخش پنجم نتیجه گیری از بحث ارائه می گردد.

۲-۱ مدل سازی قوس الکتریکی بر اساس مدل هذلولی- نمایی

از مهمترین مزیتهای مدل قوس، سادگی بکارگیری جهت شبیه سازی و عدم تقریب زیاد می‌باشد. رابطه (۱) به بیان مدلی برای کوره قوس الکتریکی می پردازد.

$$v = sign(i)[v_{at} + \frac{C}{D+|i|}] \qquad (۱)$$
$$v_{at} = A + Bl$$

در این مدل، که آن را مدل هذلولی گون گویند، v ولتاژ قوس الکتریکی، i جریان قوس الکتریکی و V_{at} ولتاژ آستانه ذوب می باشد، که به طول قوس بستگی دارد. C,D اعداد ثابتی هستند که در هنگامی که جریانها افزایشی باشد به صورت C_i, D_i وهنگامی که جریانها کاهشی باشد به صورت C_d ,D_d نشان داده می شود. A افت ولتاژ مجموع کاتد وآند، B افت ولتاژدر هر واحد قوس و L طول قوس می باشد که این مقادیر نیز، با توجه به خصوصیات هر کوره مقادیر متفاوتی را به خود می‌گیرند [۱۱] . رابطه (۲) مدل دیگری ازمشخصه ولتاژ-

[۱] Harmonics
[۲] Flicker
[۳] Adaptive Controller
[۴] Time-Delay Feedback Control(TDFC)

جریان کوره قوس الکتریکی را بیان می نماید. از آنجا که در این مدل مشخصه ولتاژ- جریان قوس با استفاده از یک تابع نمایی تقریب زده شده است، به این مدل، مدل نمایی کامل می گویند.

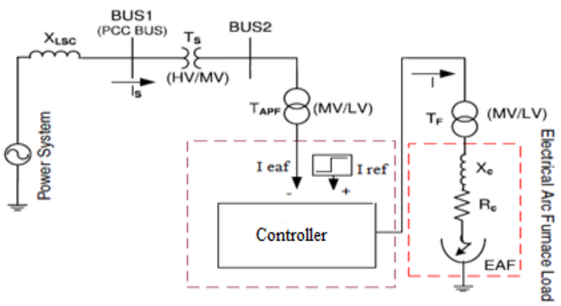
$$v = sign(i)[v_{at} \quad (1-\exp(-|i|/I_0))] \qquad (۲)$$

$$v_{at} = A + Bl$$

در این رابطه I_0 یک ثابت جریانی برای جریانهای مثبت و منفی می باشد که این پارامتر، با توجه به خصوصیات هر کوره مقادیر متفاوتی را به خود می‌گیرد[۱۱] . رابطه (۳) مدل دیگری از مشخصه ولتاژ- جریان قوس الکتریکی را نشان می دهد که از دو مدل هذلولی گون و مدل نمایی کامل تشکیل شده است. همانطور که در این رابطه قابل مشاهده است، برای جریانهای مثبت و با توجه به خاصیت هیسترزیس قوس، دو حالت در نظر گرفته شده است. در حالت جریانهای افزایشی از مدل هذلولی گون و در حالت جریانهای کاهشی ازمدل نمایی کامل استفاده می‌شود. به همین دلیل به این مدل، مدل هذلولی- نمایی نیز گفته می‌شود. مدل هذلولی- نمایی به مدل واقعی قوس الکتریکی بسیار نزدیک می باشد. همچنین می‌تواند حالات مختلف بار کوره را در سیستم قدرت ایجاد نماید. به همین دلیل از این مدل به عنوان مدل استاتیک قوس الکتریکی استفاده می گردد..

$$v = \begin{cases} v_{at}(1-\exp(-|i|/I_0)) & \dfrac{di}{dt} \geq 0, i > 0 \\ v_{at} + \dfrac{C}{D+|i|} & \dfrac{di}{dt} < 0, i < 0 \end{cases} \qquad (۳)$$

برای پیاده سازی مدل قوس پیشنهادی از یک شبکه قدرت استفاده می نماییم. شکل(۱) نشان دهنده این شبکه قدرت می باشد. مقادیر امپدانسهای شبکه قدرت، به همراه مقادیر پارامترهای آن، در جدول (۱) بیان شده است[۱۲] .

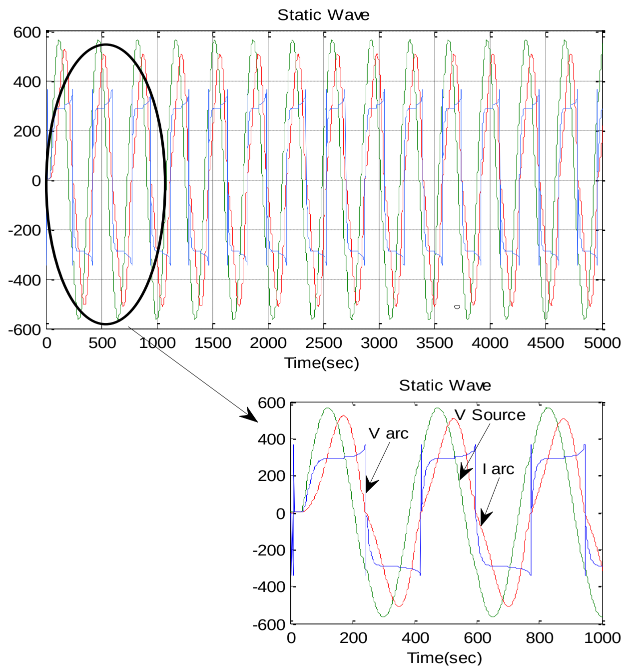


شکل(۱): دیاگرام مدار کوره قوس الکتریکی و بلوک کنترل کننده آن در یک سیستم توان

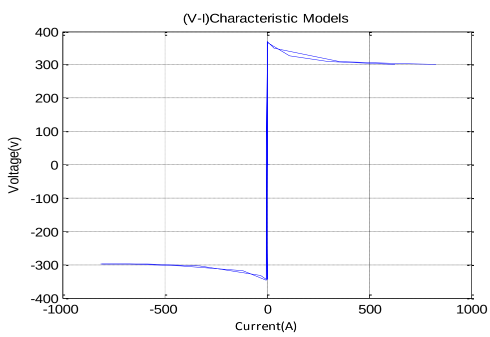
جدول(۱): مقادیر پارامترهای مدلهای قوس الکتریکی

پارامترهای شبکه قدرت	پارامترهای کوره قوس الکتریکی
Z=0.0528+j0.46 mΩ	Z=0.3366+j3.2 mΩ
V=566(v)	I_0=10000(A)
V_{at}=289.75(v)	C_i=190000 C_d = 39000
F=60 HZ	D_i = 5000 و D_d = 5000

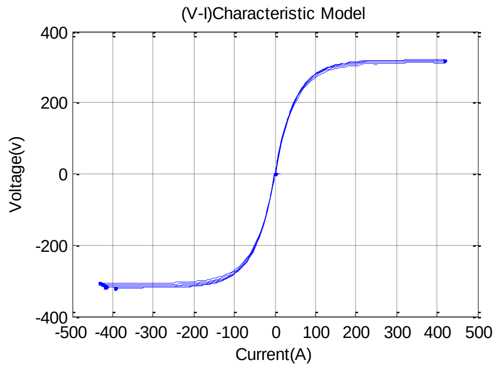
با استفاده از دیاگرام سیستم قدرت، مدل استاتیک قوس الکتریکی را پیاده سازی می نماییم. که نتایج این شبیه سازی در شکل (۲) و(۳) نشان داده شده است. شکل (۲) مشخصه ولتاژ قوس و جریان قوس و ولتاژمنبع بر حسب زمان را نشان می دهد و شکل (۳) مشخصه ولتاژبر حسب جریان مدل نمایی ، مدل هذلولی و مدل هذلولی- نمایی را نشان می دهد.



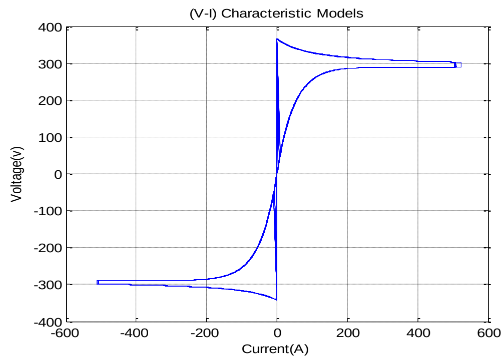
شکل(۲): مشخصه ولتاژو جریان قوس و ولتاژ منبع برحسب زمان



(الف)



(ب)



(ج)

شکل(۳): مشخصه ولتاژ برحسب جریان(الف) مدل نمایی، (ب) مدل هذلولی ، (ج) مدل هذلولی – نمایی

۳- مدل سازی قوس الکتریکی بر اساس نظریه آشوب

به موازات مدل سازی رفتار حالت استاتیک قوس الکتریکی، ایده استفاده از مدلی به ظاهر تصادفی که در باطن طبیعتی قطعی داشته و قابل کنترل نیز می باشد، بیان می گردد. در پژوهشهای انجام گرفته تاکنون از مدل نویز سفید همراه با باند محدود به منظور مدلسازی حالت استاتیک قوس الکتریکی استفاده می گردید. در این بخش سعی می شود با استفاده ازتئوری آشوب[1] خصوصیت ظاهرا تصادفی قوس الکتریکی لحاظ گردد. بدین منظور به انتخاب مدلهای آشوب پرداخته می شود، و پس ازآن ، طراحی پارامترهای مدل آشوب با استفاده از الگوریتمهای بهینه سازی (الگوریتم رقابت استعماری و الگوریتم ژنتیک) ارائه می گردد.

۳-۱- طراحی سیستمهای آشوبی

آشوب در واقع یک خاصیت دینامیکی است که در سیستم های غیر خطی (درصورت وجود شرایطی خاص) امکان بروز پیدا می‌کند. مدلهای گوناگونی از سیستمهای مختلف آشوب بیان شده است، که ما در این مقاله از سه سیستم متداول آشوب Lorenz , Rossler, Chua استفاده می نماییم. معادلات حاکم بر این سه سیستم در پیوست مقاله ارائه می گردد. پس از ارائه مدل حالت استاتیک قوس الکتریکی، به منظور مدل کردن خاصیت به ظاهر تصادفی قوس، ولتاژ خروجی کوره قوس الکتریکی در حالت استاتیک را با خروجی سیستمهای آشوب مدوله می نماییم. به این ترتیب مدل واقعی کوره قوس الکتریکی با استفاده از رابطه (۴) بیان می گردد.

$$v_a \cong v_{a(estatic)}(1+\Delta v) \qquad (۴)$$

که در این رابطه V_a ولتاژ کل خروجی قوس الکتریکی، $V_{a(estatic)}$ ولتاژ کوره قوس الکتریکی حاصل از مدل هذلولی- نمایی در حالت استاتیک و Δv خروجی هر کدام از سیستمهای آشوب می باشد. برای اینکه بتوان سیگنال Δv را با استفاده ازسیستمهای آشوب به قوس الکتریکی اعمال نماییم، لازم است که از هر مدل آشوب یک خروجی را به عنوان Δv انتخاب کرده و با ولتاژ کوره مدوله نماییم. همچنین برای اینکه بتوان سیگنالهای سیستمهای آشوب را در یک بازه خاص آشوبناک برای اعمال به ولتاژ قوس الکتریکی قرار داد از یک پارامتر q استفاده می‌نماییم. به این گونه که سمت راست معادلات حالت را در پارامتر q ضرب می نماییم[۱۳] .

۳-۲- طراحی بهینه پارامترهای مدل آشوب با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری

در راستای مدلسازی قوس الکتریکی، در ابتدا لازم است که یک سیستم آشوبی را به مدل فوق برازش نماییم. در این راستا اهداف گوناگونی را می توان مد نظر قرار داد. ایده ما در این مقاله به این گونه است که، در ابتدا به طراحی پارامترهای مدلهای آشوب براساس حداقل ساختن خطای بین هارمونیکهای ولتاژ و جریان مدل طراحی شده و مدل واقعی (که با استفاده از داده های واقعی کوره قوس الکتریکی فولاد مبارکه اصفهان، بدست آمده) پرداخته و در مرحله بعد، پس از معرفی طرح پیشنهادی، به منظور بررسی عملکرد مطلوب مدل طراحی شده، به اندازگیری فلیکر ولتاژ در مدل طراحی شده و مدل واقعی می پردازیم. بدین منظور روشهای بهینه سازی متفاوتی مطرح شده است که از دو روش بهینه سازی الگوریتم رقابت استعماری و الگوریتم ژنتیک استفاده می گردد. الگوریتم بهینه سازی رقابت استعماری بر اساس رویه استعمار کشورها بنا نهاده شده است. این الگوریتم، از چندین کشور در حالت اولیه شروع می شود، کشورها در حقیقت جوابهای ممکن مساله می باشند. کشورها، به دو دسته تقسیم می شوند: امپریالیست و مستعمره. کشورهای استعمارگر با اعمال سیاست جذب، در راستای محورهای مختلف بهینه سازی، کشورهای مستعمره را به سمت خود می شکنند. رقابت امپریالیستی، هسته ی اصلی این الگوریتم را تشکیل می دهد و باعث می‌شود که کشورها به سمت مینیمم مطلق تابع حرکت کنند [۲۱-۲۲].

[1] Chaos Systems

۳-۲-۱ تابع هدف:

در راستای مدل سازی قوس الکتریکی، در ابتدا لازم است که یک سیستم آشوبی را به مدل فوق برازش نماییم. در این راستا اهداف گوناگونی را می توان مد نظر قرار داد. ایده ما در این مقاله به این گونه است که، در ابتدا به طراحی پارامترهای مدلهای آشوب براساس حداقل ساختن خطای بین هارمونیک های ولتاژ و جریان مدل طراحی شده و مدل واقعی (که با استفاده از داده های واقعی کوره قوس الکتریکی فولاد مبارکه اصفهان، بدست آمده) پرداخته و در مرحله بعد، پس از معرفی طرح پیشنهادی، به منظور بررسی عملکرد مطلوب مدل طراحی شده، به اندازگیری فلیکر ولتاژ در مدل طراحی شده و مدل واقعی می پردازیم. بدین منظور روشهای بهینه سازی متفاوتی مطرح شده است که از دو روش بهینه سازی الگوریتم رقابت استعماری و الگوریتم ژنتیک استفاده می گردد. الگوریتم بهینه سازی رقابت استعماری بر اساس رویه استعمار کشورها بنا نهاده شده است. این الگوریتم، از چندین کشور در حالت اولیه شروع می شود، کشورها در حقیقت جوابهای ممکن مساله می باشند. کشورها، به دو دسته تقسیم می شوند: امپریالیست و مستعمره. کشورهای استعمارگر با اعمال سیاست جذب، در راستای محورهای مختلف بهینه سازی، کشورهای مستعمره را به سمت خود می شکند. رقابت امپریالیستی، هسته ی اصلی این الگوریتم را تشکیل می دهد و باعث می‌شود که کشورها به سمت مینیمم مطلق تابع حرکت کنند [۲۱-۲۲]. همانگونه که بیان گردید در طراحی پارامترهای مدلهای آشوب با استفاده از الگوریتمهای بهینه سازی، تابع هدف از حداقل خطای بین هارمونیکهای ولتاژ و هارمونیکهای جریان مدل طراحی شده و مدل واقعی که با استفاده از داده های واقعی کوره قوس الکتریکی فولاد مبارکه اصفهان، بدست آمده تعریف می نماییم. بر این اساس تابع هدف بصورت رابطه (۵) بیان می گردد.

$$\cos t=\sum_{v=1}^{100} K_v F_v+\sum_{i=1}^{100} K_i F_i \qquad (۵)$$

$$=K_v \int |THD_v(EAF)-THD_v|^2 + K_i \int |THD_i(EAF)-THD_i|^2$$

که در این رابطه، cost تابع هدف ویا تابع هزینه، F_v تابع هزینه تلفات هارمونیکهای ولتاژ، K_v پارامتر متغیر ولتاژ و F_i تابع هزینه تلفات هارمونیکهای جریان، K_i پارامترمتغیر جریان می باشد. THD_v ضریب اعوجاج هارمونیک کل ولتاژ، $THD_v(EAF)$ضریب اعوجاج هارمونیک کل ولتاژ مدل واقعی کوره قوس الکتریکی فولاد مبارکه اصفهان، THD_i ضریب اعوجاج هارمونیک کل جریان $THD_i(EAF)$ ضریب اعوجاج هارمونیک کل جریان مدل واقعی کوره قوس الکتریکی می باشد.

۳-۲-۲ محدودیت ها:

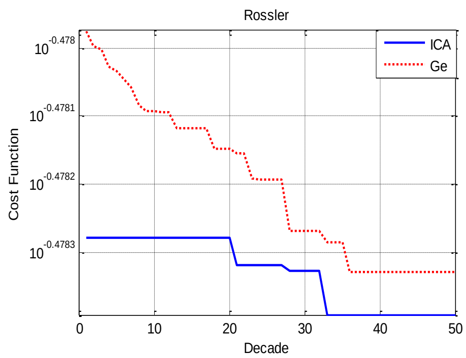
علاوه بر کمینه کردن انحراف هارمونیک های ولتاژ و جریان به عنوان یک هدف، میزان انحراف تک تک پارامترهای سیستم های آشوب نیز نباید از حد مجاز تجاوز کند و حدود پارامترها باید در بین یک حد بیشینه وکمینه باشد. براین اساس لازم است که در ابتدا در هر سیستم، پارامترهایی را به عنوان پارامترهای ثابت با مقادیر ثابت در نظر گرفته، که خود تضمینی برای رفتار آشوبناک آن معادلات بوده و در ادامه به طراحی دیگر پارامترها بپردازیم. یکی از دیاگرامهایی که برای شناسایی محدوده پارامترهای معادلات آشوب به کار می‌رود، دیاگرام دو شاخگی می‌باشد. برطبق این دیاگرام با ثابت انتخاب کردن دو پارامتر از سه پارامتر سیستمهای آشوب، اگر پارامتر سوم در بازه معینی قرار گیرد این معادلات از خود رفتار آشوبناک نشان می‌دهند[۱۵،۱۶،۱۷] . به این گونه که با ثابت در نظر گرفتن پارامترهای زیر در هر سه سیستم آشوب، و طراحی پارامترهای c,β,r,q می‌توان به سیستم مورد نظر دست یافت[۹] . محدوده این پارامترها به صورت رابطه (۶) بیان می گردد.

$$a_1=b_1=0.1 \qquad \sigma=10 \qquad b_3=\frac{8}{3}$$

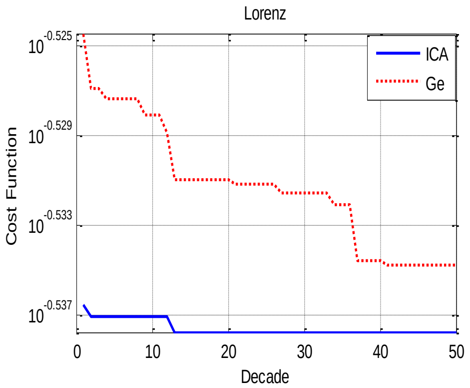
$$b_2=\frac{2}{7} \qquad a_2=\frac{-1}{7} \qquad \alpha=10$$

$$\begin{aligned}&c\in[9.4,10.1]\cup[15.6,20.5]\cup[30.4,38.9]\\&\cup[39.6,41.5]\cup[42,43.4]\cup[43.8,44.5] \qquad (۶)\\&\beta\in[13.9,17.9]\\&r\in[25,91]\cup[94,99]\cup[101,122]\cup\\&[167,180]\cup[182,198]\cup[200,204]\end{aligned}$$

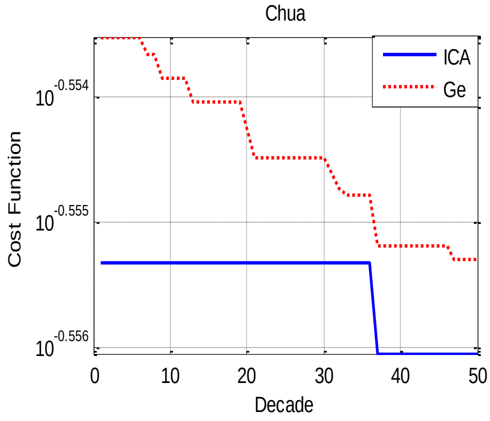
با استفاده از فلوچارت نشان داده شده در مرجع[۲۱] که روند اجرای این الگوریتم را نشان می دهد، می توان به طراحی پارامترهای آشوب پرداخت. که نتایج این طراحی در جدول(۲) و شکل (۴) بیان گردیده است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل(۴): نمودار بهترین تابع هزینه در سه مدل(الف) Rossler و (ب) Lorenz و(ج) Chua با استفاده از دو الگوریتم رقابت استعماری و الگوریتم ژنتیک

جدول(۲): مقادیرو نتایج پارامترهاوبهترین تابع هزینه، در سه مدل آشوبی

الگوریتم	Chua	Lorenz	Rossler
رقابت استعماری	β=17.1963	r =78.485	c= 34.7444
	q=15.9263	q=49.269	q= 38.3045
	C.F=0.2779	C.F=0.290	C.F=0.332
ژنتیک	β= 17.025	r=42.4913	c=42.4913
	q=10.0734	q=31.035	q=31.0355
	C.F=0.2784	C.F=0.292	C.F=0.332

همانگونه که در شکل (۴) و جدول (۲) نشان داده شده است، برای طراحی بهتر پارامترهای سیستمهای آشوب از دو الگوریتم رقابت استعماری و الگوریتم ژنتیک استفاده شده است. با توجه به شکل (۴) الگوریتم رقابت استعماری در زمان کمتری به میزان نهایی خود می رسد و با توجه به جدول (۲) تابع هزینه کمتری نیز دارد. بنابراین در طراحی پارامترها از الگوریتم رقابت استعماری استفاده می گردد.

۳-۳- ارزیابی و تعیین اعتبار مدلهای آشوبی ارائه شده از دیدگاه اندازه گیری فلیکر

همانگونه که در مراحل قبل بیان گردید، به برازش مدلی با مدل واقعی کوره قوس الکتریکی پرداختیم، که شاخص برازش میزان هارمونیکهای ولتاژ و هارمونیکهای جریان بوده است. درادامه به منظور بررسی عملکرد طرح پیشنهادی، به اندازگیری میزان فلیکر ولتاژ، پرداخته و نتایج را با نتایج بدست آمده از مدل واقعی، مقایسه می نماییم. جدول (۳) مقادیر فلیکر ولتاژ لحظه ایی (p_{st}) را در بین مدل واقعی کوره قوس الکتریکی فولاد مبارکه اصفهان و مدلهای طراحی شده با استفاده از سیستمهای آشوب را نشان می دهد.

جدول(۳): مقادیر Pst مربوط به مدل کوره قوس الکتریکی و مدلهای طراحی شده

Pst	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
Pst (EAF)	0.9816	1.4571	1.7496	2.0959	2.1764	2.2181	2.2139
Rossler	.5985	2.190	2.4167	2.6377	2.6244	2.630	2.7651
Lorenz	1.0090	1.2082	1.3960	2.1946	2.2156	2.6281	2.6539
Chua	1.1399	1.099	1.3087	2.331	2.562	2.9186	2.3160

با استفاده از مقادیر جدول (۳) می توان به این نتیجه رسید که اولا انتخاب این سه سیستم آشوب برای مدلسازی قوس الکتریکی صحیح بوده است، زیرا حداکثر میزان اختلاف مربوط به مدل Rossler بوده، که ماکزیموم آن در ثانیه دوم می باشد که برابر ۰.۷۳۳است. که مقدار اندکی می باشد. همچنین بهترین مدل، مدل Lorenz می باشد. همچنین می توان این چنین بیان کرد که برازش مدل طراحی شده با تابع هدف حداقل خطای بین هارمونیکهای ولتاژ و جریان با مدل واقعی، از دیدگاه فلیکر ولتاژ نیز دارای عملکرد مطلوبی می باشد.

۴-کنترل کوره قوس الکتریکی بر مبنای تئوری آشوب به منظور بهبود پارامترهای کیفیت توان

همانگونه که بیان گردید، به دلیل اینکه قوس الکتریکی تحت تاثیر حرکت الکترودها و جابجائی مواد مذاب قرار دارد، هنگامی که طول قوس هنگام ذوب تغییر می‌کند نوسانات شدید ولتاژی در مدار تغذیه مشاهده می گردد، و جریان قوس نیز مسیر نامنظمی خواهد داشت. جریانهای نامتعادل باعث اعوجاج وتغییرات زیادی در شبکه توان می شوند. برای کاهش این تغییرات که خود عاملی برای افزایش فلیکرها و هارمونیکها می‌باشد، لازم است که از یک سیستم کنترل به منظور کنترل موقعیت الکترودها ودر نتیجه آن کنترل طول قوس و در نهایت کنترل جریان کوره قوس الکتریکی استفاده کرد. با توجه به آشوب گونه فرض کردن حرکت قوس الکتریکی، و مدلسازی آن بوسیله سیستمهای آشوبی، به منظور طراحی کنترل کننده کوره قوس الکتریکی ، این ایده دنبال می شود که برای سیستم آشوبی برازش شده به رفتار دینامیکی سیستم، یک کنترل کننده آشوبی طراحی شود که اعمال آن به سیستم منجر به کنترل طول قوس الکتریکی و در نتیجه موقعیت الکترودها گردد. به این ترتیب جریان کوره قوس الکتریکی که عامل حرکت الکترودها است، کنترل می گردد. در این راستا دو روش کنترل آشوبی در بخش بعد مورد استفاده قرار می گیرد. یکی از این روشها موسوم به روش کنترل فیدبک تاخیر از روشهای شناخته شده در کنترل آشوب می

باشد [۲۸، ۲۹] . روش دیگر نیز روشی است که توسط نویسنده نخست این مقاله برای کنترل تطبیقی سیستم آشوبی همسان لرنز- لو- چن در [۳۱] . ارائه گردیده و جهت مشاهده جزئیات می توان بدان مراجعه نمود. بنابراین با استفاده از این دو روش کنترل آشوبی به کنترل الکترودهای کوره قوس الکتریکی وکنترل طول قوس و درنهایت کنترل جریان شبکه توان پرداخته می‌شود. به این ترتیب، با کنترل جریان کوره قوس الکتریکی اثرات وحود هارمونیکها و فلیکر ولتاژهای اعمالی به شبکه توان کاهش می یابد.

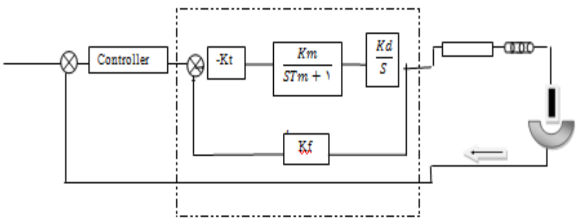
۴-۱- اعمال کنترل کننده به کوره قوس الکتریکی

بعد از طراحی کنترل کننده ها، با توجه به این که هدف نهایی اعمال کنترل کننده به کوره قوس الکتریکی، کنترل جریان قوس الکتریکی است، وجریان کوره قوس الکتریکی یک رابطه غیر خطی با طول قوس الکتریکی دارد، برای مدلسازی قوس الکتریکی از مدل کامل آشوبی طراحی شده استفاده می گردد. سپس به منظور کنترل جریان خروجی کوره قوس الکتریکی رابطه غیر خطی بین طول قوس الکتریکی و جریان کوره قوس الکتریکی به صورت رابطه تکه ایی خطی طبق رابطه (7) در نظر گرفته می شود:[۲۴ و ۳۰] .

$$I = f(l) \approx I_{m0} - k_m L \qquad (۷)$$
$$L_m < L < L_{m+1} I_{m0}, K_m > 0$$

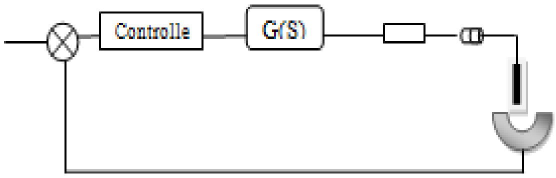
در این رابطه I جریان قوس الکتریکی، I_{mo} ماکزیموم جریان قوس الکتریکی که در آستانه شروع ذوب اتفاق می افتد و برابر 4KA در نظر گرفته می شود. L طول قوس، K_m پارامترثابت طول میباشد. در این قسمت لازم است اشاره مختصری به الکترودها و ملحقات آن گردد. ساختار الکترودها را بوسیله سه قسمت تریستور، موتور، چرخ دنده ها مدل می نماییم. همچنین از یک فیدبک سرعت برای اطمینان از پایداری سیستم طراحی شده، استفاده می نماییم [۲۵، ۲۶، ۲۷] برای کنترل کوره قوس الکتریکی، در ابتدا از یک ترانسفورمر جریان (CT) برای اندازه گیری جریان قوس استفاده می گردد. سپس این جریان را با جریان منبع[۱] مقایسه کرده و به یک کنترل کننده اعمال می نماییم. در نتیجه ولتاژ تریستور که باعث حرکت موتورها و چرخ دنده ها می‌گردد، کنترل می‌شود. شکل(۵)و(۶) دیاگرام بلوکی سیستم کنترل الکترودهای کوره قوس الکتریکی را نشان می‌دهد.

