

## طراحی فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی با ورودی نامشخص

بیژن معاونی<sup>۱</sup>، مجید بویرزمان<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مهندسی راه آهن، گروه راه آهن برقی و کنترل و علائم، دانشگاه علم و صنعت ایران، [b\\_moaveni@iust.ac.ir](mailto:b_moaveni@iust.ac.ir)  
<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد کنترل و علائم، گروه راه آهن برقی و کنترل و علائم، دانشگاه علم و صنعت ایران، [booyezaman@iust.ac.ir](mailto:booyezaman@iust.ac.ir)

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۳/۱/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۳/۵/۱۳)

**چکیده:** این مقاله به طراحی فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی برای سیستم‌های گسسته در زمان و با حضور ورودی نامشخص می‌پردازد. هدف از طراحی این فیلتر تخمین متغیرهای حالت سیستم در حضور اغتشاش تصادفی و غیر تصادفی و همچنین در حضور ورودی نامشخص است. به عبارت دیگر فیلتر طراحی شده در این مقاله قصد دارد از نقاط قوت فیلتر کالمن در کنار مزایای رویترهای تناسبی-انتگرالی استفاده نماید. بطوریکه با استفاده از حلقه تناسبی بتوان اثر اغتشاشات تصادفی از جمله نویز فرآیند و نیز اندازه‌گیری را رفع کرد و از سوی دیگر با استفاده از حلقه انتگرالی بتوان بر اغتشاش غیر تصادفی مانند عدم قطعیت پارامتر، اغتشاش بیرونی وارده بر سیستم غلبه کرد. در روند طراحی فیلتر، شرط بدون بایاس بودن و سازگاری فیلتر استخراج گشته و به دنبال اثبات بدون بایاس بودن فیلتر، شرایط حذف اثر ورودی نامشخص و ضرایب فیلتر استخراج می‌گردد. با استفاده از یک مثال عددی، کارایی این فیلتر نشان داده شده است.

**کلمات کلیدی:** فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی؛ رویتر با ورودی نامشخص؛ اغتشاش تصادفی و غیر تصادفی؛ تخمین بدون بایاس بودن؛ تخمین سازگار.

## Design of Unknown Input Proportional-Integral Kalman Filter

Bijan Moaveni, Majid Booyezaman

**Abstract:** In this paper, we introduce the proportional-integral kalman filter for discrete time systems with unknown input. The Proportional-Integral observers (PIOs) have good performance in deal with uncertainty in model, while those cannot handle the effect of deterministic unknown inputs. On the other hand, the Unknown Input Kalman filter (UIKF) is sensitive to uncertainty, while it provides unbiased minimum-variance estimation in the presence of unknown input. Here, we introduce Unknown Input Proportional Integral Kalman filter (UIPIKF) as an unbiased minimum-variance estimator in the presence of uncertainty and unknown input in the model. Using a numerical example, the effectiveness of the filter is demonstrated.

**Keywords:** Proportional Integral Kalman Filter, Unknown Input Observer, Stochastic and Deterministic Disturbance, Unbiased Estimation, Consistent Estimation.

### ۱- مقدمه

سیستم‌های قطعی پیشنهاد گشته است رویتر لئونبرگر<sup>۱</sup> بوده است. این رویتر اگرچه ساده و کارآمد بود، ولیکن در مواجهه با سیستم‌های دارای ورودی تصادفی (نویز) و/یا در حضور ورودی نامشخص دچار مشکل جدی می‌گشت و عملکرد قابل قبولی در تخمین متغیرهای حالت نداشت. این در حالی بود که فیلتر کالمن به عنوان یک فیلتر خطی با کمینه

همان‌گونه که محققین و مهندسی حوزه مهندسی کنترل می‌دانند و در مراجع مختلف به آن اشاره شده است، رویترها در سیستم‌های قطعی (یا فیلترها در سیستم‌های تصادفی) کاربردهای فراوانی به منظور کنترل به روش فیدبک خروجی، پایش وضعیت سیستم‌ها و تشخیص عیب دارد[۱]. روش کلاسیکی که برای حل مساله تخمین متغیرهای حالت در

<sup>۱</sup> - Luenberger

انتگرالی بیان کردند که علاوه بر کاهش اثر خطای مدل به حذف اثر نویز اندازه گیری در سیستم منجر می شود.

در سالهای اخیر محققان سعی بر آن داشته تا با ارائه روش های طراحی متفاوت این رویکرد بتوانند با استفاده از مزایای هر کدام از این روش ها به طراحی بهتر و جامع تری دست یابند. از آن جمله می توان به روش های طراحی زیر اشاره کرد. طراحی بر اساس، روش ساختار ویژه [۱۶]، روش طراحی بر اساس جایابی قطب [۱۷]، همچنین مقالاتی با استفاده از کمینه کردن نرم  $H_{\infty}$  سعی در طراحی این رویکرد داشته اند [۳، ۴]، روش دیگر کمینه کردن واریانس خطای تخمین می باشد [۱۸-۲۰]. به عنوان مثال، در [۱۶]، روش طراحی ساختار ویژه پارامتریکی ارائه شد که درجه آزادی کاملی از طراحی  $PIO$  را در اختیار طراح می گذارد که این روش منجر به کاهش حساسیت مقادیر ویژه می شود. مارک در [۳، ۴]، با اتخاذ روش کمینه کردن نرم  $H_{\infty}$  تابع تبدیل اغتشاش به خطای تخمین با به عبارتی حساسیت تخمین حالت را نسبت به اغتشاش کم کرد. در [۱۸، ۱۹] فیلتر کالمنی ارائه شده است که علاوه بر بهره تناسبی کالمن، از بهره انتگرالی نیز استفاده می شود که از حل معادلات ریکاتی با کمینه کردن واریانس خطا حاصل می شود. با استفاده از این تخمینگر عملکرد حالت گذرا و همچنین حاشیه پایداری سیستم خطای تخمین را بهبود بخشید. با استفاده از ضریب محوشوندگی<sup>۶</sup> و اثر ضریب انتگرالی پارامترهای طراحی اضافی را نیز بوجود آورد.

در سیستم های خطی با داشتن اطلاعات دقیق از سیستم و با علم بر اینکه نویزهای وارده بر سیستم نویزهای سفیدگوسی یا میانگین صفر هستند، فیلتر کالمن تخمینی با کمینه واریانس ارائه می نماید [۱۸]. ولیکن مشکل جدی که این تخمینگر با آن مواجه است، عدم دقت کافی مدل های مورد استفاده در این تخمین گرها است که امروز با پیچیده تر شدن سیستم ها قابل نظر نیستند. این در حالیست که همراه با عدم قطعیت، اغتشاش و وجود ورودی های نامشخص نیز جزئی از دینامیک سیستم می باشند و وجود آنها موجب وجود خطا در تخمین می گردد. برای کاهش اثر بایاس روش هایی در [۱۸] ارائه شده است. از جمله این روش ها می توان به روش کمینه بیشینه، روش دکوپله کردن اغتشاش نامشخص و روش جذب اغتشاش نامشخص، اشاره کرد. در روش سوم راه حل استفاده از متغیر اضافی است. این متغیر اضافی اثر اغتشاش نامشخص را در خود جذب می کند. با استفاده از متغیر اضافی سیستم افزوده ای که هم متغیر حالت سیستم اصلی و هم متغیر حالت اضافی را در بر دارد تشکیل می شود. در [۲۱] نیز با استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته با ورودی نامشخص، تخمینی از سرعت طولی وسیله نقلیه ارائه گردید. همچنین در ادامه با بیان فیلتر تطبیقی غیر خطی نتایج بدست آمده از این دو مقایسه شده است. در این مقاله سعی بر آن بوده است که بتوانند با استفاده از ایده فیلتر کالمن توسعه یافته و ترکیب آن با فیلتر کالمن با ورودی نامشخص بر مشکل ورودی نامشخص (گشتاور ترمزی) فائق آیند

