

# کنترل زمان محدود حرکت گروهی عامل‌های جمعی با وجود عنصر غیر خطی اشباع

سید اسماعیل میرعبداللهی شمس<sup>۱</sup> و محمد حائری<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

<sup>۲</sup> آزمایشگاه سیستم‌های کنترل پیشرفته، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

نویسنده عهده دار مکاتبات: محمد حائری، [haeri@sharif.ir](mailto:haeri@sharif.ir)

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۳۱

ویرایش: ۱۳۹۷/۰۱/۲۳

دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۲۱

**چکیده:** در این مقاله حرکت گروهی زمان محدود سیستم‌های چندعاملی در حضور عنصر غیرخطی اشباع مورد بررسی قرار می‌گیرد. با ارائه یک پروتکل کنترل جدید نشان داده می‌شود که سرعت و موقعیت عامل‌ها با دینامیک انتگرال گیر دوگانه در زمان محدود به یکدیگر و به سرعت و موقعیت رهبر همگرا می‌شوند. فرض شده است که گراف ارتباط بین عامل‌ها متصل است و حداقل یک عامل از موقعیت و سرعت رهبر مطلع است. ثابت می‌شود عامل‌ها تحت این پروتکل کنترلی به یکدیگر برخورد نمی‌کنند و نیز گراف ارتباط متصل باقی خواهد ماند. ضمناً شرایطی ارائه می‌گردد که سطح سیگنال کنترل از دامنه محدود کننده اشباع کمتر باشد.

**کلمات کلیدی:** حرکت گروهی، عامل‌های جمعی، کنترل زمان محدود، عنصر غیرخطی ساز اشباع

## Finite-time Flocking of Multi-agent System with Input Saturation

Seyyed Esmaeil Mirabdollahi Shams and Mohammad Haeri

**Abstract:** In this paper a finite-time flocking of multi-agent system with input saturation is investigated. By introducing a new control protocol, it is show that speed and position of agents with double-integrator dynamics converge to the speed and position of leader in finite time. It is assumed that the graph between the agents is connected and that at least one agent is informed of the leader speed and position. It is shown that the agents do not collide under this control protocol and the graph remains connected. Further, conditions are provided by which the control signal level remains less than the limiting saturation range.

**Keywords:** Multi agent system, Flocking, finite time control, input saturation

## ۱- مقدمه

با شروع قرن ۲۱ توجه ویژه‌ای به سیستم‌های چندعاملی (multi-agent systems) شد [۱]. سیستم چندعاملی به سیستمی گفته می‌شود که از چند زیرسیستم یکسان یا غیریکسان که آن را عامل (agent) نامند تشکیل شده است. در این نوع سیستم‌ها هر عامل بخشی از اطلاعات مورد نیاز جهت ساخت سیگنال کنترل را از عامل‌های مجاور می‌گیرد. در این نوع سیستم‌ها به دلیل زیاد بودن عامل‌ها و پیچیدگی و حجم بالای محاسبات امکان کنترل مستقل هر عامل وجود ندارد لذا هر عامل با دریافت اطلاعات از عامل‌های مجاور خود سیگنال کنترل خود را می‌سازد. هواپیماهای بدون سرنشین [۲]، وسایل نقلیه خودکار [۳]، روبات‌های امدادگر و مین‌یاب [۴]، و نوسانگرهای تزویج شده [۵] از جمله سیستم‌های چندعاملی است که می‌توان به آن‌ها اشاره کرد. با توجه به نوع گرایش محققان به سیستم‌های چندعاملی اهداف متفاوتی همچون اجماع (consensus) [۵]، شکل‌پذیری (formation) [۴]، حرکت گروهی (flocking) [۶] و غیره تعریف شده است. ایده‌ی اولیه سیستم‌های چندعاملی از حرکت گروهی پرندگان، زنبورهای عسل، مورچه‌ها، ماهی‌ها و غیره گرفته شده است [۷]. سیستم چندعاملی ای که در آن عامل‌ها با رعایت سه شرط زیر در کنار یکدیگر حرکت کنند را حرکت گروهی گویند [۸]:

- الف) حرکت نزدیک به هم
- ب) سرعت یکسان
- ج) عدم برخورد با یکدیگر

Olfati در [۸] و Su و همکارانش در [۹] با ارائه الگوریتم‌هایی این سه خاصیت را برآورده کرده‌اند. در تمامی روش‌های ارائه شده در مقالات مختلف حرکت گروهی، همگرایی مجانبی به اثبات رسیده است. با توجه به مزایای روش‌های کنترل زمان محدود (finite-time control) مانند پاسخ گذرای سریع‌تر، دقت بالاتر، همگرایی سریع‌تر و حذف اغتشاش بهتر [۱۰، ۱۲]، اخیراً محققان به کنترل زمان محدود گرایش بیشتری پیدا کرده‌اند. این گرایش در سیستم‌های چندعاملی هم وجود داشته به طوریکه Guan و همکارانش در [۱۳] اجماع زمان محدود سیستم‌های مرتبه ۲ را ارائه داده‌اند. در [۱۴] اجماع زمان محدود سیستم‌های چندعاملی با دینامیک غیرخطی بررسی شده است همین‌طور الگوریتمی برای اجماع زمان محدود وسایل نقلیه بدون سرنشین (AUV) و حرکت بدون برخورد آنها در [۱۵] ارائه شده است.