[۱] Set point



شکل (۵): دیاگرام بلوکی سیستم کنترل الکترودهای کوره قوس الکتریکی

اگر بلوک شکل (۵) را به صورت شکل (۶) در نظر بگیریم، می‌توان G(s) را به صورت رابطه (۸) در نظر گرفت.

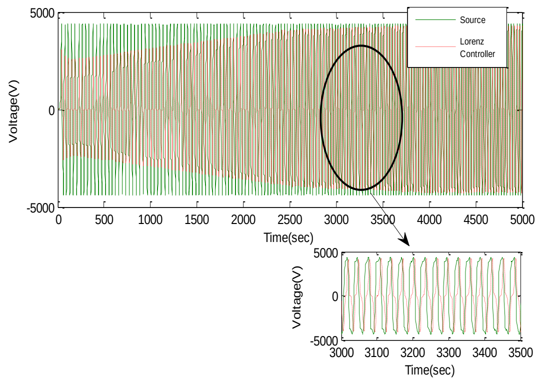


شکل(۶) : دیاگرام بلوکی سیستم ساده شده کنترل الکترودهای کوره قوس الکتریکی

$$G(s) = \frac{L(s)}{U(s)} = \frac{-K_T K_m K_D}{T_m s^2 + (1 + K_T\, K_m K_f)s} \qquad (۸)$$

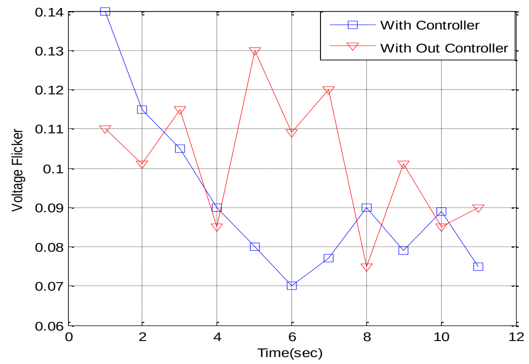
در این رابطه Kt ضریب عملکرد در تریستور و Tm ثابت زمان وKm ضریب عملکرد درموتور و Kd ضریب تناسب در سیستم مکانیکی وKf ضریب فید بک سرعت در نظر گرفته می‌شود و با قراردادن مقادیر پارامترها به صورت رابطه (۹) خواهد شد:

در ادامه با در نظر گرفتن G(s) به صورت رابطه (۹) به اعمال کنترل کننده های طراحی شده به مدل کامل کوره قوس الکتریکی و مدل در نظر گرفته شده برای الکترودهای کوره قوس الکتریکی پرداخته، وبه منظور بررسی عملکرد کنترل کننده طراحی شده، به اندازگیری فلیکر ولتاژ لحظه ایی(Pst) وهارمونیکهای ولتاژ پرداخته و نتایج را قبل و بعد از اعمال کنترل کننده بدست آورده و با هم مقایسه می‌نماییم

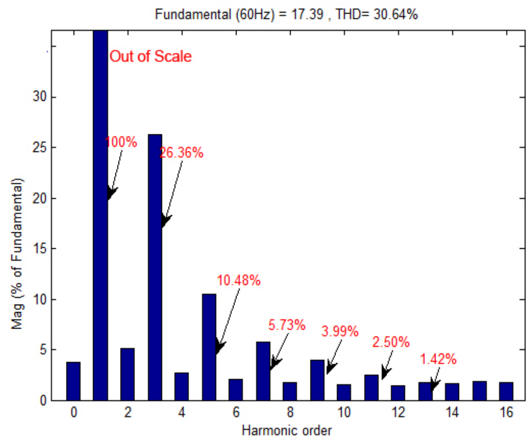


شکل(۷): منحنی جریان رفرنس جریان کوره قوس الکتریکی کنترل شده باکنترل تطبیقی همسان Lorenz

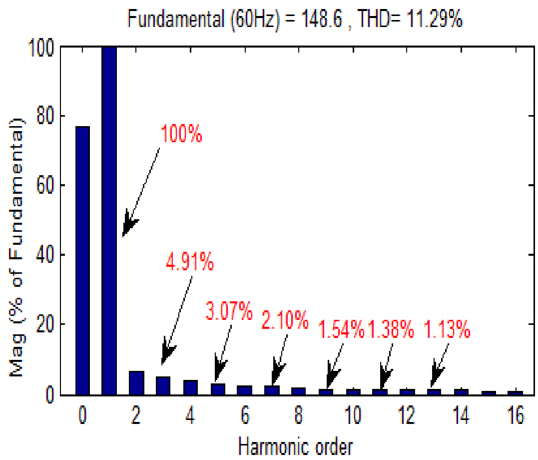
شکل (۷) منحنی جریان رفرنس، و جریان کوره قوس الکتریکی کنترل شده باکنترل تطبیقی را نشان میدهد که بعد از طی مدتی نوسانات جریان کاملا منظم شده است.



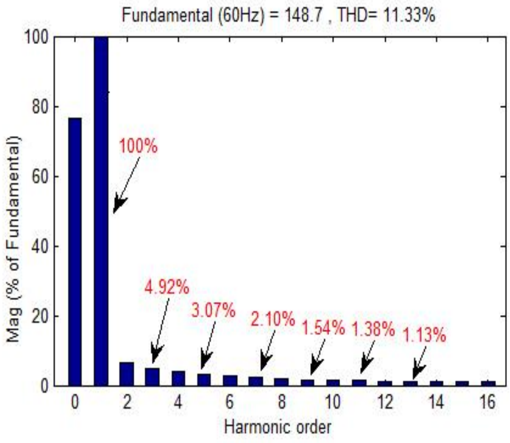
شکل (۸): منحنی فلیکرولتاژ، بدون اعمال کنترل کننده، وهمراه با اعمال کنترل کننده تطبیقی همسان Lorenz



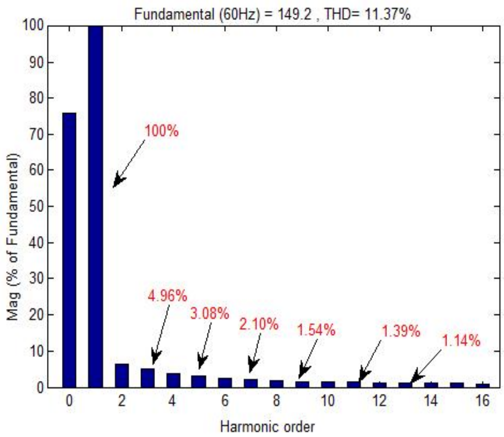
(الف)



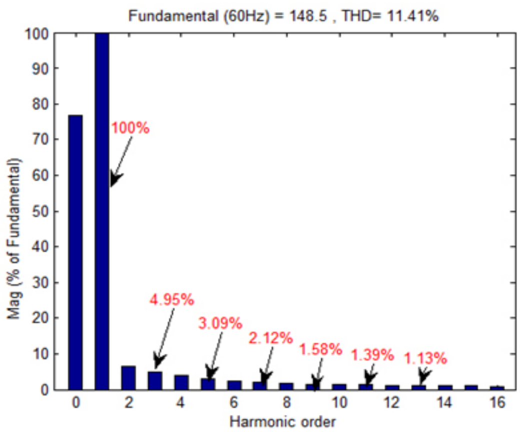
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

شکل(۹): هارمونیکهای جریان همراه با اعمال کنترل کننده و بدون اعمال کنترل کننده (الف) بدون اعمال کنترل کننده (ب) همراه با اعمال کنترل کننده تطبیقی همسان Lorenz،(ج) فیدبک تاخیر Lorenz، (د) فیدبک تاخیر Rossler، (ه) فیدبک تاخیر chua

شکل(۸) منحنی فلیکرولتاژ، بدون اعمال کنترل کننده، وهمراه با اعمال کنترل کننده تطبیقی را نشان می دهد. در شکل (۹) هارمونیکهای

جریان همراه با اعمال هر دو کنترل کننده و بدون اعمال کنترل کننده نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می گردد، THD بدون کنترل کننده ۳۰.۶۴٪ می باشد. در هنگام اعمال کنترل کننده فیدبک تاخیر زمان کمترین THD مربوط به مدل Lorenz است که برابر۱۱.۳۳٪ می باشد. اما بهترین کنترل کننده، کنترل سیستم تطبیقی همسان Lorenz با THDبرابر ۱۱.۲۹٪ است هرچند که نتایج حاصل از اعمال هردو کنترل کننده در کاهش هارمونیکهای جریان قابل توجه است. لازم به ذکر است که در انجام شبیه سازیها، از داده های کوره های کوره قوس الکتریکی فولاد مبارکه اصفهان در طراحی و مدلسازی قوس الکتریکی و طراحی کنترل کننده، استفاده شده است [۳۲] و نتایج طراحی با مدلهای موجود مقایسه شده است.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله در ابتدا به طراحی حالت استاتیک قوس الکتریکی با استفاده از مدل هذلولی- نمایی پرداخته، و با مدوله کردن ولتاژ قوس الکتریکی با ولتاژ خروجی سیستم آشوبی به همراه انتخاب بهینه پارامترهای آن با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری والگوریتم ژنتیک به مدلسازی کوره قوس الکتریکی پرداخته شد. معیار انتخاب بهینه پارامترها بر اساس میزان تطابق شاخصهای کیفیت توان اندازه گیری شده از داده های واقعی در مقایسه با مدل ارائه شده بود. با توجه به لزوم اعمال کنترل کننده، به منظور کاهش اثرات هارمونیکها و فلیکر ولتاژهای ناشی از اعمال کوره قوس الکتریکی به روی شبکه های توزیع در ادامه ایده کنترل الکترودهای کوره قوس الکتریکی بوسیله کنترل کننده های آشوبی ارائه گردید. با اعمال دو کنترل کننده آشوبی، پارامترهای کیفیت توان قبل و بعد از اعمال کنترل کننده ها بررسی گردیدند که کاهش چشمگیری در میزان هارمونیکها و فلیکر ولتاژها مشاهده شد. بررسی نتایج مبین حصول بهترین نتایج با استفاده از مدل آشوبی بر اساس سیستم Lorenz همراه با کنترل کننده تطبیقی همسان Lorenz است که علت این موضوع از موضوعات تحقیقاتی آتی نویسندگان است.

مراجع

[1] O. Ozgun, A. Abur, "Flicker study using a novel arc furnace model", IEEE Transactions on Power Delivery 17 (4), pp. 1158-1163, (2002).

[2] E. Acha, A. Semlyen, N. Rajakovié, "A harmonic domain computational package for nonlinear problems and its application to electric arcs", IEEE Transactions on Power Delivery 5 (1990).

[3] T. L. Ochs, A. D. Hartman, Chaotic Responses in Electric Arc Furnaces. Journal Applied Physics, vol. 76, no. 4, pp. 2059-2065, 1994.

[4] C.S. Chen, H.J. Chaung, C.T. Hsu, S.M. Tseng, "Stochastic voltage flicker analysis and its mitigation for steel industrial power systems", in: IEEE Porto Power Tech Conference, Porto,

[5] G.C. Montanari, M. Logginil, A. Cavallinil, L. Pittil, D. Zaninelliz, "Arc-furnace model for the study of flicker compensation in electrical networks", IEEE Transactions on Power Delivery 9 (October (4)) (1994).

[6] S. Varadan, E.B. Makram, A.A. Girgis, "A new time domain voltage sourge model for an arc furnace using EMTP", IEEE Transactions on Power Delivery 11 (July (3)) (1996).

[7] E. O'Neill-Carrillo, G.T. Heydt, E.J. Kostelich, S.S. Venkata, A. Sundaram, "Nonlinear deterministic modeling of highly varying loads", IEEE Transactions on Power Delivery 14 (April (2)) 1999).

[8] Anxo, P.O. Alonso, M. Perez,"An Improved Time Domain Arc Furnace Model for Harmonic Analysis", IEEE Trans.,on Power Del.,Vol.9, No.1, pp. 367-373, 2004.

[9] R. Grunbaum, "SVC light: a powerful means for dynamic voltage and power quality control in industry and distribution", Power Electronics and Variable Speed Drives, 18-19 September 2000, Conference Publication No. 475 0 IEE 2000.

[10] J. Doleial, A.G. Castillo, V. Valouch, "Topologies and control of active filters for flicker compensation", in: ISIE'2000, Cholula, Puebla, Mexico, 2000.

[11] R. Hooshmand, M. Banejad, M. Torabian, "A New Time Domain Model for Electric Arc Furnace", Electrical Engineering, Journal, Vol. 59, No. 4, pp. 195-202, 2008.

[12] M. a. Golkar, M. Tavakoli, S. Meschi, "A Novel Method of Electrical Arc Furnace modeling for Flicker Study", IEEE Trans. Power Del., 2007.

[13] G. Carpinelli, F. Iacovone, A. Russo, P. Varilone, "Chaos-based modeling of DC arc furnaces for power quality issues", IEEE Transactions on Power Delivery 19 (October (4)) (2004).

[14] W. Ting, Z. S-Yao,"A new frequency domain for the harmonic analysis ", IEEE Conference, APSCOM-97, Hong Kong, 552-555, 1997.

[15] T. Alligood, D. Sauer, A. Yorke, Chaos: An introduction to Dynamical System, Thomas Springer, New York, Springer - verlag ,1996

[16] D. Dutta, S. Chakraborty, "Bifurcation Diagrams in relation to Synchronization in Chaotic systems", Pramana, Journal, Vol. 74, No. 6, pp.919-929, June 2010

[17] F. C. Hoppensteadt, Analysis and Simulation of Chaotic Systems, Second Edition. E. Marsden, L. Sirovich, Springer, Vol.94, 2000

[18] E. Atashpaz, C. Lucas, "Imperialist Competitive Algorithm: An Algorithm for Optimization Inspired by Imperialistic Competition"IEEE Trans, 2007.

[19] Helena Bahrami, Karim Faez, Marjan Abdechiri, "Imperialist Competitive Algorithm Using Chaos

Theory for Optimization (CICA)" ,UKSim-AMSS 12th International Conference on Computer Modeling and Simulation, 2010.

[20] R. Rajabioun, F. Hashemzadeh, E. Atashpaz-Gargari, B. Mesgari, F. Rajaei Salmasi," Identification of a MIMO evaporator and its decentralized PID controller tuning using Colonial Competitive Algorithm", In the proceeding of IFAC World Congress, Seoul, Korea, 2008.

[21] E. Atashpaz-Gargari, F. Hashemzadeh, R. Rajabioun, C. Lucas," Colonial competitive algorithm: A novel approach for PID controller design in MIMO distillation column process", International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics. 2008.

[22] H. Duan, C. Xu, S. Liu, and S. Shao, "Template matching using chaotic imperialist competitive algorithm", Pattern Recognition Letters, 2009

[23] F. J. Sharifi, G. Jorjani, "An Adaptive System for Modeling and Simulation of Electrical Arc Furnaces", Control Engineering Practice 17, Journal, pp. 1202-1219, 2009.

[24] L. Xiaohe, C. Duwu, L. Jie, W. Lijun, "Simulation on Adaptive Control of Electrode Regulator Systems of Arc Furnace", Proceedings of the International Conference on Ele, Vol.5, No. 1, 2001.

[25] L. Xiaoyan, L. Xiuhe, D. Wang, "Arc Furnace Electrode Control System Design", International Conference on Computer, Mechatronics, Control And Electronic Engineering (CMCE), 2010.

[26] A. parsapoor, M. Ataei, A. Kiyoumarsi, " Adaptive Control of the Electric Arc Furnace Electrodes Using Lyapunov Design", International Conference on Control, Automation and Systems ,17-20, October 2007.

[27] G. C. Montanari, M. Loggini, A. Cavallini, L. pitti, D. Zaninelli, "Arc-Furnaces Model for the Study of Flicker Compensation in Electrical Networks", IEEE Trans. Power Del.,Vol.9, No.4, October 1994.

[28] X. Guan, C. Chen, H. Peng, Z. Fan, "Time –Delayed feedback Control of Time- Delay Chaotic Systems", Bifurcation and chaos, Journal,Vol. 13, No.1, pp.193-205,2003.

[29] M. Sun, L.Tian, J. Xu, "Time- delay Feedback Control of the Energy Resource Chaotic System", Nonlinear Science, Journal, Vol. 1, No. 3, pp. 172-177, March 2006.

[30] F. Abdous, A. Ranjbar, S. H. Hosein Nia, A. Sheikhol Eslami, "Chaos Control of Voltage Fluctuation in DC Arc Furnaces Using Time – Delay Feedback Control", International Conference on Electrical Engineering, 25-26, .March 2008.

[۳۱] حقیقت دار، ف.، عطایی م. "کنترل تطبیقی سیستم آشوبی همسان لرنز– لو – چن"، کنترل، جلد۲، شماره۱، صفحه ۵۶- ۶۴، ۱۳۸۷.

[۳۲] کیومرثی،آ.، هوشمند،ر.، عطایی،م.،" مدلسازی احتمالی بار کوره قوس الکتریکی و روشهای کاهش ولتاژ ناشی از آن"، گزارش طرح پژوهشی، مجتمع فولاد مبارکه اصفهان، ۱۳۸۷.

پیوست ۱:

معادلات حاکم بر سه سیستم آشوب به صورت روابط زیر می باشد

Rossler:

$$\dot{x} = -y - x$$
$$\dot{y} = x + a_1 y$$
$$\dot{z} = b_1 + (x - c)z$$

Chua:

$$\dot{x} = \begin{cases} \sigma(y - b_2 x - (b_2 - a_2)) & if\ x < -1 \\ \sigma(y - a_2 x) & if\ -1 < x < 1 \\ \sigma(y - b_2 x + (b_2 - a_2)) & if\ x > 1 \end{cases}$$
$$\dot{y} = x + z - y$$
$$\dot{z} = -\beta y$$

Lorenz:

$$\dot{x} = \alpha(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - xz - y$$
$$\dot{z} = xy - b_3 z$$

در این روابط b_3 ,r,α پارامتر های حقیقی مثبت مدل Lorenz و b_1,c,a_1 پارامتر های حقیقی مثبت مدل Rossler و b_2, a_2 ،β, σ پارامتر های حقیقی مثبت مدل Chua ، همچنین x ،y ، z متغیرهای معادلات حالت می‌باشند.

مجله کنترل
جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۵۵-۴۳

طراحی بهینه‌ی چندهدفه‌ی ربات کابلی ۶-درجه آزادی با استفاده از معیارهای سینماتیکی

سیداحمد خلیل‌پور سیدی[۱]، حمیدرضا تقی‌راد[۱]، مهدی طالع ماسوله[۲]، مهدی علیاری‌شوره‌دلی[۱]

[۱] گروه رباتیک ارس، قطب کنترل صنعتی، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

khalilpour@ee.kntu.ac.ir, taghirad@kntu.ac.ir, aliyari@eetd.kntu.ac.ir

[۲] آزمایشگاه تعامل انسان و ربات، دانشکده علوم وفنون نوین، دانشگاه تهران m.t.masouleh@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۳/۱۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۵/۱۶)

چکیده: در این مقاله با استفاده از معیارهای متنوع سینماتیکی و بهره گیری از الگوریتم های بهینه سازی تکاملی، به طراحی بهینه چند هدفه ربات های کابلی با ۶ درجه آزادی پرداخته شده است. در همین راستا، تعیین فضای کاری ربات‌های کابلی به عنوان یکی از مهمترین چالش‌های طراحی ربات‌های کابلی فضایی در این مقاله مورد بحث و بررسی قرار گرفته و از میان تعریف‌های متعدد، فضای کاری کنترل پذیر به عنوان یکی از جامع‌ترین تعاریف فضای کاری ربات‌های کابلی انتخاب شده است. در این فضای کاری به ازای همه نیروها و گشتاورهای وارده بر مجری نهایی، کابل‌ها در حالت کششی باقی می‌مانند. به منظور سنجش مهارت ربات، از معیار عدد وضعیت عمومی به عنوان شاخصی مؤثر در بررسی میزان دوری از تکینگی استفاده شده است. همچنین بدترین حساسیت سینماتیکی به عنوان دقت قابل ارائه به کاربر در این مقاله معرفی شد. با بهره گیری از روش‌های بهینه سازی چند هدفه‌ای مانند الگوریتم ژنتیک، جبهه بهینگی پرتو به گونه ای برای پارامترهای طراحی ربات کابلی بدست می آید که تمامی توابع هدف طراحی ربات، به طور همزمان بهینه شوند.

کلمات کلیدی: ربات کابلی، طراحی بهینه چند هدفه، حساسیت سینماتیکی، عدد وضعیت، فضای کاری کنترل پذیر.

Multi-Objective Optimization of 6-Degree-of-Freedom Cable-Driven Parallel Robot Using Kinematic Indices

Seyed Ahmad Khalilpour, Hamidreza Taghirad, Mahdi Tale Masouleh, Mahdi Aliyari Shoorehdeli

Abstract: This paper investigates the multi objective optimization of 6-degree of freedom cable-driven parallel robots by using the evolutionary optimization algorithm. In this regard, the determination of cable-driven parallel robots workspace is reviewed as the most important challenge in the design of space cable-driven parallel robots and among various definitions, controllable workspace is selected as a general definition of the cable-driven parallel robots workspace, in which the robot cables remain in tension for any applied forces and wrenches to the end-effector. In order to evaluate the dexterity of the under study robot, the condition number index is used as an effective criterion to measure the distance from singularity. Moreover, the worst kinematic sensitivity is introduced as a presentable accuracy index. Furthermore, by taking the advantages of multi-objective optimization methods such as the non-sorting genetic algorithm, the optimal pareto front for the design parameters of the robot is obtained such that simultaneously, all of the robot design’s objectives are satisfied.

Keywords: Planar cable robot, Multi-objective optimization, Kinematic sensitivity, Condition number, Controllable workspace.

۱- مقدمه

ربات‌های موازی کابلی که با نام سکوهای استوارت با پایه تاندونی[۱] نیز معروف هستند [۱]، از مجری نهایی[۲] تشکیل شده‌اند که توسط تعدادی کابل به چارچوب ثابت متصل می‌باشند. این ربات‌ها به علت دارا بودن ویژگی‌های ممتازی نظیر سرعت و شتاب بالا، وسعت فضای کاری، هزینه کم ساخت، قابلیت حمل بار زیاد نسبت به وزن کم ربات و ...، کاربردهای فراوانی در حل مسائل گوناگون پیدا کرده اند و هر روز ایده‌های جدیدی از به کار گیری آنها در صنایع گوناگون منتشر می‌شود. طیف وسیع این کاربردها که از پاک کردن نمای شیشه‌ای برج‌های بزرگ [۲] تا عمل جراحی [۳] و یا باز

[۱] Tendon-based Stewart Platforms

[۲] End-effector

توانبخشی معلولان [۴] را شامل می‌شود، علاقه پژوهشگران را به کار در زمینه رباتهای کابلی بر می‌انگیزد. زمینه‌های مختلفی چون ابزار واسط لامسه‌ای [۵]، رباتهای نجات بخش [۶]، بازتوان بخش [۷]، آموزش‌های ورزشی [۸] و نقل و انتقال اجسام سنگین [۹] تنها بخشی از کاربردهای ربات‌های کابلی را به خود اختصاص داده‌اند.

با توجه به اینکه کابل‌ها در ربات‌های موازی کابلی فقط قادر به اعمال نیروی کششی هستند، روش کار با این گونه رباتها نسبت به ربات‌های موازی معمول متفاوت می کند. در واقع طراحی این ربات‌ها به گونه‌ای باید صورت گیرد که سیستم کنترل آن در هر لحظه، سیگنالی برای محرک‌ها ارائه دهد که نتیجه آن، اعمال نیروی کششی در کلیه کابل‌ها باشد. در واقع طراحی پیکربندی مکانیکی و سپس سیستم کنترل ربات باید به گونه‌ای باشد که ربات برای رسیدن به موقعیت و جهت مورد نیاز خود، فقط از نیروهای کششی در محرک‌ها استفاده کند. به همین سبب افزونگی در ربات‌های کابلی موازی یک امر اجتناب ناپذیر به شمار می‌آید. به عبارت دیگر، برای آن که ربات کابلی در یک موقعیت غیر تکین دارای n درجه آزادی باشد، حداقل به $n+1$ کابل نیاز است. از جمله دیگر چالش‌ها می‌توان به برخورد کابلها با هم و کابل‌ها با بدنه و اشیاء پیرامون ربات اشاره کرد که مشکلاتی را بر سر طراحی این ربات‌ها قرار داده است [۱۰]. مهارت کافی ربات و قدرت مانور در جهات مختلف، از جمله دیگر مواردی است که در طراحی همه مکانیزم‌ها مد نظر قرار می‌گیرد. برآورده کردن تمام موارد فوق نیازمند به کار گیری روش‌های بهینه‌سازی چند هدفه برای طراحی ربات است. چرا که بهینه‌سازی به منظور دستیابی به تنها یک هدف ممکن است به عدم دستیابی به اهداف دیگر منجر شود.

در ادبیات رباتهای موازی کابلی افزونه، فضای کاری از دیدگاه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته و در مقالات علمی، انواع گوناگون فضای کاری برای این ربات‌ها تعریف شده است. به طور خلاصه فضای کاری ربات‌های کابلی به چهار دسته کلی تقسیم بندی می‌شوند: (۱) فضای کاری چرخش امکان پذیر [۱۱] (۲) فضای کاری دینامیکی [۱۲] (۳) فضای کاری استاتیکی [۱۳] و (۴) فضای کاری کنترل‌پذیر[۱] [۱۴]. در این مقاله فضای کاری کنترل‌پذیر ربات‌های کابلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. فضای کاری کنترل‌پذیر شامل همه موقعیت‌هایی از مجری نهایی است که در آنها به ازای همه نیروها و گشتاورهای وارده بر مجری نهایی، کابل‌های ربات در حالت کششی قرار گیرند [۱۴]. بنابراین وسعت این فضای کاری می‌تواند به عنوان یکی از معیارهای طراحی بهینه چند هدفه مورد بررسی قرار گیرد.

از جمله قیودی که در هنگام طراحی هر ربات باید در نظر گرفت، دقت و مهارت آن ربات در انجام وظایف محوله است. تعیین فضای کاری که دقت ربات، حداقل‌های تعیین شده را رعایت می‌کند و سعی در افزایش این فضا، بخشی از طراحی یک ربات ایده آل به شمار می‌آید [۱۵]. تعیین نقاط تکین و کاهش آنها یکی از چالش‌های مهم طراحی ربات‌ها می‌باشد. در طراحی ربات‌های موازی، معمولاً از شاخص‌های سینماتیکی برای کاهش تکینگی‌ها و افزایش کارایی این مکانیزم‌ها استفاده می‌شود. معروف‌ترین این شاخص‌ها، معیار توانایی یوشیکاوا [۱۶] و معیار مهارت [۱۷] می‌باشند که کاربرد آنها دارای بعضی محدودیت‌ها به ویژه در ربات‌های موازی کابلی است. برای حل این مشکلات، اخیراً دو معیار مختلف که حساسیت سینماتیکی انتقالی و دورانی نام[۲] دارند، پیشنهاد شده است. این دو شاخص کران بالای خطای دورانی و انتقالی مکانیرم می‌باشند که از خطای با نرم واحد در فضای مفصلی منشاء گرفته اند [۱۸].

در زمینه بهینه سازی و طراحی ربات‌های کابلی می‌توان به مراجع [۱۶،۱۰،۱۹-۲۳] اشاره کرد. در این مراجع از شاخص‌هایی نظیر مساحت فضای کاری استاتیکی، عدد وضعیت عمومی[۳]، فضای کاری کنترل‌پذیر و جلوگیری از برخورد کابلها استفاده شده‌است تا ربات کابلی متناسب با نیاز طراحی گردد. در حالت کلی، این مراجع برای داشتن تخمینی از وضعیت فضای کاری، از شبکه بندی[۴] فضای کاری استفاده کرده و در هر نقطه از شبکه ایجاده شده، معیار محلی مورد نظر را بررسی می کند.

