

تخمین پارامتر مدل‌های استاتیک چند ورودی با وجود ورودی و خروجی آغشته به نویز

مسعود مروج خراسانی^۱، محمد حائری^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، m_moravej_kh@ee.sharif.edu

^۲ استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، Haeri@sina.sharif.edu

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۳/۲/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۳/۳/۲۷)

چکیده: این مقاله شناسایی دسته‌ای از سیستم‌های استاتیکی با نویز بر روی ورودی و خروجی را بررسی می‌کند. این دسته شامل مدل‌های استاتیک $y(t) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(t)$ می‌باشد که در آن u_i ها ورودی‌های نویزی هستند. فرض این است که می‌دانیم بر روی کدام ورودی‌ها نویز نشسته است. به این منظور از روش PEM که از کارآمدترین روش‌های شناسایی کلاسیک است، استفاده می‌شود. سپس با تلفیق آن با روش IV که عرفاً برای شناسایی این دسته از سیستم‌ها به کار می‌رود به روش جدیدی می‌رسیم. این روش ترکیبی را PEM جبران شده می‌خوانیم. چون روش پیشنهادی ترکیبی از دو روشی است که به سادگی قابلیت بازگشتی دارند، می‌توان آن را به صورت بازگشتی نیز به کار برد. اثبات می‌شود که تخمین با این روش بدون بایاس خواهد بود. طی بررسی نتایج شبیه‌سازی، درستی قضایا و نتایج مطرح شده نشان داده می‌شوند و مقایسه‌ای از نظر میانگین و واریانس تخمین میان روش‌های رقیب و روش پیشنهادی به عمل می‌آید. در نهایت یک مثال کاربردی از روش پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: تخمین پارامتر، مدل‌های خطا در متغیر (EIV)، مدل‌های استاتیک چند ورودی، روش پیش‌بینی خطا (PEM)، روش

متغیر ابزار (IV)

Parameter Estimation of Static Multi-Input Model with Noisy Inputs and Output

Masoud Moravej Khorasany, Mohammad Haeri

Abstract: This paper deals with identification of a group of multi-input static systems with noisy inputs and output. This group includes static models $y = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ where u_i s are contaminated by noise. It is assumed that we know which inputs are the contaminated ones. To reach the goal, the PEM which is an efficient classical system identification method is implemented. Then, by combining it with the IV method which is commonly used for identification of the intended group of systems, a new method is proposed. We call the new method as compensated PEM. Since both PEM and IV methods are recursively implementable, the proposed method could be implemented recursively as well. It is proved that the new method results in an unbiased estimation. Simulation results are provided to verify the given theorems and compare the proposed method with its competitors in mean and variance of the estimation. Finally a practical application of the method is investigated.

شناسایی، معمولاً نویز را بر روی داده‌های خروجی در نظر می‌گیرند (مطابق این حالت را در شکل ۱ مشاهده می‌کنیم). آنگاه با نسبت دادن برخی مشخصه‌های آماری به نویز سعی می‌کنند مدل مزبور را شناسایی کنند و در حقیقت نویز موجود بر داده خروجی را خنثی کنند.

۱- مقدمه

در تخمین پارامترهای یک سیستم بر اساس داده‌های استخراج شده از آن، حضور نویز بر روی داده‌ها در بسیاری از کاربردها اجتناب ناپذیر است. از طرفی، مدل‌های کلاسیک و معمول در نظر گرفته شده برای

نیز تعمیم داده شده است [۱۲]. علاوه بر این روش‌ها مدل‌های EIV استاتیکی را تا حدی می‌توان شبیه به موضوعات دیگری مثل مدل‌های فاکتور^۳ دانست [۱۳] که در این حوزه‌ها نیز کارهایی انجام گرفته است. تمامی روش‌های اشاره شده قیدی را روی سیگنال ورودی در نظر نمی‌گیرد و هر سیگنالی تنها با ایستایی و ارگودیک بودن می‌تواند ورودی مناسبی تلقی گردد ولی نویز روی ورودی را سفید منظور می‌کنند. از روش‌هایی که نویز ورودی رنگی را نیز مورد شناسایی قرار می‌دهد می‌توان به روش متغیر ابزاری^۴ (IV) اشاره نمود که البته روشی کم دقت و با حجم محاسباتی کم است.

علاوه بر آنچه گذشت، مدل‌های EIV دینامیکی از نوع خطی و غیرخطی نیز به صورت گسترده مورد پژوهش قرار گرفته‌اند که روش‌های خطی به تفصیل در [۴، ۷، ۱۴] بحث شده‌اند و از روش‌های موجود برای مدل‌های غیرخطی نیز می‌توان به [۱۵، ۱۶] اشاره کرد.

این مقاله قصد دارد از روش پیش‌بینی خطا^۵ (PEM) برای شناسایی مدل‌های EIV استفاده کند. این روش از معروف‌ترین روش‌های شناسایی کلاسیک می‌باشد و دسته‌ی بسیار وسیعی از سیستم‌های خطی را در برمی‌گیرد [۱۷، ۱۸]. در مقاله پیش‌رو اثر نویز ورودی روی نتایج این مدل مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس با ایجاد شرایطی سعی می‌شود از مدل حاصله برای شناسایی سیستم اصلی استفاده شود. از مزایای این روش می‌توان به تخمین بدون بایاس آن حتی در حضور نویز ورودی و نویز خروجی رنگی اشاره کرد که از این نظر این روش را نسبت به روش‌های مرسوم مرور شده برتر می‌سازد. این ویژگی نیز به خواص PEM بر می‌گردد که متعاقباً به آن اشاره می‌شود.

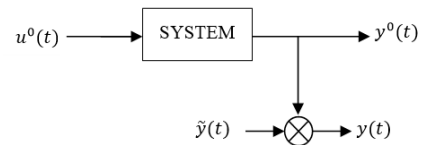
سیر کلی این مقاله به این ترتیب است که در بخش ۲، مسئله و مفروضات آن به طور کلی تعریف می‌شود و در بخش ۳ اثر PEM روی مدل مزبور بررسی خواهد شد. بخش ۴ مدل حاصله از روش PEM را به کمک روش IV تصحیح می‌کند و بخش ۵ نحوه‌ی بازگشتی کردن روش را شرح می‌دهد. در بخش ۶ طی شبیه‌سازی، روش PEM جبران شده با دیگر روش‌ها مقایسه می‌شود و بخش ۷ به یک کاربرد موردی از این روش اشاره می‌کند. در نهایت بخش ۸ به نتیجه‌گیری می‌پردازد.