میانگین مربعات خطا<sup>۱</sup> مساله تخمین را در سیستم های خطی اتفاقی حل کرده است. در استفاده از فیلتر کالمن فرض بر این است که پارامترهای سیستم، کوواریانس نویزهای فرایند و اندازه گیری و همچنین ورودی های سیستم معلوم و مشخص است. این در حالی است که، در عمل با مسائل مختلفی مواجه می گردیم که فرضیات بالا برقرار نمی باشند و در این حالت ها نیز فیلتر کالمن عملکرد مطلوبی در تخمین حالت ها نخواهد داشت [۲]. از این رو، محققین و مهندسين کنترل تحقیقات فراوانی در خصوص حل این نقایص داشته و در این خصوص تحقیقات مختلفی صورت گرفته که نتایج آن تحت عنوان رویکردهای با ورودی نامشخص به منظور مواجه با اثر ورودی نامشخص ارائه شده است [۳، ۴]. همچنین به منظور ارتقای مقاومت رویکردها در مقابل نامشخص پارامترهای مدل، رویکردهای تناسبی-انتگرالی پیشنهاد گشته اند [۵] الی [۳، ۴].

برخلاف رویکردهای تناسبی<sup>۲</sup> ( $PO$ ) مانند رویکرد لئونبرگر [۶] و فیلتر کالمن [۷]، که فقط از یک حلقه تناسبی از خطای تخمین استفاده می کنند، رویکرد تناسبی-انتگرالی<sup>۳</sup> ( $PIO$ ) از حلقه فیدبک انتگرالی اضافه ای نیز بهره می گیرد. اضافه کردن این جمله انتگرالی سبب می شود که درجه آزادی بیشتری برای طراحی یک تخمینگر حالت حاصل شود. همچنین از مزایای استفاده از این تخمینگر حالت می توان به افزایش دقت تخمین در حالت ماندگار، ارتقای مقاومت تخمین در برابر اغتشاش، ورودی نامشخص و خطای مدل سازی اشاره کرد. با معرفی جمله انتگرالی در طراحی رویکرد، اولین بار وسیجفسکی<sup>۴</sup> پیشنهاد استفاده از رویکرد تناسبی-انتگرالی  $PIO$  برای سیستم های پیوسته نامتغیر با زمان تک ورودی تک خروجی را ارائه داد [۵]. این ایده بعدها در [۸] و [۹] برای سیستم های چند متغیره توسعه داده شد تا مقاومت در برابر تغییرات پارامتر و اغتشاش پله را بهبود ببخشد. تا به امروز این نوع تخمینگرها مورد توجه بسیاری از محققان و پژوهشگران قرار گرفته است. از آن جمله می توان به بیل و شافی [۱۰] اشاره داشت که با استفاده از رویکرد تناسبی-انتگرالی  $PIO$  سعی بر رفع مشکل بهبود انتقال بهره<sup>۵</sup> ( $LTR$ ) داشتند و نشان دادند که این امر در حالت ماندگار قابل حصول می باشد. بعدها این دو محقق در زمینه رفع این مشکل مقالاتی مفید نیز در [۱۱، ۱۲] ارائه کردند. شافیر و مولر در [۱۳] طی مقاله ای نشان دادند که می توان با استفاده از رویکرد تناسبی-انتگرالی  $PIO$  به تخمینی از حالت های سیستم در حضور هر نوع ورودی خارجی دلخواه، مانند ورودی نامشخص، غیر خطی گری ها و دینامیک مدل نشده، دست یافت. در اواخر دهه ۹۰ از رویکرد تناسبی-انتگرالی  $PIO$  که بر اساس بهبود انتقال بهره  $LTR$  طراحی شده بود برای عیب یابی سیستم استفاده شد [۱۴]. کابوره و بوسوان در [۱۵] روشی جدید در طراحی رویکرد تناسبی-

<sup>1</sup> - Minimum Mean Square Error

<sup>2</sup> - Proportional Observer

<sup>3</sup> - Proportional Integral Observer

<sup>4</sup> - Wojciechowski

<sup>5</sup> - Loop Transfer Recovery

<sup>6</sup> - Fading Coefficient

همچنین  $O(T_s^2)$  معرف جملات مرتبه بالا در بسط تیلور می باشد [۲۲]. دامنه  $d(n)$  از مرتبه  $O(T_s)$  می باشد، اگر اغتشاش محدود و نرم باشد. یکی از شروط مهم برای طراحی تخمینگر به شرح زیر می باشد. فرض ۳: ثابت زمانی نمونه برداری  $T_s$  باید به قدری کوچک انتخاب شود که اغتشاش نتواند بین دو نمونه برداشته شده تغییرات زیادی انجام دهد. به عبارتی داریم.

$$d(n+1) - d(n) \in O(T_s^2) \quad (۳)$$

برای سیستم با معادله (۱)، دینامیک تخمینگر  $UIPIKF$  پیشنهادی دارای فرمی به صورت زیر است:

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + k^y(n) [z(n) - C\hat{x}^-(n)] + (I - k^y(n)C)K^i\alpha(n-1) \quad (۴)$$

$$\alpha(n) = (I - k^\alpha(n)CK^i)\alpha(n-1) + k^\alpha(n)[z(n) - C\hat{x}^-(n)] \quad (۵)$$

که در آن  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت تخمین زده شده،  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  متغیر حالت کمکی و یا به عبارتی متغیر حالت انتگرالی و  $K^y \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ،  $K^\alpha \in \mathbb{R}^{q \times q}$  و  $K^i \in \mathbb{R}^{n \times q}$  بهره های روی تگر می باشند.  $K^y$  ضریب تناسبی و  $K^\alpha$  ضریب انتگرالی نامیده می شوند. تفاوت عمده معادلات فیلتر پیشنهادی، اضافه شدن یک جمله انتگرال گیر در معادله (۴) نسبت به معادله مشابه در فیلتر کالمن با ورودی نامشخص ارائه شده در [۲۳] می باشد.

در [۲۰] برای طراحی  $PIKF$ ، همچنان محاسبه بهره فیلتر کالمن، به دو تخمین  $prior(\hat{x}^-)$  و  $posterior(\hat{x}^+)$  از متغیر حالت  $x$  نیاز داریم. از این رو محاسبات در هر مرحله در دو سطح به روز می شود، یکی در سطح اندازه گیری ها و دیگری در سطح زمان. از طرفی در [۲۰] روش طراحی و معادلات فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی را ارائه داده شده است.