طراحی و بهینه سازی چندهدفه رباتها از جمله موضوعات مورد علاقه محققان به شمار می آید که در این حوزه می توان به مراجع [۲۰، ۲۱] اشاره کرد. در این مراجع، با استفاده از روشها و الگوریتم های تکاملی به بهینه سازی چندهدفه رباتهای موازی پرداخته شده است. اما مرجع[۲۲] با تکیه بر تحلیل بازه ای و با رویکرد در نظرگرفتن چندین شاخص، اقدام به بهینه سازی چندهدفه رباتها کرده است و به عنوان نمونه مکانیزمی موازی با ۶-درجه آزادی را طراحی و بهینه سازی نموده است.

با وجود ارائه پاسخی با صحت تضمین شده، حجم محاسبات بالا و سختی حل مسأله در فضای تحلیل بازه ای، از کارآمدی این رویکرد می کاهد. به طور خاص، بهینه‌سازی چند هدفه ربات‌های کابلی در [۱۰،۲۳] مورد بررسی قرار گرفته است. در مرجع [۱۰] طراحی چند هدفه بر اساس روشی مبتنی بر بازرسی دیداری[۵] صورت گرفته است و در نهایت، یک طرح بهینه به عنوان خروجی ارائه شده است. مبنای این روش به کارگیری همزمان معیارهای جلوگیری از برخورد کابل، حجم فضای کاری و مهارت ربات در قالب یک مسأله بهینه‌سازی چند هدفه است. این مرجع به جای محاسبه جبهه پرتو[۶]، از یک تابع هزینه کلی استفاده کرده است. اما مشکلاتی نظیر وزن دهی و ارزش گذاری معیارهای مختلف نسبت به هم، از کارایی این روش می‌کاهد. لذا

[۱] Controllable WorkSpace (CWS)
[۲] Point-displacement and Rotational Kinematic Sensitivity
[۳] Global Condition Number
[۴] Mesh
[۵] Visual Inspection
[۶] Pareto Front

در[۱۰] برای برطرف کردن این مشکل، وزن‌دهی هر تابع هدف را با توجه به نمودارهای دیداری[1] مربوطه پیشنهاد می کند.

همچنین در مرجع [۲۳]، با استفاده از معیارهای کنترل‌پذیری، عدد وضعیت عمومی و حساسیت سینماتیکی، به طراحی بهینه چندهدفه ربات کابلی صفحه‌ای پرداخته شده است و از الگوریتم‌های بهینه‌سازی هوشمندی نظیرNSGA II[2] و AWPSO[3] استفاده شده تا جبهه پرتو بهینه پارامترهای طراحی ربات کابلی صفحه‌ای بدست آید. در این مقاله اشاره شده است که مقایسه عملکرد الگوریتم های بهینه سازی چند هدفه به کار رفته نشان می‌دهد که الگوریتم NSGA II نسبت به الگوریتم AWPSO کارایی بهتری داشته و جبهه پرتوی با پراکندگی مناسبتری را فراهم آورده است.

هدف این مقاله، بررسی معیارهای سینماتیکی مناسب برای طراحی ربات‌های کابلی فضایی و سپس، بهینه‌سازی چند هدفه بر اساس شاخص‌های مطرح شده می‌باشد. بر این اساس، معیارها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که بتوانند وسعت فضای کاری و دقت و مهارت ربات را تنظیم نمایند. علاوه بر این، قابلیت ساخت و کارایی مکانیزم به عنوان معیارهای مهم دیگر در طراحی ربات، مورد توجه قرار می گیرند. استفاده از الگوریتم‌های هوشمند ارائه شده در این مقاله، این فرصت را فراهم می‌آوردند تا دسته جوابی به عنوان بهترین پاسخ (جبهه پرتو) به کاربر نهایی یا سازنده ارائه گردد تا در نهایت با توجه به اهمیت معیارهای طراحی در شرایط گوناگون و نیاز کاربر، یکی از این نقاط بهینه در جبهه پرتو به منظور ساخت انتخاب گردد.

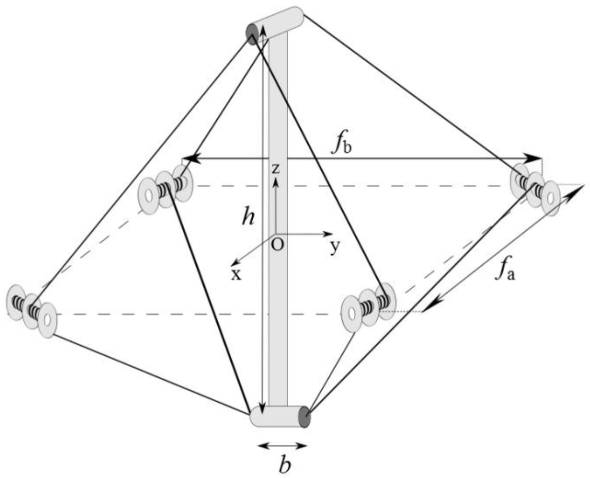
در جمع‌بندی توضیحات فوق باید به این موضوع توجه کرد که هدف اصلی این مقاله نه بیان معیارهای جدید سینماتیکی در حوزه رباتیک است و نه ارائه روش های جدید بهینه سازی بلکه نوآوری اصلی این مقاله، بررسی معیارهای متنوع سینماتیکی در کنار هم و استفاده از آنها در الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه هوشمند می‌باشد که در نهایت، منجر به ارائه جبهه پرتوی بهینه شده است. مقالات متنوعی از معیارهای سینماتیکی استفاده شده در این مقاله به منظور طراحی ربات کابلی بهره برده‌اند، اما هیچ کدام به بررسی این معیارها در کنار هم و در نهایت بهینه‌سازی چند هدفه با استفاده از الگوریتم‌های هوشمند نپرداخته‌اند. در ادامه این مقاله، ابتدا ربات کابلی فضایی مورد نظر معرفی می گردد. در بخش سوم معیارهای متداول سینماتیکی طراحی ربات کابلی که وسعت فضای کاری و دقت و مهارت ربات را ارزیابی می‌کنند، بیان می‌گردند. در بخش چهارم معیارهای بیان شده در قسمت قبل با توجه به پارامترهای طراحی، تحلیل می‌شوند. در نهایت با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی، بهینه‌سازی همزمانی برای اهداف در تضاد با هم انجام شده و جبهه پرتو بهینه محاسبه می گردد.

۲- معرفی ربات کابلی فضایی

ربات کابلی فضایی در نظر گرفته شده در این مقاله، رباتی با ۶ درجه آزادی در فضا و ۸ کابل است. حضور ۷ کابل برای داشتن فضای کاری کنترل پذیر اجباری است، اما داشتن کابل هشتم بر مهارت ربات می‌افزاید. مرجع [۲۴] بررسی جامعی بر روی انواع ربات‌های کابلی فضایی انجام داده است. این مرجع ابتدا فرض می کند که چهارچوب ثابت و مجری نهایی، هر دو مکعب شکل هستند و کابل‌ها به کنج‌های این مکعب‌ها وصل می‌شوند. مرجع [۲۴] نشان می‌دهد با وجود این که $8! = 40320$ حالت برای اتصال کابل‌ها وجود دارد، تنها ۲۰ حالت در چرخش‌های کاری مد نظر، دارای فضای کاری می‌باشد. همچنین [۲۴] بیان می کند که اتصال کابل‌ها به صورت فوق، احتمال برخورد کابل‌ها با یکدیگر را بسیار افزایش می‌دهد، لذا سعی می کند با مجتمع کردن محل قرار گیری عملگرها و یا اتصال کابل‌ها به مجری نهایی در یک نقطه، از احتمال برخورد کابل‌ها بکاهد. مرجع [۲۲] در پایان دو طرح عصایی[4] و T را به عنوان طرح‌های برتر معرفی می‌کند. مراجع دیگری نیز به همین نتایج اشاره دارند. به عنوان مثال [۲۵] طرح عصایی و طرح T را به ترتیب با نام‌های کاوامورا و نوشیوکا معرفی می کند و خصوصیات فوق را برایشان برمی‌شمرد. مرجع [۲۶] نیز به نوعی طرح عصایی را به عنوان طرح ایده آل معرفی می کند و آن را گلکسی[5] می‌خواند. لذا در این مقاله نیز به بررسی و بهینه سازی این طرح پرداخته می‌شود تا اهداف و معیارهای مد نظر برآورده گردد.

۲-۱- ربات کابلی عصایی

دراین بخش، ربات کابلی با طرح عصایی به عنوان گونه‌ای متداول از ربات‌های فضایی معرفی می‌گردد. شکل خاص مجری نهایی این طرح که به صورت عصا می‌باشد، این طرح را به این نام مشهور ساخته است. طرح ربات کابلی عصایی که در شکل۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱: شماتیک ربات کابلی فضایی با طرح عصایی.

[1] Visual Inspection Graphs
[2] Non-dominated Sorting Genetic Algorithm
[3] Adaptive Weighted Particle Swarm Optimization
[4] Rod Design
[5] Galaxy Design

این طرح در واقع توسعه یافته طرح ربات کابلی صفحه‌ای" V وارونه "V محسوب می‌شود [۲۷] و انتظار می‌رود ویژگی‌هایی شبیه به این طرح را داشته باشد.

مجری نهایی طویل و قرار گیری عملگرها در گروه‌های دو تایی از جمله ویژگی‌های مشترک این طرح‌ها محسوب می‌شوند. کنار هم قرار گرفتن عملگرها و شکل خاص مجری نهایی، احتمال برخورد کابل‌ها را در این طرح از بین برده است. اما ابعاد بزرگ مجری نهایی این طرح به علت جرم و وزن زیاد، از چابکی و سرعت عمل ربات می‌کاهد و از طرف دیگر، کاربر را مجبور می‌سازد تا فضایی بسیار بزرگ‌تر از فضای کاری کنترل پذیر ربات را خالی از هر گونه شیئی قرار دهد تا از برخورد مجری نهایی ربات به اجسام پیرامون جلوگیری کند.

۳- معیارهای طراحی

در این بخش، معیارهای طراحی ربات‌های کابلی معرفی می‌شوند. این معیارها که بیشتر، حجم فضای کاری و دقت و مهارت ربات را مورد بررسی قرار می‌دهند عبارتند از فضای کاری کنترل پذیر، معیارهای حساسیت سینماتیکی انتقالی و دورانی و عدد وضعیت عمومی ربات. شاخص‌های مطرح شده در این بخش، به منظور بهینه سازی طرح‌های ربات کابلی، در بخش آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳-۱- وسعت فضای کاری

همانطور که در مقدمه ذکر شد، یکی از مهم‌ترین شرایط استفاده از رباتهای کابلی، برقراری شرط کششی بودن کابل‌ها است. به عبارت دیگر، بدست آوردن فضایی که هنگام قرار گیری مجری نهایی در آن، امکان ایجاد تنش کششی در کابل‌ها وجود دارد، نقش کلیدی در تحلیل کارایی ربات‌های کابلی ایفا می‌کند. نحوه بدست آوردن این فضای کاری مبحثی است که در این بخش به آن پرداخته می‌شود. برای آنکه فضای کاری ربات طوری تعیین شود که همیشه همه کابل‌ها دارای تنش مثبت باشند، باید شرط ذیل برقرار باشد:

$$\{\, \boldsymbol{x} \,|\boldsymbol{A}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{f} \geq 0\} \qquad (۱)$$

در رابطه (۱) $\boldsymbol{x}$ نشان دهنده متغیرهای فضای کاری دکارتی می‌باشد. در واقع $\boldsymbol{x}$ معرف تمامی موقعیت‌هایی از مجری نهایی ربات است که در آن وضعیت، کابل‌ها تنش کششی داشته باشند. مجموعه موقعیت‌های مجری نهایی، فضای کاری ربات را تشکیل می‌دهند که از دیدگاه‌های مختلف، قابل بررسی هستند.

همچنین در رابطه (۱)، $\boldsymbol{f}$ بردار نیروهای اعمال شده به کابل‌ها از طرف کابل جمع کن‌ها و $\boldsymbol{w}$ بردار نیروهای اعمال شده به مجری نهایی می‌باشند که همگی تابعی از متغیر فضای کاری x می‌باشند. در رابطه فوق ماتریس $\boldsymbol{A}$ ماتریس ساختار[۱] نامیده می‌شود که برابر با ترانهاده ماتریس ژاکوبی ربات، ماتریس نگاشت سرعت فضای کاری به فضای مفصلی، می‌باشد[۲۳]. یکی از عمومی‌ترین تعاریف فضای کاری ربات‌های کابلی، فضای کاری کنترل پذیر می‌باشد که با نام‌های فضای کاری بستار چرخش[۲] و فضای کاری بستار نیرو[۳] نیز شناخته شده است. در این فضای کاری، مجری نهایی ربات می‌تواند در هر جهتی و در هر اندازه‌ای، نیرو وارد کند، در حالی که کابل‌ها همچنان کشیده باقی می‌مانند. بنابراین در تحلیل این فضای کاری، هیچ محدودیتی برای تنش کابل‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. نکته حائز اهمیت در این بررسی این نوع فضای کاری، الزام وجود افزونگی در تعداد کابل‌ها است، به طوری که تعداد کابل‌ها از درجات آزادی ربات بیشتر باشد. از آنجایی که این نوع نگرش تنها به هندسه ربات وابسته می‌باشد، می‌تواند معیار خوبی را جهت طراحی بهینه ربات ارائه دهد. لذا این مقاله به طور خاص بر روی این نوع فضای کاری متمرکز شده است و در ادامه جزئیات و نحوه‌ی آن محاسبه ارائه می‌گردد.

۳-۱-۱- فضای کاری کنترل‌پذیر

فضای کاری کنترل پذیر مجموعه‌ای از موقعیت‌های ربات است که به ازای هر چرخش $\boldsymbol{w}$ در مجری نهایی، حداقل یک بردار نیروی کششی $\boldsymbol{f} \leq 0$ وجود داشته باشد به طوریکه $\boldsymbol{A}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{w}$ گردد.
یکی از مهمترین قضایای مطرح در تحلیل این نوع فضای کاری، بررسی فضای پوچی[۴] ماتریس ساختار است. بر مبنای خصوصیت فضای پوچی، موقعیت ربات در فضای کاری کنترل پذیر قرار می‌گیرد، اگر و تنها اگر ماتریس ساختار ربات مرتبه کامل بوده و فضای پوچی آن شامل برداری با عناصر مثبت (یا هم علامت و مخالف صفر) باشد. زیرا هنگامی که نیروهای اعمالی به مجری نهایی مشخص شد، می‌توان با استفاده از معادله $\boldsymbol{A}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{w}$ نیروهای کابلی را مثبت بدست آورد.
با توجه به غیر مربع بودن ماتریس ساختار $\boldsymbol{A}$ باید از شبه معکوس $\boldsymbol{A}$ به منظور بدست آوردن نیروهای کابلی استفاده کرد. شبه معکوس ماتریس $\boldsymbol{A}$ به طریق زیر بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{A}^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T \qquad (۲)$$

در این صورت کمترین مقدار نیروهای کابلی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{f}_{min} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{w} \qquad (۳)$$

اما رابطه بالا نمی‌تواند همواره مثبت بودن کابلها را ارضا نماید، از این رو برای حل این مسأله از روش تعمیم یافته حداقل مربّعات استفاده می‌گردد:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{min} + c\boldsymbol{f}^* \qquad (۴)$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{f}$ در فضای پوچی ماتریس $\boldsymbol{A}$ قرار دارد. در این صورت:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}^* = 0 \qquad (۵)$$

[۱] Structure Matrix
[۲] Wrench Closure Workspace (WCW)
[۳] Force Closure Workspace (FCW)
[۴] Null Space

با توجه به رابطه بالا، هرگاه $\boldsymbol{f}$ اکیداً مثبت باشد، می‌توان با انتخاب یک ضریب به اندازه کافی مثبت c، عناصر منفی $\boldsymbol{f}_{min}$ را جبران نمود و به پاسخ $0 \leq \boldsymbol{f}$ دست یافت. در ربات‌های کابلی صفحه‌ای با ۴ کابل و ۳ درجه آزادی، به راحتی می‌توان با پیدا کردن بردار فضای پوچی و تعیین علامت عناصر آن، کنترل پذیری ربات را در موقعیت داده شده، مشخص کرد [۲۶]، اما در ربات‌های با درجات آزادی افزونه بیشتر، با وجود چند بردار پوچی، کار به مراتب دشوارتر می‌شود. به عنوان مثال ربات کابلی با ۵ کابل و ۳ درجه آزادی را فرض کنید. این ربات کابلی دارای ۲ درجه افزونگی می‌باشد و در موقعیت‌های غیر تکین، ماتریس ساختار ربات، دارای ۲ بردار پوچی مستقل است. حال برای آنکه نیروهای وارد بر هر ۵ کابل، کششی باشند و ربات در فضای کنترل پذیر قرار گیرد، باید پاسخ بدست آمده از ترکیب خطی دو بردار فضای پوچی، برداری کاملاً مثبت باشد، تا به ازای مقادیر مناسب c در معادله (۴)، تمامی عناصر بردار $\boldsymbol{f}$ را بزرگتر از صفر گرداند. یکی از ساده‌ترین روش های حل این مسأله، استفاده از دستور fmincon نرم افزار متلب[۱] می‌باشد. اما به علت آنکه این دستور صرفاً یک الگوریتم بهینه سازی با بهره گیری از روشهای تکرار است، بسیار وقت گیر می‌باشد. این موضوع در مسأله بهینه سازی و طراحی ربات بسیار با اهمیت است، زیرا در الگوریتم‌های بهینه سازی هوشمند، نیاز است که مکرراً کنترل پذیری ربات‌های گوناگون در موقعیت‌های مختلف فضای کاری بررسی گردد. لذا در مسأله طراحی ربات کابلی، استفاده از روش‌هایی بر پایه تعابیر فیزیکی مسأله کنترل پذیری که حل کوتاه‌تری دارند، پیشنهاد می‌شود. در [۲۶] روش دیگری برای تعیین کنترل پذیری ربات تحت عنوان نیروی بنیادی[۲] بیان گردیده است که مبتنی بر تعبیر فیزیکی مسأله کنترل پذیری بوده و در مسأله بهینه سازی چند هدفه ربات‌های کابلی به خصوص در ربات‌های کابلی فضایی با ۸ کابل، بسیار کار آمد می‌باشد. لذا در ادامه به صورت مختصر، مروری بر چگونگی انجام این روش ارائه می‌شود. آنچه به عنوان ایده در [۲۶] مطرح می‌شود، معرفی مجموعه نیروی بنیادی و استفاده از آن به جای فضای پوچی، در تحلیل فضای کاری کنترل پذیر ربات است. در واقع، مجموعه نیروهای بنیادی تفسیر فیزیکی از کمترین حل شدنی مثبت معادله (۴) ارائه می‌دهد، به طوری که هر گاه این مجموعه نیرو به مجری نهایی اعمال شود، آن موقعیت در فضای کنترل پذیر قرار می‌گیرد. بنابر تعریف بیان شده در [۲۶] مجموعه نیروی بنیادی به مجموعه‌ای شامل m بردار اطلاق می‌شود که هر بردار آن متناسب با یک بردار ستونی از ترانهاده ماتریس ژاکوبی، $\boldsymbol{K}^T$، می‌باشد.

$$\boldsymbol{W_F} = \{w_i \mid w_i = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{S}}_i \\ \boldsymbol{E}_i \times \widehat{\boldsymbol{S}}_i \end{bmatrix}\} = \boldsymbol{K^T} = -\boldsymbol{A}, \quad i = 1, \dots, m \qquad (۶)$$

که در معادله فوق m بیانگر تعداد کابل‌ها می‌باشد. با توجه به معادله فوق، مجموعه نیروهای بنیادی به حالت و موقعیت ربات وابسته هستند. مرجع [۲۶] اثبات می‌کند که در صورت اعمال هر یک از بردارهای مجموعه نیروی بنیادی، کمترین نیروی کششی کابل متناظر با آن بردار، در موقعیت مورد نظر از ربات، صفر می‌گردد. بنابراین، نیروی بنیادی بدترین نیرویی است که می‌تواند به مجری نهایی ربات وارد شود، زیرا در این حالت یک درجه افزونگی ربات از بین می‌رود. این مرجع در ادامه شرط قرار گیری ربات در فضای کاری کنترل پذیر را، شبه معین مثبت بودن و کامل بودن مرتبه ماتریس $\boldsymbol{A}$ در رابطه زیر بیان می‌کند.

$$\boldsymbol{A}_{n\times(n+r)}\boldsymbol{T}^*_{(n+r)\times(n+r)} = \boldsymbol{W}_{F_{n\times(n+r)}} \qquad (۷)$$

که در آن $\boldsymbol{T}^*$ ماتریسی است که از کنار هم قرار گرفتن بردارهای نیروهای کابلی به ازای مجموعه نیرو بنیادی $\boldsymbol{W}_F$ حاصل می‌شود. در رابطه فوق r بیانگر درجه افزونگی و n نشان دهنده درجه آزادی ربات است. در [۲۶] این روش برای دو نمونه ربات کابلی با یک درجه آزادی و دو درجه آزادی به طور کامل بیان شده است که در اینجا از همان روش استفاده شده است. در ادامه روش تحلیلی ارائه می‌گردد که بر مبنای جبر خطی، فضای کنترل پذیر را ابتدا در ربات‌های با یک درجه افزونگی و سپس در حالت کلی، جست و جو می‌کند. در این حالت، معادله (۷) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\boldsymbol{A}_{n\times(n+1)}\boldsymbol{T}^*_{(n+1)\times(n+1)} = \boldsymbol{W}_{F_{n\times(n+1)}} \qquad (۸)$$

که برای هر نیروی بنیادی، معادله فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\boldsymbol{A}_{n\times(n+1)}\boldsymbol{T}^*_{i_{(n+1)\times 1}} = \boldsymbol{W}_{F_{i_{n\times 1}}} \qquad (۹)$$

با توجه به قضیه مطرح شده در[۲۶]، i امین نیروی کابل نرمالیزه شده به ازای i امین نیروی بنیادی، صفر خواهد شد.

$$[\boldsymbol{A}_1 \dots \boldsymbol{A}_{i-1}\ \boldsymbol{A}_{i+1} \dots \boldsymbol{A}_{n+1}][\tau_{i1} \dots \tau_{i(i-1)}\ 0\ \tau_{i1} \dots \tau_{i(i-1)} = \boldsymbol{W}_{F_i} \qquad (۱۰)$$

در رابطه فوق τ_{ij} بیانگر عناصر ماتریس T می‌باشد. به علت صفر شدن τ_{ii} در رابطه فوق، می‌توان $\boldsymbol{A}_i$ را نیز حذف کرد و آن را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\boldsymbol{A}_{n\times n}[\tau_{i1} \dots \tau_{i(i-1)}\tau_{i(i+1)} \dots \tau_{i(i-1)}]^T = \boldsymbol{W}_{F_i} \qquad (۱۱)$$

معادله فوق یک دستگاه n معادله n مجهول است که به روش‌های مختلف، از جمله روش کرامر قابل حل است.

$$\tau_{i1} = \frac{\Delta_{\boldsymbol{ij}}}{\Delta_{\boldsymbol{i}}} = \frac{det[\boldsymbol{A}_1 \dots \boldsymbol{A}_{i-1}\ w_i\ \ \boldsymbol{A}_{i+1} \dots \boldsymbol{A}_{n+1}]}{det[\boldsymbol{A}_1 \dots \boldsymbol{A}_{i-1}\ \boldsymbol{A}_{i+1} \dots \boldsymbol{A}_{n+1}]} > 0 \qquad (۱۲)$$

مرجع [۲۶] برای تعیین فضای کنترل پذیر مکانیزمی با n درجه آزادی و ۲ درجه افزونگی با استفاده از این روش، آن را به $n+2$ زیرربات با یک درجه افزونگی تقسیم کرده است، به طوری که در i امین زیرربات، کابل i ام وجود ندارد. حال اگر $\boldsymbol{W}_{F_{i+1}}$ از مجموعه نیروهای بنیادی به مجری نهایی اعمال شود، خواهیم داشت:

$$[\boldsymbol{A}_1 \dots \boldsymbol{A}_{i-1}\ \boldsymbol{A}_{i+2} \dots \boldsymbol{A}_{n+2}] \\ [\tau_{i1} \dots \tau_{i(i-1)}\ 0\ \tau_{i(i+2)} \dots \tau_{i(i+2)}]^T = \boldsymbol{W}_{F_{i+1}} \qquad (۱۳)$$

دستگاه معادله فوق یک دستگاه n معادله n مجهول است و مشابه قسمت قبل، مرزهای فضای کاری کنترل پذیر برای هر زیرربات قابل تعیین است.

---

[۱] Matlab

[۲] Fundamental Wrench

هدف از بیان فضای کنترل پذیر در این مقاله تنها ارائه معیاری جهت طراحی بهینه ربات کابلی است. بنابراین محاسبه حجم و مساحت فضای کنترل پذیر ربات به عنوان معیارهای طراحی دارای اهمیّت هستند. به همین جهت، برای بررسی کنترل پذیری ربات‌های فضایی، پس از شبکه بندی فضای کاری و تشکیل زیرربات‌ها و زیرربات‌های ترکیبی، تعلق هر نقطه از شبکه به فضای کنترل پذیر مجموعه زیرربات‌ها بررسی می‌شود و در صورتی که حداقل یکی از زیرربات‌ها یا زیرربات‌های ترکیبی در موقعیت داده شده کنترل پذیر باشند، ربات اصلی در آن موقعیت کنترل پذیر خواهد بود.

۳-۲- معیارهای مهارت و دقت ربات

به طور معمول در طراحی‌ها رباتها برای کاهش موقعیت‌هایی که ربات در حالت تکینگی قرار می‌گیرد، از شاخص‌های سینماتیکی استفاده می‌شود. به این معنی که طراح سعی می‌کند با بهینه‌سازی این شاخص‌ها در فضای کاری مکانیزم، مقادیر هندسی و پارامترهای ربات را به گونه‌ای طراحی کند تا حجم و تعداد نواحی تکین در فضای کاری ربات در کمترین حالت ممکن باشد.

۳-۲-۱- عدد وضعیت

با استفاده از ژاکوبی مکانیزم می‌توان بین خطای مفصلی و خطای فضای کاری مکانیزم، رابطه‌ای خطی بدست آورد. به بیان دیگر، خطای مفاصل فعال ربات، توسط بازوانش از طریق نگاشت غیرخطی ژاکوبی به مجری نهایی منتقل می‌شود. بنابراین رباتی بهتر خواهد بود که خطای کمتری را از مفاصل به مجری نهایی منتقل کند. در این حالت، خطای مفاصل محدود و به صورت ذیل فرض می‌شود:

$$||\Delta\boldsymbol{\rho}||_2 \qquad (۱۴)$$

در رابطه فوق، بردار $\boldsymbol{\rho}$ بیان کننده متغیرهای مفصلی است. همچنین، محدوده خطای مفاصل طوری انتخاب می‌شود که نشان دهنده‌ی کوچکترین واحد حرکت قابل قبول مفاصل باشد. از آنجایی که ارتباط متغیرهای مفصلی و فضای کاری از طریق ماتریس ژاکوبی، $\boldsymbol{K}$، صورت می‌گیرد:

$$\Delta\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{x} \qquad (۱۵)$$

خواهیم داشت:

$$||\Delta\boldsymbol{\rho}||_\infty = \Delta\boldsymbol{\rho}\Delta\boldsymbol{\rho} = \Delta\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{x} \qquad (۱۶)$$

این رابطه، نحوه نگاشت شبه کره خطا در مفاصل به بیضوی خطا در فضای کاری را در حالت کلی بیان می‌کند. شکل و حجم این بیضوی در واقع مشخصه‌ای از مهارت مکانیزم است.