۲- تعریف مسئله

فرض کنیم سیستم n ورودی و یک خروجی مطابق رابطه (۱) را در اختیار داریم که در آن $u_i^0(t)$ ها ورودی‌ها و $y^0(t)$ خروجی سیستم هستند. در ضمن ورودی‌ها و خروجی سیستم مطابق رابطه (۲) آغشته به نویز شده‌اند.

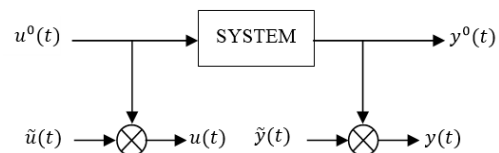
$$y^0(t) = \sum_{i=1}^n a_i u_i^0(t) \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_i(t) = u_i^0(t) + \tilde{u}_i(t), 1 \leq i \leq n \\ y(t) = y^0(t) + \tilde{y}(t) \end{cases} \quad (2)$$



شکل ۱: فرم کلاسیک مدل برای شناسایی سیستم‌ها.

بر خلاف فرم معمول در نظر گرفته شده در شکل ۱، دسته‌ی دیگری از مدل‌ها تحت عنوان مدل‌های خطا در متغیر^۱ (EIV) وجود دارند که علاوه بر نویز بر روی خروجی، نویزی را بر روی ورودی نیز در نظر می‌گیرند. شکل ۲ شمایی از این مدل‌ها را نمایش می‌دهد. در همین راستا روش‌هایی ارائه شده است که علی‌رغم نویز خروجی بر نویز ورودی نیز غلبه کرده و سیستم واقعی را تخمین بزنند.



شکل ۲: شمایی کلی مدل‌های EIV.

مدل‌های EIV که منشا اصلی آن‌ها را می‌توان مربوط به قرن ۱۹ میلادی دانست [۱]، کاربردهای فراوانی در مخابرات، پردازش سیگنال و اقتصاد آماری دارند [۲، ۳]. این دسته از مدل‌ها اخیراً مورد توجه مهندسان کنترل نیز قرار گرفته و مقالات متعددی توسط آن‌ها در این زمینه به چاپ رسیده است. البته ریشه توجه به این مدل‌ها در حوزه کنترل را باید توانایی این مدل‌ها در تعیین قوانین فیزیکی دانست [۴]. در حقیقت در این مدل‌ها صحت پارامترهای تخمین زده شده، بر یافتن سیستمی که از دیدگاه ورودی-خروجی مشابه سیستم اصلی است، اولویت دارد.

پیش از بررسی روش‌های مختلف شناسایی این مدل‌ها، باید آن‌ها را از دیدگاه شناسایی‌پذیری مورد بررسی قرار داد. مقالات [۵، ۶] بررسی تفصیلی در این باب انجام داده‌اند که از نتایج مهم آن‌ها عدم شناسایی‌پذیری این مدل‌ها با کمک دو ممان اول است. بر همین مبنا روش‌های مختلف با در نظر گرفتن فرض‌های جدید یا معلوم دانستن برخی مجهولات مثل واریانس نویز معرفی شده‌اند.

در زمینه مدل‌های با ساختار EIV استاتیک تحقیقات زیادی انجام گرفته است که مروری بر آن‌ها را می‌توان برای نمونه در [۴، ۷] مشاهده نمود. از مهمترین روش‌های معرفی شده در این چارچوب روش‌هایی است که با بکارگیری طرح فرینچ^۲ سعی در شناسایی این دسته از سیستم‌ها دارند [۸-۱۰]. این دسته از روش‌ها سعی می‌کنند مجموعه مدل‌هایی که داده‌های نویزی را نمایش می‌دهد مشخص کنند و پس از آن با مفروضات دیگر، سیستم اصلی را شناسایی کنند. این ابزار به حالت دینامیکی نیز تعمیم داده شده است [۱۱]. از دیگر روش‌های به کار رفته می‌توان به روش کمپوس اشاره کرد که از بررسی مقدار ویژه‌های ماتریس کواریانس استفاده می‌کند و مانند طرح فرینچ به حالت دینامیکی

³ Factor model

⁴ Instrumental Variable

⁵ Prediction Error Method

¹ Error-In-VARIABLE

² Frisch scheme

۲-۱. مفروضات

سیگنال‌های $u_i^0(t)$ ، $\hat{u}_i(t)$ و $\tilde{y}(t)$ ارگودیک، ایستا، مستقل و دارای میانگین صفر هستند.

$u_i^0(t)$ ورودی‌های سیستم هستند در حالی که ما $u_i(t)$ را که ورودی آغشته به نویز هستند در اختیار داریم و همین نکته در مورد خروجی نیز صادق است.

تخمین بدست آمده برای پارامتر a_i را با \hat{a}_i نشان می‌دهیم و ساختار مدل نیز دقیقاً معلوم فرض شده است، تنها پارامترهای مدل مجهول هستند. طیف توان هر سیگنال با ϕ نمایش داده خواهد شد. ز نمایش دهنده $\sqrt{-1}$ می‌باشد و T_s زمان نمونه برداری سیگنال‌های سیستم است.

۲-۲. مسئله EIV

فرض کنید $u(t)$ و $y(t)$ در شکل ۲ را مطابق روابط (۲) در اختیار داریم و قصد داریم از آن‌ها جهت شناسایی سیستم اصلی که همان پارامترهای a_i هستند، استفاده کنیم.

۳- روش PEM روی مدل‌های EIV

در این بخش اثر PEM بر روی مدل‌های EIV بررسی و تحلیل می‌شود. سپس سعی می‌شود شرایطی ممکن و نه‌چندان محدود کننده بدست آید که تحت آن شرایط، مدل بدست آمده از روش PEM به سادگی قابل تصحیح باشد.