ورودی های سیستم را می توان به دو بخش ورودی های مشخص و نامشخص تقسیم بندی نمود [۲۲]. با در نظر گرفتن اثر ورودی های مشخص در تخمین متغیرهای حالت مشکلی برای تخمین این متغیرها وجود نخواهد داشت. در حالیکه وجود ورودی نامشخص که ایستا به مفهوم وسیع  $(WSS)$  نباشد، در دینامیک سیستم و اثر آن در خروجی، روی تگر  $PIKF$  با خطا در تخمین مواجه می شود. از این رو با الهام گرفتن از روش طراحی فیلتر کالمن ورودی نامشخص  $UIKF$ ، به دنبال طراحی فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی با ورودی نامشخص  $UIPIKF$  می باشیم که بتواند ویژگی های هر دو فیلتر را داشته باشد و در حضور این ورودی، تخمین صحیحی از متغیرهای حالت را در اختیار قرار دهد.

و تخمینی از سرعت طولی وسیله نقلیه در حضور ورودی نامشخص داشته باشند.

ما در این مقاله سعی داریم تا با اضافه کردن یک جمله انتگرالی به فیلتر کالمن با ورودی نامشخص بتوانیم مشکل فیلتر کالمن تناسبی انتگرالی را در حضور ورودی های نامشخص از نوع نایستا به مفهوم وسیع<sup>۱</sup> ( $NON-WSS$ ) بر طرف کرده و نیز از مزایای فیلتر کالمن تناسبی انتگرالی نظیر مقاومت در برابر عدم قطعیت پارامتری و اغتشاش غیرتصادفی نیز بهره مند شویم. لذا در این مقاله، به معرفی فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی با ورودی نامشخص<sup>۲</sup> ( $UIPIKF$ ) برای سیستم های گسسته زمان خواهیم پرداخت. این تخمینگر در حضور نویز اندازه گیری، نویز فرایند، اغتشاش و ورودی نامشخص به خوبی تخمینی از حالت ها را در اختیار می گذارد. به دنبال اثبات شرط بدون بایاس بودن این تخمینگر در حضور ورودی نامشخص با میانگین متغیر، شرط حذف اثر ورودی نامشخص را در این مرحله بدست آورده و در ادامه با اثبات کمینه واریانس بودن این تخمینگر ضرایب تناسبی و انتگرالی فیلتر کالمن را طوری بدست آورده که نشان می دهیم که این ضرایب، شرط بدون بایاس بودن تخمینگر که در بالا ذکر شد را نیز برآورده می سازند. در انتها با ارائه مثالی، عملکرد مطلوب تخمینگر پیشنهادی  $UIPIKF$  نشان داده می شود.

## ۲- مدل سازی مساله

بر اساس مدل ارائه شده در [۲۲]، معادلات فضای حالت یک سیستم خطی گسسته در زمان در حضور اغتشاش به فرم معادلات (۱)-(۲) می باشد.

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n) + Ed(n) + \omega(n) + O(T_s^2) \quad (۱)$$

$$z(n) = Cx(n) + v(n) \quad (۲)$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$ ،  $u \in \mathbb{R}^p$  و  $z \in \mathbb{R}^q$  به ترتیب عبارتند از بردارهای متغیر حالت سیستم، ورودی سیستم و خروجی سیستم، که همراه با نویز اندازه گیری  $v$  و نویز فرایند  $\omega$  می باشند. همچنین اغتشاش ورودی با  $d \in \mathbb{R}^l$  معرفی می شود. ماتریس ضرایب  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $E$  ماتریس های حقیقی با مقادیر معلوم می باشند که در فرضیات زیر صدق می کنند. ماتریس  $E$ ، ماتریس بیشینه دامنه ضرایب اغتشاش نیز نامیده می شود.

فرض ۱: ماتریس  $C$  مرتبه کامل سطری می باشد.

فرض ۲: زوج  $(A, C)$  رویت پذیر می باشد.

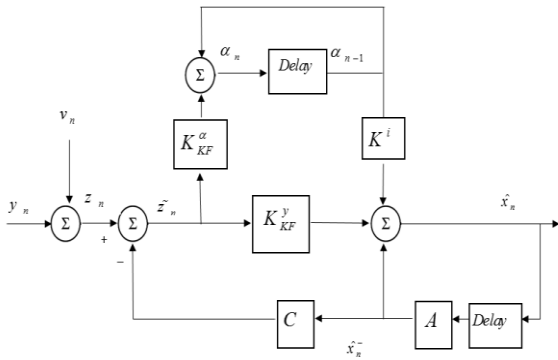
<sup>۱</sup> - Wide Sense Stationary

<sup>۲</sup> - Unknown Input Proportional Integral Kalman Filter

### ۳- طراحی فیلتر

#### ۱-۳ فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی

در [۲۰] روش طراحی و معادلات فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی به فرم معادلات (۶) الی (۱۱) ارائه شده است. در شکل ۱ نیز دیاگرام بلوکی از این فیلتر PIKF مشاهده می‌شود. در این شکل  $y_n$  خروجی سیستم،  $v_n$  نویز اندازه‌گیری،  $z_n$  خروجی اندازه‌گیری شده،  $K_{KF}^y$  ضریب تناسبی فیلتر کالمن،  $K_{KF}^\alpha$  ضریب انتگرالی فیلتر کالمن و  $\hat{x}_n$  متغیر حالت تخمین زده شده می‌باشد. در ادامه  $\hat{x}^+$  را با  $\hat{x}$  نشان می‌دهیم. این فیلتر هنگامی می‌تواند اثر ورودی نامشخص را در تخمین حذف کند که این ورودی WSS باشد. در زمانی که با ورودی‌های NON-WSS سروکار داشته باشیم تخمین با بایاس همراه شده و خطای تخمین به صفر همگرا نخواهد شد. برای سیستمی با معادلات حالت (۱) فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی به فرم زیر می‌باشد.



شکل ۱: دیاگرام بلوکی از فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی PIKF

#### Measurement Update

$$F = CP^-(n)C^T + R \quad (13)$$

$$K = P^-(n)C^T F^{-1} \quad (14)$$

$$L = K + (I - KC)B \times (B^T C^T F^{-1} C B)^{-1} B^T C^T F^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + L(y(n) - C\hat{x}^-(n)) \quad (16)$$

$$P(n) = (I - LC)P^-(n)(I - LC)^T + LRL^T \quad (17)$$

#### Time Update :

$$\hat{x}^-(n+1) = A\hat{x}(n) \quad (18)$$

$$P^-(n+1) = AP(n)A + Q \quad (19)$$

#### ۳-۳ طراحی فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی با ورودی نامشخص

همانگونه که در بخش‌های پیشین گفته شد، فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی قابلیت ارائه تخمین بدون بایاس و کاملی را در حضور نامعینی پارامترهای مدل سیستم دارد، ولیکن این فیلتر امکان حذف اثر ورودی‌های نامشخص از نوع NON-WSS را ندارد. از سوی دیگر فیلتر کالمن ارائه شده در بخش ۳-۲، نسبت به ورودی نامشخص حساس نبوده و امکان حذف اثر ورودی نامشخص NON-WSS را دارا است ولیکن نسبت به تغییرات پارامترهای مدل حساس است. بر این اساس همانگونه که در مقدمه مقاله نیز اشاره شد، هدف تصحیح و ارائه معادلات فیلتر کالمن به نحوی است که در ضمن اینکه امکان حذف اثر ورودی نامشخص NON-WSS را دارا است، نسبت به وجود نامعینی در پارامترهای مدل نیز مقاوم باشد.