حرکت گروهی عامل‌ها در دو حالت بدون رهبر و با رهبر بررسی می‌شود. در حالت با رهبر الگوریتم ارائه شده بایستی به گونه‌ای باشد که موقعیت و سرعت عامل‌ها به موقعیت و سرعت رهبر همگرا شوند. در این مقاله حرکت گروهی زمان محدود عامل‌ها با دینامیک انتگرال‌گیر دو گانه مورد بررسی قرار می‌گیرد که در حد بررسی‌های نویسندگان مقاله تاکنون به آن پرداخته نشده است. در این مقاله فرض شده است که شبکه ارتباطی بین عامل‌ها متصل (connected) بوده و حداقل یکی از عامل‌ها از موقعیت

و سرعت رهبر مطلع است. الگوریتم ارائه شده در این مقاله تضمین می‌کند که سرعت عامل‌ها در زمان محدود به سرعت رهبر همگرا می‌شود و نشان داده می‌شود در حین حرکت در عین اینکه اتصال شبکه ارتباطی پابرجا باقی می‌ماند (connectivity preserving)، عامل‌ها به یکدیگر برخورد نمی‌کنند.

تفاوت و نوآوری این مقاله نسبت به مقالات مشابه دو چیز است یکی حرکت گروهی زمان محدود در مقابل حرکت گروهی مجانبی و دومی در نظر گرفتن عنصر غیرخطی اشباع در ورودی که به نظر می‌رسد به این مسئله هم در موضوع حرکت گروهی عامل‌ها کمتر پرداخته شده است.

در ادامه در بخش ۲ مقدمات ریاضی مورد نیاز در تبیین مسئله تعریف شده بیان می‌شود. در بخش ۳ حرکت گروهی زمان محدود عامل‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد و در بخش ۴ با ارائه شبیه‌سازی صحت عملکرد الگوریتم ارائه شده نشان داده می‌شود.

## ۲- تعریف‌ها و مبانی ریاضی

$N$  عامل با دینامیک زیر که در فضای اقلیدسی  $n$  بعدی حرکت می‌کنند را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = u_i \end{cases}, i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

که در آن  $x_i, v_i \in R^n$  موقعیت و سرعت عامل‌ها و  $u_i \in R^n$  شتاب حرکت و به عبارت دیگر قانون کنترلی می‌باشد. در شکل برداری، موقعیت، سرعت و شتاب عامل‌ها به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\begin{aligned} x &= [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T \\ v &= [v_1^T \ v_2^T \ \dots \ v_N^T]^T \\ u &= [u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_N^T]^T \end{aligned} \quad (2)$$

قدرت انتقال اطلاعات بین عامل‌ها بستگی به فاصله عامل‌ها دارد. به حداکثر فاصله بین عامل‌ها که می‌تواند با یکدیگر تبادل داده کنند شعاع همسایگی گویند و عامل‌های همسایه عامل  $i$  ام به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N_i(t) = \{j: \|x_i - x_j\| < r, j = 1, 2, \dots, N, j \neq i\}, \quad (3)$$

که در آن  $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی مرتبه ۲ است.

شبکه  $G = (V, E, A)$  از مجموعه گره  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  و مجموعه لبه  $E \subseteq V \times V$  و ماتریس همسایگی  $A$  تشکیل شده است. هر لبه  $e_k$  با یک زوج گره  $(v_i, v_j)$  تعریف می‌شود. ماتریس  $A = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$  قدرت انتقال اطلاعات بین عامل‌ها را نشان می‌دهد به طوریکه اگر  $(v_j, v_i) \in E$  باشد  $a_{ij} \neq 0$  خواهد بود. اگر شبکه بدون جهت باشد ماتریس  $A$  متقارن خواهد بود. ضمناً  $a_{ii} = 0$  است. با توجه به اینکه همسایگی را فقط بر اساس فاصله بین عامل‌ها تعریف کرده‌ایم در این مقاله ماتریس  $A$  متقارن و شبکه بدون جهت است. به دنباله‌ای از لبه‌ها از گره  $i$  تا گره  $j$  مسیر گفته می‌شود. اگر بین هر دو گره دلخواه از شبکه حداقل یک مسیر وجود داشته باشد به آن متصل گویند (connected).  $L = \Delta A - A$  را ماتریس لاپلاسن می‌گویند که در آن  $\Delta A$  ماتریسی قطری است و  $i$  امین المان قطری آن برابر

تعریف می شود.

$$\|z\|_\sigma = \frac{1}{\varepsilon} (\sqrt{1 + \varepsilon \|z\|^2} - 1) \quad (9)$$

با این مزیت نسبت به نرم اقلیدسی که در صفر دارای مشتق است [۹].  $\psi_1(z)$  وظیفه مقاومت در مقابل از دست رفتن اتصال را برعهده دارد.

$$\psi_1(z) = a_{ij} \frac{z^2}{r_\alpha - z + r_\alpha Q^{-1}} \quad (10)$$

که در آن  $Q > V_{\max}$  است و بیشترین مقدار تابع انرژی  $V$  است که بعداً تعریف می شود. ضمناً  $r_\alpha = \|r\|_\sigma$  همچنین  $\psi_2(z)$  از برخورد عامل ها جلوگیری می کند.

$$\psi_2(z) = \int_{d_\alpha}^z \phi_\alpha(s) ds \quad (11)$$

$$\phi_\alpha(s) = a \rho_h \left( \frac{z}{r_\alpha} \right) \phi(z - d_\alpha) \quad (12)$$

$$\phi(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad (13)$$

$$\rho_h(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } z \in [0, h] \\ 0.5 \left( 1 + \cos \left( \pi \frac{z-h}{1-h} \right) \right) & \text{if } z \in [h, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