۳-۱. اثر روش PEM روی مدل‌های EIV

روش PEM در شناسایی کلاسیک بسیار محبوب و کارآمد است و دقت مناسبی نیز دارد. پیش از این در [۴] و [۱۴] اثبات شده است که استفاده از این روش در مدل‌های EIV برای حالت دینامیک و یک ورودی-یک خروجی منجر به تخمین بدون بایاس نمی‌شود، اما بررسی نشده است که مدل تخمین زده شده چه رابطه‌ای با سیستم اصلی دارد. طی قضیه ۱ این مهم برای مدل‌های به فرم (۱) بررسی می‌شود و در نهایت نتیجه‌گیری می‌شود که سیستم بدست آمده از روش PEM چیست و چه ارتباطی با سیستم اصلی دارد.

قضیه ۱: سیستم اصلی مطابق رابطه (۳) و مدل مطابق رابطه (۴) در نظر گرفته می‌شود. ویژگی‌های سیستم مطابق آنچه که قبلاً توضیح داده شد می‌باشد.

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_i u_i^0(t) + \tilde{y}(t) \quad (3)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i u_i(t) \quad (4)$$

با به کارگیری روش PEM برای شناسایی چنین مدلی پارامترهای مدل به صورت یکتا مطابق رابطه (۵) بدست می‌آید.

$$\hat{a}_i = a_i \frac{\phi_{u_i^0}(\omega)}{\phi_{u_i}(\omega)}, 1 \leq i \leq n, -\frac{\pi}{T_s} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_s} \quad (5)$$

اثبات: برای اثبات قضیه در بخش اول نشان می‌دهیم رابطه (۵) یکی از مدل‌های منتجه با استفاده از روش PEM است و سپس در بخش دوم یکتایی آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

بخش (۱) روش PEM سعی در کمینه کردن مانده سیستم دارد. بدین منظور تابع هزینه‌ای بر حسب مانده در رابطه (۶) تشکیل شده است.

$$\begin{aligned} J(\theta) &= E \left\{ \frac{1}{2} e^2(t, \theta) \right\} = E \left\{ \frac{1}{2} (y(t) - \hat{y}(t))^2 \right\} \\ &= E \left\{ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\hat{a}_i u_i(t) - a_i u_i^0(t)) - \tilde{y}(t) \right)^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(E \left\{ \frac{1}{2} (\hat{a}_i u_i(t) - a_i u_i^0(t))^2 \right\} \right) + E \left\{ \frac{1}{2} \tilde{y}(t)^2 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

رابطه (۷) سعی دارد با کمک مشتق گرفتن نسبت به پارامترها تابع هزینه (۶) را کمینه کند. پس از انجام مشتق‌گیری، از فضای زمان به فضای فرکانسی می‌رویم تا امکان صفر قرار دادن رابطه آماری حاوی امید ریاضی فراهم گردد.

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\hat{a}_i} &= E \left\{ (\hat{a}_i u_i(t) - a_i u_i^0(t)) u_i(t) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint (\hat{a}_i \phi_{u_i} - a_i \phi_{u_i^0}) \frac{dz}{z}, 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (7)$$

نهایتاً پس از متحد با صفر قرار دادن رابطه (۷) به رابطه (۸) می‌رسیم که مشابه همان رابطه (۵) است.

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\hat{a}_i} &= \frac{1}{2\pi j} \oint [\hat{a}_i \phi_{u_i} - a_i \phi_{u_i^0}] \frac{dz}{z} = 0 \\ \rightarrow \hat{a}_i &= a_i \frac{\phi_{u_i^0}(\omega)}{\phi_{u_i}(\omega)}, 1 \leq i \leq n, -\frac{\pi}{T_s} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_s} \end{aligned} \quad (8)$$

بخش (۲) یکتایی پارامتر بدست آمده در بخش ۱ به وضوح قابل استنتاج است، زیرا تابع هزینه نسبت به پارامتر مجهول (\hat{a}_i) فرم مرتبه دو دارد. از طرفی ضریب عبارت مرتبه دو داخل تابع هزینه مطابق رابطه (۶) مثبت است. در نتیجه تابع هزینه مزبور تنها یک اکسترمم آن هم از نوع کمینه خواهد داشت. پس رابطه (۵) پاسخ یکتا PEM خواهد بود. ■

نتیجه ۱: این نکته واضح است که در صورت عدم وجود نویز بر روی ورودی، سیستم واقعی شناسایی می‌شود ($-\frac{\pi}{T_s} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_s}$). این امر در حالی صورت می‌پذیرد که سیستم داخل مجموعه مدل نیست. به طور دقیق‌تر نویز سیستم می‌تواند رنگی باشد اما مدل بدون نویز فرض شده است.

این امر از قضیه ۸-۴ در مرجع [۱۷] در هنگام عدم حضور نویز روی ورودی قابل انتظار است. براساس این قضیه اگر مدل انتخابی ما برای سیستم اصلی خطای خروجی^۱ (OE) انتخاب شود، آن‌گاه صحیح یا غلط انتخاب کردن مدل نویز خلی در شناسایی مدل سیستم ایجاد نمی‌کند. در همین راستا رابطه (۷) نشان می‌دهد که نویز ورودی نیز محل قضیه ۸-۴ مرجع [۱۷] نشده است و نویز رنگی خروجی روی نتایج روش PEM در صورتی که مدل OE باشد اختلالی ایجاد نمی‌کند.

نتیجه ۲: اگر ورودی‌ها و نویز متناظر آن‌ها دارای استقلال باشد. نویزی که روی هر ورودی موجود است، در تخمین پارامتر مربوط به همان ورودی اختلال ایجاد می‌کند و بر روی دیگر پارامترها بی‌تاثیر است.

۳-۲. یافتن شرایط جهت تسهیل در تصحیح مدل حاصله

همانطور که قضیه ۱ نشان می‌دهد اختلال ایجاد شده در تخمین هر پارامتر به میزان $\phi_{u_i^0}(\omega)/\phi_{u_i}(\omega)$ است که تحت دو حالت زیر می‌توان آن را تنها انحرافی از نوع بهره در نظر گرفت. در صورتی که انحراف از

^۱ Output Error

در آن درست شناسایی شده‌اند و پارامترهای نظیر ورودی نویزی با خطای ضریبی $\phi_{u_i}^0(\omega)/\phi_{u_i}(\omega) = \text{cte}$ در طول فرکانس مورد شناسایی، تخمین زده شده‌اند. این امر به نوعی از شناسایی پذیر نبودن مدل‌های EIV نیز قابل انتظار بود.