$$K_{KF}^y(n) = (AP(n)C^T + K^i P_{x\alpha}^T C^T) \times (R + CP(n)C^T)^{-1} \quad (6)$$

$$K_{KF}^\alpha(n) = P_{x\alpha}^T(n)C^T (R + CP(n)C^T)^{-1} \quad (7)$$

$$\hat{x}(n+1) = A\hat{x}(n) + Bu(n) + K_{KF}^y(n)(y(n) - \hat{y}(n)) + K^i \alpha(n) \quad (8)$$

$$\alpha(n+1) = \alpha(n) + K_{KF}^\alpha(n)(y(n) - \hat{y}(n)) \quad (9)$$

$$\hat{y}(n) = C\hat{x}(n) \quad (10)$$

$$\bar{P}(n+1) = \bar{A}P(n)\bar{A}^T + \bar{Q} - \bar{A}\bar{P}(n)\bar{C}^T \times (R + \bar{C}P(n)\bar{C}^T)^{-1} \bar{C}\bar{P}(n)\bar{A}^T \quad (11)$$

که در معادلات (۶) الی (۱۱) پارامترها به فرم معادله (۱۲) تعریف شده‌اند.

$$\bar{P}(n) = \begin{bmatrix} P & P_{x\alpha} \\ P_{x\alpha}^T & P_\alpha \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [C \quad 0]$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & K^i \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

(۱۲)

#### ۲-۳ فیلتر کالمن با ورودی نامشخص

در [۲۳] معادلات فیلتر کالمن با ورودی نامشخص به فرم معادلات (۱۳) الی (۱۹) ارائه شده است. در این فیلتر با معلوم بودن ماتریس بهره ورودی نامشخص E، بهره فیلتر کالمن را با استفاده از تکنیک مجزا سازی اثر ورودی نامشخص بر خطای تخمین و شروط بدون بایاس بودن و سازگار بودن به نحوی محاسبه می‌کنند که اثر ورودی نامشخص در

$$\tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}(n) \quad (29)$$

$$E[\tilde{x}(n)] = 0 \quad (30)$$

$$E[\tilde{x}^2(n)] = 0 \quad (31)$$

## ۱-۴ تحلیل میانگین خطای تخمین

برای محاسبه میانگین خطای تخمینگر پیشنهادی از رابطه (۲۹) داریم:

$$\tilde{x}(n+1) = x(n+1) - \hat{x}(n+1) \quad (32)$$

با جایگذاری از معادلات (۱) و (۴) در معادله (۳۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) + Ed(n) \\ &+ \omega(n) - \hat{x}^-(n+1) \\ &- k^y(n+1)[y(n+1) - c\hat{x}^-(n+1)] \\ &- (I - k^y(n+1)C)K^i\alpha(n) \end{aligned} \quad (33)$$

با مرتب نمودن و ساده سازی این معادله، دینامیک خطای تخمین را می توان با معادلات حالتی به صورت (۳۴) توصیف نمود.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n+1) &= (A - k^y(n+1)CA)\tilde{x}(n) \\ &+ (B - k^y(n+1)CB)u(n) \\ &+ (I - k^y(n+1)C)Ed(n) \\ &+ (I - k^y(n+1)C)\omega(n) \\ &- k^y(n+1)v(n+1) \\ &- (I - k^y(n+1)C)K^i\alpha(n) \end{aligned} \quad (34)$$

حال با فرض معلوم بودن ماتریس بهره ورودی نامشخص  $E$ ، می توان طراحی را به گونه ای انجام داد که  $K^i = E$  باشد. به دلیل اینکه ماتریس خطای تخمین حالت پایدار مجانبی باشد و تخمین بدون بایاسی از متغیرهای حالت سیستم داشته باشیم لازم است تعداد انتگرال گیرهای تخمینگر برابر با بعد اغتشاش وارده بر سیستم باشد. با فاکتور گرفتن از عامل مشترک خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n+1) &= (A - k^y(n+1)CA)\tilde{x}(n) \\ &+ (B - k^y(n+1)CB)u(n) \\ &+ (I - k^y(n+1)C)\omega(n) \\ &- k^y(n+1)v(n+1) \\ &+ (I - k^y(n+1)C)K^i(d(n) - \alpha(n)) \end{aligned} \quad (35)$$

حال برای متغیر انتگرالی از جاگذاری معادله (۲) در معادله (۵) و ساده سازی آن داریم:

برای رفع مشکلات بالا و دست یافتن به نقاط قوت هر دو فیلتر، در اینجا فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی با ورودی نامشخص پیشنهاد می گردد. معادلات حالت فیلتر کالمن پیشنهادی UIPIKF به شرح زیر می باشد.

## Measurement Update

$$F(n) = \bar{C}P^-(n)\bar{C}^T + R \quad (20)$$

$$K(n) = P^-(n)\bar{C}^T F^{-1} \quad (21)$$

$$L(n) = K(n) + (I - K(n)\bar{C}) \quad (22)$$

$$\times \bar{B}(\bar{B}^T \bar{C}^T F^{-1} \bar{C} \bar{B})^{-1} \bar{B}^T \bar{C}^T F^{-1}$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + k^y(n)[z(n) - C\hat{x}^-(n)] \quad (23)$$

$$+ (I - k^y(n)C)K^i\alpha(n-1)$$

$$\alpha(n) = (I - k^y(n)C)K^i\alpha(n-1) \quad (24)$$

$$+ k^y(n)[z(n) - C\hat{x}^-(n)]$$

$$P(n) = [I - L\bar{C}]P^-(n)[I - L\bar{C}]^T + LRL^T \quad (25)$$

## Time Update :

$$\hat{x}^-(n) = A\hat{x}(n-1) \quad (26)$$

$$P^-(n+1) = \bar{A}P(n)\bar{A}^T + \bar{Q} \quad (27)$$

که در معادلات (۲۰) الی (۲۷) از متغیرهای معادلات (۱۲) و (۲۸) استفاده شده است.

$$L(n) = \begin{bmatrix} k^y(n) \\ k^y(n) \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & K^i \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [C \quad 0]$$

که ماتریس های افزوده  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ،  $\bar{B} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times p}$ ،  $\bar{C} \in \mathbb{R}^{q \times (n+m)}$  دارای ابعاد مناسب می باشند و با فرض اینکه بعد متغیر انتگرالی و یا به عبارتی تعداد انتگرال گیرهای لازم، با بعد اغتشاش وارده بر سیستم  $\alpha, D \in \mathbb{R}^m$  برابر می باشد.

## ۴- تحلیل عملکرد فیلتر

برای داشتن تخمین کامل از حالت های یک سیستم لازم است تخمینگر دو شرط بدون بایاس بودن (۳۰) و سازگاری (۳۱) را برآورده کند. از این رو در ادامه نشان داده می شود که این فیلتر شرایط دست یافتن به یک تخمین کامل را دارا خواهد بود. در این روابط همان گونه که در رابطه (۲۹) دیده می شود  $\tilde{x}(n)$  معرف خطای تخمین است. همچنین  $E[\cdot]$  معرف امید ریاضی است.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{x}(n+1) \\ \eta(n+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (I-k^\gamma(n+1)C) \\ -K^\alpha(n+1)C \end{bmatrix} Bu(n) \\ &+ \begin{bmatrix} (I-k^\gamma(n+1)C)A & (I-k^\gamma(n+1)C)K^i \\ -K^\alpha(n+1)CA & (I-K^\alpha(n+1)CK^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(n) \\ \eta(n) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (I-k^\gamma(n+1)C) \\ -K^\alpha(n+1)C \end{bmatrix} \omega(n) + \begin{bmatrix} k^\gamma(n+1) \\ -K^\alpha(n+1) \end{bmatrix} v(n+1) \end{aligned} \quad (42)$$

به منظور بررسی و تحلیل بایاس این تخمینگر، از طرفین معادله (42)، به صورت (43) امید ریاضی گرفته شده است.