در این روابط  $h \in (0,1)$  و  $0 < d < r$ ,  $d_\alpha = \|d\|_\sigma$ ,  $a > 0$  قابل تنظیم می باشند. بدین ترتیب

$$f_i^a = -\sum_{j \in N_i} \nabla_{x_j} \psi(\|x_{ij}\|_\sigma). \quad (15)$$

با استفاده از روش های عددی می توان نشان داد که  $|f_i^a|$  دارای یک مقدار بیشینه است که از آن می توان برای محدود کردن سطح سیگنال کنترل استفاده کرد. این مقدار بیشینه به پارامترهای  $|f_i^a|$  بستگی دارد و ارتباطی با شرایط اولیه موقعیت و سرعت عامل ها ندارد. این مقدار بیشینه را با  $\max |f_i^a|$  نشان می دهیم.

بخش دوم و سوم از  $f_i^b$  و  $f_i^c$ ، با روابط (۱۶) و (۱۷) تعریف می شوند و به ترتیب وظیفه نزدیک کردن موقعیت و سرعت عامل ها به یکدیگر را برعهده دارند.

$$f_i^b = -\sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(x_i - x_j)) \quad (16)$$

$$f_i^c = -\sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(v_i - v_j)) \quad (17)$$

تابع sig به صورت زیر تعریف می شود.

$$\text{sig}^\alpha(x) = \text{sign}(x)|x|^\alpha \quad (18)$$

ضمناً  $0 < \alpha_1 < 1$  قابل تنظیم و  $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1}$  است.

المان های ماتریس همسایگی  $A = [a_{ij}]$  به شکل زیر تعریف می شوند.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ \rho_h \left( \frac{\|x_{ij}\|_\sigma}{r_\alpha} \right) & i \neq j \end{cases} \quad (19)$$

در آخر، بخش چهارم و پنجم معادله (۷) وظیفه نزدیک کردن موقعیت و سرعت عامل ها به موقعیت و سرعت رهبر را دارا می باشند. به طوریکه عامل ها بتوانند موقعیت و سرعت رهبر را ردیابی (track) کنند.

$$f_i^d = -c_1 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(x_i - x_0)) \quad (20)$$

$$f_i^e = -c_2 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(v_i - v_0)) \quad (21)$$

در روابط (۲۰) و (۲۱)  $h_i = 1$  است اگر عامل نام مستقیماً به موقعیت و

است با  $\sum_{j=1}^n a_{ij}$  اگر مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین را با  $\lambda_1$  تا  $\lambda_n$  به ترتیب غیر نزولی نشان دهیم  $\lambda_1 = 0$  و بردار ویژه متناظر با آن  $(1,1,\dots,1)$  خواهد بود. ضمناً شرط لازم و کافی برای متصل بودن شبکه آن است که  $\lambda_2 > 0$  باشد [۸].

با توجه به اینکه هدف ارائه الگوریتمی جهت حرکت گروهی زمان محدود است قبل از ورود به بحث اصلی دو تعریف و یک لم در مورد کنترل زمان محدود ارائه می شود.

**تعریف ۱ [۱۰].** سیستم مرتبه  $n$  زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \quad (4)$$

که در آن  $f: U_0 \rightarrow R^n$  تابعی برداری پیوسته می باشد و  $U_0$  یک همسایگی باز در اطراف  $x = 0$  است. نقطه تعادل  $x = 0$  از سیستم (۴) پایدار محلی زمان محدود خوانده می شود اگر شرایط زیر برقرار باشد.

الف) سیستم در همسایگی  $\bar{U}_0$  پایدار مجانبی باشد که  $\bar{U}_0 \subseteq U_0$ .

ب) زمان محدود  $T(x_0)$  وجود داشته باشد طوری که  $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) \rightarrow 0$  و  $x(t, x_0) = 0$  برای هر  $t \geq T(x_0)$ .

**تعریف ۲ [۱۳].** تابع برداری پیوسته  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  را هموژن از مرتبه  $k \in R$  با تاخیر  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  گویند اگر برای هر  $\varepsilon > 0$  داشته باشیم  $f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  و سیستم (۴) را هموژن گویند اگر  $f(x)$  هموژن باشد. علاوه بر آن سیستم

$$\dot{x} = f(x) + \tilde{f}(x), \tilde{f}(0) = 0, x \in R^n \quad (5)$$

هموژن محلی از مرتبه  $k \in R$  با تاخیر  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  گویند اگر  $f(x)$  هموژن از مرتبه  $k \in R$  با تاخیر  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  باشد و بردار پیوسته  $\tilde{f}(x)$  در رابطه زیر صدق کند.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n)}{\varepsilon^{k+r_i}} = 0 \quad \forall x \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

**لم ۱ [۱۳].** فرض کنید سیستم (۴) هموژن از مرتبه  $k \in R$  با تاخیر  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  تابع  $f(x)$  پیوسته و در  $x = 0$  پایدار مجانبی است. اگر مرتبه هموژنی  $k < 0$  باشد نقطه تعادل سیستم (۴) پایدار زمان محدود است و اگر رابطه (۶) برقرار باشد سیستم (۵) پایدار محلی زمان محدود خواهد بود.