روش‌های زیادی را می‌توان جهت تصحیح انحراف موجود به کار برد که یکی از ساده‌ترین آن‌ها روش IV است. در ادامه کلیت روش IV در مدل‌های EIV را بیان نموده [۱۹-۲۱] و نحوه‌ی استفاده در این مورد خاص را نیز شرح خواهیم داد.

۴-۱. به کارگیری روش IV در شناسایی مدل‌های EIV

برای شناسایی مدل‌های EIV به روش IV مطابق ماهیت روش عمل می‌کنیم به این معنی که ابزار خاصی را انتخاب کرده و به کمک آن سیستم را شناسایی می‌کنیم. به این منظور سیستم رابطه (۱) را به ترتیب رابطه (۱۱) در نظر می‌گیریم [۱۹، ۲۰].

$$\begin{aligned} y(t) &= \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta} + v(t, \boldsymbol{\theta}) \\ v(t, \boldsymbol{\theta}) &= \tilde{y}(t) - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(t)\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن $\boldsymbol{\varphi}^T(t)$ و $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(t)$ مطابق رابطه (۱۲) هستند و نویز ورودی نیز در گام اول سفید فرض شده است [۱۹].

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_0^T(t) &= [u_1^0(t) \ u_2^0(t) \ \dots \ u_n^0(t)] \\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(t) &= [\tilde{u}_1(t) \ \tilde{u}_2(t) \ \dots \ \tilde{u}_n(t)] \\ \boldsymbol{\varphi}^T(t) &= \boldsymbol{\varphi}_0^T(t) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_n(t)] \end{aligned} \quad (12)$$

حال با ابزار ارائه شده در رابطه (۱۳) می‌توان سیستم را شناسایی کرد طوری که شروط IV نیز مطابق رابطه (۱۴) در صورت سفید بودن نویز ورودی ارضا خواهد شد.

$$\mathbf{z}^T(t) = [u_1(t-1) \ u_2(t-1) \ \dots \ u_n(t-1)] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} C1: E \left\{ \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \\ \vdots \\ u_n(t-1) \end{bmatrix} (y(t) - \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta}) \right\} \\ = E \left\{ \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \\ \vdots \\ u_n(t-1) \end{bmatrix} (\tilde{y}(t) - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^T(t)\boldsymbol{\theta}) \right\} &= 0 \\ C2: E \left\{ \begin{bmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t-1) \\ \vdots \\ u_n(t-1) \end{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\theta}) \right\} &\neq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

در ضمن در رابطه (۱۴) این امر قابل توجه است که شرط C2 در صورتی ارضا می‌شود که ورودی بدون نویز اعمالی به سیستم مستقل نباشد و به بیان دیگر رابطه (۱۵) نیز صادق باشد.

$$E[u_i(t-1)u_i(t)] \neq 0 \quad (15)$$

حال برای حالتی که نویز ورودی به صورت میانگین محرک^۱ (MA)، مطابق رابطه (۱۶) باشد می‌توان با تغییری در ابزار روش IV به تخمین صحیح دست یافت. کافی است ابزار مطابق رابطه (۱۷) در نظر گرفته شود.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(t) &= e_i(t) + c_1 e_i(t-1) + c_2 e_i(t-2) \\ &+ \dots + c_n e_i(t-m), 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (16)$$

نوع بهره باشد مدل رابطه (۵) داخل مجموعه مدل پارامتری (۴) قرار می‌گیرد و می‌توان همان رابطه (۵) را انتظار داشت.

حالت اول: اگر نسبت $\phi_{u_i}^0(\omega)/\phi_{u_i}(\omega)$ در طول فرکانس مقداری ثابت باشد. به عنوان مثال هر دو نویز سفید با واریانس‌های متفاوت باشند و یا آن‌که هر دو نویز سفید با واریانس‌های مختلف اما گذرنده از یک فیلتر یکسان باشند. در این حالت رابطه (۹) صادق خواهد بود.

$$\frac{\phi_{u_i}^0(\omega)}{\phi_{u_i}(\omega)} = \text{cte}, -\frac{\pi}{T_s} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_s} \quad (9)$$

به وضوح مشهود است که این فرض بسیار محدودکننده است و تنها دسته کوچکی از سیستم‌ها را در بر می‌گیرد.

حالت دوم: در این بخش سعی می‌شود شرایطی جامع‌تر از حالت اول بدست آورده شود. اگر بر خلاف حالت قبل نسبت $\phi_{u_i}^0(\omega)/\phi_{u_i}(\omega)$ در طول فرکانس داده‌های مورد شناسایی ثابت نباشد سیستم ما در حضور نویز ورودی داخل مجموعه مدل قرار نخواهد داشت. بدین منظور باید به نوعی اطمینان حاصل کنیم که $\phi_{u_i}^0(\omega)/\phi_{u_i}(\omega)$ در طول فرکانس مورد شناسایی ما ثابت است.

در این راستا می‌توان از عملیات فیلتر کردن ورودی و خروجی استفاده کرد. بدین ترتیب که چون ما u_i ها را در اختیار داریم می‌توانیم حداقل فرکانسی که طیف تمام ورودی‌های نویزی در آن مسطح هستند بیابیم و سپس با عبور دادن ورودی‌ها و خروجی‌ها از فیلتری پایین‌گذر، ورودی‌هایی با $\phi_{u_i}(\omega)$ های مسطح در طول فرکانس شناسایی در اختیار داشته باشیم. در این صورت رابطه (۹) به شکل رابطه (۱۰) بازنویسی می‌شود که در آن ω_c فرکانس قطع فیلتر اعمال شده بر روی داده‌ها است.

$$\frac{\phi_{u_i}^0(\omega)}{\phi_{u_i}(\omega)} = \text{cte}, -\frac{\pi}{T_s} < -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c < \frac{\pi}{T_s} \quad (10)$$

از آنجایی که ما $\phi_{u_i}(\omega)$ را مسطح کرده‌ایم این سوال پیش می‌آید که عملیات بالا چگونه باعث مسطح شدن نسبت $\phi_{u_i}^0(\omega)/\phi_{u_i}(\omega)$ در طول فرکانس می‌شود. این سوال این‌گونه توجیه می‌شود که چون انرژی نویز کمتر از انرژی ورودی سیستم است، می‌توان از مسطح بودن $\phi_{u_i}(\omega)$ به صافی $\phi_{u_i}^0(\omega)/(\phi_{u_i}^0(\omega) + \phi_{u_i}(\omega))$ نیز پی برد و در نهایت ثابت بودن $\phi_{u_i}^0(\omega)/\phi_{u_i}(\omega)$ را در طول فرکانس استنتاج کرد. این تقریب چنان مشکل‌زا نخواهد بود همانطور که در شبیه‌سازی ۱ مشاهده خواهد شد.