بفرض اینکه نویز فرآیند  $\omega(n)$  و نویز اندازه گیری  $v(n)$  نویز سفید گوسی با میانگین صفر باشند دو جمله آخر معادله (43) برابر صفر خواهد بود. از سوی دیگر، اگر هدف دست یافتن به تخمین بدون بایاس باشد، لازم است اثر ورودی بر دینامیک خطای تخمین صفر گردد، این شرط لازم می نماید که بدون توجه به مقدار ورودی، ضرایب آن صفر باشند تا به هدف مدنظر بتوان دست یافت. لذا، رابطه (44) لازم است برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B-k^k(n+1)CB \\ -K^\alpha(n+1)CB \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} I-k^\gamma(n+1)C \\ -K^\alpha(n+1)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} &= 0 \\ (I-L\bar{C})\bar{B} &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

در نتیجه، دینامیک خطای تخمین در معادلات دینامیکی زیر صدق خواهند نمود.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E[\tilde{x}(n+1)] \\ E[\eta(n+1)] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (I-k^\gamma(n+1)C)A & (I-k^\gamma(n+1)C)K^i \\ -K^\alpha(n+1)CA & (I-K^\alpha(n+1)CK^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[\tilde{x}(n)] \\ E[\eta(n)] \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} E[\tilde{x}(n)] \\ E[\eta(n)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

با در نظر گرفتن بردار حالت افزوده  $\bar{X}(n)$  می توان معادله (45) را به این گونه بازنویسی کرد.

$$E[\bar{X}(n+1)] = (I-L\bar{C})\bar{A}E[\bar{X}(n)] \quad (46)$$

پر واضح است که فیلتر پایدار و بودن بایاس خواهد بود اگر ماتریس  $(I-L\bar{C})\bar{A}$  پایدار مجانبی باشد، تخمین به صورت مجانبی بدون بایاس خواهد بود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\bar{X}(n)] = 0 \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \alpha(n+1) &= (I-k^\alpha(n+1)CK^i)\alpha(n) \\ &+ K^\alpha(n+1)CA\tilde{x}(n) \\ &+ K^\alpha(n+1)CBu(n) \\ &+ K^\alpha(n+1)CED(n) \\ &+ K^\alpha(n+1)C\omega(n) \\ &+ K^\alpha(n+1)v(n+1) \end{aligned} \quad (36)$$

به منظور شناسایی اغتشاش با معرفی متغیر جدیدی به صورت  $\eta(n) = d(n) - \alpha(n)$  و با در نظر گرفتن دینامیک آن داریم:

$$\eta(n+1) = d(n+1) - \alpha(n+1) \quad (37)$$

با کم و زیاد کردن  $\eta(n)$  به معادله (37) خواهیم داشت:

$$\eta(n+1) = \eta(n) - \eta(n) + d(n+1) - \alpha(n+1) \quad (38)$$

$$\eta(n+1) = \eta(n) - d(n) + \alpha(n) + d(n+1) - \alpha(n+1) \quad (39)$$

$$\eta(n+1) = \eta(n) - (\alpha(n+1) - \alpha(n)) + d(n+1) - d(n) \quad (40)$$

حال با جایگذاری معادله (36) در معادله (40) و ساده سازی آن داریم:

$$\begin{aligned} \eta(n+1) &= (I-K^\alpha(n+1)CK^i)\eta(n) \\ &- K^\alpha(n+1)CA\tilde{x}(n) - K^\alpha(n+1)CBu(n) \\ &- K^\alpha(n+1)C\omega(n) - K^\alpha(n+1)v(n+1) \\ &+ d(n+1) - d(n) \end{aligned} \quad (41)$$

با در نظر گرفتن بردار حالت افزوده  $\bar{X}(n) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(n) \\ \eta(n) \end{bmatrix}$  و با استفاده از

معادلات (35) و (41)، سیستم افزوده را به فرم معادله (42) می توان تشکیل داد.

$$\begin{aligned} \eta(n+1) &= (I-K^\alpha(n+1)CK^i)\eta(n) \\ &- K^\alpha(n+1)CA\tilde{x}(n) - K^\alpha(n+1)CBu(n) \\ &- K^\alpha(n+1)C\omega(n) - K^\alpha(n+1)v(n+1) \\ &+ d(n+1) - d(n) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E[\tilde{x}(n+1)] \\ E[\eta(n+1)] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (I-k^\gamma(n+1)C)A & (I-k^\gamma(n+1)C)K^i \\ -K^\alpha(n+1)CA & (I-K^\alpha(n+1)CK^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[\tilde{x}(n)] \\ E[\eta(n)] \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} I-k^\gamma(n+1)C \\ -K^\alpha(n+1)C \end{bmatrix} \bar{B}E[u(n)] + \begin{bmatrix} I-k^\gamma(n+1)C \\ -K^\alpha(n+1)C \end{bmatrix} E[\omega(n)] + \begin{bmatrix} k^\gamma(n+1) \\ -K^\alpha(n+1) \end{bmatrix} E[v(n+1)] \end{aligned} \quad (43)$$

## ۲-۴- محاسبه شرط کمینه واریانس

ماتریس خطای تخمین برای تخمینگر معادله (۴) به فرم زیر می‌باشد.

$$p(n+1) = E \left[ (\bar{X}(n+1))(\bar{X}(n+1))^T \right] \quad (۴۸)$$

با جایگزینی از معادله (۴۶) در معادله (۴۸) و با کمی ساده سازی برای متغیر  $p(n+1)$  به معادله (۴۹) خواهیم رسید.

$$p(n+1) = L(n+1)R(n)L^T(n+1) + (I - L(n+1)\bar{C}) \left[ \bar{A}P(n)\bar{A}^T + \bar{Q}(n) \right] (I - L(n+1)\bar{C})^T \quad (۴۹)$$

حال با تعریف متغیرهای جدید به فرم زیر خواهیم داشت:

$$p^-(n+1) = \left[ \bar{A}P(n)\bar{A}^T + \bar{Q}(n) \right] \quad (۵۰)$$

$$p(n+1) = P^-(n+1) + L(n+1) \left[ \bar{C}P^-(n+1)\bar{C}^T + R(n+1) \right] L^T(n+1) - L(n+1)\bar{C}P^-(n+1) - P^-(n+1)\bar{C}^T L^T(n+1) \quad (۵۱)$$

$$F(n+1) = \bar{C}P^-(n+1)\bar{C}^T + R(n+1) \quad (۵۲)$$

حال با استفاده از معادلات (۵۰) و (۵۲) و جایگزینی در معادله (۵۱) خواهیم داشت

$$p(n+1) = L(n+1)F(n+1)L^T(n+1) - P^-(n+1)\bar{C}^T L^T(n+1) - L(n+1)\bar{C}P^-(n+1) + P^-(n+1) \quad (۵۳)$$