معیار عدد وضعیت به عنوان یکی از رایج‌ترین شاخص‌های سنجش مهارت ربات با توجه به بیضوی مهارت، به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۸]:

$$\mathrm{CN} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \qquad (۱۷)$$

که برابر است با نسبت قطر بزرگ بیضوی نگاشت به قطر کوچک آن. این عدد که دارای مقداری بین یک تا بینهایت می‌باشد، معرف نسبت بزرگ‌ترین به کوچکترین مقدار ویژه ماتریس ژاکوبی نیز می‌باشد. از نقطه نظر فیزیکی هرچه این مقدار به سمت یک میل کند، مطلوب‌تر است. زیرا در این حالت، مهارت ربات در همه جهات یکسان می‌باشد و بیضوی مهارت به دایره تبدیل می‌شود. اما هر چه این مقدار به سمت بینهایت میل کند، ربات تنها در یک راستا مهارت خواهد داشت و مهارت انجام حرکت در سایر درجات آزادی خود را از دست می‌دهد و به عبارت دیگر ربات به سمت تکینگی نزدیک‌تر می‌شود [۲۹]. از سوی دیگر هر چه قدر بیضی بزرگتر باشد، خطای منتقل شده به مجری نهایی، بیشتر می‌شود. اما معیار عدد وضعیت هیچ بیانی از میزان بزرگی خطای انتقالی ندارد، زیرا که ممکن است شکل نگاشته شده در فضای کاری، دایره‌ای با شعاع بزرگ باشد که این موضوع نشان دهنده خطای زیاد ربات است، در حالی که عدد وضعیت، مهارت ربات را ایده آل معرفی می‌کند. از طرف دیگر ممکن است شکل نگاشت داده شده، بیضی بسیار کوچکی باشد که یک قطرش بسیار بزرگ‌تر از قطر دیگر باشد که این موقعیت عدد وضعیت بسیار بزرگی به وجود می‌آورد، در حالی که خطای انتقالی بسیار کم می‌باشد. راه حل‌های زیادی برای حل مشکل مفهومی عدد وضعیت مطرح شده است. این گونه روش‌ها، زیر بنای معیارهای جدیدی از مهارت ربات را تشکیل می‌دهند که با نام حساسیت سینماتیکی معروف شده‌اند [۳۰]. به کارگیری این گونه از شاخص‌های سینماتیکی که بیانی از دقت ربات را ارائه می‌دهند، در کنار معیار عدد وضعیت که از مهارت ربات در درجات آزادی مختلف سخن می‌گوید، می‌تواند به خوبی بیضوی مهارت ربات را توصیف کند.

عدد وضعیت یک معیار محلی است و در هر موقعیت ربات تعریف می‌شود، یعنی با توجه به مختصات دکارتی ربات و میزان چرخش آن حول محورهای اویلر تعیین می‌گردد. برای ارزیابی عملکرد کلی ربات، یک معیار عمومی مهارت مطرح می‌شود که بیان گر مهارت کلی ربات است و به شرح زیر است [۱۹]:

$$\mathrm{GCI} = \frac{\int_w \left(\frac{1}{\mathrm{CN}(w)}\right)\, dw}{\int_w dw} \qquad (۱۸)$$

رابطه بالا یک میانگینی از عدد وضعیت‌های همه فضای کاری ربات را ارائه می‌دهد و به عنوان عدد وضعیت عمومی ربات[۱] شناخته می‌شود.

۳-۲-۲- حساسیت سینماتیکی

برای برطرف کردن مشکلات شاخص‌های سینماتیکی، دو شاخص متمایز با نام حساسیت سینماتیکی دورانی و حساسیت سینماتیکی انتقالی تعریف گردیده است. این دو شاخص، کران بالای خطای دورانی و انتقالی را با در نظر گرفتن خطای با نرم واحد در فضای مفصلی بدست می‌دهند [۳۱].

$$\sigma_{r_{c,f}} = \max_{||\rho||_c=1} ||\emptyset||_f,\ \sigma_{p_{c,f}} = \max_{||\rho||_c=1} ||P||_f \qquad (۱۹)$$

از آنجایی که این دو شاخص خطای درجات آزادی انتقالی و دورانی را به طور جدا گانه در نظر می‌گیرند، دیگر مشکلات مربوط به یکسان نبودن

[۱] Global Condition Number Index (GCI)

واحدها پیش نمی‌آید [۳۲]. در روابط بالا c و f به ترتیب نرم قید و نرم تابع هدف مسئله حساسیت سینماتیکی را نمایش می‌دهند. مزیت شاخص حساسیت سینماتیکی بر سایر معیارهای سنجش دقت ربات، تفکیک درجات آزادی دورانی و انتقالی از هم و ارائه مفهوم فیزیکی دقت ربات است. اما این شاخص تفسیری از میزان نزدیکی به تکینگی ارائه نمی‌دهد. چنان که ممکن است در موقعیتی خاص، حساسیت سینماتیکی ربات بسیار مطلوب باشد، اما ربات به مرز تکینگی نزدیک باشد. بنابراین استفاده از معیارهایی نظر عدد وضعیت که مهارت ربات را مورد بررسی قرار می‌دهند، در کنار استفاده از شاخص حساسیت سینماتیکی توصیه می‌شود.

با توجه به اینکه هم بر روی فضای مفصلی و هم در فضای کاری قید نرم وجود دارد، بنابراین چهار نوع حساسیت سینماتیکی خواهیم داشت. مرجع [۲۹] حساسیت سینماتیکی با نرم تابع هدف دو و نرم قید بینهایت را به عنوان معقول‌ترین حساسیت سینماتیکی مطرح می‌کند، چراکه به علت نرم بینهایت قیود حرکت مفاصل به یکدیگر وابسته نیست و از طرف دیگر به علت نرم دو تابع هدف با تغییر مرجع مختصات حساسیت متفاوت به وجود نمی‌آید.

حساسیت سینماتیکی نیز همانند معیار عدد وضعیت یک معیار محلی است و با توجه به موقعیت مجری نهایی ربات تغییر می‌کند. لذا برای آنکه یک معیار از وضعیت کلی ربات[1] داشته باشیم می‌توان همانند فرآیندی که در مورد عدد وضیت به کار گرفته شد، از میانگین حساسیت سینماتیکی ربات در موقعیت‌های مختلف ربات استفاده کرد. اما این معیار عمومی نمی‌تواند به خوبی معرف دقت کلی ربات باشد. به عنوان مثال، در صورتی که حساسیت سینماتیکی ربات در یک موقعیت بسیار خوب و در موقعیت دیگر بسیار نامطلوب باشد، میانگین گیری، متوسط دقت ربات را نشان می‌دهد. این موضوع مثل آن است که دقت ربات در همه موقعیت‌ها، یکسان و برابر با مقدار متوسط باشد. اما این مقدار متوسط نمی‌تواند تضمینی از دقت ربات را ارائه دهد و به عبارت دیگر نمی‌تواند کرانی برای دقت ربات مشخص کند. روشی که در اینجا به عنوان حساسیت سینماتیکی بیشینه مطرح می‌شود، محاسبه حساسیت سینماتیکی بیشینه (انتقالی یا دورانی) در فضای کاری کنترل‌پذیر ربات یا هر فضای کاری مدنظر می‌باشد. محاسبه این پارامتر زمانی اهمیت پیدا می‌کند که سازنده می‌خواهد مقداری را به عنوان حداکثر خطای ربات به کاربر بیان کند. محاسبه این معیار طراحی که یک مسأله بهینه‌سازی است، به طرق مختلف از جمله روش‌های بهینه‌سازی تکاملی، امکان پذیر می‌باشد.

۴- طراحی بهینه ربات کابلی فضایی

در این بخش، ابتدا رویه بهینه سازی ربات کابلی فضایی به صورت کلی معرفی شده و سپس این روند ، برای طرح خاص عصایی معرفی شده در [۲۴] پیاده سازی می‌شود. ربات مذکور دارای ۳ درجه انتقالی و ۳ درجه دورانی است که مجموعاً ۶ درجه آزادی را برای ربات فراهم می‌آورند .

۴-۱- تحلیل ربات‌های کابلی فضایی

درصورتی که برای بررسی هر یک از معیارهای طراحی، همانند ربات صفحه‌ای [۲۳] از شبکه بندی و گسسته سازی فضای کاری استفاده کنیم، حجم محاسبات بسیار زیاد می‌شود. کاهش حجم محاسبات مستلزم افزایش گام‌های شبکه بندی و کاهش دقت طراحی است که عملاً ما را از رسیدن به طرح بهینه دور می‌کند. لذا باید تدبیری اندیشیده شود تا علاوه بر کاهش منطقی حجم محاسبات، دقت لازم حفظ شود. رویکردی که در این مقاله استفاده شده، عبارت است از بررسی فضای کاری کاربردی. این فضای کاری کاربردی، همان فضای ۳ بعدی خواهد بود که به عنوان فضای کاری ربات به خریدار و یا کاربر معرفی می‌گردد. این فضای ۳ بعدی باید یکی از اشکال منتظم و شناخته شده هندسی باشد تا هم معرفی فضای کاری ربات را ساده‌تر سازد و هم کار با ربات را برای کاربر آسان گرداند. این امر سهولت طراحی مسیر و کنترل ربات را نیز به دنبال خواهد داشت. شکل هندسی پیشنهاد شده در این مقاله، متقارن‌ترین شکل هندسی، یعنی کُره می‌باشد. مزیت کره بر سایر اشکال هندسی متداول، تقارن آن در تمام جهات مختصاتی است که فضای کاری همگنی را بدست می‌دهد. بررسی این گونه فضای کاری ربات، علاوه بر کاهش شدید حجم محاسبات و از بین بردن محاسبات غیر ضروری، امکان معرفی معیاری کاربردی و قابل استفاده در طرح‌های صنعتی را نیز فراهم می‌سازد. ابعاد بزرگ‌ترین کره محاطی درون فضای کاری کنترل‌پذیر ربات می‌تواند به عنوان معیاری برای مقایسه طرح‌های مختلف ربات کابلی به کار گرفته شود. توجه شود که در این مقاله به جای استفاده از انتگرال و محاسبه حجم فضای کاری کنترل‌پذیر (همانند آنچه در روش ارائه شده در مرجع [۲۳] استفاده شد) از شعاع فضای کاری کاربردی به عنوان معیار بهینه‌سازی استفاده می‌شود. همچنین بدترین حساسیت سینماتیکی انتقالی و دورانی درون این کره می‌تواند دقت ربات را درون فضای کاری کاربردی‌اش، مشخص سازد. اما محاسبه معیارهای فوق نیز در ابتدای امر، کار ساده‌ای نخواهد بود و برای رسیدن به نتیجه در کوتاه‌ترین زمان ممکن، به لم‌های خاصی نیاز است. در مقابلِ روش‌های گسسته‌سازی و شبکه‌بندی، راه‌حل‌های با پایه تصادفی، علاوه بر داشتن دقت مناسب، از سرعت محاسباتی خوبی نیز برخوردار هستند. برای محاسبه بزرگ‌ترین کره محاطی در فضای کنترل پذیر، شبه کد جدول۱ پیشنهاد می‌گردد. اساس این الگوریتم، جست و جوی تصادفی نقاط کنترل پذیر و تعیین شعاع کره فضای کاری کاربردی با توجه به موقعیت‌های کنترل ناپذیر است.

در شبه کد جدول۱ پارامترهای α و β و γ زوایای اویلر حول محورهای مختصات دکارتی می‌باشند که هر کدام دارای کران بالا و پایین تعریف شده‌ای هستند. همچنین پارامترهای θ، φ و ρ دستگاه مختصات کروی را تشکیل می‌دهند. به وسیله پارامترهای ذکر شده، موقعیت مکانی و جهت‌گیری مجری نهایی تعیین می‌گردد. همچنین پارامتر R در هر تکرار به‌اندازه مقدار

[1] Global Performance Index

گام درنظر گرفته شده برای شعاع کره، ε، افزایش می‌یابد. به علت آنکه سطح رویه کره با افزایش شعاع کره، افزایش می‌یابد، تعداد نقاط بررسی شده در هر تکرار، N، افزایش می‌یابد. محاسبه معیار بدترین حساسیت سینماتیکی ربات نیز نیازمند تدبیر خاصی است. چرا که حجم زیاد محاسبات گسسته سازی فضای کاری در ۶ بعد، محاسبه دقت ربات را با مشکل مواجه می کند. به خصوص که حجم محاسبه حساسیت سینماتیکی در یک موقعیت خاص از ربات فضایی نیز چندین برابر ربات صفحه‌ای است. این امر، مسأله بهینه سازی ربات فضایی را به مراتب با مشکلات بیشتری مواجه می کند. در این مقاله، برای محاسبه بدترین حساسیت سینماتیکی از الگوریتم‌های بهینه سازی پر به جای فرآیند گسسته سازی فضای کاری استفاده شده است. سرعتی مانند استراتژی تکاملی این الگوریتم‌های علاوه بر حجم محاسباتی کم، دارای دقت مناسبی نیز هستند. شبه کد جدول۲ الگوریتم به کار رفته برای محاسبه بدترین حساسیت سینماتیکی درون کره فضای کاری را نشان می‌دهد. در این شبه کد، پس از محاسبه شعاع بزرگ‌ترین کره محاطی در فضای کاری کنترل پذیر ربات، کران بالا و پایین در نظر گرفته شده برای زوایای اویلر α، β و γ به همراه کران بدست آمده برای شعاع کره محاطی و کران پارامترهای مختصات فضای کاری کروی، θ و φ به عنوان شرایط مرزی پاسخ‌ها به الگوریتم بهینه سازی خورانده می‌شود تا بیشینه تابع حساسیت سینماتیکی بدست آید.

جدول ۱: شبه کد پیشنهادی برای محاسبه شعاع بزرگترین کره محاطی در کنترل‌پذیر ربات کابلی ۶ درجه آزادی.

Function: R= Compute Radius of Sphere(.)
Inputs: $\alpha_{min,max}, \beta_{min,max}, \gamma_{min,max}, R_{min}$

$d_\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$, $d_\gamma = \gamma_{max} - \gamma_{min}$
$c = 1, R = R_{min}$
while c
  for i=1:N
    $\theta = rand \times 2\pi$
    $\varphi = rand \times 2\pi$
    $\alpha = rand \times d_\alpha + \alpha_{min}$
    $\beta = rand \times d_\beta + \beta_{min}$
    $\gamma = rand \times d_\gamma + \gamma_{min}$
    $P = [\rho \times \cos\theta \times \sin\varphi,\ \rho \times \sin\theta \times \ldots$
    $\ldots \sin\varphi,\ \rho \times \cos\varphi]$
    $R = [\alpha, \beta, \gamma]$
    If $[P, R] \notin$ Controllable Workspace
      $c = 0$
      Break
    end
  end
  $R = R + \varepsilon$
  $N = N \times (1+\varepsilon)^2$
end
$R = R - \varepsilon$

جدول ۲: شبه کد پیشنهادی برای محاسبه حساسیت سینماتیکی بیشینه در فضای کاری کاربردی.

Function: W=Compute Worst Kinematic Sensitivity(.)
Inputs: $\alpha_{min,max}, \beta_{min,max}, \gamma_{min,max}, R_{min}$

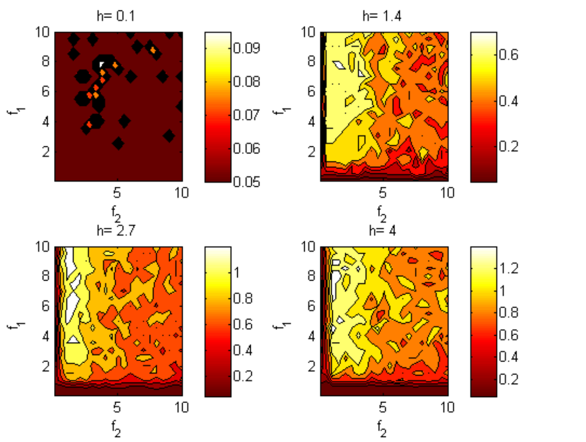
R=Compute Radius of Sphere (Inputs)
if $R > \varepsilon$
  $\theta_{min} = 0,\ \theta_{max} = 2\pi$
  $\varphi_{min} = 0,\ \varphi_{max} = \pi$
  $R_{max} = c$
  $x_{min} = [R_{min}, \theta_{min}, \theta_{min}, \alpha_{min}, \beta_{min}, \gamma_{min}]$
  $x_{max} = [R_{max}, \theta_{max}, \theta_{max}, \alpha_{max}, \beta_{max}, \gamma_{max}]$
  W=Fast Optimization Algorithm (Kinematic … Sensitivity(.),x_{min}, x_{max})
end

۲-۴ تحلیل ربات کابلی عصایی

طرح عصایی از جمله طرح‌هایی است که با چرخش‌های محدود، پدیده برخورد کابل با کابل در آن دیده نمی‌شود. مرجع [۲۴] از این رو تنها عامل محدود کننده ابعاد فضای کاری این ربات را شاخص کنترل پذیری دانسته است. در این قسمت، برای بهینه سازی این طرح از معیارهای کنترل پذیری، حساسیت سینماتیکی دورانی و انتقالی و عدد وضعیت عمومی ربات استفاده شده است. پارامترهای طراحی نیز طول میله عصا، نسبت طول میله عصا به دسته عصا و نسبتِ ابعادِ مستطیلِ چهارچوب ثابت ربات در نظر گرفته شده است که در شکل ۱ به ترتیب با h، $f_1 = \frac{h}{b}$ و $f_2 = \frac{f_a}{f_b}$ نمایش داده شده‌اند. همچنین در این تحلیل، پارامتر f_a ثابت و برابر با 10^m در نظر گرفته شده است. قیود حاکم بر پارامترهای f_1 و f_2 نیز بدین شرح است: $0.1 \le f_1, f_2 \le 10$. در ادامه به بررسی تغییرات معیارهای طراحی معرفی شده نسبت به پارامترهای طراحی در طرح عصایی می‌پردازیم.

شکل۲ نحوه تغییرات شعاع بزرگ‌ترین کره محاطی در فضای کنترل پذیر ربات عصایی را نسبت به ۳ پارامتر طراحی h، f_1 و f_2 نشان می‌دهد. همان طور در شکل۲ مشخص است، شعاع کره محاطی شدیداً به طول میله عصا وابسته است. همچنین از نظر این معیار طراحی، ربات بهینه زمانی حاصل می‌شود که پارامترهای f_1 و f_2 در محدوده زیر قرار داشته باشند و پارامتر h حداکثر مقدار خود را داشته باشد:

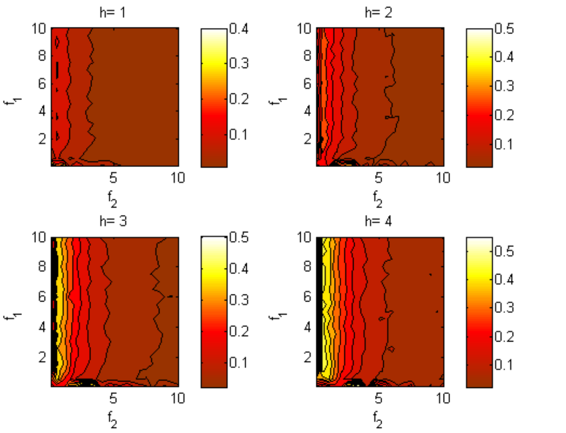
$$1 \le f_1 \le 10, \quad 1 \le f_2 \le 3 \tag{۲۰}$$



شکل ۲: تغییرات شعاع فضای کاری کاربردی (AWS) نسبت به پارامترهای طراحی.

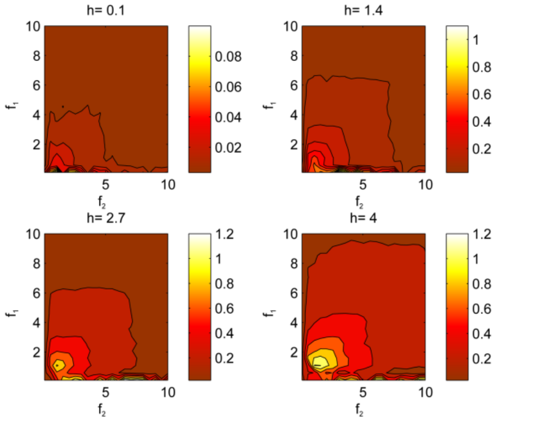
این موضوع نشان می‌دهد که از نظر معیار کنترل پذیری، اهمیّت پارامتر f_2 از پارامتر f_1 بیشتر می‌باشد، چرا که محدوده بهینه پارامتر f_2 شامل بازه کوچکتری است. شکل۲ دارای وضوح ۱:۲۰ می‌باشد، بدین معنی که در هر یک از محورهای f_1 و f_2 تعداد ۲۰ نقطه مورد بررسی واقع شده است. بر اساس معیار معرفی شده و پارامترهای f_1، f_2 و h، بهینه سازی تک هدفه‌ی PSO[1] انجام شده است تا بهترین ربات از نظر حجم فضای کاربردی مشخص شود. همان طور که می‌توان حدس زد، نقطه بهینه دارای بیشترین h ممکن یعنی $h = 4$ است. همچنین پارامتر f_2 در این ربات مقدار کمی دارد و برابر با $f_2 = 1.14$ می‌باشد. این الگوریتم طی ۶۰۰ تکرار، مقدار پارامتر f_1 را نیز برابر با $f_1 = 10$ بدست آورده است. مقدار این همگرایی برابر با ۱/۸ بدست آمده است، به عبارت دیگر، شعاع بزرگ‌ترین کره محاطی در فضای کاری کنترل پذیر برابر با 1.8^m بدست آمده است. این اندازه شعاع، فضای کاری کاربردی با حجم 24.43^{m^3} به بدست می‌دهد.

حساسیت سینماتیکی انتقالی و دورانی نیز مشابه فوق قابل محاسبه می‌باشند. اما به علت آنکه بهینه سازی نسبت به معیار بدترین حساسیت سینماتیکی یک کمینه سازی است، از عکس این معیار استفاده شده تا مشابه معیار کنترل پذیری، ربات بهینه مشخص گردد. توجه به این موضوع ضروری به نظر می‌رسد که در اینجا ما از دو الگوریتم بهینه سازی تو در تو استفاده می‌کنیم. در الگوریتم بهینه سازی درونی مقدار بدترین حساسیت سینماتیکی هر طرح مشخص می‌شود. الگوریتم بهینه سازی بیرونی وظیفه دارد رباتی را پیدا کند که دارای بهترین دقت است و بدترین حساسیت سینماتیکی آن از طرح‌های دیگر کوچک‌تر است. از شکل۳ چنین بر می‌آید که رفتار تابع حساسیت سینماتیکی انتقالی بسیار مشابه معیار کنترل پذیر است، با این تفاوت که حساسیت به مقدار پارامتر h در معیار حساسیت سینماتیکی کمتر می‌باشد.



شکل۳: تغییرات معکوس بدترین حساسیت سینماتیکی انتقالی $(1+\max\sigma_p)^{-1}$ نسبت به پارامترهای طراحی.

الگوریتم PSO در بهینه سازی معکوس حساسیت سینماتیکی انتقالی به برازندگی ۰/۵۵ همگرا شده است. این مقدار برازندگی، مؤید این است که ربات بهینه دارای دقت $\max\sigma_p = \frac{1}{0.55} = 1.81$ در حرکات انتقالی است. پاسخ‌های بدست آمده برای پارامترهای طراحی بهینه نیز با شکل۳ انطباق دارد. در این حالت، پارامتر h دارای بیشترین مقدار خود، یعنی $h = 4$، $f_1 = 7.32$ و پارامتر f_2 مقداری نه چندان زیاد، حدود $f_2 = 1$، دارد. شکل۳ نشان می‌دهد که معیار حساسیت سینماتیکی انتقالی به پارامتر f_1 وابستگی کمتری دارد. نحوه تغییرات معیار حساسیت سینماتیکی دورانی نسبت به پارامترهای طراحی به کلی متفاوت است. شکل۴ به خوبی نشان می‌دهد که عکس معیار بدترین حساسیت سینماتیکی دورانی بر خلاف معیار فضای کاری کاربردی و معیار بدترین حساسیت سینماتیکی انتقالی، پس از پارامتر h بیشتر به پارامتر f_1 وابسته است. در این حالت، بهترین دقت دورانی را رباتی با پارامترهای طراحی $f_1 = 0.1$، $f_2 = 9.38$ و $h = 4$ دارد که تابع برازندگی آن برابر با ۱/۶۴ می‌باشد. در این حالت، دقت دورانی ربات برابر با $\max\sigma_r = \frac{1}{1.64} = 0.61$ می‌باشد. کاهش شدید پارامتر f_1 در هنگامی که پارامتر h مقدار ثابت و برابر با $h = 4$ دارد، از افزایش پارامتر b خبر می‌دهد. به عبارت دیگر، ربات بهینه از نظر حساسیت سینماتیکی دورانی هنگامی حاصل می‌شود که طول عصا و دسته عصا، حداکثر مقدار خود را داشته باشند. زیرا طول عصا چرخش حول محور -x و -y را فراهم می‌کند، در صورتی که دسته عصا چرخش حول محور -z را در دستگاه مختصات دکارتی حاصل می‌کند.



شکل۴: تغییرات معکوس بدترین حساسیت سینماتیکی دورانی $(1+\max\sigma_r)^{-1}$ نسبت به پارامترهای طراحی.

در نهایت، در این بخش تغییرات عدد وضعیت عمومی ربات عصایی با توجه به پارامترهای طراحی معرفی شده در شکل۱ ، مورد بررسی قرار گرفته است. شکل۵ نشان می‌دهد که عدد وضعیت عمومی ربات طرح عصایی، برخلاف ربات کابلی صفحه ای، با کاهش اندازه مجری نهایی بهبود نمی‌یابد[۳۳]. اما این بدین معنی نیست که افزایش بی رویه اندازه مجری نهایی، منجر به افزایش مقدار عدد وضعیت عمومی می‌شود. به عنوان مثال بهترین عدد وضعیتی عمومی که با پارامتر $h = 2.7$ بدست می‌آید، از بهترین عدد وضعیت عمومی که رباتی با پارامتر $h = 4$ می‌تواند داشته باشد بیشتر است. همچنین، با توجه به شکل ۵ می‌توان نتیجه گرفت رباتی که در آن، پارامترهای طراحی f_1 و f_2، قیود زیر را برآورده سازد، از نظر عدد وضعیت عمومی مطلوب‌تر هست:

$$0.1 \le f_1 \le 4, \quad 0.5 \le f_2 \le 3 \qquad (۲۱)$$

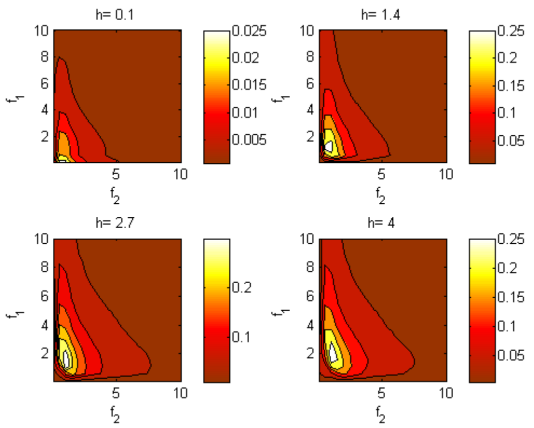
بهینه سازی تک سازی PSO نشان می‌دهد که بهترین ربات از نظر عدد وضعیت عمومی ربات، دارای پارامترهای طراحی $h = 2.7$، $f_1 = 1.68$ و $f_2 = 0.87$ است که با نمودارهای شکل ۵ مطابقت دارد.

[1] Particle Swarm Optimization

۵- بهینه سازی چند هدفه ربات کابلی فضایی

در بسیاری از مسائل کاربردی بهینه سازی، نظیر طراحی بهینه مکانیزم‌ها، چندین قید باید به طور همزمان در نظر گرفته شوند. بنابر این مسأله از کیمنه سازی یک معیار خاص پیچیده‌تر خواهد بود، چرا که ممکن است نقاط بهینه اهداف در تقابل و تضاد با یکدیگر قرار داشته باشند. به کارگیری الگوریتم‌های بهینه سازی تک هدفه در مسائل چند هدفه عموماً با جمع وزن‌دار اهداف امکان پذیر است. با این رویکرد، مسأله بهینه سازی چند هدفه به تک هدفه تبدیل شده و در نهایت یک جواب بهینه معرفی می‌گردد . نحوه انتخاب وزن‌ها از مشکلات به کارگیری این روش است. الگوریتم‌های بهینه سازی چند هدفه با در نظر گرفتن همزمان معیارها، تلاش می‌کنند دسته جواب‌های بهینه غالبی را پیدا کنند که هیچ جواب دیگری از نظر همه اهداف از پاسخ‌های یافت شده بهتر نباشند. پیدا کردن این دسته جواب که به جبهه پرتو معروف است، از مهمترین اهداف الگوریتم‌های بهینه سازی چند هدفه محسوب می‌شود. از این رو الگوریتم‌های تکاملی مانند الگوریتم ژنتیک، بدلیل داشتن ساختار جمعیتی برای بهینه سازی چند هدفه گزینه مناسبی محسوب می‌شوند.