سیگنال کنترل ارائه شده در این مقاله از ۵ بخش تشکیل شده است.

$$u_i = K(f_i^a + f_i^b + f_i^c + f_i^d + f_i^e) \quad (7)$$

وظیفه بخش،  $f_i^a$ ، جلوگیری از برخورد عامل ها و همچنین مقاومت در مقابل از دست رفتن اتصال شبکه است. این کار توسط گرادیان دو تابع پتانسیل که از مراجع [۹، ۱۶] گرفته شده و به شکل (۸) تعریف می شود انجام می گیرد.

$$\psi(\|x_{ij}\|_\sigma) = \psi_1(\|x_{ij}\|_\sigma) + \psi_2(\|x_{ij}\|_\sigma) \quad (8)$$

در این رابطه  $x_{ij} = x_i - x_j$  است. همچنین نرم  $\sigma$  با پارامتر  $\varepsilon$  به شکل زیر

$$\lim_{t \rightarrow T_0} (v_i - v_0) \rightarrow 0, v_i - v_0 = 0, \forall t \geq T_0 \quad (30)$$

ب) حداکثر فاصله عامل های آگاه با رهبر از مقدار  $\sqrt{V_0(\alpha_1 + 1)c_1^{-1}}$   $(\alpha_1 + 1)$  کمتر خواهد بود

ج) اتصال شبکه در حین حرکت برقرار می ماند.

د) در صورتی که  $V_0 < \psi_2(0)$  باشد عامل ها با یکدیگر برخورد نخواهند کرد.

**اثبات.** الف) تابع انرژی  $V$  را به عنوان تابع لیابانوف کاندیدا می کنیم. مشتق اجزاء این تابع در مسیر سیستم (۲۹) اینگونه است.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \dot{\tilde{v}}_i = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i u_i = \\ &= -\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i K \left( \sum_{j \in N_i} \nabla_{x_j} \psi(\|x_{ij}\|_\sigma) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)) \right) \\ &+ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)) + c_1 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i)) + \\ &+ c_2 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i)) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{K}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)), \quad (32)$$

$$\dot{V}_3 = K \sum_{i=1}^n c_1 h_i \tilde{v}_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i)), \quad (33)$$

$$\dot{V}_4 = K \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \sum_{j \in N_i} \nabla_{x_j} \psi(\|x_{ij}\|_\sigma), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4 = -\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i K \left( \sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)) + \right. \\ &\quad \left. c_2 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i)) \right) \\ &= \frac{K}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)) \\ &\quad - K \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i c_2 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i)) \\ &\leq \frac{K}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)) \leq 0. \end{aligned} \quad (35)$$

با توجه به داشتن مساوی صفر در رابطه (۳۵) از قضیه لاسال<sup>۱</sup> استفاده می کنیم. در نظر بگیرد  $\dot{V} = 0$  که نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} \frac{K}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)) - \\ K \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i c_2 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i)) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

با توجه به (۳۶) و فرض  $\tilde{v}_i = \tilde{v}_j = 0, i, j = 1, 2, \dots, n$  نتیجه می شود  $\tilde{v}_i = \tilde{v}_j = 0$  اگر  $\tilde{v}_i = \tilde{v}_j = 0$  واضح است که نتیجه می شود  $\dot{V} = 0$  لذا شرط لازم و کافی برای  $\dot{V} = 0$  آن است که  $\tilde{v}_i = \tilde{v}_j = 0$  باشد که نتیجه می دهد  $\dot{\tilde{v}}_i = 0$  پس

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}_i &= -K \left( \sum_{j \in N_i} \nabla_{x_j} \psi(\|x_{ij}\|_\sigma) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)) \right) \\ &+ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)) + c_1 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i)) + \\ &+ c_2 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i)) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

با توجه به  $\tilde{v}_i = \tilde{v}_j = 0$  نتیجه می شود

$$\begin{aligned} -K \left( \sum_{j \in N_i} \nabla_{x_j} \psi(\|x_{ij}\|_\sigma) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)) \right) + \\ c_1 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i)) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

در ادامه با ضرب  $\tilde{x}_i$  و گرفتن جمع از رابطه بالا می توان گفت

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \left( -K \sum_{j \in N_i} \nabla_{x_j} \psi(\|x_{ij}\|_\sigma) - K \sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)) - K c_1 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i)) \right) = \\ K \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \sum_{j \in N_i} \nabla_{x_j} \psi(\|x_{ij}\|_\sigma) - \frac{K}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)) - K \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i c_1 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i)). \end{aligned} \quad (39)$$

سرعت رهبر دسترسی داشته باشد که اصطلاحاً به آن عامل آگاه گویند (informed agent) و برای بقیه عامل ها این مقدار صفر است. همچنین  $c_1 > 0$  و  $c_2 > 0$  پارامترهای کنترلی جهت وزن دادن به ردیابی است.

پارامتر  $K$  جهت تنظیم سطح پیشینه سیگنال کنترل تعریف شده تا بتوان این سطح را کمتر از حد اشباع  $l_{\text{sat}}$  قرار داد. با توجه به مطالب گفته شده اگر مقدار  $K$  از رابطه زیر محاسبه شود سطح سیگنال کنترل هیچگاه به حد اشباع نخواهد رسید.

$$K \leq \frac{l_{\text{sat}}}{(\max |f_i^a| + 2n + c_1 + c_2)} \quad (22)$$

دینامیک حرکتی رهبر به شکل زیر تعریف می شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 \\ \dot{v}_0 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

**فرض ۱.** با توجه به شرط متصل بودن عامل ها و اینکه حداقل یک عامل مستقیماً از موقعیت و سرعت رهبر اطلاع دارد، کلیه عامل ها مستقیماً یا غیرمستقیماً نسبت به رهبر مطلع هستند.