به کمک قضیه ۱ و نتایج آن این امر بر می‌آید که حضور نویز بر روی ورودی منجر به شناسایی سیستمی متفاوت با سیستم اصلی می‌شود. به این معنی که سیستم واقعی ما در قعر تابع هزینه تعریف شده قرار نمی‌گیرد. با این وجود قضیه ۱ تحت حالات ۱ یا ۲ نشان داد که پارامترهای نظیر ورودی‌های بدون نویز صحیح شناسایی می‌شود و پارامترهای مربوط به ورودی‌های نویزی نیز با انحراف ثابت شناسایی می‌شوند.

۴- تصحیح مدل بدست آمده به کمک روش

IV

حال با مدلی روپرو هستیم که پارامترهای نظیر ورودی‌های بدون نویز

¹ Moving Average

گام ۳: از روش IV بازگشتی^۳ (RIV) جهت شناسایی پارامترهای مربوط به ورودی‌های نویزی بهره برده و در ضمن از خروجی گام ۳ برای این مهم استفاده می‌کنیم.

۶- شبیه‌سازی

در این بخش قصد داریم مقایسه‌ای از روش‌های مطرح شده بالا داشته باشیم. بدین منظور مدلی مطابق زیر در نظر گرفته و آن را سیستم ۱ می‌نامیم.

$$y(t) = a_1 u_1^0(t) + a_2 u_2^0(t) + a_3 u_3^0(t) + v(t)$$

$$u_3 = u_3^0(t) + \tilde{u}_3(t)$$

ورودی، نویز روی ورودی و نویز روی خروجی سیستم به ترتیب زیر خواهد بود.

$$u_i^0(t) = \frac{1+0.6q^{-1}}{1+0.4q^{-1}} e_i(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\tilde{u}_3(t) = \tilde{e}_3(t), v(t) = \tilde{y}(t)$$

که در آن $e_i(t)$ ، $\tilde{e}_3(t)$ و $\tilde{y}(t)$ نویزهای سفید مستقل هستند و واریانس آن‌ها برای تخمین به ترتیب زیر می‌باشد.

$$\sigma_{\tilde{e}}^2 = 0.5, \sigma_{\tilde{y}}^2 = 0.5, \sigma_{e_i}^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

شبیه‌سازی ۱: این بخش مقایسه‌ای بین روش‌های موجود و روش ارائه شده در این مقاله انجام می‌دهد. از این روش‌های حداقل مربعات^۴ (LS)، IV، PEM و روش PEM جبران شده را بر روی سیستم ۱ اجرا می‌کنیم و به منظور بررسی‌های آماری، این روش‌ها را $M = 500$ مرتبه با $N = 500$ عدد داده انجام می‌دهیم و از معیارهای زیر برای بررسی بهتر روش‌ها بهره می‌گیریم. اگر $\hat{\theta}_l$ را بردار پارامترهای تخمین زده شده در اجرای l ام، $\text{ave}(\hat{\theta})$ میانگین پارامترهای تخمین زده شده در طول M اجرا و θ نیز پارامترهای واقعی سیستم در نظر گرفته شوند، معیار خطای نسبی^۵ (RE) مطابق رابطه (۲۰) و میانگین مربع خطای نرمال شده^۶ (NRMSE) در رابطه (۲۱) تعریف می‌شود.

$$RE = \frac{\|\text{ave}(\hat{\theta}) - \theta\|}{\|\theta\|} \quad (20)$$

$$NRMSE = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \frac{\|\hat{\theta}_l - \theta\|^2}{\|\theta\|^2}} \quad (21)$$

برای شروع روش PEM جبران شده اگر به بخش ۳-۲ بازگردیم ما ورودی رنگی با نویز داریم پس باید در ابتدا ورودی و خروجی را فیلتر کنیم در نتیجه باید ω_c فیلتر را بیابیم. مطابق شکل ۳ که طیف توان $u_3(t)$ را نشان می‌دهد، و فرکانس نمونه برداری آن واحد در نظر گرفته شده است، اعوجاجات اندکی در طیف توان آن مشاهده می‌شود. به همین جهت نیازی به فیلتر کردن نخواهد بود. در ادامه مقاوم بودن این روش به اعوجاجات را ملاحظه خواهیم کرد.

$$z^T(t) = [u_1(t-1-m) \ u_2(t-1-m) \ \dots \ u_n(t-1-m)] \quad (17)$$

در دو رابطه اخیر m مرتبه مدل MA است و $e_i(t)$ ها نویزهای سفید، مستقل و با میانگین صفر هستند.

۴-۲. ترکیب روش PEM و IV برای دستیابی به مدل

مطلوب

در ادامه همین حالت را بکار می‌بریم با این تفاوت که پارامترهایی که دارای نویز نیستند شناسایی نکرده و معلوم فرض می‌کنیم و از این طریق تنها پارامترهای نامعلوم را می‌یابیم. پس اگر a_i^f ها را پارامترهایی با ورودی نظیر بدون نویز فرض کرده و a_i^f ها را پارامترهای مربوط به ورودی‌های نویزی تصور کنیم مدل جدید (۱۸) را برای آن در نظر می‌گیریم. در این مدل، n_k تا از ورودی‌ها بدون نویز و $n - n_k$ تا آغشته به نویز هستند.