با توجه به ویژگی‌های مثبت ارائه شده در ارتباط با طرح عصایی، در این بخش سعی می‌گردد، جبهه پرتو پارامترهای این طرح با توجه به معیارهای مطرح شده و با استفاده از الگوریتم بهینه سازی چند هدفه NSGA II محاسبه گردد. جزئیات این روش بهینه سازی چند هدفه به تفضیل در [۳۳] بیان شده است. در این مقاله، شرایط و پارامترهای این الگوریتم به شرح زیر انتخاب گردیده‌اند. جمعیت جواب اولیه برابر با ۱۵۰ در نظر گرفته شده و مقادیر پارامترهای جهش و برش به‌ترتیب برابر با ۰/۲ و ۰/۸ است.

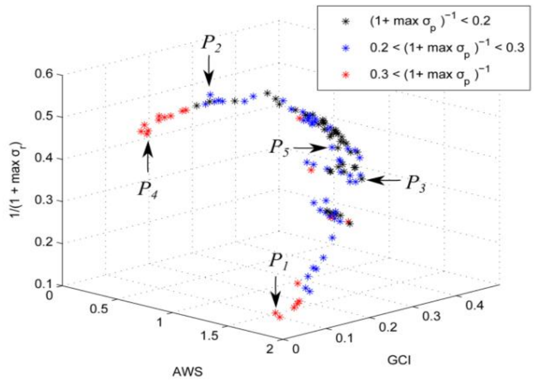


شکل ۵: تغییرات عدد وضعیت عمومی (GCI) ربات نسبت به پارامترهای طراحی.

یک از مهمترین گامهای طرح یک مسئله بهینه سازی چند هدفه، انتخاب صحیح توابع هدف می‌باشد که در این بخش به آن پرداخته می‌شود. باتوجه به شکلهای ۴،۳،۲ و ۵ می توان گفت که هیچ دو هدفی در بیان چهار شاخص طراحی وجود ندارد که روند تغییرات یکسانی نسبت به پارامترهای طراحی داشته باشند، همچنین نقاط بهینه در هیچ یک از موارد فوق یکسان نمی باشد. بنابراین حضور هر چهار هدف طراحی در این بهینه سازی چندهدفه ضروری به نظر می رسد. به عنوان مثال، اهداف کنترل پذیری و حساسیت سینماتیکی دورانی در تضاد با هم قرار دارند و قطعا نقطه بهینه یکسانی ندارند. همچنین، تابع هدف عدد وضعیت عمومی لزوما با افزایش طول مجری نهایی بهبود نمی‌یابد. در حالی که این موضوع برای سایر اهداف طراحی صدق نمی کند. نقاط بهینه توابع هدف حساسیت سینماتیکی انتقالی و حجم فضای کاربردی نیز یکسان نمی‌باشد. بنابر این حضور چهار تابع هدف ضروری به نظر می رسد. از بین ۴ هدف بهینه‌سازی، بدترین حساسیت سینماتیکی انتقالی و دورانی، معیاری‌های کمینه سازی می‌باشند و معیارهای شعاع فضای کاربردی و عدد وضعیت عمومی، شاخص‌هایی هستند که باید تا جای ممکن بیشینه گردند. برای ساده‌تر شدن مسأله می‌توان همگی معیارها را به یک نوع مسأله بهینه‌سازی تبدیل کرد، به عنوان مثال، به جای استفاده از بدترین حساسیت سینماتیکی که یک تابع هدفه کمینه سازی است، از تابع $(1+\max\sigma)^{-1}$ استفاده کرد تا به یک مسأله بیشینه سازی تبدیل شود و هماهنگ با سایر معیارها گردد. مسأله مهم دیگری که باید مورد توجه قرار گیرد، یکسان نبودن بُرد اهداف و دامنه تغییرات آنها است. به عنوان مثال برد تابع هدف درصد فضای کنترل‌پذیری در بازه $[0,1]$ قرار می‌گیرد، در حالی که بدترین حساسیت سینماتیکی می‌تواند هر عددی در بازه $[0,\infty]$ را شامل باشد. این موضوع باعث می‌شود، تلاش الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه برای کاهش اهداف یکسان نباشد، بنابراین لازم است که برد اهداف یکه شود تا اهمیت تمامی توابع در نظر الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه، یکسان گردد. در راستای نایل شدن به این هدف، استفاده از تابع $(1+\max\sigma)^{-1}$ می‌تواند برد نامحدود حساسیت سینماتیکی را در بازه محدود $[0,1]$ قرار دهد.

جبهه پرتو بدست آمده در شکل ۶ نمایش داده شده است. باید توجه داشت که در شکل۶، شعاع فضای کاربردی ASW، عدد وضعیت عمومی GCI، بدترین حساسیت سینماتیکی انتقالی $\max\sigma_p$ و بدترین حساسیت سینماتیکی دورانی $\max\sigma_r$ به عنوان چهار هدف طراحی در نظر گرفته و با هم مقایسه شده‌اند. از آنجایی که نمایش بیش از ۳ بعد در دستگاه مختصات مقدور نیست، در شکل ۶ از تغییر رنگ به عنوان بعد چهارم استفاده شده است. باید توجه داشت، نویسندگان به منظور بررسی همگرایی جبهه پرتو، رفتار جبهه پرتو بدست آمده را در طول نسل ها بررسی کرده اند و با توجه به شباهت جبهه‌های پرتو بدست آمده در طول نسل‌های مختلف، همگرایی پاسخ ها را نتیجه گرفته اند.

مشخصات تعدادی از نقاط جبهه پرتو بدست آمده توسط الگوریتم NSGA II، در جدول۳ آورده شده است. این نقاط که در شکل ۶ نیز علامت‌گذاری شده اند، در ادامه به تفضیل بررسی می شوند. از میان پاسخ‌های بدست آمده از جبهه پرتو تنها پاسخ‌هایی مورد قبول هستند که در محدوده‌ی مطلوب زیر باشند:



شکل ۶: جبهه پرتو بدست آمده از الگوریتم NSGA II.

$$\begin{aligned}(1+\max\sigma_p)^{-1} > 0.25, \mathrm{AWS} > 1\\ (1+\max\sigma_r)^{-1} > 0.4,\ \mathrm{GCI} > 0.25\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

قیود فوق دلخواه بوده و می‌تواند با توجه به شرایط مسئله تغییر کند. همان طور که از جدول ۳ مشخص است، رباتی با پارامترهای طراحی نقطه P_1 از نظر وسعت فضای کاری کاربردی وضعیت بسیار مطلوبی دارد. این مشخصه عالی فضای کاری به بهای از دست دادن سایر معیارها حاصل شده است. به طوری که مابقی معیارها مقدار نامطلوبی پیدا می‌کنند. بنابر توضیحات فوق، نقطه P_1 با وجود داشتن وسعت فضای کاری مناسب نمی‌تواند به عنوان پارامتر طراحی مناسب انتخاب شود. نقطه P_2 در جدول۳ از نظر حساسیت سینماتیکی دورانی وضعیت بسیار مطلوبی دارد. اما این نقطه نیز نمی‌تواند تمامی شرایط معادله (۲۲) را ارضا نماید. زیرا که شرایط معادله (۲۲) در ارتباط با معیار وسعت فضای کاری کاربردی و حساسیت سینماتیکی انتقالی نقض می‌گردند. کنترل‌پذیری و حساسیت سینماتیکی نامطلوب نقطه P_3، این نقطه را با وجود عدد وضعیت عالی، انتخاب نامطلوبی جهت طراحی ربات کابلی معرفی می‌کند. نقطه P_4 نیز با وجود شرایط بسیار عالی از نظر معیار حساسیت سینماتیک انتقالی، از نظر حجم فضای کاری کاربردی وضعیت مناسبی ندارد. بنابراین در یک انتخاب چند جانبه نمی‌تواند به عنوان گزینه مناسب مطرح باشد. اما نقطه P_5 از جبهه پرتو محاسبه شده در شکل ۶ ممکن است از دیدگاه یک معیار خاص شرایط بسیار عالی نداشته باشند، اما با در نظر گرفتن همزمان معیارها، حداقل‌های همه شاخص‌ها را برآورده می‌سازند. به عبارت دیگر هیچ یک از نامساویهای معادله (۲۲) نقض نمی‌گردد. بنابراین پارامترهای طراحی این نقطه می‌توانند به عنوان پارامترهای طراحی ربات کابلی فضایی انتخاب شوند. در نهایت، مشخصات مطلوب بدست آمده در نقطه P_5، محققان گروه ارس دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی را که نمونه صفحه‌ای ربات کابلی را در قالب پروژه نصیر ساخته‌اند، قانع کرد که در راستای ارتقای این پروژه، نمونه عملی ربات کابلی طرح عصایی را با مشخصات بدست آمده در نقطه P_5 پیاده سازی نمایند.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، به طراحی ربات‌های کابلی فضایی با شش درجه آزادی پرداخته شد. در راستای حفظ کشش کابل‌ها و جلوگیری از شل شدن آنها در فضای کاری مکانیزم از تعریف فضای کاری کنترل پذیراستفاده شد و به منظور دوری از محاسبات غیر ضرور، استفاده از فضای کاری کاربردی پیشنهاد گردید. همچنین برای سنجش مهارت ربات و میزان دوری از تکینگی، از معیار عدد وضعیت عمومی به عنوان شاخصی مؤثر در بررسی کارایی ربات کابلی استفاده شد. شاخصی که معیاری از یکسانی مهارت ربات در موقعیت‌ها و جهت گیری‌های مختلف فضای کاری، ارائه می دهد. در نهایت، حساسیت سینماتیکی به عنوان معیاری که معرف دقت ربات است، به تفصیل بررسی گردید و بدترین حساسیت سینماتیکی ربات در فضای کاری کاربردی به عنوان شاخصی قابل ارائه به کاربر و خریدار ربات معرفی شد.

برای برآورده کردن تمام شاخص‌های ذکر شده، سعی شد با به کار گیری روش‌های بهینه سازی چند هدفه هوشمند، طرح‌های بهینه محاسبه شوند. به علت تقابل و تضاد اهداف، بهینه سازی تنها یک هدف در این مسئله به عدم دستیابی به اهداف دیگر منجر می شود. به همین منظور از الگوریتم‌های بهینه سازی هوشمند NSGA II استفاده شد تا جبهه پرتو بهینه مشخص گردد. تحلیل جواب‌های بدست آمده به عنوان یکی از مهمترین بخش‌های فرآیند بهینه سازی چند هدفه انجام شد و نهایتاً جواب‌های قابل قبول با توجه به اهمیت معیارهای طراحی انتخاب شده‌اند.

جدول ۳: مشخصات نقاط تعیین شده در جبهه پرتو بدست آمده از الگوریتم NSGA II.

	پارامترهای طراحی			شاخص های بهینه سازی			
	f_1	f_2	h (m)	AWS	$\frac{1}{1+\max\sigma_p}$	$\frac{1}{1+\max\sigma_r}$	GCI
نقطه P_1	۵/۸۹	۱/۴۵	۳/۷۲	۱/۷	۰/۲۱۸۲	۰/۱۵۸۹	۰/۱۳۸۶
نقطه P_2	۱/۱۱	۱/۰۷	۳/۲	۰/۸۵	۰/۲۳۱۷	۰/۵۱۷۷	۰/۲۹۳۱
نقطه P_3	۱/۶۹	۰/۸۷	۲/۰۶	۰/۹	۰/۲۳۳۲	۰/۳۰۶۷	۰/۴۳۴۹
نقطه P_4	۰/۶۴	۱/۰۲	۲/۹	۰/۰۵	۰/۳۷۹	۰/۴۲۵۹	۰/۱۶۹۰
نقطه P_5	۱/۵۵	۱/۰۸	۳/۲	۱/۲۵	۰/۲۵۹۸	۰/۴۰۸۵	۰/۳۵۷۷

مراجع

[1] R. Verhoeven. Phd proposal thesis: "Analysis of the Workspace of Tendon-based Stewart Platforms" 2004.

[2] KHJ Voss, V. Wijk, and JL Herder. "Investigation of a Cable-driven Parallel Mechanism for Interaction with a Variety of Surfaces, Applied to the Cleaning of Free Form Buildings," *Latest Advances in Robot Kinematics*, pages 261–268, 2012.

[3] S.A. Hamid and N. Simaan. "Design and Synthesis of Wire-actuated Universal-joint Wrists for Surgical Applications," In *Robotics and Automation, 2009. ICRA'09. IEEE International Conference on*, pages 1807–1813. IEEE, 2009.

[4] G. Rosati, P. Gallina, and S. Masiero. "Design, Implementation and Clinical Tests of a Wire-based Robot for Neurorehabilitation," *Neural Systems and Rehabilitation Engineering, IEEE Transactions on*, 15(4):560–569, 2007.

[5] L. Dominjon, J. Perret, and A. Lecuyer, "Novel Devices and Interaction Techniques for Humanscale Haptics," The Visual Computer, vol. 23, no. 4, pp. 257–266, 2007.

[6] S. Tadokoro, R. Verhoeven, M. Hiller, and T. Takamori, "A Portable Parallel Manipulator for Search and Rescue at Large-scale Urban Earthquakes and an Identification Algorithm for the Installation in Unstructured Environments," in Proceedings. of IEEE/RSJ IROS'99. , Vol. 2. 1999, pp. 1222–1227.

[7] G. Rosati, P. Gallina, and S. Masiero, "Design, Implementation and Clinical Tests of a Wirebased Robot for Neurorehabilitation," IEEE Trans. on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, vol. 15, no. 4, pp. 560–569, 2007.

[8] T. Morizono, K. Kurahashi, and S. Kawamura, "Realization of a Virtual Sports Training System with Parallel Wire Mechanism," in Robotics and Automation, 1997. Proceedings. 1997 IEEE International Conference on, vol. 4. IEEE, 1997, pp. 3025–3030.

[9] T. Higuchi, A. Ming, and J. Jiang-Yu, "Application of Multi-dimensional Wire Cranes in Construction," in Proceedings of the 5th International Symposium on Robotics in Construction, 1988, pp. 661–668.

[10] M. Aref, H. Taghirad, and S. Barissi, "Optimal Design of Dexterous Cable Driven Parallel Manipulators," *International Journal of Robotics*, vol. 1, no. 1, pp. 29–47, 2009.

[11] P. Bosscher, A. Riechel, and I. Ebert-Uphoff, "Wrench-feasible Workspace Generation for Cable-driven Robots," *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 22, no. 5, pp. 890–902, 2006.

[12] G. Barrette and C. Gosselin, "Determination of the Dynamic Workspace of Cable-driven Planar Parallel Mechanisms," Journal of Mechanical Design, vol. 127, p. 242, 2005.

[13] H. Osumi, Y. Utsugi, and M. Koshikawa, "Development of a Manipulator Suspended by Parallel Wire Structure," in *Intelligent Robots and Systems, 2000.(IROS 2000). Proceedings. 2000 IEEE/RSJ International. Conference on*, vol. 1. IEEE, 2000, pp. 498–503.

[14] R. Verhoeven and M. Hiller, "Estimating the Controllable Workspace of Tendon-based Stewart Platforms," Advances in Robot Kinematics, pp. 277–284, 2000.

[15] C. Gosselin, J. Angeles, "Singularity Analysis of Closed-loop Kinematic Chains," Robotics and Automation, IEEE Transactions on, vol. 6, no. 3, pp. 281–290, 1990.

[16] T. Yoshikawa, "Analysis and Control of Robot Manipulators with Redundancy," in The First International Symposium on Robotics Research: . Mit Press Cambridge, MA, 1984, pp. 735–747.

[17] J. Salisbury and J. Craig, "Articulated Hands," The International Journal of Robotics Research, vol. 1, no. 1, pp. 4–17, 1982.

[18] P. Cardou, S. Bouchard, and C. Gosselin, "Kinematic-sensitivity Indices for Dimensionally Nonhomogeneous Jacobian Matrices," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 26, no. 1, pp. 166–173, 2010.

[19] A. Fattah and S. Agrawal, "On the Design of Cable-suspended Planar Parallel Robots," *Journal of Mechanical Design*, vol. 127, p. 1021, 2005.

[20] Sabbavarapu Ramana Babu, Vegesina Ramachandra Raju and Koona Ramji "Design for Optimal Performance of 3-RPS Parallel Manipulator using Evolutionary Algorithms," Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, vol. 37, no. 2, pp. 135, 2013.

[21] F. A. Lara-Molina, J. M. Rosário and D. Dumur, "Multi-Objective Design of Parallel Manipulator Using Global Indices" Open Mechanical Engineering Journal, 2010.

[۲۲] F. Hao, J.-P. Merlet, "Multi-criteria optimal design of parallel manipulators based on interval analysis" Mechanism and machine theory, vol. 40, no. 2, pp. 157-171, 2005.

[23] S. A. Khalilpour, H. D. Taghirad, M. Aliyari Shoorehdeli and M. Tale Masouleh "Appling Evolutionary Algorithms in Multi objective Optimization of Planar Cable-driven Parallel Robots",Submitted to Modares Mechanical Engineering, September 2013 (in Persian).

[24] S. Tadokoro, S. Nishioka, T. Kimura, M. Hattori, T. Takamori, and K. Maeda. "On fundamental design of cable configurations of cable-driven parallel manipulators with redundancy," *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. C*, 66(647):2247–2254, 2000.

[25] R. Verhoeven. "*Analysis of the Workspace of Tendon-Based Stewart Platforms*" PhD thesis, University atsbibliothek Duisburg, 2004.

[26] A. Zarif Loloei and H. D. Taghirad. "Controllable Workspace of Cable Driven Redundant Parallel Manipulators by Fundamental Wrench Analysis", vol. 36, no.3 p. 297-313, 2012.

[27] S. Khalilpour, A. Zarif Loloei, M. Tale Masouleh, and H. Taghirad, "Kinematic Performance Indices Analyzed on Four Planar Cable Robots via Interval Analysis," in *Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2013 First RSI/ISM International Conference on*. IEEE, 2013, pp. 313–318.

[28] J. Merlet, "Jacobian, Manipulability, Condition Number, and Accuracy of Parallel Robots," *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, p. 199, 2006.

[29] M. Saadatzi, M. Tale Masouleh, H. Taghirad, C. Gosselin, and M. Teshnehlab, "Multi-objective Scale Independent Optimization of 3-RPR Parallel Mechanisms," *Proceedings of the IFToMM*, 2011.

[30] S. Bouchard and C. M. Gosselin, "Kinematic Sensitivity of a Very Large Cable-driven Parallel Mechanism," in Proceedings of ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 2006.

[31] M. Saadatzi, M. Masouleh, H. Taghirad, C. Gosselin, and P. Cardou, "Geometric Analysis of the Kinematic Sensitivity of Planar Parallel Mechanisms," *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 35, no. 4, p. 477, 2011.

[32] W. A. Khan and J. Angeles, "The Kinetostatic Optimization of Robotic Manipulators: the Inverse and the Direct Problems," *Journal of mechanical design*, vol. 128, p. 168, 2006.

[33] D. Kalyanmoy, Multi Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms. John Wiley and Sons, 2001.

مجله کنترل
جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۶۹-۵۷

سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور با وجود پارامترهای نامعلوم و غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر ورودی‌های کنترلی

علی ابویی[۱]، محمد حائری[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، Aliabooee@ee.sharif.edu
[۲] استاد، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، Haeri@sina.sharif.edu

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۳/۲۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۵/۳۰)

چکیده: در این مقاله، مسئله سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور با در نظر گرفتن سه فرض عملی مهم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا، از تئوری پایداری لیاپانوف برای طراحی ورودی‌های کنترلی به منظور سنکرون‌سازی شمول‌های لور پیرو و مرجع استفاده می‌شود. به عنوان فرض اول، بخش معادله دیفرانسیلی شمول‌های لور به صورت یک مجموعه‌ی محدب در نظر گرفته می‌شود که این نکته می‌تواند بخشی از عدم‌قطعیت‌های سیستم دینامیکی توصیف شده با شمول لور را پوشش دهد. ناشناخته بودن پارامترهای شمول دیفرانسیلی لور، فرض دوم این مقاله را تشکیل می‌دهد. با توجه به فرض سوم، عملگرهای غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر اعمال ورودی‌های کنترلی به شمول‌های لور در نظر گرفته می‌شوند. در واقع این فرض آخر، تا حدودی محدودیت‌های پیاده‌سازی عملی را به علت وجود عملگرها نشان می‌دهد و چنانچه این موضوع در حین فرآیند طراحی، نادیده انگاشته شود، مشکلاتی را به وجود خواهد آورد. برای ارزیابی کارایی و موثر بودن ورودی‌های کنترلی پیشنهادی، دو شبیه‌سازی کامپیوتری شامل سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور و یک مثال عملی آن ارائه شده است.

کلمات کلیدی: شمول دیفرانسیلی لور ، غیرخطی‌ساز شعاعی ، شمول‌های لور مرجع و پیرو، سنکرون‌سازی.

Synchronization of Two Lur’e Differential Inclusions with Sector Input Nonlinearity and Unknown Parameters

Ali Abooee, Mohammad Haeri

Abstract: This paper deals with the synchronization of two Lur’e differential inclusions containing sector nonlinearity. Lyapunov stability theorem is employed to design the control inputs. The controllers are designed considering three important practical features in physical systems. First, differential equation part of the Lur’e differential inclusion is assumed to be convex. Second, it is presumed that parameters of the Lur’e differential inclusion are not completely known. Third, sector nonlinearities are considered on control inputs applied to the Lur’e differential inclusions. To assess performance and effectiveness of the proposed controllers a numerical example and a rotor dynamic system are simulated.

Keywords: Lur'e differential inclusion, Sector nonlinearity, Master and slave Lur'e systems, Synchronization.

۱- مقدمه

امروزه، شمول‌های دیفرانسیلی[۱] کاربردهای گسترده‌ایی در مدل‌سازی دقیق و جامع سیستم‌های عملی و پدیده‌های فیزیکی دارند. در این راستا می‌توان به کاربرد شمول دیفرانسیلی در مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی با محدودیت‌های یک‌طرفه و اصطکاک [۱-۳]، مدارهای الکتریکی دارای المان‌های غیرخطی و سوئیچ‌شونده [۴ و ۵]، سیستم‌های

[۱] Differential inclusions

متغیر با زمان یا دارای عدم‌قطعیت متغیر با زمان [۶–۸]، سیستم‌های هایبرید و سیستم‌های سوئیچ‌شونده [۹–۱۳]، سیستم‌های ناپیوسته و ناهموار [۱۴ و ۱۵] و ... اشاره کرد. تحلیل و فرمول‌بندی مسائل کنترل بهینه [۱۶ و ۱۷] و همچنین توصیف سیستم‌های تصادفی [۱۸ و ۱۹]، دو کاربرد مهم و عمده‌ی دیگر از شمول‌های دیفرانسیلی می‌باشند. شمول‌های دیفرانسیلی، داری دسته‌بندی‌های گوناگونی هستند که شمول دیفرانسیلی لور یکی از انواع پرکاربرد و مهم آن‌ها می‌باشد و از ترکیب یک معادله‌ی دیفرانسیلی و یک نگاشت غیرخطی یکنوا[۱] تشکیل شده است [۱، ۱۴و ۲۰–۲۷]. همین ساختار ویژه‌ی شمول لور باعث شده است تا معادلات دینامیکی بسیاری از سیستم‌های عملی در قالب ساختار این نوع شمول قرار گیرند [۱–۳ و ۲۰–۲۷].

با توجه به نکات و مطالب ذکر شده، امروزه مطالعات و پژوهش‌های فراوانی بر روی شمول‌های دیفرانسیلی لور در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی از جمله مهندسی کنترل انجام شده‌اند که تمرکز اغلب این تحقیقات و پژوهش‌ها [۲۰–۲۸] بر روی دو موضوع می‌باشد. موضوع اول، تحلیل پایداری و پایدارسازی شمول‌های دیفرانسیلی لور با طراحی مناسب ورودی‌های کنترلی است [۱، ۲۰، ۲۲ و ۲۸]. موضوع دوم، طراحی رویتگر برای شمول‌های لور می‌باشد که اهمیت بسزایی در سیستم‌های مکانیکی با وجود اصطکاک دارد [۲۱ و ۲۳–۲۷]. در برخی از کاربردهای عملی لازم است که دو سیستم مکانیکی یا الکتریکی که معادلاتشان با شمول دیفرانسیلی لور توصیف می‌شوند، به صورت هماهنگ و سنکرون با هم کار کنند [۱–۴]. با توجه به این نکته، مسئله سنکرون‌سازی[۲] دو سیستم شمول لور اهمیت پیدا می‌کند که این موضوع در مقاله‌ی حاضر مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در اغلب تحقیقات و مطالعاتی که در ارتباط با شمول لور انجام شده است [۱ و ۲۰–۲۸]، سه فرض محدودکننده‌ی غیرعملی و غیرواقعی وجود دارند. در فرض اول، شمول دیفرانسیلی لور به صورت ترکیب یک معادله‌ی دیفرانسیلی و یک نگاشت غیرخطی یکنوا نمایش داده می‌شود [۱، ۲۰ و ۲۳–۲۶]، اما در این مقاله، ترکیب یک شمول دیفرانسیلی محدب[۳] و یک نگاشت غیرخطی یکنوا به عنوان نمایش شمول دیفرانسیلی لور ارائه می‌گردد که حالت جامع‌تر و کلی‌تری نسبت به نمایش قبلی دارد و محدوده‌ی وسیع‌تری از سیستم‌های عملی و عدم‌قطعیت‌های آن‌ها را پوشش خواهد داد. فرض دوم، معلوم و مشخص بودن پارامترهای شمول دیفرانسیلی لور می‌باشد که با توجه به محدودیت‌های جهان واقعی، فرضی غیرمعقول است. بنابراین در این مقاله، پارامترهای شمول دیفرانسیلی لور را نامعلوم و ناشناخته در نظر می‌گیریم تا این فرض محدودکننده را حذف کرده باشیم و مدل شمول دیفرانسیلی لور را به واقعیت سیستم‌های جهان عملی نزدیک سازیم. به عنوان فرض سوم، اکثر مراجع فرض می‌کنند که ورودی‌های کنترلی طراحی شده به صورت مستقیم به سیستم اعمال می‌شوند و هیچ عملگر یا عنصر غیرخطی‌ساز در مسیر اعمال ورودی‌های کنترلی به سیستم وجود ندارد [۲۰–۲۸]. اما همانطوری که می‌دانیم در پیاده‌سازی عملی، به علت محدودیت‌های فیزیکی عملگرها از جمله اشباع[۴] [۲۸]، ناحیه مرده[۵] [۲۹ و ۳۰]، لقی[۶]، هیسترزیس[۷] و ....، همواره توابعی غیرخطی از ورودی‌های کنترلی به سیستم اعمال می‌شوند [۲۸–۳۶]. چنانچه در حین فرآیند طراحی سیگنال‌های کنترلی به این عناصر غیرخطی‌ساز توجه نشود و نادیده انگاشته شوند، هنگام پیاده‌سازی عملی با مشکلات عدیده‌ایی از جمله کاهش کارایی، کاهش سرعت پاسخ سیستم و در مواقعی حتی ناپایداری سیستم حلقه بسته روبرو خواهیم شد [۲۹، ۳۱ و ۳۳–۳۶]. با توجه به اهمیت نکته‌ی ذکر شده، در این مقاله، مسئله‌ی سنکرون‌سازی شمول‌های دیفرانسیلی لور با فرض وجود غیرخطی‌سازهای شعاعی[۸] در مسیر ورودی‌های کنترلی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد و ورودی‌های کنترلی با استفاده‌ی مستقیم از تئوری پایداری لیاپانوف طراحی می‌شوند. نوآوری‌های مقاله‌ی حاضر به صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

۱– ارائه و معرفی یک نمایش جامع و کامل از شمول دیفرانسیلی لور که در واقع دسته‌ی وسیع‌تری از سیستم‌های عملی را همراه با عدم‌قطعیت‌هایشان پوشش می‌دهد. در نمایش جدید، شمول دیفرانسیلی لور به صورت ترکیب یک شمول دیفرانسیلی محدب و یک نگاشت غیرخطی یکنوا در نظر گرفته می‌شود.

۲– تعریف مسئله سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور که در برخی مسائل عملی دارای کاربرد است و یکی از شبیه‌سازی‌های این مقاله به کاربرد عملی این موضوع پرداخته است.