### ۳- حرکت گروهی زمان محدود عامل های

#### جمعی

در این بخش نشان خواهیم داد موقعیت و سرعت عامل ها با دینامیک سیستم (۱) تحت سیگنال کنترل (۷) به موقعیت و سرعت یکدیگر و موقعیت و سرعت رهبر با دینامیک (۲۳) همگرا می شوند و در این حرکت علاوه بر اینکه اتصال شبکه را حفظ می کنند با یکدیگر برخورد نمی کنند. قبل از بیان قضیه و اثبات آن یک تابع انرژی به شکل زیر معرفی می کنیم.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \quad (24)$$

و با در نظر گرفتن  $\tilde{v}_i = v_i - v_0$  و  $\tilde{x}_i = x_i - x_0$  اجزاء تابع انرژی اینگونه تعریف می شوند.

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i^2 \quad (25)$$

$$V_2 = \frac{K}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^{\tilde{x}_i - \tilde{x}_j} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(s)) ds \quad (26)$$

$$V_3 = c_1 K \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{x}_i} h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(s)) ds \quad (27)$$

$$V_4 = \frac{K}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \psi(\|x_{ij}\|_\sigma) \quad (28)$$

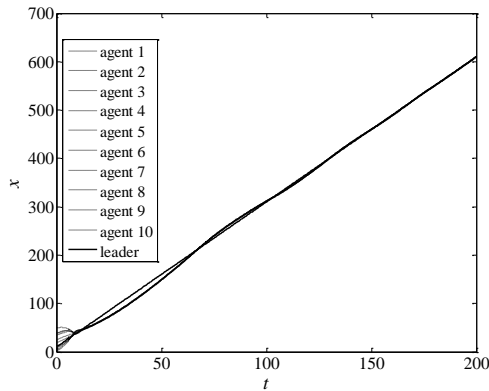
همچنین سیستم (۱) به فرم زیر تبدیل می شود.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{v}_i \\ \dot{\tilde{v}}_i = u_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

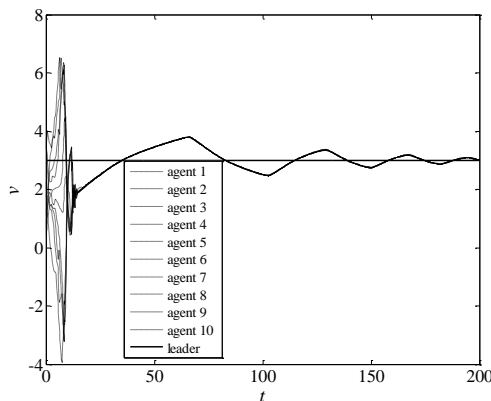
**قضیه ۱.**  $N$  عامل با دینامیک (۱) تحت سیگنال کنترل (۷) و دینامیک رهبر (۲۳) و با انرژی اولیه  $V_0 = V(x(0), v(0))$  در زمان محدود حرکت گروهی خواهند داشت. یعنی

الف) سرعت عامل ها در زمان محدود به سرعت رهبر همگرا می شود.

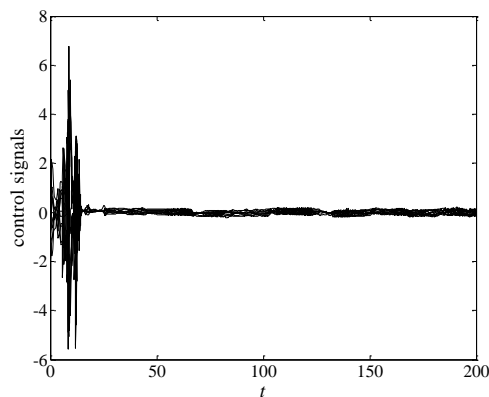
<sup>1</sup> LaSalle



شکل ۱. همگرایی موقعیت عامل ها به موقعیت یکدیگر و موقعیت رهبر.



شکل ۲. همگرایی سرعت عامل ها به سرعت یکدیگر و سرعت رهبر.



شکل ۳. سیگنال کنترل.

شکل ۲ همگرا شدن سرعت عامل ها را به سرعت یکدیگر و سرعت رهبر در زمان محدود نشان می دهد. در شکل ۳ سیگنال کنترل دیده می شود. همانطور که انتظار می رفت سطح این سیگنال کوچکتر از ۱۰ شده است. شکل ۴ فاصله بین هر دو عامل را نشان می دهد همانطور که ملاحظه می شود در عین اینکه در هیچ زمانی فاصله بین هیچ دو عاملی صفر نمی شود فاصله بین آنها از مقدار مشخصی بیشتر نمی شود. در شکل ۵ متوسط این فاصله ها ارائه شده است.

که نتیجه می دهد  $\ddot{x}_i = \ddot{x}_j = 0$  پس با توجه به قضیه لاسال سیستم پایدار مجانبی است.

سیستم (۲۹) با متغیرهای  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n)$  هموژن از درجه  $k = \alpha_1 - 1 < 0$  با تاخیر  $(2, 2, \dots, 2, 1 + \alpha_1, 1 + \alpha_1, \dots, 1 + \alpha_1)$  است.