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_k} a_i^f u_i^0(t) + \sum_{i=n_k+1}^n a_i^f u_i(t) + \tilde{y}(t) \quad (18)$$

در نهایت عملیات IV تشریح شده در بالا را برای مدل جدید (۱۵) با ورودی‌های کمتر انجام می‌دهیم.

$$\frac{y_{new}(t)}{y(t) - \sum_{i=1}^{n_k} a_i^f u_i^0(t)} = \sum_{i=n_k+1}^n a_i^f \frac{u_{new}(t)}{u_i(t)} + \tilde{y}(t) \quad (19)$$

در نهایت این روش را که در آن a_i^f ها با روش PEM و a_i^f ها با روش IV شناسایی شدند را روش PEM جبران شده می‌نامیم.

حال این سوال مطرح می‌شود که چرا در همان ابتدا از روش IV استفاده نشده است و به تبع آن، مرحله ابتدایی حذف نشده است؟ علت آن در بخش ۶ بهتر مشخص می‌شود. اما به طور اجمالی می‌توان بیان کرد که IV روشی بدون دقت است و ما تمام پارامترهای سیستم که بدون نویز هستند را با دقت بالا با روش PEM می‌یابیم. پس از آن به سراغ روش IV می‌رویم. در ضمن این بخش با کاهش تعداد پارامترها، ویژگی‌های روش IV را از قبیل کوارینانس تخمین بهبود می‌دهد.

۵- تعمیم روش به حالت بازگشتی

در شناسایی سیستم‌ها، روش‌های بازگشتی^۱ به فراخور کاربردشان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. در این بخش قصد داریم روش بررسی شده را به حالت بازگشتی تعمیم بدهیم. تعمیم روش مورد بحث در این مقاله به حالت بازگشتی به سادگی انجام می‌پذیرد زیرا روش به کار رفته ترکیبی از دو روش PEM و IV می‌باشد و هر دو این روش‌ها شکل بازگشتی هم دارند [۱۷، ۱۸]. به این ترتیب برای شناسایی بازگشتی سیستم در هر مرحله کافی است گام‌های زیر را طی کنیم.

گام ۱: برای پارامترهای مربوط به ورودی بدون نویز (a_i^f ها) از روش PEM بازگشتی^۲ (RPEM) استفاده می‌کنیم.

گام ۲: خروجی مدل جدید را مطابق (۱۹) و با کمک پارامترهای بدست آمده در گام ۱ تشکیل می‌دهیم.

³ Recursive IV

⁴ Least Squares

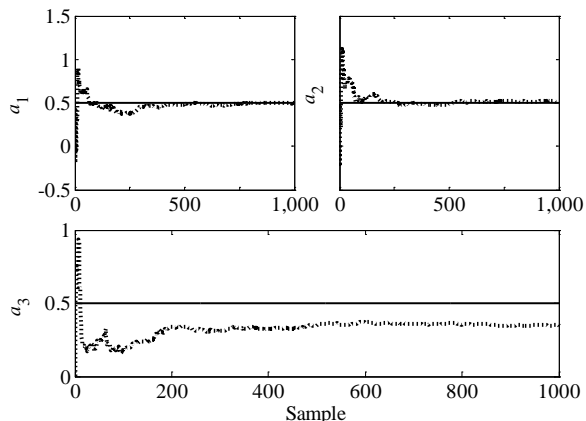
⁵ Relative Error

⁶ Normalized Root Mean Square Error

¹ Recursive methods

² Recursive PEM

۴، ۵ و ۶ به ترتیب پارامترهای تخمین زده شده را با سه روش rPEM، RIV و RPEM جبران شده نشان می‌دهد.

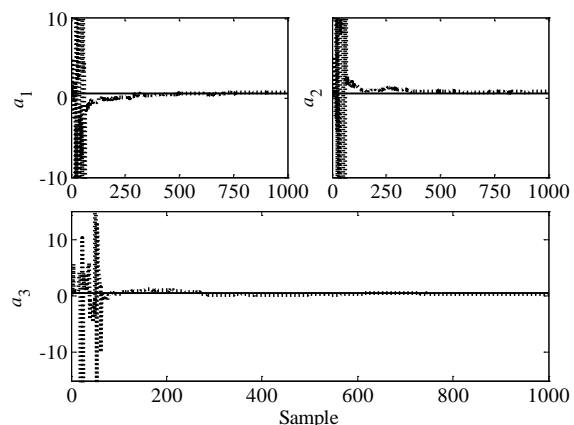


شکل ۴: روش RPEM بدون تصحیح a_3 .

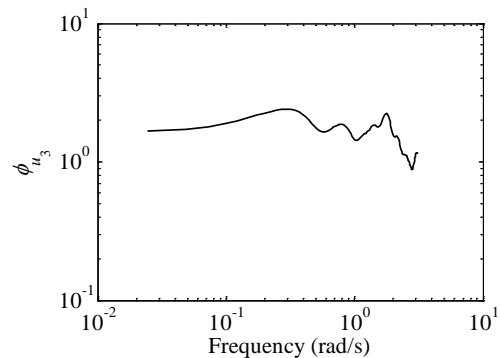
همان‌طور که انتظار داشتیم مشاهده می‌شود که روش RPEM در شکل ۴ پارامترهای نظیر ورودی بدون نویز را درست شناسایی می‌کند و مطابق شکل ۵ تخمینی بدون بایاس اما بی‌دقت و با همگرایی کند را نتیجه می‌دهد. در نهایت مطابق آنچه در شکل ۶ مشاهده می‌شود، روش RPEM جبران شده به راحتی خطای پارامتر a_3 را جبران نموده و به پاسخی قابل قبول منجر می‌شود.

۷. کاربرد عملی از روش

این قسمت یک کاربرد عملی از روش مطرح شده در مقاله را مورد بررسی قرار می‌دهد. موتورهای القایی در حالت ماندگار رفتاری مطابق شکل ۷ از خود نشان می‌دهند. در صورت ساده‌سازی و در نظر گرفتن فرض‌های الحاقی می‌توان به روابط (۲۲) برای این سیستم دست پیدا کرد [۲۲].



شکل ۵: روش RIV.



شکل ۳: طیف توان سیگنال $u_3(t)$.