۳– طراحی ورودی‌های کنترلی سنکرون‌ساز با فرض نامعلوم بودن پارامترهای سیستم شمول لور و همچنین فرض وجود غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر اعمال ورودی‌ها به سیستم که این فرض‌ها تا حدود زیادی با محدودیت‌های سیستم‌های عملی تطابق دارند.

۴– ارائه دو دسته‌ی جداگانه ورودی‌های کنترلی سنکرون‌ساز که ورودی‌های کنترلی متعلق به دسته‌ی‌اول به علت استفاده از تابع ناپیوسته علامت[۹]، دارای سوئیچینگ‌های فرکانس بالای شدیدی هستند که مشکلاتی از جمله پدیده وزوز (پدیده چترینگ)[۱۰] و کاهش عمر مفید عملگرها را به همراه خواهند داشت. برای ورودی‌های کنترلی دسته دوم، با جایگزینی تابع ناپیوسته علامت با یک تابع جدید پیشنهادی، این عیب تا حدود زیادی برطرف شده است و سیگنال‌های کنترلی صاف و هموار هستند. لازم به ذکر است که برای هر دو دسته‌ی ورودی‌های کنترلی

[۱] Monotonic set-valued mapping
[۲] Synchronization
[۳] Convex differential inclusion

[۴] Saturation
[۵] Dead-zone
[۶] Backlash
[۷] Hysteresis
[۸] Sector input nonlinearities
[۹] Sign function
[۱۰] Chattering phenomenon

پیشنهادی در این مقاله، پایداری سیستم خطای سنکرون‌سازی شمول‌های لور با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف به صورت تحلیلی به اثبات رسیده است.

ساختار کلی مقاله بدین صورت است که در بخش دوم، معادلات شمول‌های دیفرانسیلی لور مرجع و پیرو[۱] ارائه و معرفی می‌شوند. همچنین تعریف مسئله سنکرون‌سازی و بیان فرض‌های انجام شده در همین بخش گنجانده می‌شوند. طراحی دو دسته‌ی ورودی‌های کنترلی سنکرون‌ساز و اثبات پایداری سیستم دینامیک خطای سنکرون‌سازی با وجود هر دسته از این ورودی‌های کنترلی، بخش سوم مقاله را تشکیل خواهد داد. بخش چهارم به ارائه و بیان نتایج شبیه‌سازی اختصاص یافته و در این بخش دو شبیه‌سازی جداگانه آورده می‌شوند که شبیه‌سازی اول مربوط به سنکرون‌سازی دو شمول لور عددی است و شبیه‌سازی دوم در ارتباط با سنکرون‌سازی دو سیستم دینامیکی drill string است که معادلات دینامیکی هر کدام با شمول دیفرانسیلی لور بیان می‌شود. نتایج حاصل از این مقاله به صورت خلاصه و جمع‌بندی شده در بخش پنجم بیان می‌شود.

معرفی علائم و اختصارات: در این مقاله، $|A|$ بیانگر قدرمطلق ماتریس A است به طوری که هر درایه آن قدرمطلق درایه‌ی متناظر در ماتریس A می‌باشد. $\|x(t)\|$ نشان‌دهنده‌ی نرم اقلیدسی[۲] بردار $x(t)$ در لحظه‌ی t است. L_2 و L_∞ به ترتیب بیانگر فضاهای توابع انتگرالی مربعی[۳] و توابع کراندار[۴] هستند.

۲- توصیف معادلات شمول دیفرانسیلی لور و تعریف مسئله‌ی سنکرون‌سازی

سیستم شمول دیفرانسیلی لور با فرض پارامترهای نامعلوم و وجود غیرخطی‌سازهای شعاعی به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود که در ادامه، این شمول به عنوان شمول لور پیرو در نظرگرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\{A_i x(t)\} + \mathrm{co}\{F_j(x(t))\theta\} + G\omega_x(t) + \phi_x(u_x(t))\\&\omega_x(t) \in -\rho(Hx(t)), i=1,\dots,N,\ j=1,\dots,M\end{aligned} \quad (۱)$$

در رابطه (۱)، co بیانگر مجموعه محدب[۵]، $x \in \Re^n$ بردار متغیرهای حالت، $G \in \Re^{n\times m}$ و $H \in \Re^{m\times n}$ ماتریس‌های ثابت و معلوم می‌باشند. ماتریس‌های ثابت و معلوم $A_i \in \Re^{n\times n}$ رئوس[۶] فضای ماتریسی محدبی هستند که ماتریس نامعلوم A به آن فضا تعلق دارد. $\theta \in \Re^l$ بردار پارامترهای کراندار ناشناخته و $F_j : \Re^n \to \Re^{n\times l}$ توابع ماتریسی هموار و معلوم‌ایی هستند که به عنوان رئوس فضای توابع ماتریسی محدبی در نظرگرفته می‌شوند که تابع ماتریسی نامعلوم $F(x)$ در این فضا قرار دارد. $\rho : \Re^m \to \Re^m$، یک نگاشت غیرخطی یکنوا با ویژگی‌های خاص و منحصر به فردی (این ویژگی‌ها در ادامه بیان خواهد شد) است که $\omega_x \in \Re^m$ نشان‌دهنده‌ی خروجی این نگاشت می‌باشد. $u_x \in \Re^n$ بیانگر بردار ورودی‌های کنترلی است و $\phi_x : \Re^n \to \Re^n$ به عنوان بردار توابع غیرخطی‌ساز شعاعی از این ورودی‌های کنترلی در نظر گرفته می‌شود که در ادامه به صورت کامل معرفی خواهد شد.

تعریف ۱: نگاشت غیرخطی $\rho(.)$ را در نظر بگیرید، گراف این نگاشت غیرخطی $\rho(.)$ به صورت $\mathrm{Graph}(\rho)$ نشان داده می‌شود که به صورت رابطه (۲)، قابل بیان است [۲۱ و ۲۳-۲۷].

$$\mathrm{Graph}(\rho) = \{(x, x^*) \mid x^* \in \rho(x)\} \quad (۲)$$

تعریف ۲: نگاشت غیرخطی $\rho(.)$ یکنوا نامیده می‌شود اگر گراف آن یعنی $\mathrm{Graph}(\rho)$ یکنوا باشد. این بدان معنی است که برای همه‌ی $x \in \Re^n$ ، $y \in \Re^n$ ، $x^* \in \rho(x)$ و $y^* \in \rho(y)$ همواره نامساوی $(x-y)^T(x^*-y^*) \geq 0$ برقراراست [۲۳-۲۵ و ۲۷].

فرض ۱: پارامترهای سیستم شمول دیفرانسیلی لور ثابت، نامعلوم و کراندار در نظر گرفته می‌شوند. در واقع نامساوی $\|\theta\| \leq \gamma$ همواره برقرار می‌باشد که در این رابطه، θ بردار پارامترهای شمول لور و γ به عنوان کران بالای این بردار، ثابت و نامعلوم است.

فرض ۲: شرط لیپ‌شیتز[۷] برای توابع ماتریسی $F_j(x)$ برقرار می‌باشد که این شرط به صورت رابطه (۳)، قابل بیان است. باید توجه داشت که در رابطه (۳)، δ_j ثابت‌های مثبت و معلوم هستند [۲۱ و ۲۳-۲۶].

$$\begin{aligned}&\|F_j(x) - F_j(y)\| \leq \delta_j \|x-y\|\\&F_j(0) = 0,\ j=1,\dots,M,\ \sum_{j=1}^{M}\delta_j = \delta_t\end{aligned} \quad (۳)$$

فرض ۳: نگاشت غیرخطی $\rho(.)$ یکنوا، محدب، بسته[۸]، کراندار، غیرتهی[۹] و نیمه پیوسته از بالا[۱۰] می‌باشد [۲۱].

فرض ۴: درایه‌های متعلق به بردار غیرخطی‌ساز شعاعی $\phi_x : \Re^n \to \Re^n$، شرایط غیرخطی‌سازی شعاعی را برآورده می‌سازند که رابطه (۴)، این شرایط را به صورت نامساوی نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که ضرایب α_{k_x} و β_{k_x} ثابت و معلوم هستند [۲۳ و ۲۴].

$$\begin{aligned}&\phi_x(u_x) = [\phi_{1_x}(u_{1_x}) \quad \dots \quad \phi_{n_x}(u_{n_x})]^T\\&\alpha_{k_x}u_{k_x}^2 \leq \phi_{k_x}(u_{k_x})u_{k_x} \leq \beta_{k_x}u_{k_x}^2,\ \alpha_{k_x}, \beta_{k_x} \geq 0, \quad k=1,\dots,n\end{aligned} \quad (۴)$$

لم ۱ (وجود جواب برای شمول دیفرانسیلی لور): شمول دیفرانسیلی لور رابطه‌ی (۱) را با نگاشت غیرخطی $\rho(.)$ که فرض ۳ را برآورده می‌سازد، در نظر بگیرید. برای هر $x_0 \in \Re^n$، تابع پیوسته‌ی مطلق[۱۱] $x(t) \in \Re^n$ وجود دارد که یک جواب از شمول دیفرانسیلی لور رابطه‌ی (۱) با فرض شرایط اولیه $x(0) = x_0$ است. لازم به ذکر است

[۱] Master and slave Lur'e differential inclusions
[۲] Euclidean norm
[۳] Space of square integral functions
[۴] Bounded functions
[۵] Convex hull
[۶] Vertices

[۷] Lipschitz
[۸] Closed
[۹] Non-empty
[۱۰] Upper semi-continuous
[۱۱] Absolutely continuous

که تابع پیوسته‌ی مطلق $x(t)\in\Re^n$ بر روی بازه‌ی $[0,\infty)$ تعریف شده است [۲۳–۲۷].

با توجه به تئوری آنالیز مجموعه‌های محدب [۳۷-۳۹]، شمول دیفرانسیلی لور (۱) می‌تواند به صورت یک سیستم دارای عدم قطعیت، بازنویسی و معادل شود. سیستم دارای عدم قطعیت معادل با شمول دیفرانسیلی لور رابطه (۱)، به صورت رابطه (۵) نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_x(t)+\sum_{j=1}^{M}\eta_j\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x(t))\\&\boldsymbol{\omega}_x(t)\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t)),\end{aligned}\qquad (۵)$$

در رابطه (۵)، λ_i و η_j ثابت‌های نامعلومی هستند که دارای ویژگی زیر می‌باشند.

$$0\le\lambda_i\le 1,\quad \sum_{i=1}^{N}\lambda_i=1,\quad 0\le\eta_j\le 1,\quad \sum_{j=1}^{M}\eta_j=1$$

در حالت کلی، برای مسئله‌ی سنکرون‌سازی به دو سیستم مرجع و پیرو نیاز است. در این مقاله برای تعریف مسئله‌ی سنکرون‌سازی، شمول دیفرانسیلی لور رابطه (۵) به عنوان سیستم پیرو و سیستم شمول دیفرانسیلی رابطه (۶) به عنوان سیستم مرجع در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{y}}(t)\in\mathrm{co}\{\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}(t)\}+\mathrm{co}\{\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{\theta}\}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_y(t)+\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y(t))\\&\boldsymbol{\omega}_y(t)\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}(t))\end{aligned}\qquad (۶)$$

در رابطه (۶)، $\boldsymbol{y}\in\Re^n$ بردار متغیرهای حالت شمول دیفرانسیلی لور مرجع می‌باشد. $\boldsymbol{u}_y\in\Re^n$ بیانگر بردار ورودی‌های کنترلی و $\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y):\Re^n\to\Re^n$ نشان‌دهنده‌ی بردار توابع غیرخطی از ورودی‌های کنترلی است که به سیستم لور مرجع اعمال می‌شوند. از آنجایی که رابطه (۶) سیستم شمول لور مرجع را توصیف می‌کند، منطقی و معقول است که فرض کنیم بردار $\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)$ ناشناخته و کراندار است به طوری که نامساوی $\|\boldsymbol{\Psi}_y\|\le\kappa$ همواره برآورده می‌شود و κ ثابتی نامعلوم است. مشابه با نکته ذکر شده در بالا، شمول لور رابطه (۶)، معادل با سیستم دارای عدم‌قطعیت رابطه (۷) می‌باشد.

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_y(t)+\sum_{j=1}^{M}\xi_j\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y(t))\\&\boldsymbol{\omega}_y(t)\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}(t))\end{aligned}\qquad (۷)$$

در رابطه (۷)، υ_i و ξ_j ثابت‌های نامعلومی هستند که دارای ویژگی زیر می‌باشند.

$$0\le\upsilon_i\le 1,\ \sum_{i=1}^{N}\upsilon_i=1,\quad 0\le\xi_j\le 1,\ \sum_{j=1}^{M}\xi_j=1$$

۳- طراحی ورودی‌های کنترلی سنکرون‌سازی

در این بخش، ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x\in\Re^n$ (که به سیستم شمول لور پیرو اعمال می‌شوند) و همچنین دو قانون به‌روزرسانی[۱] برای دو کران بالای نامعلوم γ و κ به گونه‌ایی طراحی می‌شوند که پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت شمول لور پیرو، پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت متناظر در شمول لور مرجع را به خوبی دنبال و ردیابی کنند یا به عبارت دیگر رابطه‌ی $\lim_{t\to\infty}|x_i-y_i|=0$ برقرار شود. بدین منظور، بردار خطای سنکرون‌سازی را به صورت $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{e}\in\Re^n$ تعریف می‌کنیم. با در نظر گرفتن این بردار خطا، دینامیک خطای سنکرون‌سازی میان دو شمول لور مرجع و پیرو به صورت رابطه زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}(t)=&\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}(t)+\sum_{i=1}^{N}(\lambda_i-\upsilon_i)\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)\\&+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}_x(t)-\boldsymbol{\omega}_y(t))-\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y(t))+\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x(t))\\&+\sum_{j=1}^{M}\xi_j\left(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y})\right)\boldsymbol{\theta}+\sum_{j=1}^{M}(\eta_j-\xi_j)\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{\theta}\end{aligned}\qquad (۸)$$

با تعریف بردار خطای سنکرون‌سازی به صورت بالا، مسئله‌ی سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور به مسئله‌ی پایدارسازی دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) تبدیل می‌شود. در واقع می‌توان گفت ورودی‌های کنترلی اعمالی به شمول لور پیرو، باید به گونه‌ایی طراحی شوند که دینامیک خطای توصیف شده توسط رابطه (۸) پایدار شود و خطای سنکرون‌سازی با گذشت زمان به صفر همگرا گردد یا به عبارتی دیگر رابطه $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{e}\|=0$ برای بردار خطای سنکرون‌سازی برقرار شود. بدین منظور تئوری ۱، ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x\in\Re^n$ و دو قانون به‌روزرسانی مرتبط با تخمین دو ثابت نامعلوم γ و κ را پیشنهاد می‌دهد تا سنکرون‌سازی میان دو شمول دیفرانسیلی لور (۱) و (۶) حاصل شود. لازم به ذکر است که ورودی‌های کنترلی اعمالی به شمول لور پیرو، تحت غیرخطی‌سازهای شعاعی قرار می‌گیرند.

تئوری ۱: دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) را همراه با فرض‌های ۱ الی ۴ در نظر بگیرید. چنانچه ماتریس مثبت معین متقارن[۲] $\boldsymbol{P}$ وجود داشته باشد که تساوی ماتریسی $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{H}$ را برقرار سازد، آنگاه خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) با در نظر گرفتن بردار ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x\in\Re^n$ و دو قانون به‌روزرسانی که به ترتیب در رابطه‌های (۹) و (۱۰) آورده شده‌اند، به سمت صفر همگرا می‌شود و سنکرون‌سازی میان دو شمول دیفرانسیلی لور (۱) و (۶) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&u_{k_x}=-\frac{1}{\alpha_{k_x}}\varepsilon_k\mu_k\,\mathrm{sgn}(\Omega_k),\quad \varepsilon_k>1\\&\mu_k=\left(\sum\nolimits_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|\right)_k+\left(\sum\nolimits_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|\right)_k+\hat{\gamma}\delta_t\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)+\hat{\kappa}\\&\quad\text{for}\ k=1,\ldots,n\\&\hat{\gamma}(0)=\frac{1}{\delta_t\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})\min\limits_{k}(\varepsilon_k-1)}>0,\ \hat{\kappa}(0)\ge 0\end{aligned}\qquad (۹)$$

در رابطه (۹)، $(\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|)_k$ و $(\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|)_k$ به ترتیب درایه‌های kام از بردارهای $\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|$ و $\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|$ هستند. ε_k ضریب (ثابت) دلخواه بزرگتر از یک و $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})$ کوچکترین مقدار ویژه ماتریس $\boldsymbol{P}$ می‌باشد.

[۱] Adaptation law

[۲] Symmetric positive definite matrix

$$\dot{\hat{\gamma}} = \delta_t \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\| \right) \text{ and } \dot{\hat{\kappa}} = \|\boldsymbol{\Omega}\|,$$
$$\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1 \ \ \dots \ \ \Omega_n],\ \Omega_k = \sum_{d=1}^{n} e_d\, p_{dk} \qquad (۱۰)$$

در رابطه (۱۰)، p_{dk} درایه‌ی سطر dام و ستون kام از ماتریس $\boldsymbol{P}$ و e_d درایه‌ی dام از بردار $\boldsymbol{e}$ می‌باشند.

اثبات: در اینجا، از تئوری پایداری لیاپانوف برای اثبات پایداری دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) با وجود ورودی‌های کنترلی رابطه (۹) و قوانین به‌روزرسانی رابطه (۱۰)، استفاده خواهد شد. تابع کاندید لیاپانوف به صورت رابطه (۱۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{e} + \tilde{\gamma}^2 + \tilde{\kappa}^2) \qquad (۱۱)$$

در این رابطه، $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma} - \gamma$ و $\tilde{\kappa} = \hat{\kappa} - \kappa$ به عنوان خطاهای تخمین دو کران ثابت γ و κ تعریف شده‌اند. در ادامه با مشتق‌گیری از تابع کاندید لیاپانوف تعریف شده، رابطه (۱۲) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \dot{\boldsymbol{e}} + \tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}} + \tilde{\kappa}\dot{\hat{\kappa}} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \left(\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e} + \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \upsilon_i) \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} \right) \\ &+ \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \left(\sum_{j=1}^{M} \xi_j \left(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}) \right) + \sum_{j=1}^{M} (\eta_j - \xi_j) \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) \right) \boldsymbol{\theta} \\ &+ \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x) - \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y) + \tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}} + \tilde{\kappa}\dot{\hat{\kappa}} + \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_y) \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

با توجه به فرض $\boldsymbol{G}^T \boldsymbol{P} = \boldsymbol{H}$، تساوی $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_y) = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{H}^T (\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_y)$ به راحتی حاصل می‌شود. همچنین از آنجایی که $\boldsymbol{\omega}_y \in -\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y})$، $\boldsymbol{\omega}_x \in -\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})$ و نگاشت $\boldsymbol{\rho}(.)$ یکنواست، می‌توان نامساوی رابطه (۱۳) را نتیجه گرفت.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_y) &= \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{H}^T (\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_y) \\ &= -(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{y})(-\boldsymbol{\omega}_x - (-\boldsymbol{\omega}_y)) \le 0 \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

با توجه به تعریف بردار $\boldsymbol{\Omega}$ در رابطه (۱۰) و در نظر گرفتن شرایط مرتبط با ثابت‌های نامعلوم λ_i و υ_i، عبارت $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P}(\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e} + \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \upsilon_i) \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x})$ که در سمت راست معادله‌ی (۱۲) وجود دارد، می‌تواند به صورت رابطه (۱۴) بازنویسی و در ادامه جایگزین شود.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \left(\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e} + \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \upsilon_i) \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} \right) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \left(|\Omega_k| \left(\left(\sum_{i=1}^{N} |\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e}| \right)_k + \left(\sum_{i=1}^{N} |\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}| \right)_k \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(|\Omega_k| \left(\mu_k - \hat{\gamma}\delta_t \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\| \right) - \hat{\kappa} \right) \right) \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

حال در ادامه با توجه به فرض ۲، نامساوی رابطه (۱۵) برای عبارت $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P}(\sum_{j=1}^{M} \xi_j \left(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}) \right) + \sum_{j=1}^{M} (\eta_j - \xi_j) \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{\theta}$ حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \left(\sum_{j=1}^{M} \xi_j \left(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}) \right) + \sum_{j=1}^{M} (\eta_j - \xi_j) \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) \right) \boldsymbol{\theta} \\ &\le \left\| \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \right\| \left(\sum_{j=1}^{M} \left\| \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}) \right\| + \sum_{j=1}^{M} \left\| \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) \right\| \right) \|\boldsymbol{\theta}\| \\ &\le \left\| \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \right\| \|\boldsymbol{\theta}\| \left(\|\boldsymbol{e}\| + \|\boldsymbol{x}\| \right) \delta_t \le \left\| \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \right\| \left(\|\boldsymbol{e}\| + \|\boldsymbol{x}\| \right) \gamma\, \delta_t \\ &\le \gamma\, \delta_t \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \left(\|\boldsymbol{e}\| + \|\boldsymbol{x}\| \right) \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

با در نظر گرفتن تعریف Ω_k، دو عبارت $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)$ و $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{k_x}(u_{k_x}) \Omega_k \\ &\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y) \le \left\| \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \right\| \left\| \boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y) \right\| \le \kappa \|\boldsymbol{\Omega}\| \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

با جایگذاری ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۹) در نامساوی غیرخطی‌ساز شعاعی مرتبط با فرض ۴، رابطه (۱۷) به راحتی نتیجه می‌شود.

$$\varepsilon_k \mu_k \operatorname{sgn}^2(\Omega_k) \le -\phi_{k_x}(u_{k_x}) \operatorname{sgn}(\Omega_k) \qquad (۱۷)$$

در این رابطه، $\operatorname{sgn}(.)$ بیانگر تابع علامت می‌باشد. چنانچه طرفین نامساوی رابطه (۱۷) را در عبارت Ω_k^2 ضرب کرده و $\Omega_k \operatorname{sgn}(\Omega_k) = |\Omega_k|$ را در نظر بگیریم، با جایگذاری نامساوی حاصله در رابطه (۱۶)، نامساوی رابطه (۱۸) برای عبارت $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)$ استخراج می‌شود.

$$\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{k_x}(u_{k_x}) \Omega_k \le -\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mu_k |\Omega_k| \qquad (۱۸)$$

با جایگذاری (۱۰)، نامساوی‌های (۱۳) الی (۱۶) و نامساوی (۱۸) در طرف دوم (۱۲)، نامساوی زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\le \sum_{k=1}^{n} \left(|\Omega_k| \left(\mu_k - \hat{\gamma}\delta_t \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\| \right) - \hat{\kappa} \right) \right) - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mu_k |\Omega_k| \\ &+ \gamma\, \delta_t \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\| \right) + \tilde{\gamma}\delta_t \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\| \right) \\ &+ \kappa \|\boldsymbol{\Omega}\| + \tilde{\kappa} \|\boldsymbol{\Omega}\| \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با توجه به نامساوی $-\sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \le -\|\boldsymbol{\Omega}\|$ و تعاریف $\tilde{\kappa} = \hat{\kappa} - \kappa$ و $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma} - \gamma$، نامساوی رابطه (۱۹) به صورت نامساوی رابطه (۲۰) ساده و بازنویسی می‌شود.

$$\dot{V} \le -\sum_{k=1}^{n} \mu_k |\Omega_k| (\varepsilon_k - 1) \le 0 \qquad (۲۰)$$

نامساوی $\mu_k \ge \delta_t \|\boldsymbol{e}\| \hat{\gamma}(0)$ به راحتی از روی تعریف μ_k در رابطه (۹) قابل دستیابی است. با جایگذاری این نامساوی در رابطه (۲۰)، نامساوی رابطه زیر استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\le -\sum_{k=1}^{n} \mu_k |\Omega_k| (\varepsilon_k - 1) \le -\delta_t \hat{\gamma}(0) \|\boldsymbol{e}\| \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \min_k (\varepsilon_k - 1) \\ &\le -\delta_t \hat{\gamma}(0) \|\boldsymbol{e}\| \|\boldsymbol{\Omega}\| \min_k (\varepsilon_k - 1) \\ &\le -\delta_t \hat{\gamma}(0) \left\| \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{e} \right\| \min_k (\varepsilon_k - 1) \\ &\le -\delta_t \hat{\gamma}(0) \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}) \|\boldsymbol{e}\|^2 \min_k (\varepsilon_k - 1) \le -\|\boldsymbol{e}\|^2 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی رابطه (۲۱) از لحظه‌ی صفر تا لحظه‌ی

t به رابطه (۲۲) خواهیم رسید.

$$V(t)+\int_0^t\|\boldsymbol{e}(\tau)\|^2 d\tau \le V(0)<\infty \qquad (۲۲)$$

از رابطه (۲۲)، دو نامساوی با اهمیت $V(t)<\infty$ و $\int_0^\infty\|\boldsymbol{e}(\tau)\|^2 d\tau<\infty$ حاصل می‌شود. حال با توجه به تعریف تابع کاندید لیاپانوف در رابطه (۱۱) و در نظر گرفتن نامساوی $V(t)<\infty$ می‌توان به این نتیجه رسید که $\boldsymbol{e}(t)\in L_\infty$ است یا به عبارتی دیگر بردار خطای سنکرون‌سازی کراندار می‌باشد. نامساوی $\int_0^\infty\|\boldsymbol{e}(\tau)\|^2 d\tau<\infty$ بیانگر این نکته می‌باشد که بردار خطای سنکرون‌سازی همچنین متعلق به فضای توابع انتگرالی مربعی یا به تعبیر ریاضی $\boldsymbol{e}(t)\in L_2$ است. با در نظر گرفتن $\boldsymbol{e}(t)\in L_\infty$، دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) نشان می‌دهد که $\dot{\boldsymbol{e}}(t)$ نیز کراندار بوده و یا به تعبیر ریاضی $\dot{\boldsymbol{e}}(t)\in L_\infty$ است. حال با توجه به لم باربالت، از آنجایی که $\boldsymbol{e}(t)\in L_\infty\cap L_2$ و $\dot{\boldsymbol{e}}(t)\in L_\infty$ می‌باشند می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{e}\|=0$ برقرار است و بدین ترتیب اثبات تئوری ۱ پایان می‌پذیرد. ∎

یادآوری ۱: برای ورودی‌های کنترلی رابطه (۹)، ضرایب دلخواه (اختیاری) $\varepsilon_k, k=1,\ldots,n$ توسط طراح و همواره بزرگتر از یک انتخاب می‌شوند که می‌تواند به عنوان یک درجه آزادی در طراحی منظور شود. اما باید به این نکته توجه داشت که این ضرایب دلخواه بر روی دامنه و انرژی سیگنال‌های کنترلی و همچنین سرعت همگرایی خطاهای سنکرون‌سازی تاثیر بسزایی دارند. در واقع بزرگ انتخاب کردن این ضرایب اختیاری، بیشینه دامنه‌های سیگنال‌های کنترلی را افزایش داده که از نظر پیاده‌سازی عملی مطلوب نبوده اما در عوض سرعت همگرایی خطاهای سنکرون‌سازی به سمت صفر را افزایش می‌دهد که مطلوب می‌باشد. بنابراین طراح در هنگام انتخاب ضرایب دلخواه $\varepsilon_k, k=1,\ldots,n$ باید مصالحه‌ایی میان دو معیار ذکر شده یعنی بیشینه دامنه سیگنال کنترلی و سرعت همگرایی خطاهای سنکرون‌سازی به سمت صفر، انجام دهد.

یادآوری ۲: با توجه به ورودی‌های کنترلی تعریف شده در رابطه (۹)، ماتریس مثبت معین متقارن $\boldsymbol{P}$ نیز توسط طراح انتخاب می‌شود و باید همواره تساوی ماتریسی $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{H}$ برقرار باشد. در واقع طراح می‌تواند با انتخاب مناسب درایه‌های ماتریس $\boldsymbol{P}$، بیشینه دامنه‌های سیگنال‌های کنترلی را کاهش داده و همچنین سرعت همگرایی خطاهای سنکرون‌سازی به سمت صفر را افزایش دهد.

یادآوری ۳: با توجه به اینکه $\dot{e}(t)$ پیوسته نمی‌باشد، $\hat{\gamma}$ و $\hat{\kappa}$ (که در واقع تخمین دو ثابت نامعلوم γ و κ هستند) به مقادیر واقعی و اسمی دو پارامتر γ و κ همگرا نخواهند شد.