با توجه به مباحث بالا سیستم (۲۹) پایدار مجانبی سراسری و هموژن با درجه  $k < 0$  می باشد. با استفاده از لم ۱ نتیجه می گیریم سیستم (۲۹) پایدار زمان محدود سراسری می باشد. لذا سرعت عامل ها در زمان محدود به سرعت رهبر همگرا می شود و اثبات قسمت الف تکمیل می شود.

ب) با توجه به نزولی بودن  $V$  برای تمام زمان ها می توان نتیجه گرفت  $V(t) < V_0$  است در نتیجه  $V_3 = c_1 K \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{x}_i} h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(s)) ds < V_0$  خواهد بود که نتیجه می شود  $c_1 K \sum_{i=1}^n h_i \frac{|\tilde{x}_i|^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} < V_0$ . لذا می توان گفت  $|\tilde{x}_i| < \sqrt[\alpha_1+1]{V_0(\alpha_1+1)(Kc_1)^{-1}}$  یعنی فاصله بین رهبر و عامل های آگاه همواره از این مقدار کمتر خواهد بود.

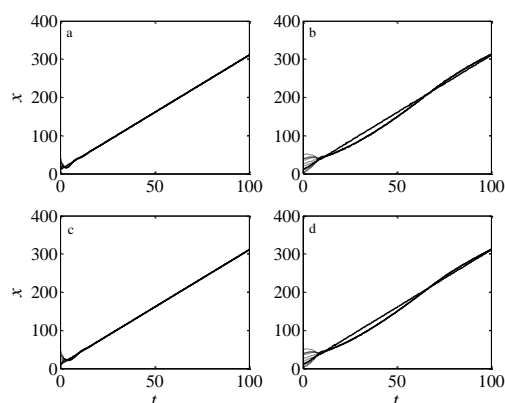
ج) فرض کنید  $G(t)$  در فاصله زمانی  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) تغییر کند. با توجه به نزولی بودن  $V$  برای تمام زمان ها  $V(t) < V_0 < V_{\max}$  صادق است از تعریف  $\psi_1(\|x_{ij}\|_\sigma) = Q > V_{\max} > V_0$  نتیجه می گیریم  $\psi_1(r_\alpha) = Q > V_{\max} > V_0$  بنابراین فاصله بین هیچ دو عاملی به  $r_\alpha$  نمی رسد یعنی هیچ ارتباطی قطع نمی گردد. با توجه به اینکه شبکه در ابتدا متصل بوده است پس متصل هم باقی خواهد ماند.

د) برای اثبات این بند شبیه بند III قضیه (۱) از مقاله [۹] از برهان خلف استفاده می کنیم. اگر در زمان  $t^* > 0$  برخوردی بین دو عامل اتفاق بیافتد مقدار تابع پتانسیل حداقل مقدار  $\psi_2(0)$  را پیدا می کند پس  $V_0 \geq V(t^*) \geq \psi_2(0)$  که این خلاف فرض  $V_0 < \psi_2(0)$  می باشد. پس برخوردی بین دو عامل نخواهیم داشت.

#### ۴- شبیه سازی

در این بخش با شبیه سازی عددی صحت ادعاهای عنوان شده در بخش قبل را نشان می دهیم. تعداد ۱۰ عامل که در فضای ۲ بعدی حرکت می کنند را در نظر می گیریم. موقعیت و سرعت اولیه این عامل ها را به شکل تصادفی در محدوده به ترتیب  $[0, 70] \times [0, 70]$  و  $[0, 4] \times [0, 4]$  به گونه ای انتخاب می کنیم که گراف اولیه متصل باشد. موقعیت و سرعت اولیه رهبر هم به ترتیب  $x_0 = [10, 10]^T$  و  $v_0 = [3, 3]^T$  در نظر می گیریم. همچنین  $\varepsilon = 0.1$ ,  $h = 0.9$ ,  $d = 1$ ,  $\sigma = 35$ ,  $Q = 0.002r_\alpha^2$  و  $a = 240$  فرض می شود. ضمناً  $\alpha_1 = 0.5$  در نظر گرفته می شود که در نتیجه  $\alpha_2 = 1/3$  خواهد شد. فقط عامل اول را آگاه در نظر می گیریم یعنی  $h_i = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ . با توجه به رابطه (۲۲) مقدار  $K$  برابر  $10/150$  می شود تا سطح سیگنال کنترل کمتر از ۱۰ شود. همانطور که در شکل ۱ مشخص است موقعیت عامل ها پس از زمان محدودی به یکدیگر همگرا می شوند.

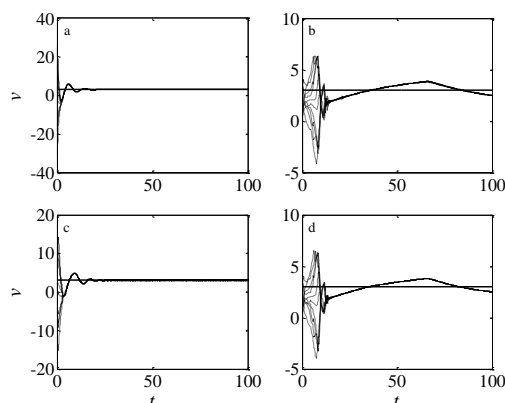
یکدیگر و رهبر به صورت مجانبی همگرا می‌شوند. در این حالت محدودیتی در سیگنال کنترل در نظر گرفته نمی‌شود. شکل‌های ۷-ا، ۸-ا و ۹-ا به ترتیب موقعیت عامل‌ها، سرعت عامل‌ها و سیگنال کنترل را نشان می‌دهد.