باتوجه به اینکه هدف دست یافتن به یک تخمین می نیمم واریانس در حضور قید تساوی (۴۴) است، لذا راهکار پیشنهادی استفاده از روش لاگرانژی است. به این منظور، مقدار واریانس خطای تخمین از عناصر قطری ماتریس کوواریانس خطا،  $p(n+1)$ ، به صورت  $\text{trace}(p(n+1))$  قابل محاسبه است. حال با توجه به روش لاگرانژی، رابطه (۵۴) را برای لاگرانژی می‌توان ارائه نمود.

$$\Xi = \text{trace} \left[ L(n+1)F(n+1)L^T(n+1) - 2P^-(n+1)\bar{C}^T L^T(n+1) + P^-(n+1) \right] - 2\text{trace} \left[ (L(n+1)\bar{C}\bar{B} - \bar{B})\Lambda^T(n+1) \right] \quad (۵۴)$$

که در آن  $\Lambda(n+1)$  یک ماتریس  $n \times l$  است که با عنوان ضریب لاگرانژی شناخته می‌باشد. به منظور استخراج شرط کمینه واریانس، بر اساس روش لاگرانژی، لازم است مشتق لاگرانژی نسبت به دو متغیر  $L(n+1)$  و  $\Lambda(n+1)$  برابر صفر باشد. که نتیجه آن عبارت خواهد بود از:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial L(n+1)} = 0 \rightarrow 2F(n+1)L^T(n+1) - 2\bar{C}P^-(n+1) - 2\bar{C}\bar{B}\Lambda^T(n+1) = 0 \quad (\text{الف-۵۵})$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \Lambda(n+1)} = 0 \rightarrow (44) \quad (\text{ب-۵۵})$$

لذا دو شرط موجود در معادلات (۵۵-الف) و (۵۵-ب) که همان معادله حاصله از (۴۴) می‌باشد و شرایط بهینگی ارائه می‌نمایند. به منظور برآورده نمودن همزمان این دو شرط و محاسبه مجهولات مساله بهینه سازی مقید، رابطه‌های (۴۴) و (۵۵-الف) به صورت ماتریسی (۵۶) بازنویسی می‌گردند.

$$\begin{bmatrix} F(n+1) & -\bar{C}\bar{B} \\ \bar{B}^T \bar{C}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T(n+1) \\ \Lambda^T(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}P^-(n+1) \\ \bar{B}^T \end{bmatrix} \quad (۵۶)$$

پر واضح معادله ماتریسی (۵۶) زمانی دارای جواب منحصر به فرد خواهد بود که ماتریس ضرایب ناویژه باشد. با محاسبه معکوس ماتریس بر اساس روابطه معکوس گیری ماتریس‌های بلوکی [۲۴] و توجه به متقارن بودن ماتریس  $F$  می‌توان نشان داد که حل رابطه فوق برای  $\Lambda(n+1)$  عبارت است از:

$$\Lambda(n+1) = \left[ \bar{B} - P^-(n+1)\bar{C}^T F^{-1}(n+1)(\bar{C}\bar{B}) \right] \times \left[ (\bar{C}\bar{B})^T F^{-1}(n+1)(\bar{C}\bar{B}) \right]^{-1} \quad (۵۷)$$

با استفاده از معادله (۵۵) و جایگذاری ضریب لاگرانژی  $\Lambda(n+1)$  در معادله (۵۷) در این رابطه ماتریس  $L(n+1)$  متناظر با حل بهینه عبارت است از (۵۸).

$$L(n+1) = P^-(n+1)\bar{C}^T F^{-1}(n+1) + \left[ \bar{B} - P^-(n+1)\bar{C}^T F^{-1}(n+1)(\bar{C}\bar{B}) \right] \times \left[ (\bar{C}\bar{B})^T F^{-1}(n+1)(\bar{C}\bar{B}) \right]^{-1} (\bar{C}\bar{B})^T F^{-1}(n+1) \quad (۵۸)$$

حال با تعریف  $K(n+1)$ ، به صورت (۵۹)، رابطه (۵۸) را می‌توان به صورت (۶۰) بازنویسی نمود.

$$K(n+1) = P^-(n+1)\bar{C}^T F^{-1}(n+1) \quad (۵۹)$$

مشاهده می‌گردد که رابطه (۶۰) همان رابطه ضریب فیلتر پیشنهادی  $UIPIKF$  ارائه شده در بخش ۳-۳ می‌باشد.

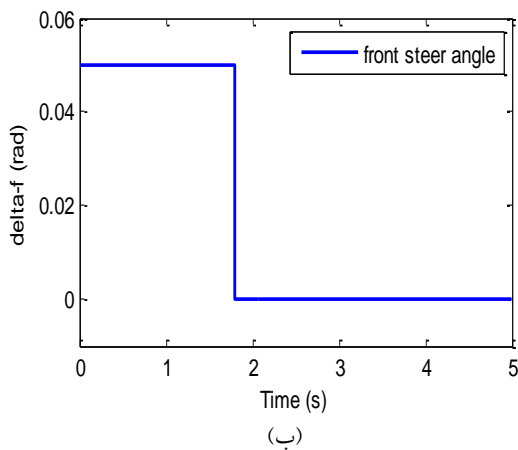
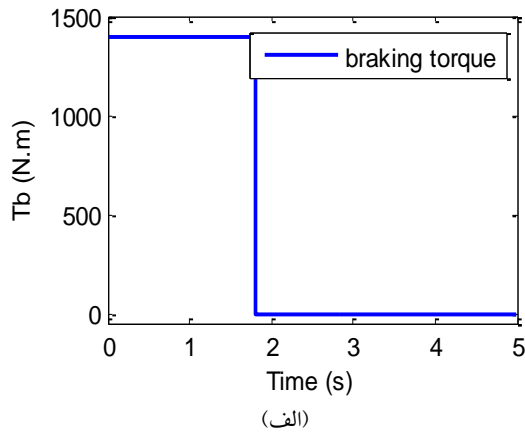
$$L(n+1) = K(n+1) + \left[ \bar{B} - K(n+1)\bar{C}\bar{B} \right] \left[ (\bar{C}\bar{B})^T F^{-1}(n+1)\bar{C}\bar{B} \right]^{-1} \times (\bar{C}\bar{B})^T F^{-1}(n+1) \quad (۶۰)$$

لذا بر اساس نتایج بخش ۴-۱ و ۴-۲ نشان داده شد برای تعداد کافی مشاهدات فیلتر ارائه شد در معادلات (۲۱) الی (۲۷) یک فیلتر بدون بایاس و کمینه واریانس می‌باشد.

## ۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش با ارائه مثال‌هایی، عملکرد فیلتر پیشنهادی  $UIPIKF$  بررسی شده و نتایج آن با فیلترهای  $PIKF$  و  $UIKF$  مقایسه می‌گردد. در مقاله [۲۱] معادلات غیر خطی حرکت وسیله نقلیه دو چرخ ارائه شده است. ورودی‌های این سیستم برابر است با  $\begin{bmatrix} \delta_r & T_b \end{bmatrix}$  که به ترتیب

زاویه چرخ جلو با محور افق و گشتاور ترمزی می‌باشند. حالت‌های این سیستم  $[\omega_r, r, v_y, v_x]$  به ترتیب برابر سرعت طولی، سرعت عرضی، نرخ انحراف از مسیر افقی، سرعت دورانی چرخ جلو و سرعت دورانی چرخ عقب خودرو می‌باشند. خروجی‌های این سیستم نیز برابر است با سرعت دورانی چرخ جلو و عقب خودرو  $[\omega_r, \omega_f]$ . در این سیستم مقدار دقیق گشتاور ترمزی در تمامی لحظات قابل اندازه‌گیری نبوده، از این رو این ورودی به عنوان ورودی نامشخص در تخمین حالت در نظر گرفته شده است. حال با طراحی دو روینگر  $UIPIKF$  و  $PIKF$  به تخمین حالت‌های سیستم پرداخته و پاسخ این دو روینگر را با هم مقایسه خواهیم کرد. مقدار عددی ماتریس‌های ضرایب به فرم زیر می‌باشد:



شکل ۲: (الف) گشتاور ترمزی، (ب) زاویه چرخ جلو با محور افق

**سناریوی ۱: مقایسه  $UIPIKF$  و  $PIKF$  برای سیستم نامی**

**( $\delta_{11} = 0$ ) و با حضور ورودی نامشخص**

همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌گردد مقدار خطای تخمین سرعت طولی و جانبی با استفاده از تخمینگر  $UIPIKF$  به صفر همگرا شده در صورتی که با استفاده از تخمینگر  $PIKF$  خطای تخمین نسبت به مقدار واقعی دیده می‌شود. در تخمینگر  $PIKF$  بدلیل اینکه ورودی نامشخص از نوع ایستا به مفهوم وسیع  $WSS$  نمی‌باشد این فیلتر دارای خطای تخمین مخالف صفر شده است. در حالی که با استفاده از روش طراحی پیشنهادی  $UIPIKF$ ، اثر ورودی نامشخص در تخمین حذف شده است.

**سناریوی ۲: مقایسه  $UIPIKF$  و  $UIKF$  سیستم در حضور**

**بیشینه مقدار نامعینی و بدون حضور ورودی نامشخص**

در این سناریو بیشینه مقدار نامعینی پارامتریک که ناشی از اثر تغییرات اصطکاک در سطح تماس چرخ و جاده است [۲۵] به سیستم مورد بحث اضافه گردیده و با استفاده از تخمینگرهای  $UIPIKF$  و  $UIKF$  به تخمین حالت‌های سیستم می‌پردازیم.

$$A = \begin{bmatrix} 0.9960 + \delta_{11} & 0.0001 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0004 \\ -0.0002 & 0.9966 & -0.0237 & 3.5420 \times 10^{-5} & 2.5079 \times 10^{-5} \\ -0.0001 & 0.0006 & 0.9973 & 1.7140 \times 10^{-5} & 1.2136 \times 10^{-5} \\ 0.1173 & -0.007 & -0.0063 & 0.9691 & -0.0001 \\ 0.0952 & -7.7638 \times 10^{-5} & -7.0470 \times 10^{-5} & -0.0002 & 0.9751 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.0056 & -6.3930 \times 10^{-8} \\ 0.0380 & -3.7997 \times 10^{-9} \\ 0.0183 & -1.8345 \times 10^{-9} \\ 0.1762 & -0.0001 \\ 0.0025 & -9.5160 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -0.005 \\ 0 \\ 0 \\ 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 25^{m/s} & 0^{m/s} & 0^{rad/s} & 94^{rad/s} & 94^{rad/s} \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{x}_0 = [25 \ 0 \ 0 \ 93 \ 93]^T$$

در خصوص نامعینی،  $\delta_{11}$  در [۲۵] نشان داده شده است که:

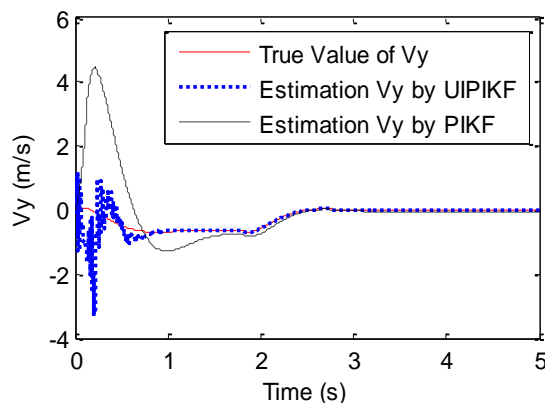
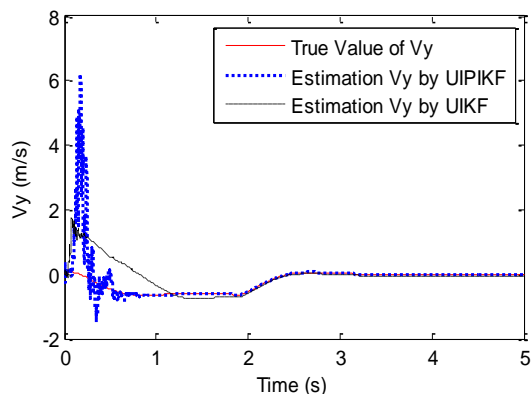
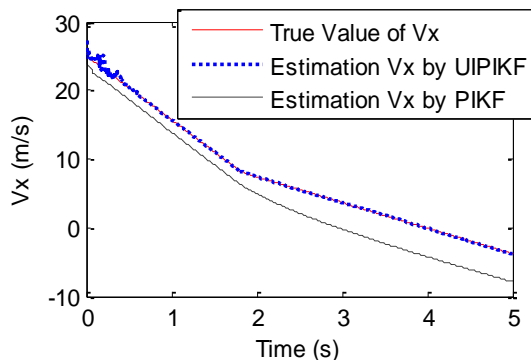
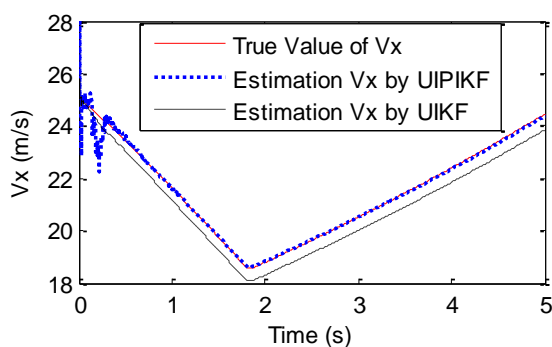
$$-0.0001 \leq \delta_{11} \leq 0.0005$$

همانطور که مشاهده می‌کنید این سیستم شرایط موجود در فرضیات بخش ۲ را ارضا می‌کند. در ماتریس‌های بالا مقدار سرعت طولی وسیله نقلیه در ابتدای لحظه ترمز برابر است با سرعت دورانی چرخ‌ها ضرب در شعاع چرخ  $R_w$ ، از این رو داریم:

$$x_{0_1} = R_w x_{0_4} \quad (61)$$

در شکل ۲ مقدار عددی ورودی‌های سیستم نشان داده شده است. در این شکل مقدار گشتاور ترمزی در بازه  $0 \leq t \leq 1.8$  ثانیه برابر با





شکل ۴: مقادیر واقعی و تخمین زده شده برای سرعت طولی و عرضی بر اساس اندازه گیری سرعت چرخ های جلو و عقب (خط توپر: مقدار صحیح، نقطه چین: تخمین حالت ها با استفاده از  $UIPIKF$ ، خط چین: تخمین حالت با استفاده از  $PIKF$ )