یادآوری ۴: از آنجایی که در ساختن ورودی‌های کنترلی رابطه (۹)، از تابع علامت که تابعی ناپیوسته می‌باشد استفاده شده است، سوئیچینگ‌های فرکانس بالایی در سیگنال‌های کنترلی مشاهده خواهد شد. در واقع این سوئیچینگ‌های فرکانس بالا باعث به وجود آمدن پدیده‌ی نامطلوب وزوز (چترینگ) می‌شوند که در گذر زمان کاهش عمر مفید عملگرها و رله‌ها را در پی خواهد شد.

برای حذف این سوئیچینگ‌های فرکانس بالا، ورودی‌های کنترلی جدیدی به صورت رابطه (۲۳) پیشنهاد می‌شوند که در این ورودی‌ها، تابع علامت با یک تابع پیوسته جایگزین شده است.

$$\begin{aligned}&u_{k_x}=-\frac{1}{\alpha_{k_x}}\varepsilon_k\upsilon_k^2\frac{\Omega_k}{|\Omega_k|\upsilon_k+\chi_k(t)},\ \ \varepsilon_k>1\\&\upsilon_k=\Big(\sum_{i=1}^N|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|\Big)_k+\Big(\sum_{i=1}^N|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|\Big)_k+\delta_t\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)\hat{\gamma}+\hat{\kappa}+|\Omega_k| \qquad (۲۳)\\&k=1,\ldots,n,\ \ \hat{\gamma}(0)>0,\ \hat{\kappa}(0)>0\end{aligned}$$

در این رابطه، $\chi_k(t), k=1,\ldots,n$ توابعی همواره مثبت با ویژگی $\int_0^\infty\chi_k(t)dt<\infty$ هستند. در ادامه، تئوری ۲ نشان می‌دهد که ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۲۳) می‌توانند دو شمول دیفرانسیلی لور رابطه‌های (۱) و (۶) را با هم سنکرون سازند.

تئوری ۲: دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) را همراه با فرض‌های ۱ الی ۴ در نظر بگیرید. چنانچه ماتریس مثبت معین متقارن $\boldsymbol{P}$ وجود داشته باشد که تساوی ماتریسی $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{H}$ برقرار گردد، آنگاه ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۲۳) همراه با قانون‌های به‌روزرسانی رابطه (۱۰)، خطاهای سنکرون‌سازی سیستم رابطه (۸) را به سمت صفرهمگرا می‌سازند و در واقع سنکرون‌سازی میان دو شمول لور رابطه‌های (۱) و (۶) حاصل می‌شود.

اثبات: کاملاً مشابه با اثبات تئوری ۱، رابطه (۲۴) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{V}\le&\sum_{k=1}^n\Big(|\Omega_k|\big(\upsilon_k-\hat{\gamma}\delta_t\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)-|\Omega_k|-\hat{\kappa}\big)\Big)\\&+\gamma\,\delta_t\sum_{k=1}^n|\Omega_k|\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)++\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x) \qquad (۲۴)\\&+\left\|\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\right\|\kappa+\tilde{\gamma}\delta_t\sum_{k=1}^n|\Omega_k|\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)+\tilde{\kappa}\|\boldsymbol{\Omega}\|\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن فرض ۴ و جایگذاری ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۲۳) در عبارت $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)=\sum_{k=1}^n\Omega_k\phi_{k_x}(u_{k_x})$، نامساوی رابطه (۲۵) نتیجه می‌شود. اثبات نامساوی ارائه شده در رابطه (۲۵) همراه با جزئیات بیشتر در پیوست ۱ مقاله آورده شده است.

$$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)=\sum_{k=1}^n\Omega_k\phi_{k_x}(u_{k_x})\le-\sum_{k=1}^n\frac{\varepsilon_k\upsilon_k^2\Omega_k^2}{|\Omega_k|\upsilon_k+\chi_k(t)} \qquad (۲۵)$$

با جایگذاری رابطه (۲۵) در رابطه (۲۴)، به نامساوی رابطه (۲۶) می‌رسیم.

$$\begin{aligned}\dot{V}\le&\sum_{k=1}^n\Big(|\Omega_k|\big(\upsilon_k-\hat{\gamma}\delta_t\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)-|\Omega_k|-\hat{\kappa}\big)\Big)-\sum_{k=1}^n\frac{\varepsilon_k\upsilon_k^2\Omega_k^2}{|\Omega_k|\upsilon_k+\chi_k(t)} \qquad (۲۶)\\&+\gamma\delta_t\sum_{k=1}^n|\Omega_k|\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)+\tilde{\gamma}\delta_t\sum_{k=1}^n|\Omega_k|\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)+\|\boldsymbol{\Omega}\|\kappa+\tilde{\kappa}\|\boldsymbol{\Omega}\|\end{aligned}$$

با توجه به دو تعریف $\tilde{\gamma}=\hat{\gamma}-\gamma$ و $\tilde{\kappa}=\hat{\kappa}-\kappa$ و همچنین با در نظرگرفتن $-\sum_{k=1}^n|\Omega_k|\le-\|\boldsymbol{\Omega}\|$، نامساوی رابطه (۲۶) به صورت نامساوی رابطه (۲۷) ساده و بازنویسی می‌شود.

$$\dot{V}\le-\sum_{k=1}^n|\Omega_k|^2-\sum_{k=1}^n\frac{(\varepsilon_k-1)\upsilon_k^2\Omega_k^2}{|\Omega_k|\upsilon_k+\chi_k(t)}+\sum_{k=1}^n\frac{|\Omega_k|\upsilon_k\chi_k(t)}{|\Omega_k|\upsilon_k+\chi_k(t)} \qquad (۲۷)$$

از آنجایی که تمامی ضرایب ثابت دلخواه $\varepsilon_k, k=1,\ldots,n$ همواره

بزرگتر از یک انتخاب می‌شوند بنابراین عبارت دوم از طرف راست نامساوی (۲۷) همواره منفی است. از طرف دیگر می‌دانیم که برای هر دو مقدار مثبت حقیقی a و b، نامساوی $0 \le ab/(a+b) \le b$ همواره برقرار است. بنابراین با در نظرگرفتن نکات ذکر شده، نامساوی رابطه (۲۷) به آسانی به نامساوی رابطه (۲۸) تبدیل می‌گردد.

$$\dot{V} \le -\|\mathbf{\Omega}\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \chi_k(t) \tag{۲۸}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۲۸) از لحظه‌ی صفر تا لحظه‌ی t، و در نظر گرفتن ویژگی $\int_0^\infty \chi_k(t)dt < \infty$، نامساوی رابطه (۲۹) حاصل می‌شود.

$$V(t)+\int_0^t \|\mathbf{\Omega}(\tau)\|^2 d\tau \le V(0)+\sum_{k=1}^{n}\int_0^t \chi_k(\tau)d\tau < \infty \tag{۲۹}$$

دو نامساوی مهم $V(t) < \infty$ و $\int_0^\infty \|\mathbf{\Omega}(\tau)\|^2 d\tau < \infty$ از رابطه (۲۹) نتیجه می‌شوند. با توجه به تعریف تابع کاندید لیاپانوف $V(t)$ و نامساوی $V(t) < \infty$ می‌توان نتیجه گرفت که بردار خطاهای سنکرون‌سازی کراندار بوده و به تعبیر ریاضی $\boldsymbol{e}(t) \in L_\infty$ است. با توجه به تعریف بردار $\mathbf{\Omega}$، نامساوی $\int_0^\infty \|\mathbf{\Omega}(\tau)\|^2 d\tau < \infty$ نشان می‌دهد که $\boldsymbol{e}(t) \in L_2$ است. با در نظر گرفتن $\boldsymbol{e}(t) \in L_\infty$، دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) نشان می‌دهد که $\dot{\boldsymbol{e}}(t)$ نیز کراندار بوده و به تعبیر ریاضی $\dot{\boldsymbol{e}}(t) \in L_\infty$ است. حال با توجه به لم باربالت، از آنجایی که $\dot{\boldsymbol{e}}(t) \in L_\infty$ و $\boldsymbol{e}(t) \in L_\infty \cap L_2$ می‌باشند می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{e}\| = 0$ برقرار است و بدین ترتیب اثبات تئوری ۲ پایان می‌پذیرد.■

۴- نتایج شبیه‌سازی کامپیوتری

در این بخش، ورودی‌های کنترلی طراحی شده بر روی دو مثال مورد شبیه‌سازی قرار خواهند گرفت تا عملکرد و کارایی آنها نشان داده شود. در زیربخش (۴-۱)، هر دو دسته‌ی ورودی‌های کنترلی رابطه‌های (۹) و (۲۳) برای سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرند. در زیربخش (۴-۲)، معادلات دینامیکی دو سیستم drill string معرفی می‌شوند که معادلات هر کدام از این دو سیستم در قالب شمول دیفرانسیلی لور قابل بیان است. در شبیه‌سازی مرتبط با این زیربخش نیز هر دو دسته‌ی ورودی‌های کنترلی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۴-۱ شبیه‌سازی مرتبط با سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور

دو شمول دیفرانسیلی لور پیرو و مرجع را به صورت رابطه (۳۰) در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
&\text{Master:}\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}=\sum_{i=1}^{3}\upsilon_i \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_y+\sum_{j=1}^{2}\xi_j\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y})\theta+\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)\\ \boldsymbol{\omega}_y\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{Hy})\end{cases}\\
&\text{Slave:}\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_x+\sum_{j=1}^{2}\eta_j\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x})\theta+\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)\\ \boldsymbol{\omega}_x\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{Hx})\end{cases}
\end{aligned} \tag{۳۰}$$

ماتریس‌های $\boldsymbol{A}_i$، $\boldsymbol{G}$ و $\boldsymbol{H}$، توابع برداری هموار $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x})$ و $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y})$، ثابت‌های λ_i، υ_i، η_j و ξ_j و بردار ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&-5&0\\0&2&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-5&-1&0\\0&-8&2\\2&0&-5\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}10&0&0\\0&4&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=[6\ \ 4\ \ -2],\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0\\1.5\sin(x_1)\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}0\\1.5\sin(y_1)\\0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2\sin(x_3)\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}2\sin(y_3)\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}0.2\\0.3\\0.5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\upsilon}=\begin{bmatrix}0.95\\0.02\\0.03\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}0.8\\0.2\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}0.95\\0.05\end{bmatrix},\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)=\begin{bmatrix}0.5\sin(t)\\0.25\\0.25\sin(2t)\end{bmatrix}.$$

با توجه به دو تابع برداری $\boldsymbol{F}_1$ و $\boldsymbol{F}_2$ که در بالا تعریف شده‌اند و شرط لیپ‌شیتز فرض۲، ثابت‌های δ_1، δ_2 و δ_t به صورت $\delta_1=1.5$، $\delta_2=2$ و $\delta_t=3.5$ نتیجه می‌شود. پارامتر ناشناخته θ، بردار توابع غیرخطی‌ساز شعاعی $\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)$ مرتبط با سیستم لور پیرو و نگاشت غیرخطی یکنوای $\boldsymbol{\rho}(.)$ به صورت زیر فرض شده‌اند.

$$\theta=1.5,\quad \boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)=\begin{bmatrix}\left(0.9-0.4\sin u_{1_x}\right)u_{1_x}\\ \left(0.4+0.2\cos u_{2_x}\right)u_{2_x}\\ \left(0.8+0.4\sin u_{3_x}\right)u_{3_x}\end{bmatrix},$$

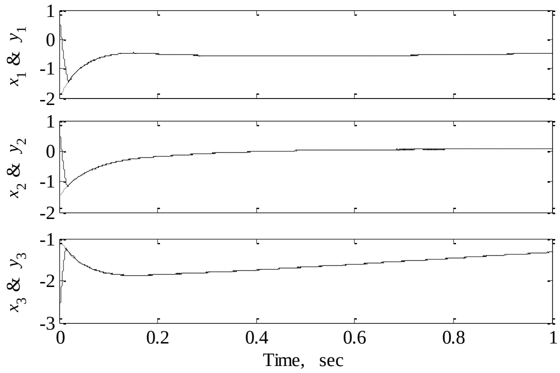
$$\rho(\tau)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\tau)(|\tau|+2) & \text{if } \tau\ne 0\\ [-2,2] & \text{if } \tau=0\end{cases}$$

با توجه به بردار توابع غیرخطی‌ساز در نظر گرفته شده‌ی $\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)$، ضرایب ثابت $\alpha_{1_x}=0.5$، $\alpha_{2_x}=0.$[illegible]، $\alpha_{3_x}=0.$[illegible]، $\beta_{1_x}=1.3$، $\beta_{2_x}=0.6$ و $\beta_{3_x}=0.5$ نتیجه می‌شوند. ماتریس مثبت معین متقارن $\boldsymbol{P}$، به صورت $\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(3,4,2)$ اختیار شده است که تساوی ماتریسی $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{H}$ نیز همواره برقرار می‌باشد. بردار ورودی‌های کنترلی اعمالی به شمول دیفرانسیلی لور پیرو و قوانین به‌روزرسانی مرتبط با دو پارامتر ثابت ناشناخته‌ی γ و κ به صورت رابطه (۳۱) حاصل می‌شوند. لازم به ذکر است که بردار ورودی‌های رابطه (۳۱) با استناد به ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۹)، نوشته شده‌اند. بنابراین انتظار خواهیم داشت که سوئیچینگ‌های فرکانس بالایی در سیگنال کنترلی رخ دهد.

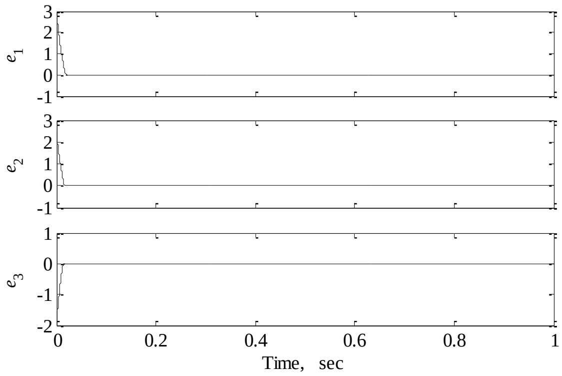
$$\begin{aligned}
&\dot{\hat{\gamma}}=3.5\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)\left(3|e_1|+4|e_2|+2|e_3|\right),\ \hat{\gamma}(0)=0.5\\
&\dot{\hat{\kappa}}=\sqrt{9e_1^2+16e_2^2+4e_3^2},\ \hat{\kappa}(0)=0.25\\
&\mu_k=\left(\textstyle\sum_{i=1}^{3}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|\right)_k+\left(\textstyle\sum_{i=1}^{3}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|\right)_k\\
&\qquad+3.5\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)\hat{\gamma}+\hat{\kappa},\ \text{for } k=1,2,3\\
&\boldsymbol{u}_x=\begin{bmatrix}-2\varepsilon_1\mu_1\operatorname{sgn}(e_1)\\-5\varepsilon_2\mu_2\operatorname{sgn}(e_2)\\-2.5\varepsilon_3\mu_3\operatorname{sgn}(e_3)\end{bmatrix},\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1.1
\end{aligned} \tag{۳۱}$$

شکل‌های ۱ تا ۴ نتایج شبیه‌سازی مرتبط با سنکرون‌سازی میان دو شمول دیفرانسیلی لور رابطه ۳۰ را با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه ۳۱ نشان می‌دهند. شکل ۱ پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت را با در نظر گرفتن شرایط اولیه $\boldsymbol{x}(0)=[1\ 1\ -3]^T$ و $\boldsymbol{y}(0)=[-2\ -1.5\ -1]^T$ نشان می‌دهد. نمودار خطای سنکرون‌سازی در شکل ۲ به تصویر کشیده شده

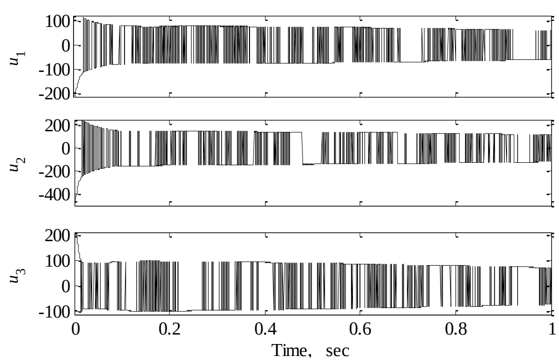
است. با دقت در شکل ۲ می‌توان دید که همه‌ی خطاهای سنکرون‌سازی تقریباً بعد از گذشت ۰.۰۲ ثانیه به صفر همگرا شده‌اند. شکل ۳ ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x$ را که به سیستم لور پیرو اعمال شده‌اند، نشان می‌دهد. همانطوری که از قبل نیز پیش‌بینی شده بود، سوئیچینگ‌های فرکانس بالا در سیگنال‌های کنترلی دیده می‌شود. شکل ۴ پاسخ‌های زمانی مرتبط با $\hat{\gamma}$ و $\hat{\kappa}$ را نشان می‌دهد که در واقع تخمین دو پارامتر ثابت ناشناخته‌ی γ و κ هستند. با دقت در شکل ۴ مشخص می‌شود که مقادیر تخمین پارامترهای γ و κ به ۳.۶ و ۰.۳۸ همگرا شده‌اند که با مقادیر اصلی این پارامترهای ثابت ناشناخته $\|\theta\| \le \gamma = 1.5$ و $\|\boldsymbol{\Psi}_y\| \le \kappa = 0.3124$ متفاوت هستند که این موضوع در واقع تاییدی بر یادآوری ۳ می‌باشد.



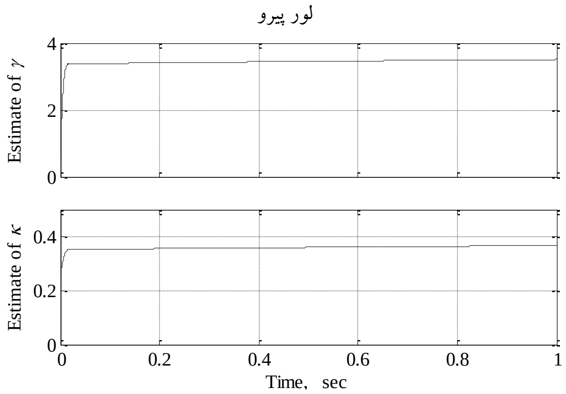
شکل ۱: پاسخ زمانی‌های متغیرهای حالت دو شمول دیفرانسیلی لور مرجع و پیرو رابطه (۳۰) با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۱)



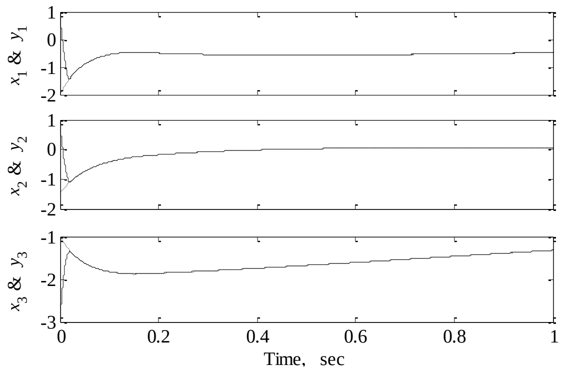
شکل ۲: پاسخ‌های زمانی خطاهای سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور مرجع و پیرو رابطه (۳۰) با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۱)



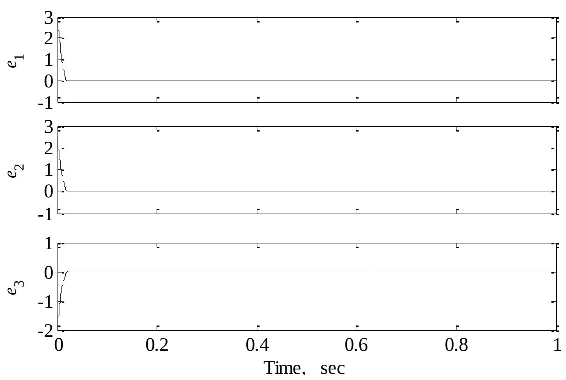
شکل ۳: ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x$ رابطه‌ی (۳۱) اعمال شده به شمول دیفرانسیلی



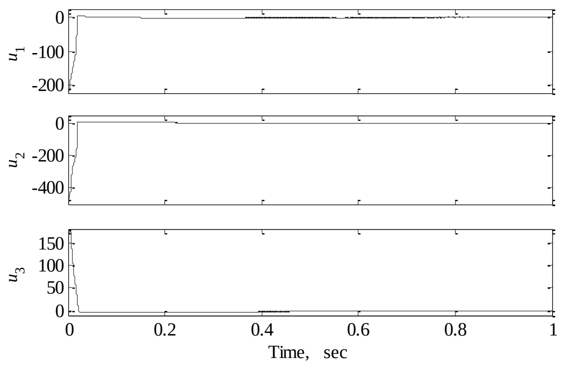
شکل ۴: پاسخ‌های زمانی $\hat{\gamma}$ و $\hat{\kappa}$ با وجود ورودی‌های کنترلی (۳۱)



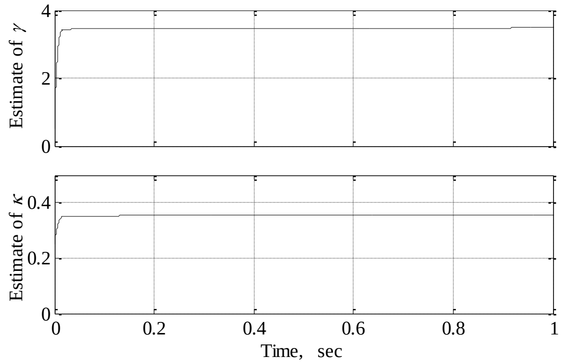
شکل ۵: پاسخ زمانی‌های متغیرهای حالت دو شمول دیفرانسیلی لور مرجع و پیرو رابطه (۳۰) با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۲)



شکل ۶: پاسخ‌های زمانی خطاهای سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور مرجع و پیرو رابطه (۳۰) با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۲)



شکل ۷: ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x$ رابطه‌ی (۳۲) اعمال شده به شمول دیفرانسیلی لور پیرو



شکل ۸: پاسخ‌های زمانی $\hat{\gamma}$ و $\hat{\kappa}$ با وجود ورودی‌های کنترلی (۳۲)

شبیه‌سازی‌های مرتبط با همین زیربخش را با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۲) تکرار می‌کنیم تا سوئیچینگ‌های فرکانس بالا کاهش یافته و سیگنال‌های کنترلی اعمالی به شمول لور پیرو تا حدود زیادی صاف و هموار شوند. ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۲) با استناد به ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۲۳) نوشته شده‌اند.

شکل‌های ۵ الی ۸ نتایج شبیه‌سازی مرتبط با سنکرون‌سازی دو شمول لور مرجع و پیرو رابطه (۳۰) را با وجود ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۲) نشان می‌دهند. پاسخ‌های زمانی دو شمول لور مرجع و پیرو و همچنین خطاهای سنکرون‌سازی به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ آورده شده‌اند. شکل ۷ ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۲) را به تصویر می‌کشد که با دقت در این شکل می‌توان تشخیص داد که سوئیچینگ‌های فرکانس بالا حذف شده‌اند. شکل ۸ نیز پاسخ‌های زمانی مرتبط با $\hat{\gamma}$ و $\hat{\kappa}$ را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_x=\begin{bmatrix} -2\varepsilon_1\upsilon_1^2\dfrac{3e_1}{|3e_1|\upsilon_1+\chi_1(t)} \\ -5\varepsilon_2\upsilon_2^2\dfrac{4e_2}{|4e_2|\upsilon_2+\chi_2(t)} \\ -2.5\varepsilon_3\upsilon_3^2\dfrac{2e_3}{|2e_3|\upsilon_3+\chi_3(t)}\end{bmatrix}, \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1.1\\
&\upsilon_k=\left(\textstyle\sum_{i=1}^{3}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|\right)_k+\left(\textstyle\sum_{i=1}^{3}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|\right)_k\\
&\quad+3.5(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|)\hat{\gamma}+\hat{\kappa}+|\Omega_k|, \text{for } k=1,2,3\\
&\boldsymbol{\Omega}=[3e_1 \quad 4e_2 \quad 2e_3],\ \chi_k(t)=5e^{-0.001t}\\
&\dot{\hat{\gamma}}=3.5(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|)(3|e_1|+4|e_2|+2|e_3|), \hat{\gamma}(0)=0.5\\
&\dot{\hat{\kappa}}=\sqrt{9e_1^2+16e_2^2+4e_3^2}, \hat{\kappa}(0)=0.25
\end{aligned} \quad (۳۲)$$

۴-۲ شبیه‌سازی مرتبط با سنکرون‌سازی دو سیستم Drill String

در این زیربخش، ابتدا سیستم drill string [۱ و ۱۴] و اجزای تشکیل‌دهنده آن به طور مختصر معرفی می‌شوند. همچنین در ادامه، معادلات دینامیکی این سیستم همراه با پارامترهای موجود در آن معرفی خواهند شد. این دستگاه شامل تقویت‌کننده توان، موتور DC، دو دیسک چرخشی (یک دیسک چرخشی بالایی و یک دیسک چرخشی پایینی) و میله با سختی کم[۱] می‌باشد. موتور DC از طریق یک گیربکس به دیسک بالایی متصل بوده و ولتاژ ورودی موتور DC از طریق کامپیوتر به آن داده می‌شود. میله با سختی کم به گونه‌ای دو دیسک بالایی و پایینی را به هم متصل کرده است که هر دو دیسک می‌توانند حول مرکزهای هندسی خود به راحتی بچرخند. وضعیت‌های زاویه‌ایی مرتبط با هر یک از دو دیسک با استفاده از دو انکودر افزایشی[۲] جداگانه اندازه‌گیری می‌شوند. معادلات دینامیکی توصیف‌کننده این سیستم در رابطه (۳۳) آورده شده است [۱ و ۱۴].

$$\begin{aligned}
&J_u\ddot{\theta}_u+k_\theta(\theta_u-\theta_l)+T_{fu}(\dot{\theta}_u)-k_m u=0\\
&J_L\ddot{\theta}_L-k_\theta(\theta_u-\theta_l)+T_{fl}(\dot{\theta}_l)=0
\end{aligned} \quad (۳۳)$$

در این رابطه، u بیانگر ورودی کنترلی (همان ولتاژ ورودی به موتور DC است که مقدار آن به بازه‌ی $[-5v, 5v]$ محدود می‌باشد)، θ_u و θ_l نیز به ترتیب بیانگر وضعیت زاویه‌ایی دیسک بالایی و پایینی می‌باشند. J_u، k_θ، k_m و J_L ضرایب ثابتی هستند که مقادیرشان در جدول ۱ آورده شده است. T_{fu} بیانگر گشتاور اصطکاکی است که بر روی دیسک بالایی وارد شده و این گشتاور با استفاده از رابطه (۳۴) بیان می‌شود [۱ و ۱۴].

$$\begin{aligned}
&T_{fu}(\dot{\theta}_u)\in\begin{cases} T_{cu}(\dot{\theta}_u)\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_u)-(b_u-\Delta b_u)\dot{\theta}_u & \text{for } \dot{\theta}_u=0\\ [-T_{su}+\Delta T_{su},\ T_{su}+\Delta T_{su}] & \text{for } \dot{\theta}_u\neq 0\end{cases}\\
&T_{cu}(\dot{\theta}_u)=T_{su}+\Delta T_{su}\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_u)+b_u|\dot{\theta}_u|+\Delta b_u\dot{\theta}_u
\end{aligned} \quad (۳۴)$$

در این رابطه، Δb_u، ΔT_{su}، T_{su} و b_u ضرایب ثابتی هستند که مقادیرشان در جدول (۱) آورده شده است. T_{fl} نیز به طور مشابه بیانگر گشتاور اصطکاکی است که بر روی دیسک پایینی وارد شده و با رابطه (۳۵) توصیف می‌شود.

$$\begin{aligned}
&T_{fl}(\dot{\theta}_l)\in\begin{cases} T_{cl}(\dot{\theta}_l)\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_l)+0.1\dot{\theta}_l & \text{for } \dot{\theta}_l\neq 0\\ [-T_{sl},T_{sl}] & \text{for } \dot{\theta}_l\neq 0\end{cases}\\
&T_{cl}(\dot{\theta}_l)=T_{cl}+(T_{sl}-T_{cl})e^{-\left|\frac{\dot{\theta}_l}{\omega_{sl}}\right|^{\delta_{sl}}}+b_l|\dot{\theta}_l|
\end{aligned} \quad (۳۵)$$

در رابطه (۳۵)، b_l، δ_{sl}، T_{cl}، T_{sl} و ω_{sl} ضرایب ثابتی هستند که مقادیرشان در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱: مقادیر ضرایب ثابت مدل دینامیکی سیستم Drill-string [۱ و ۱۴]

پارامتر	مقدار	واحد
k_m	4.3228	[N.m/v]
J_u	0.4765	[kg.m²]
T_{su}	0.37975	[N.m]
ΔT_{su}	-0.00575	[N.m]
b_u	2.4245	[kg.m²/rad.sec]
Δb_u	-0.0084	[kg.m²/rad.sec]
k_θ	0.075	[N.m/rad]
J_L	0.035	[kg.m²]
T_{sl}	0.26	[N.m]
T_{cl}	0.05	[N.m]
ω_{sl}	2.2	[rad/sec]
δ_{sl}	1.5	[-]
b_l	0.009	[kg.m²/rad.sec]

۱ Low-stiffness string

۲ Incremental encoder

با انتخاب بردار متغیرهای حالت به صورت $\boldsymbol{y}=[y_1\quad y_2\quad y_3]^T=[\theta_u-\theta_l\quad \dot{\theta}_u\quad \dot{\theta}_l]^T$، معادلات دینامیکی سیستم drill-string مرجع در قالب معادلات سیستم شمول لور به صورت رابطه (۳۶) نتیجه می‌گردد.