در نهایت نتایج در جدول ۱ نشان داده می‌شود. برای مشاهده حجم محاسبات هر روش و مقایسه آن، زمان اجرا هر روش در طول M اجرا محاسبه شده و میانگین آن ارائه می‌شود. با توجه به M اجرای انجام شده، واریانس تخمین محاسبه می‌شود و با ضرب در ۳ به عنوان انحراف نرمال در کنار پارامترها در جدول ۱ ارائه می‌شود. مشاهده می‌شود که تا حد زیادی انتظارات ما از روش‌ها برآورده شده است.

جدول ۱: مقایسه روش‌های شناسایی مدل استاتیکی EIV.

روش	a_1	a_3	a_2	RMSE	RE	CPU TIME
Regular PEM	0.5036 ± 0.0055	0.3382 ± 0.0033	0.4973 ± 0.0051	0.2027	0.1869	0.0864
Compensated PEM	0.5036 ± 0.0055	0.4850 ± 0.3561	0.4973 ± 0.0051	0.4037	0.0180	0.0865
IV	0.5302 ± 0.3474	0.5370 ± 0.8159	0.4954 ± 0.3597	0.8238	0.0554	1.2482 × 10 ⁻⁴
true value	0.5	0.5	0.5			

همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود روش PEM تخمین بدون بایاس را نتیجه نمی‌دهند که از مقادیر RE، RMSE و میانگین پارامتر a_3 که مربوط به ورودی نویزی است، مشخص است. در مقابل روش IV و PEM جبران شده با مشاهده میانگین پارامترها تخمینی بدون بایاس ارائه می‌دهند. در ضمن روش IV حجم محاسباتی بسیار کمی دارد به طوری که زمان اجرا آن بیش از ۵۰۰ بار از روش PEM جبران شده کمتر است. در عین حال روش IV دقت بسیار کمتری نیز نسبت به PEM جبران شده دارد. این عدم دقت با مشاهده RE و RMSE به سهولت قابل استنتاج است که به ترتیب بهبود ۵ و ۲ برابری مشاهده می‌شود. انحراف نرمال هر یک از پارامترها نیز موید همین نکته است. در مورد a_1 و a_2 بیش از ۵۰ برابر بهبود در انحراف نرمال مشاهده می‌شود. حتی انحراف نرمال پارامتر a_3 که به کمک IV اصلاح شده است حدود ۲ برابر بهتر از حالتی است که تمام پارامترها به کمک IV تخمین زده شده است که این امر می‌تواند از کاهش تعداد پارامترها و یا دقیق‌تر شدن دیگر پارامترها ناشی شده باشد.

شبیه‌سازی ۲: در این شبیه‌سازی قصد داریم عملکرد روش را به صورت بازگشتی مورد بررسی قرار دهیم. به همین منظور روند موجود در بخش ۵ را بر روی سیستم ۱ پیاده‌سازی نموده و با روش RIV که روشی بازگشتی و مناسب برای این مدل‌ها است، مقایسه می‌کنیم. برای مشاهده بهتر همگرایی تعداد داده‌ها را $N = 1000$ در نظر می‌گیریم. شکل‌های

کرد و از روش ارائه شده در این مقاله جهت شناسایی صحیح پارامترها بهره برد.

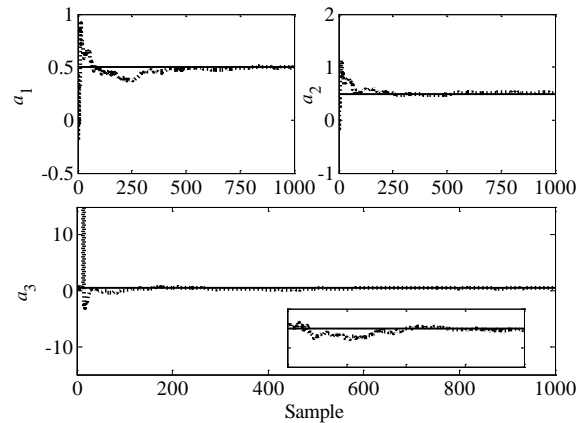
بدین ترتیب همان‌طور که اشاره شد روش مزبور به هرگونه ساختار نویزی بر روی خروجی مقاوم بود پس نویز ایجاد شده بر روی Y مشکل‌زا نخواهد بود. در ضمن با فرض ابتدایی ما dI_s/dt که همان ورودی اول است آغشته به نویز خواهد بود و دو ورودی دیگر بدون نویز هستند، به این ترتیب دو پارامتر θ_2 و θ_3 با روش PEM و پارامتر θ_1 با روش IV شناسایی خواهند شد.

۸- نتیجه گیری

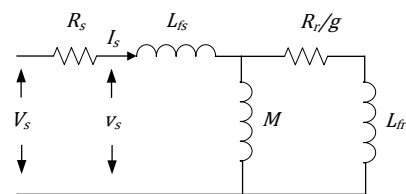
در این مقاله به شناسایی دسته‌ای از سیستم‌های استاتیک پرداخته شد. این دسته به کمک PEM مورد شناسایی قرار گرفت که طی آن استقلال هر پارامتر به نویز ورودی‌های غیرمرتبط رویت شد. این نتیجه به شناسایی دقیق پارامترهای مربوط به ورودی‌های بدون نویز منجر شد و پس آن به کمک نتایج PEM از روش IV جهت شناسایی پارامترهای باقی مانده استفاده شد. به جهت ماهیت روش PEM این روش توانایی زیادی در شناسایی مدل‌ها با نویز خروجی رنگی خواهد داشت و پارامترهای شناسایی شده در مرحله دوم با روش IV نیز به دقت و واریانس بهتری نسبت به زمانی که تنها از روش IV استفاده شود، منجر خواهد شد. این روش به صورت بازگشتی نیز تعمیم داده شد. در روش فوق فرضی محدود کننده‌ای موجود است مبنی بر این‌که از قبل بدانیم روی کدام ورودی نویز موجود است و کدام ورودی بدون نویز است. از کارهای آینده می‌توان به روشی برای برطرف کردن این محدودیت اشاره نمود. علاوه بر این تعمیم روش فوق به سیستم‌های دینامیکی نیز می‌تواند از کارهای آینده این مقاله باشد.