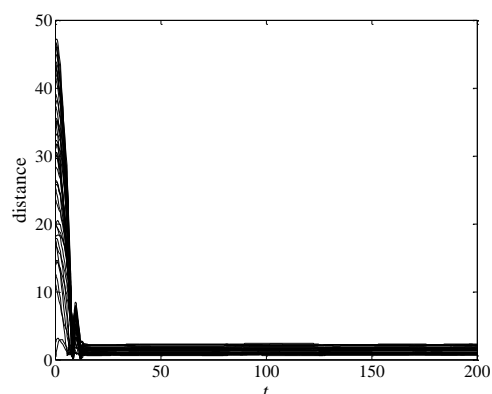
شکل ۷. موقعیت عامل‌ها در حالت ۴ (a) همگرایی مجانبی بدون محدودیت سیگنال کنترل (b) همگرایی مجانبی با محدودیت سیگنال کنترل (c) همگرایی زمان محدود بدون محدودیت سیگنال کنترل (d) همگرایی زمان محدود با محدودیت سیگنال کنترل

در حالت دوم همگرایی سرعت و موقعیت مانند حالت قبل به شکل مجانبی خواهد بود اما سیگنال کنترل به شکلی طراحی شده است که دامنه سیگنال کنترل از مقدار حد اشباع که  $\pm 10$  است بیشتر نشود. شکل‌های ۷-ب، ۸-ب و ۹-ب به ترتیب موقعیت عامل‌ها، سرعت عامل‌ها و سیگنال کنترل در این حالت را نشان می‌دهد.

در حالت سوم سیگنال کنترل به گونه‌ای طراحی شده که همگرایی به شکل زمان محدود اتفاق بیافتد اما محدودیتی برای دامنه وجود ندارد. موقعیت عامل‌ها، سرعت عامل‌ها و سیگنال کنترل به ترتیب در شکل‌های ۷-ج، ۸-ج و ۹-ج نشان داده شده است.

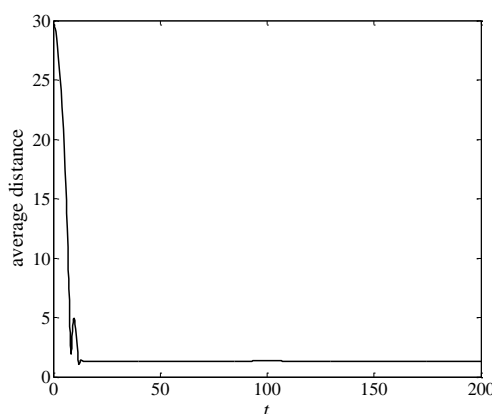


شکل ۸. سرعت عامل‌ها در حالت ۴ (a) همگرایی مجانبی بدون محدودیت سیگنال کنترل (b) همگرایی مجانبی با محدودیت سیگنال کنترل (c) همگرایی زمان محدود بدون محدودیت سیگنال کنترل (d) همگرایی زمان محدود با محدودیت سیگنال کنترل

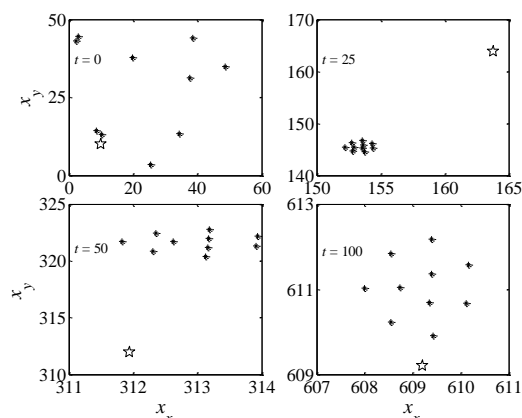


شکل ۴. فاصله بین عامل‌ها.

شکل ۶ نحوه استقرار عامل‌ها در کنار یکدیگر را نشان می‌دهد به طوریکه عامل‌ها با حفظ حداقل فاصله در کنار یکدیگر و در کنار رهبر حرکت می‌کنند.



شکل ۵. متوسط فاصله بین عامل‌ها.



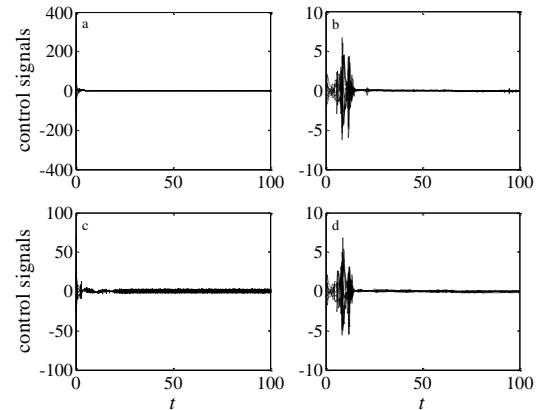
شکل ۶. قرار گرفتن عامل‌ها در ۴ زمان ۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰.

در پایان نتایج شبیه‌سازی ۴ وضعیت (۱) حرکت گروهی مجانبی بدون در نظر گرفتن اشباع در ورودی، (۲) حرکت گروهی مجانبی با در نظر گرفتن اشباع در ورودی، (۳) حرکت گروهی زمان محدود بدون در نظر گرفتن اشباع در ورودی و (۴) حرکت گروهی زمان محدود با در نظر گرفتن اشباع در ورودی ارائه می‌شود.