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_y+\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y),\ \boldsymbol{\omega}_y\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}) \qquad (۳۶)$$

در این رابطه، ماتریس‌های $\boldsymbol{A}\in\Re^{3\times3}$، $\boldsymbol{G}\in\Re^{3\times2}$ و $\boldsymbol{H}\in\Re^{2\times3}$، نگاشت غیرخطی یکنوای $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y})\in\Re^{2}$ و بردار ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)\in\Re^{3}$ به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -k_\theta/J_u & 0 & 0\\ k_\theta/J_l & 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1/J_u & 0\\ 0 & 1/J_l\end{bmatrix},\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\rho}(\begin{bmatrix}y_2\\ y_3\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}T_{fu}(y_2)\\ T_{fl}(y_3)\end{bmatrix},\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{k_m}{J_u}u_2\\ 0\end{bmatrix}$$

همانطوری که در بالا نیز ذکر شد باید توجه داشت که u_2 در واقع ولتاژ ورودی به بخش درایو بوده که همواره مقدار این ولتاژ باید در محدوده‌ی $[-5v,5v]$ قرار داشته باشد تا آسیبی به اجزای الکتریکی سیستم وارد نشود. در این مثال، فرض کرده‌ایم که ولتاژ ورودی به سیستم drill string مرجع، مقدار ثابت $u_2=2.7$ است. ماتریس $\boldsymbol{A}$ نیز به صورت ترکیب خطی محدب دو ماتریس معلوم $\boldsymbol{A}_1$ و $\boldsymbol{A}_2$ نوشته می‌شود که در زیر این ترکیب خطی نشان داده شده است. باید توجه داشت که در ادامه در طراحی ورودی‌های کنترلی برای سیستم drill string پیرو، فرض می‌شود که دو ضریب ثابت υ_1 و υ_2 نامعلوم هستند و در اختیار طراح قرار ندارند.

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ \dfrac{-3k_\theta}{J_u} & 0 & 0\\ \dfrac{9k_\theta}{J_l} & 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{8}{9} & \dfrac{-8}{9}\\ \dfrac{-7k_\theta}{9J_u} & 0 & 0\\ \dfrac{k_\theta}{9J_l} & 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\upsilon}=\begin{bmatrix}\upsilon_1\\ \upsilon_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.9\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\upsilon_1\boldsymbol{A}_1+\upsilon_2\boldsymbol{A}_2$$

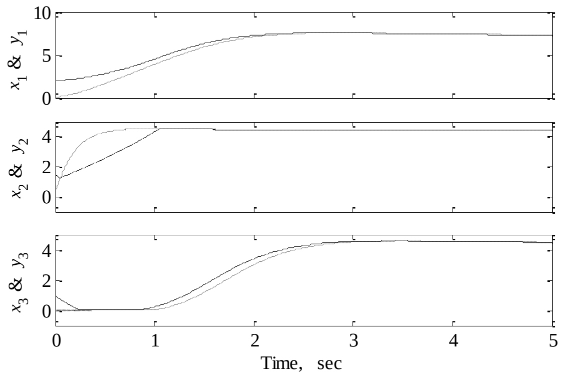
معادلات دینامیکی سیستم drill string پیرو نیز به صورت رابطه (۳۷) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_x+\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x),\ \boldsymbol{\omega}_x\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}),$$
$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.9\end{bmatrix},\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{k_m}{J_u}u_{2_x}\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۳۷)$$

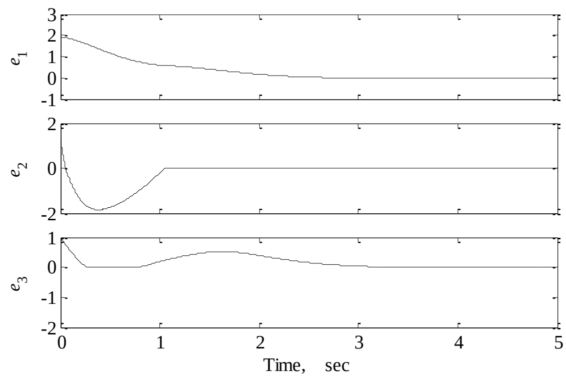
در ادامه فرض می‌کنیم که دو ضریب ثابت λ_1 و λ_2 نامعلوم هستند و در اختیار طراح قرار ندارند. برای سنکرون‌سازی دو سیستم drill string مرجع و پیرو، بردار ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x=[0\quad u_{2_x}\quad 0]^T$ باید چنان طراحی شود که متغیرهای حالت سیستم drill string پیرو متغیرهای حالت متناظر سیستم مرجع را به خوبی دنبال کنند و خطاهای میان متغیرهای حالت متناظر به سمت صفر همگرا شوند. با توجه به بردار غیرخطی‌ساز $\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)$ که در رابطه (۳۷) در نظر گرفته شده است، ضریب ثابت α_{2_x} به صورت $\alpha_{2_x}=k_m/J_u$ نتیجه می‌شود. ماتریس مثبت معین متقارن $\boldsymbol{P}$ نیز به صورت $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(0.5,J_u,J_l)$ انتخاب شده است که برای این مثال شرط تساوی ماتریسی $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{H}$ را برآورده می‌سازد. بردار ورودی‌های کنترلی اعمالی به سیستم drill string پیرو به صورت رابطه‌ی (۳۸) حاصل می‌شود.

$$\dot{\hat{\kappa}}=\sqrt{0.25e_1^2+J_u^2e_2^2+J_l^2e_3^2},\hat{\kappa}(0)=1$$
$$\mu_1=\mu_3=0,\ \mu_2=(\textstyle\sum_{i=1}^{2}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|)_2+(\sum_{i=1}^{2}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|)_2+\hat{\kappa} \qquad (۳۸)$$
$$\boldsymbol{u}_x=\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{J_u}{k_m}\varepsilon_2\mu_2\mathrm{sgn}(e_2)\\ 0\end{bmatrix},\varepsilon_2=1.1$$

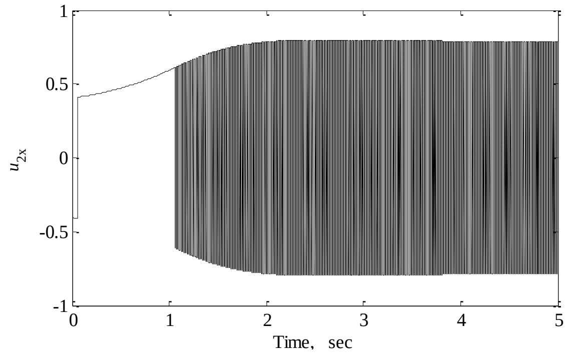
شکل‌های ۹ الی ۱۲ نتایج مرتبط با سنکرون‌سازی دو سیستم drill string رابطه‌های (۳۶) و (۳۷) را با وجود ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۸)، نشان می‌دهند. پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت دو سیستم مرجع و پیرو در شکل ۹ آورده شده است و شرایط اولیه برای این دو سیستم به صورت $\boldsymbol{x}(0)=[2\ 1\ .5]^T$ و $\boldsymbol{y}(0)=[0.1\ 0.2\ 0.1]^T$ در نظر گرفته شده است. شکل ۱۰ پاسخ زمانی خطاهای سنکرون‌سازی مرتبط با دو سیستم رابطه‌های (۳۶) و (۳۷) را به تصویر می‌کشد که تقریباً بعد از گذشت ۳ ثانیه، متغیرهای متناظر با هم سنکرون شده و تمامی خطاهای سنکرون‌سازی به صفر همگرا شده‌اند.



شکل ۹: پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت دو سیستم drill string مرجع و پیرو با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۸)

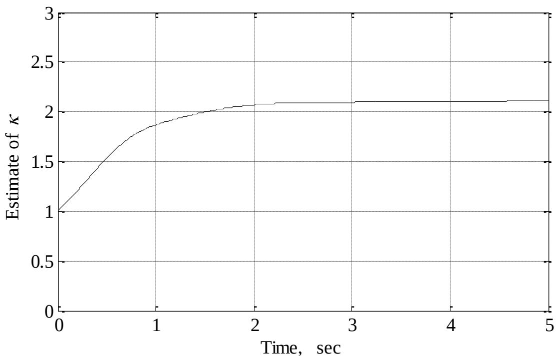


شکل ۱۰: پاسخ‌های زمانی خطاهای سنکرون‌سازی دو سیستم drill string با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۸)

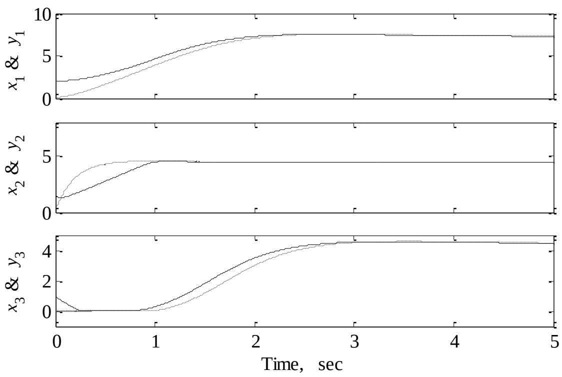


شکل ۱۱: پاسخ زمانی ورودی کنترلی u_{2x} رابطه (۳۸) اعمال شده به سیستم drill string پیرو رابطه (۳۷)

شکل ۱۱ ورودی کنترلی u_{2x} را نشان می‌دهد که به سیستم drill string پیرو اعمال شده است. این شکل به خوبی نشان می‌دهد که ورودی کنترلی u_{2x} دارای سوئیچینگ فرکانس‌های بالای شدیدی است که مطلوب نبوده و تقریباً اعمال این ورودی کنترلی را در پیاده‌سازی عملی غیرممکن می‌سازد. پاسخ زمانی $\hat{\kappa}$ نیز در شکل ۱۲ آورده شده است. با دقت در شکل ۱۲ مشخص می‌شود که مقدار نهایی $\hat{\kappa}$ به حدود ۲.۲ رسیده است و با مقدار واقعی پارامتر κ که برابر با $|(k_m / J_u)u_2| = 24.5$ است، متفاوت می‌باشد.



شکل ۱۲: پاسخ زمانی $\hat{\kappa}$ با اعمال ورودی کنترلی (۳۸)



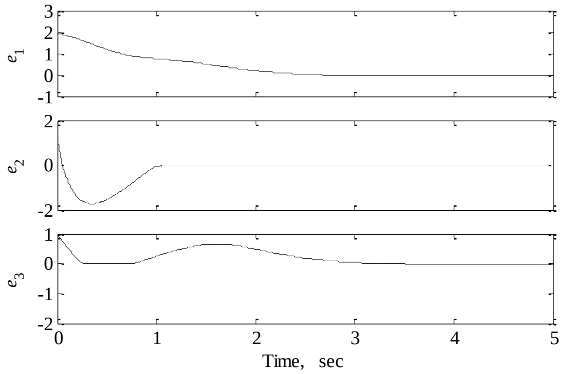
شکل۱۳: پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت دو سیستم drill string مرجع و پیرو با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۹)

در ادامه، شبیه‌سازی‌های مرتبط با همین زیربخش را با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۹) تکرار می‌کنیم تا سوئیچینگ‌های فرکانس بالای ورودی کنترلی را تا حد زیادی کاهش دهیم.

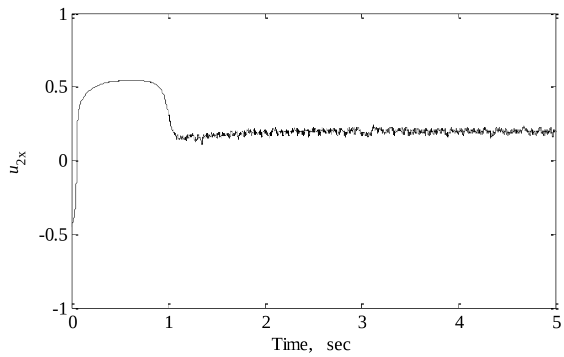
$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{J_u}{k_m}\varepsilon_2 \upsilon_2^2 \dfrac{J_u e_2}{|J_u e_2|\upsilon_2 + \chi_2(t)} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
&\varepsilon_2 = 1.1, \chi_2(t) = 0.15e^{-0.005t}, \upsilon_1 = \upsilon_3 = 0, \\
&\dot{\hat{\kappa}} = \sqrt{0.25e_1^2 + J_u^2 e_2^2 + J_l^2 e_3^2}, \hat{\kappa}(0) = 1, \\
&\upsilon_2 = \left(\sum_{i=1}^{2} |\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e}|\right)_2 + \left(\sum_{i=1}^{2} |\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}|\right)_2 + \hat{\kappa} + |J_u e_2|,
\end{aligned}
\tag{۳۹}
$$

شکل‌های ۱۳ الی ۱۶ نتایج شبیه‌سازی مرتبط با سنکرون‌سازی دو سیستم رابطه‌های (۳۶) و (۳۷) را با وجود اعمال ورودی کنترلی رابطه (۳۹) به سیستم drill string پیرو نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که تمامی شرایط اولیه به طور مشابه و یکسان با شبیه‌سازی قبل انتخاب شده‌اند و در واقع فقط ورودی کنترلی رابطه (۳۹) جایگزین ورودی کنترلی رابطه (۳۸) شده است. شکل‌های ۱۳ و ۱۴ به ترتیب پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت دو سیستم drill string مرجع و پیرو و خطاهای سنکرون‌سازی را با اعمال ورودی کنترلی رابطه (۳۹) نشان می‌دهند.

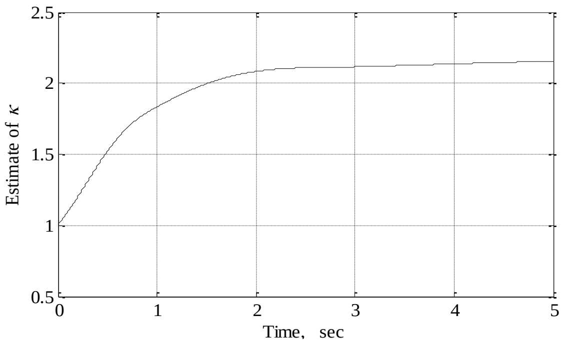
شکل ۱۵ ورودی کنترلی u_{2x} را به تصویر می‌کشد که به سیستم drill string پیرو اعمال شده است. مقایسه میان دو شکل ۱۵ و ۱۱ نشان می‌دهد که سوئیچینگ‌های فرکانس بالا تا حد بسیار زیادی در این حالت کاهش یافته است و ورودی کنترلی شکل ۱۵ در پیاده‌سازی عملی قابل اعمال به سیستم پیرو می‌باشد. شکل ۱۶ نیز پاسخ زمانی $\hat{\kappa}$ را با وجود ورودی کنترلی رابطه (۳۹) نشان می‌دهد که در این حالت نیز مقدار نهایی $\hat{\kappa}$ به مقدار واقعی و نامی پارامتر κ همگرا نشده است.



شکل۱۴: پاسخ‌های زمانی خطاهای سنکرون‌سازی دو سیستم drill string با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۹)



شکل۱۵: پاسخ زمانی ورودی کنترلی u_{2x} رابطه (۳۹) اعمال شده به سیستم drill string پیرو رابطه (۳۷)



شکل۱۶: پاسخ زمانی ورودی کنترلی u_{2x} رابطه (۳۹) اعمال شده به سیستم drill string پیرو رابطه (۳۷)

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، در ابتدا مدل جامع و کامل‌تری از شمول دیفرانسیلی لور نسبت به مدل‌های دیگر ارائه شد و در ادامه مسئله سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور با فرض ناشناخته بودن پارامترهای شمول لور و همچنین فرض وجود غیرخطی‌سازهای شعاعی در مسیر ورودی‌های کنترلی، مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا، دو دسته ورودی‌های کنترلی سنکرون‌ساز با استفاده مستقیم از تئوری پایداری لیاپانوف طراحی گردیدند. دسته‌ی اول از ورودی‌های کنترلی به علت استفاده از تابع علامت دارای سوئیچینگ‌های فرکانس بالایی بودند که در دسته دوم ورودی‌های کنترلی پیشنهادی، این مشکل برطرف شد. پایداری دینامیک خطاهای سنکرون‌سازی و همگرا شدن این خطاها به صفر با وجود هرکدام از دو دسته‌ی ورودی‌های کنترلی با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف به اثبات رسیدند. برای نشان دادن عملکرد و کارایی بالای ورودی‌های کنترلی طراحی شده، دو شبیه‌سازی کامپیوتری در ادامه مقاله آورده شدند که یکی از مثال‌های شبیه‌سازی مرتبط با یک کاربرد عملی بود و در واقع مسئله سنکرون‌سازی دو سیستم drill string را مورد شبیه‌سازی قرار داد. نتایج شبیه‌سازی‌های کامپیوتری نیز کارایی ورودی‌های کنترلی را در پایدارسازی دینامیک خطاهای سنکرون‌سازی با وجود غیرخطی‌سازهای شعاعی به خوبی نشان داد.

مراجع

[1] J.C.A Bruin, A. Doris, N. Wouw, W.P.M.H. Heemels, and H. Nijmeijer, “Control of mechanical motion systems with non-collocation of actuation and friction: A Popov criterion approach for input-to-state stability and set-valued nonlinearities,” Automatica, vol. 45, no. 2, pp. 405-415, 2009.

[2] B. Brogliato, “Some perspectives on the analysis and control of complementarity systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, no. 6, pp. 918-935, 2003.

[3] R. Ma, “Second order periodic problems in the presence of dry friction,” Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 12, no. 6, pp. 3306-3314, 2011.

[4] K. Addi, S. Adly, B. Brogliat, and D. Goeleven, “A method using the approach of Moreau and Panagiotopoulos for the mathematical formulation of non-regular circuits in electronics,” Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 1, no. 1, pp. 30-43, 2007.

[5] C. Glocker, “Models of non-smooth switches in electrical systems,” International Journal of Circuit Theory and Applications, vol. 33, no. 3, pp. 205-234, 2005.

[6] E. S. Pyatnitskiy and L.B. Rapoport, “Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control system,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 43, no. 3, pp. 219-229, 1996.

[7] J.W. Chen, J.F. Huang, and L.Y. Lo, “Viable control for uncertain nonlinear dynamical systems described by differential inclusions,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 315, no. 1, pp. 41-53, 2006.

[8] M.F. Miranda and V.J.S. Leite, “Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying state delay: A convex approach,” Journal of The Franklin Institute, vol. 348, no. 4, pp. 568-588, 2011.

[9] J.P. Aubin, J. Lygeros, M. Quincampoix, S. Sastry, and N. Seub, “Impulse differential inclusions: A viability approach to hybrid systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, no. 1, pp. 2-20, 2002.

[10] A. Schaft and J. Schumacher, “Complementarity modelling of hybrid systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 43, no. 4, pp. 483-490, 1998.

[11] A.A. Zevin and M.A. Pinsky, “General solution of stability problem for plane linear switched systems and differential inclusions,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 9, pp. 2149-2153, 2008.

[12] S. Balochian and A.K. Sedigh, “Sufficient condition for stabilization of linear time invariant fractional order switched systems and variable structure control stabilizers,” ISA Transaction, vol. 51, no. 1, pp. 65-73, 2012.

[13] Z. Sun and S.S. Ge, “Analysis and synthesis of switched control systems,” Automatica, vol. 41, no. 2, pp. 181-195, 2005.

[14] A. Doris, A.L. Juloski, N. Mihajlovic, W.P.M.H Heemels, N. Wouw and H. Nijmeijer, “Observer designs for experimental non-smooth and discontinuous systems,” IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 16, no. 6, pp.1323-1332, 2008.

[15] W.P.M.H. Heemels and S. Weiland, “Input-to-state stability and interconnections of discontinuous dynamical systems,” Automatica, vol. 44, no. 12, pp. 3079-3086, 2008.

[16] V. Azhmyakov, “On the set-valued approach to optimal control of sliding mode processes,” Journal of The Franklin Institute, vol. 349, no. 4, pp. 1323-1336, 2012.

[17] E.N. Mahmudov, “On duality in problems of optimal control described by convex inclusions of Goursat-Darboux type,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 307, no. 2, pp. 628-640, 2005.

[18] Y. Ren, L. Hu, and R. Sakthivel, "Controllability of impulsive neutral stochastic functional differential inclusions with infinite delay," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 235, no. 8, pp. 2603-2614, 2011.

[19] J. Huang, Z. Han, X. Cai, and L. Liu, "Control of time-delayed linear differential inclusions with stochastic disturbance," Journal of The Franklin Institute, vol. 347, no. 10, pp. 1895-1906, 2010.

[20] X. Liu, J. Wang, Z. Duan, and L. Huang, "New absolute stability criteria for time-delay Lur'e systems with sector-bounded nonlinearity," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 20, no. 6, pp. 659-672, 2010.

[21] J. Huang, Z. Han, X. Cai, and L. Liu, "Adaptive full-order and reduced order observers for the Lur'e differential inclusion system," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 16, no. 7, pp. 2869-2879, 2011.

[22] C. Yang, Q. Zhang, and L. Zhou, "Lur'e Lyapunov functions and absolute stability criteria for Lur'e systems with multiple nonlinearities," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 17, no. 9, pp. 829-841, 2007.

[23] B. Brogliato and W. P. M. H Heemles, "Observer design for Lur'e systems with multivalued mappings: A passivity approach," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 8, pp. 1996-2001, 2009.

[24] J. Huang, Z. Han, and X. Cai, "Note on observer for Lur'e differential inclusion systems," IET Control Theory and Applications, vol. 5, no. 17, pp. 1939-1944, 2011.

[25] D. Chen, G. Yang, and Z. Han, "Impulsive observer for input-to-state stability based synchronization of Lur'e differential inclusion system," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 17, no. 7, pp. 2990-2996, 2012.

[26] J. Huang and Z. Han, "Adaptive non-fragile observer design for the uncertain Lur'e differential inclusion system," Applied Mathematical Modelling, vol. 37, no. 1, pp. 72-81, 2013.

[27] J. Huang, P. Wang, Z. Han, and X. Cai, "Observer design for the Lur'e differential inclusion system with Markovian jumping parameters," International Journal of System Science, vol. 44, no. 12, pp. 2338-2348, 2013.

[28] X. Cai, J. Huang, and L. Liu, "Stability analysis of linear time-delay differential inclusion systems subject to input saturation," IET Control Theory and Applications, vol. 4, no. 11, pp. 2592-2602, 2010.

[29] Y. Zheng, C. Wen, and Z. Li, "Robust adaptive asymptotic tracking control of uncertain nonlinear systems subject to nonsmooth actuator nonlinearities," International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 27, no. 1, pp. 108-121, 2013.

[30] J. Na, "Adaptive prescribed performance control of nonlinear systems with unknown dead zone," International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 27, no. 5, pp. 426-446, 2013.

[31] X.S. Wang, C.Y. Su, and H. Hong, "Robust adaptive control of a class of nonlinear systems," Automatica, vol. 40, no. 3, pp.401-413, 2004.

[32] J.M. Gomes da Silva Jr., E.B. Castelan, J. Corso, and D. Eckhard, "Dynamic output feedback stabilization for systems with sector-bounded nonlinearities and saturating actuators," Journal of the Franklin Institute, vol. 350, no. 3, pp. 464-484, 2013.

[33] S.M. Lee, J.H. Park, and O.M. Kwon, "Improved asymptotic stability analysis for Lur'e systems with sector and slope restricted nonlinearities," Physics Letters A, vol. 362, no. 5, pp. 348-351, 2007.

[34] B. Zhou, W. X. Zheng, and G. R. Duan, "An improved treatment of saturation nonlinearity with its application to control of systems subject to nested saturation," Automatica, vol. 47, no. 2, pp. 306-315, 2011.

[35] D. Karimipour, S. Pourdehi, and P. Karimaghaee, "Adaptive unstable periodic orbit stabilization of uncertain time-delayed chaotic systems subjected to input nonlinearity," System and Control Letters, vol. 61, no. 12, pp. 1168-1174, 2012.

[36] E. Rocha-Cózatl and J.A. Moreno, "Dissipative design of unknown input observers for systems with sector nonlinearities," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 21, no. 14, pp. 1623-1644, 2011.

[37] G. Smirnov, Introduction to the Theory of Differential Inclusions. SIAM: Philadelphia, 2002.

[38] J. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusions: Set-valued Maps and Viability Theory, Springer Verlag: Berlin, 1984.

[39] S. Boyd, E.L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Society for Industrial and Applied Mathematics: Philadelphia, 1994.

پیوست ۱

با توجه به تعریف $\Omega_k = \sum_{d=1}^{n} e_d p_{dk}$ از رابطه‌ی (۱۰)، می‌توان رابطه (۱-۱) را نتیجه گرفت.

$$\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P\phi}_x(\boldsymbol{u}_x) = \sum_{k=1}^{n} \Omega_k \phi_{k_x}(u_{k_x}) \tag{۱-۱}$$

با جایگذاری ورودی‌های کنترلی رابطه (۲۳) در فرض ۴ مرتبط با غیرخطی‌ساز شعاعی یعنی ، نامساوی رابطه (۲-۱) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\alpha_{k_x}\left(\frac{1}{\alpha_{k_x}}\right)^2 \varepsilon_k^2 \upsilon_k^4 \frac{\Omega_k^2}{\left(|\Omega_k|\upsilon_k + \chi_k(t)\right)^2} \\ &\leq -\frac{1}{\alpha_{k_x}} \varepsilon_k \upsilon_k^2 \frac{\Omega_k}{|\Omega_k|\upsilon_k + \chi_k(t)} \phi_{k_x}(u_{k_x}) \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

از آنجایی که υ_k، ε_k و $\chi_k(t)$ همواره مثبت هستند، نامساوی رابطه (۲-۱) به صورت نامساوی رابطه (۳-۱) ساده و بازنویسی می‌شود.

$$\Omega_k \phi_{k_x}(u_{k_x}) \leq -\varepsilon_k \upsilon_k^2 \frac{\Omega_k^2}{|\Omega_k|\upsilon_k + \chi_k(t)} \tag{۳-۱}$$

بسیار واضح است که نامساوی $\sum_{k=1}^{n} \Omega_k \phi_{k_x}(u_{k_x}) \leq -\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k \upsilon_k^2 \Omega_k^2}{|\Omega_k|\upsilon_k + \chi_k(t)}$ با رابطه (۳-۱) یکسان است. بنابراین نامساوی رابطه (۲۵) اثبات شد.

Industrial Control Center of Excellence
K.N. Toosi University of Technology

Journal of Control
(ISSN 2008-8345)

A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology, Vol. 7, No. 2, Summer 2013.

Publisher: **I**ranian **S**ociety of **I**nstrumentation and **C**ontrol **E**ngineers

Managing Director: Prof. Iraj Goodarznia

Editor-in-Chief: Prof. Ali Khaki-Sedigh

Tel: 84062317

Email: sedigh@kntu.ac.ir

Assistant Editor: Prof. Hamid Khaloozadeh, Dr. Mahdi Aliyari Shoorehdeli

Executive Director: Dr. Mahdi Aliyari Shoorehdeli, Tel: 84062403, Email: aliyari@kntu.ac.ir

P.O. Box 15815-3595, Tehran – IRAN
Tel : (+9821) 81032231
Fax: (+9821) 81032200

www.joc-isice.ir control@isice.ir

I S I C E

Journal of Control

ISSN 2008-8345

Industrial Control Center of Excellence
K.N. Toosi University of Technology

A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology

Vol. 7, No. 2, Summer 2013

Contents

www.joc-isice.ir