مراجع

- [1] Adcock, R.J., "Note on the method of least squares", The Analyst, 4 (6), pp. 183-184, 1877.
- [2] Van Huffel, S. (Ed.). Recent advances in total least squares techniques and errors-in-variables modelling, USA: SIAM, 1997.
- [3] Van Huffel, S., Lemmerling, Ph., (Eds.), Total least squares and errors-in-variables modelling. Analysis, algorithms and applications, The Netherlands: Kluwer, 2002.
- [4] Soderstrom, T., "Errors-in-variables methods in system identification", Automatica, 43(6), pp. 939-958, 2007.
- [5] Aguero, J.C., Goodwin, G.C., "Identifiability of errors in variables dynamic systems", Automatica, 44(2), pp. 371-382, 2008.
- [6] Anderson, B.D.O., Deistler, M., "Identifiability of dynamic errors-in-variables models", Journal of Time Series Analysis, 5(1), pp. 1-13, 1984.



شکل ۶: روش RPEM با تصحیح a_3 .



شکل ۷: مدل موتور القایی در حالت ماندگار.

$$Y = \frac{d^2 I_s}{dt^2} - j\omega_r \frac{dI_s}{dt}, V_s = v_s + R_s I_s$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{dI_s}{dt} \\ \frac{dv_s}{dt} - j\omega_r v_s \\ v_s \end{bmatrix} \text{ and } \theta^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]$$

$$\theta_1 = -R_r \left(\frac{1}{L_{fs}} + \frac{1}{L_r} \right), \theta_2 = \frac{1}{L_{fs}}, \theta_3 = \frac{R_r}{L_{fs} L_r}$$

$$Y = X^T \theta \quad (22)$$

در این روابط R_s و R_r بترتیب مقاومت استاتور و روتور هستند. L_s و L_r اندوکتانس استاتور و رتور و L_{fr} و L_{fs} اندوکتانس نشتی آنها است. M اندوکتانس متقابل می‌باشد $(L_{fs} = L_s - M)$ و $(L_{fr} = L_r - M)$. چون می‌توان R_s را با تغذیه DC استاتور و بدون چرخش روتور تعیین کرد بجای V_s از v_s در روابط تخمینی استفاده شده است. ω_r سرعت زاویه روتور است که در حالت ماندگار ثابت فرض می‌شود. V_s و I_s ولتاژ و جریان استاتور در حالت ماندگار و g ثابت گرانشی می‌باشد.

حال مطابق روش به کار رفته در [۲۲] اگر V_s و I_s را بدون نویز در اختیار داشته باشیم می‌توان از روش حداقل مربعات بازگشتی^۱ (RLS) برای شناسایی چنین مدلی بهره برد. به این منظور کافی است X و Y را تشکیل داده و θ را از روش RLS بیابیم. طبق رابطه (۲۳) پارامترهای سیستم نیز به صورت یکتا از θ قابل استخراج خواهند بود.

$$R_r = -\left(\frac{\theta_1}{\theta_2} + \frac{\theta_3}{\theta_2^2} \right), L_{fs} = \frac{1}{\theta_2}, L_r = -\left(\frac{\theta_1}{\theta_3} + \frac{1}{\theta_2} \right) \quad (23)$$

اینجا شرایطی را در نظر می‌گیریم که I_s آغشته به نویز باشد. به طبع آن مشتقات اول و دوم I_s نیز آغشته به نویز خواهند بود که مطمئناً مشتق‌گیری آن را تشدید می‌کند. این امر باعث می‌شود که X و Y آغشته به نویز باشند و طبیعتاً RLS به شناسایی بدون بایاس پارامترها منجر نخواهد شد. در این صورت این مدل را می‌توان مشابه مدل (۱) دسته‌بندی

^۱ Recursive Least Squares

- [15] Mu, B.Q., Chen, H.F., "Recursive identification of errors-in-variables Wiener systems", *Automatica*, 49(9), pp. 2744-2753, 2013.
- [16] Vajk, I., Hetthessy, J., "Identification of nonlinear errors-in-variables models", *Automatica*, 39(12), pp. 2099-2107, 2003.
- [17] Ljung, L., *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, Engle-Wood Cliffs, NJ, 1987.
- [18] Soderstrom, T., Stoica, P., *System Identification*, Prentice-Hall, Engle-Wood Cliffs, NJ, 1988.
- [19] Thil, S., Gilson, M., "Survey of analytical IV estimates for errors-in-variables model identification", In 18th IFAC World Congress, IFAC WC'2011, pp. 13098-13103, August 2011.
- [20] Thil, S., Gilson, M., Garnier, H., "On instrumental variable-based methods for errors-in-variables model identification", In 17th IFAC World Congress, pp. 426-431, July 2008.
- [21] Soderstrom, T., "A generalized instrumental variable estimator for multivariable errors-in-variables identification problems", *International Journal of Control*, 85(3), pp. 287-303, 2012.
- [22] Koubaa, Y., "Recursive identification of induction motor parameters", *Simulation Modelling Practice and Theory*, 12(5), pp. 363-381, 2004.
- [7] Soderstrom, T., "System identification for the errors-in-variables problem", *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 34(7), pp. 780-792, 2012.
- [8] Frisch, R., "Statistical confluence analysis by means of complete regression systems", *Universitetets Okonomiske Instituut*, 5, 1934.
- [9] Guidorzi, R., "Certain models from uncertain data: The algebraic case", *Systems and Control Letters*, 17(6), pp. 415-424, 1991.
- [10] Beghelli, S., and U. Soverini., "Identification of linear relations from noisy data: Geometrical aspects", *Systems and Control Letters*, 18(5), pp. 339-346, 1992.
- [11] Beghelli, S., Guidorzi, R., Soverini, U., "The Frisch scheme in dynamic system identification", *Automatica*, 26(1), pp. 171-176, 1990.
- [12] Koopmans, T.C., "Linear regression analysis of economic time series", De Erven F. Bohn, Haarlem, Netherlands, 1937.
- [13] Van Schuppen, J.H. *Stochastic realization problems*, Springer, 1989.
- [14] Soderstrom, T., Soverini, U., Mahata, K., "Perspectives on errors-in-variables estimation for dynamic systems", *Signal Process*, 82(8), pp. 1139-1154, 2002.