برای حالت اول سرعت و موقعیت عامل‌ها به سرعت و موقعیت

- decentralized approach to formation maneuvers," IEEE Transactions on Robotics and Automation, 19(6), pp. 933-941.
- [4] Yamchi, M.H., Esfanjani, R.M., 2017, "Distributed Predictive Formation Control of Networked Mobile Robots Subject to Communication Delay" Robotics and Autonomous Systems, 91, pp.194-207.
- [5] Jiang, H., Bi, Q., Zheng, S., 2012, "Impulsive consensus in directed networks of identical nonlinear oscillators with switching topologies" Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17(1), pp. 378-387.
- [6] Wellman, B.J., Hoagg, J.B., 2017, "A flocking algorithm with individual agent destinations and without a centralized leader" Systems & Control Letters, 102, pp. 57-67.
- [7] Toner, J., 1998, "Flocks, herds, and schools: a quantitative theory of flocking" Physical Review E, 58(4), pp. 4828-4858.
- [8] Olfati-saber, R., 2006, "Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory" IEEE Transactions on Automatic Control, 51(3), pp. 401-420.
- [9] Su, H., Wang, X., Lin, Z., 2009, "Flocking of multi-agents with a virtual leader" IEEE Transactions on Automatic Control, 54(2), pp. 293-307.
- [10] Bhat, S.P., Bernstein, D.S., 2000, "Finite-time stability of continuous autonomous systems" SIAM Journal on Control and Optimization, 38(3), pp. 751-766.
- [11] Bhat, S.P. Bernstein, D.S., 1998, "Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators" IEEE Transactions on Automatic Control on Automatic Control, 43(5), pp. 678-682.
- [12] Hong, Y., Huang, J., Xu, Y., 2001, "On an output feedback finite-time stabilization problem" IEEE Transactions on Automatic Control, 46(2), pp. 305-309.
- [13] Guan, Z., Sun, F., Wang, Y., Li, T., 2012 "Finite-time consensus for leader-following second-order multi-agent networks," IEEE Transactions on Circuits and Systems, 59(11), pp. 2646-2654.
- [14] Meng, D., Jia, Y., Du, J., 2015, "Nonlinear finite-time bipartite consensus protocol for multi-agent systems associated with signed graphs" International Journal of Control, 88(10), pp. 2074-2085.
- [15] Li, S., Wang, X., 2013, "Finite-time consensus and collision avoidance control algorithms for multiple AUVs," Automatica, 49(11), pp. 3359-3367.
- [16] Su, H., Wang, X., Chen, G., 2010, "Rendezvous of multiple mobile agents with preserved network connectivity," Systems & Control Letters, 59(5), pp. 313-322.

حالت آخر وضعیتی است که در این مقاله به آن پرداخته شده به شکلی که هم همگرایی به شکل زمان محدود است و هم دامنه سیگنال کنترل به حد اشباع محدود شده است. موقعیت عامل ها، سرعت عامل ها و سیگنال کنترل به ترتیب در شکل های ۷-d، ۸-d و ۹-d ارائه شده است. همانطور که در شکل ها دیده می شود بهترین پاسخ از نظر همگرایی و دامنه سیگنال کنترل مربوط به حالت آخر است.



شکل ۹. سیگنال کنترل در ۴ حالت (a) همگرایی مجانبی بدون محدودیت سیگنال کنترل (b) همگرایی مجانبی با محدودیت سیگنال کنترل (c) همگرایی زمان محدود بدون محدودیت سیگنال کنترل (d) همگرایی زمان محدود با محدودیت سیگنال کنترل

## ۸- نتیجه گیری و پیشنهاد

در این مقاله حرکت گروهی عامل ها در زمان محدود مورد بررسی قرار گرفت. سیگنال کنترل ارائه شده در این مقاله به گونه ای است که هر عامل تحت تاثیر این سیگنال در حرکت خود در عین اینکه موقعیت و سرعت خود را به عامل های مجاور و رهبر نزدیک می کند برخوردی با هیچ عاملی ندارد. ضمناً تحت تاثیر این قانون کنترلی اتصال شبکه حفظ می شود و در هیچ زمانی اتصال شبکه از بین نمی رود. سیگنال کنترل به گونه ای تعریف شده است که با تنظیم پارامترهای مورد نظر می توان سطح آن را محدود به حد اشباع ورودی کرد تا عنصر اشباع نتواند روی عملکرد سیستم تاثیر بگذارد.

با توجه به اینکه برای اثبات همگرایی زمان محدود از روش هموژنی استفاده کرده ایم امکان ارائه زمانی مشخص برای زمان همگرایی وجود ندارد پیشنهاد می شود روشی ارائه شود تا بتواند زمان محدود همگرایی را مشخص کند.

## مراجع

- [1] Vicsek, T., Czirok, A., Ben-Jacob, E., Cohen, I., Shochet, O., 1995 "Novel type of phase transition in a system of self-driven particles," Physical Review Letters, 25(6), pp. 1226-1229.
- [2] Esmailifar, S.M., Saghafi, F., 2017, "Cooperative localization of marine targets by UAVs" Mechanical Systems and Signal Processing, 87, pp.23-42.
- [3] J.R.T. Lawton, R.W. Beard, and B.J. Young, "A