شکل ۳: مقادیر واقعی و تخمین زده شده برای سرعت طولی و جانبی بر اساس اندازه گیری سرعت چرخ های جلو و عقب (خط توپر: مقدار صحیح، نقطه چین: تخمین حالت ها با استفاده از  $UIPIKF$ ، خط چین: تخمین حالت با استفاده از  $PIKF$ )

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک فیلتر کالمن تناسبی-انتگرالی با ورودی نامشخص ( $UIPIKF$ ) ارائه گردید تا بتواند خواص تخمین‌گرهای ورودی نامشخص (در مواجهه با ورودی نامشخص) و همچنین قابلیت رویتگرهای تناسبی-انتگرالی (در مواجهه با نامعینی‌های پارامتریک) را داشته باشد. پس از ارائه معادلات فیلتر پیشنهادی، بدون بایاس بودن و کمینه واریانس بودن تخمینگر بررسی شده و نشان داده شد که فیلتر پیشنهادی شرایط لازم برای یک فیلتر بدون بایاس و کمینه واریانس را دارا می باشد. با استفاده از مثالی نیز عملکرد موفق فیلتر پیشنهادی در مقایسه با فیلترهای تناسبی-انتگرالی و فیلتر با ورودی نامشخص نشان داده شد.

از این رو با لحاظ نمودن نامعینی در این درایه و با استفاده از تخمینگر  $UIPIKF$  و  $UIKF$  به تخمین متغیرهای حالت این سیستم پرداخته شده و نتایج در شکل ۴ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می کنیم و از قبل نیز انتظار می رفت، فیلتر کالمن با ورودی نامشخص  $UIKF$  در برابر نامعینی‌های پارامتری مقاومتی نداشته و تخمین را به درستی انجام نمی دهد. این در حالی است که رویتگر پیشنهادی  $UIPIKF$  تخمین خوبی از حالت های سیستم در حضور نامعینی‌های پارامتر در اختیار می گذارد. در جدول ۱، به عنوان جمع بندی مطالب بخش شبیه سازی، توانمندی ها و نقاط ضعف سه روش تخمین  $UIPIKF$ ،  $UIKF$  و  $PIKF$  مقایسه گشته اند.

## مراجع

- [1] A. Pertew, H. Marquez, and Q. Zhao, "Design of unknown input observers for Lipschitz nonlinear systems," in *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, 2005, pp. 4198-4203.
- [2] M. Darouach, M. Zasadzinski, A. B. Onana, and S. Nowakowski, "Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 26, pp. 2015-2028, 1995.

جدول ۱: مقایسه تخمینگر  $UIPIKF$  با تخمینگرهای  $UIKF$  و  $PIKF$

عملکرد	عملکرد	عملکرد	
$PIKF$	$UIKF$	$UIPIKF$	
مطلوب و مناسب	ضعیف	مطلوب و مناسب	نامعینی در مدل
ضعیف	مطلوب و مناسب	مطلوب و مناسب	ورودی نامشخص (اختشاش)

- [15] K. K. Busawon and P. Kabore, "Disturbance attenuation using proportional integral observers," *International Journal of Control*, vol. 74, pp. 618-627, 2001.
- [16] G. Duan, G. Liu, and S. Thompson, "Eigenstructure assignment design for proportional-integral observers: continuous-time case," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 148, pp. 263-267, 2001.
- [17] J.-S. Hu, F.-R. Hu, and M.-Y. Cheng, "A partial pole placement approach to proportional-integral observer design," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 223, pp. 253-262, 2009.
- [18] O. Y. Bas, B. Shafai, and S. P. Linder, "Design of optimal gains for the proportional integral Kalman filter with application to single particle tracking," in *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, 1999, pp. 4567-4571.
- [19] S. P. Linder and B. Shafai, "Robust pfi Kalman filters," in *American Control Conference, 1998. Proceedings of the 1998*, 1998, pp. 3163-3164.
- [20] L. Bodizs, B. Srinivasan, and D. Bonvin, "On the design of integral observers for unbiased output estimation in the presence of uncertainty," *Journal of Process Control*, vol. 21, pp. 379-390, 2011.
- [21] ب. معاونی، م. خسروی، ص. نصیری، م. امیری، "تخمین سرعت طولی خودرو با استفاده از دو تخمینگر جدید و بدون نیاز به اندازه گیری گشتاور ترمزی"، مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۴، شماره ۵، ۱۸۳-۱۹۳، تابستان ۱۳۹۳.
- [22] J.-L. Chang, "Applying discrete-time proportional integral observers for state and disturbance estimations," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 51, pp. 814-818, 2006.
- [23] P. K. Kitaniadis, "Unbiased minimum-variance linear state estimation," *Automatica*, vol. 23, pp. 775-778, 1987.
- [24] K. B. Petersen and M. S. Pedersen, "The matrix cookbook," *Technical University of Denmark*, pp. 7-15, 2008.
- [25] Moaveni, B., Khosravi, M., Nasiri, S., "Vehicle Longitudinal Velocity Estimation during the Braking Process using Unknown Input Kalman Filter", *Vehicle System Dynamics*, (Accepted).
- [3] B. Marx, D. Koenig, and D. Georges, "Robust fault diagnosis for linear descriptor systems using proportional integral observers," in *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, 2003, pp. 457-462.
- [4] B. Shafai, C. Pi, and S. Nork, "Simultaneous disturbance attenuation and fault detection using proportional integral observers," in *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, 2002, pp. 1647-1649.
- [5] B. Wojciechowski, "Analysis and synthesis of proportional-integral observers for single-input-single-output time-invariant continuous systems," *Gliwice, Poland*, 1978.
- [6] D. G. Luenberger, "Observers for multivariable systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 11, pp. 190-197, 1966.
- [7] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory," *Journal of Fluids Engineering*, vol. 83, pp. 95-108, 1961.
- [8] T. Kaczorek, "Proportional-integral observers for linear multivariable time-varying systems/Proportional-Integral-Beobachter für lineare, zeitvariable Mehrgrößensysteme," *at-Automatisierungstechnik*, vol. 27, pp. 359-363, 1979.
- [9] B. Shafai and R. Carroll, "Design of proportional-integral observer for linear time-varying multivariable systems," in *Decision and Control, 1985 24th IEEE Conference on*, 1985, pp. 597-599.
- [10] S. Beale and B. Shafai, "Robust control system design with a proportional integral observer," *International Journal of Control*, vol. 50, pp. 97-111, 1989.
- [11] H. H. Niemann, J. Stoustrup, B. Shafai, and S. Beale, "LTR design of proportional-integral observers," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 5, pp. 671-693, 1995.
- [12] B. Shafai, S. Beale, H. Niemann, and J. Stoustrup, "LTR design of discrete-time proportional-integral observers," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 41, pp. 1056-1062, 1996.
- [13] D. SÖFFKER, T.-J. Yu, and P. C. MÜLLER, "State estimation of dynamical systems with nonlinearities by using proportional-integral observer," *International Journal of Systems Science*, vol. 26, pp. 1571-1582, 1995.
- [14] H. Niemann, "An application of LTR design in fault detection," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 19, pp. 215-225, 1998.