

کنترل ردیاب فازی سیستم‌های دینامیکی خطی فازی برای ورودی مرجع ثابت تحت مشتق ریزدانه‌ای

سید محمد مهدی عباسی^۱، علی اکبر جلالی^۲

^۱ فارغ‌التحصیل دکترا مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، s_abasi@elec.iust.ac.ir

^۲ استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، drjalali@iust.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۹/۱۸

ویرایش: ۱۳۹۸/۰۶/۱۳

دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۱۳

چکیده: در این مقاله به بررسی کنترل ردیاب فازی برای کلاسی از سیستم‌های دینامیکی خطی فازی پرداخته شده است. عدم قطعیت در این سیستم‌های دینامیکی خطی، به صورت اعداد فازی در نظر گرفته شده است. این نوع سیستم‌های دینامیکی خطی با عدم قطعیت تحت عنوان سیستم‌های دینامیکی خطی فازی نامیده می‌شوند که در قالب معادلات دیفرانسیل فازی بیان می‌شوند. برای حل معادلات دیفرانسیل فازی از رویکرد ریاضیات بازه‌ای اندازه فاصله نسبی و مفهوم مشتق ریزدانه‌ای استفاده شده است. هدف از طراحی کنترل ردیاب فازی پیدا کردن قانون کنترلی فازی می‌باشد که خروجی سیستم بتواند ورودی مرجع مورد نظر را ردیابی کند. برای این منظور قانون کنترل فازی در قالب یک قضیه ارائه شده است. قانون کنترل ارائه شده در قالب فیدبک حالت فازی با بهره‌های فازی و همچنین یک پیش جبران ساز فازی می‌باشد. از آنجایی که اندازه‌گیری حالت‌های سیستم همواره امکان‌پذیر نمی‌باشد لازم است یک رویکرد فازی برای تخمین حالت‌های سیستم طراحی شود. در انتها مسئله کنترل ردیاب خروجی برای سیستم دو تانک سری و کنترل فرود هواپیما به منظور نشان دادن اثربخشی روش پیشنهادی آورده شده است.

کلمات کلیدی: تابع عضویت افقی، کنترل فازی، سیستم خطی فازی، ریاضیات ریزدانه‌ای، مشتق ریزدانه‌ای.

Fuzzy Tracking Control of Fuzzy Linear Dynamical Systems for a fixed reference input under granular derivative

Seyed Mohammad Mehdi Abbasi, Aliakbar Jalali

Abstract: This paper investigates the fuzzy tracking control problem of a class of uncertain linear dynamical systems. The uncertainty of linear dynamical system is considered as fuzzy numbers. This kind of uncertain linear dynamical systems is called fuzzy linear dynamical systems which are expressed in the form of a fuzzy differential equations system. The relative-distance-measure fuzzy interval arithmetic approach and the concept of granular derivatively are utilized to deal with the fuzzy differential equations system. The main aim of designed fuzzy tracking control is to find a fuzzy control law by which the output of the system tracks the reference input. To this end, the fuzzy control law is presented in the form of a theorem. The presented control law is in the form of fuzzy state feedback with fuzzy gains and a fuzzy pre-compensator. Since the system's states always cannot be measured, a fuzzy observer must be designed to estimate the system's states. At the end, fuzzy tracking control of output of a two tanks in series system and control of airplane landing are presented to show the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: Horizontal membership function, Fuzzy control, Fuzzy linear system, Granular arithmetic, Granular derivative.

۱- مقدمه

مسئله کنترل ردیاب همواره یکی از موضوعات جذاب در حوزه کنترل می‌باشد. در مسئله کنترل ردیاب هدف طراحی کردن سیستم کنترلی می‌باشد که تضمین کند خروجی سیستم حلقه بسته، ورودی مرجع را ردیابی کند. تاکنون تحقیقات بسیاری در خصوص طراحی کنترل ردیاب با این فرض که پارامترها و شرایط اولیه سیستم دینامیکی مقادیر مشخصی دارند، انجام شده است. با این حال، به دلایلی از قبیل تغییرات دمایی، اشتباه در شناسایی و اندازه‌گیری پارامترهای سیستم، مدل سیستم دینامیکی ممکن است همواره دقیق و مشخص نباشد. طراحی کنترل ردیاب برای سیستم‌های دینامیکی همراه با عدم قطعیت در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد.

سیستم‌های دینامیکی همراه با عدم قطعیت به سیستم‌هایی گفته می‌شود که معادلات ریاضی حاکم بر آن‌ها معادلات دیفرانسیل با پارامترهای عدم قطعیت می‌باشد. اخیراً معادلات دیفرانسیل فازی^۱ به عنوان نوعی از معادلات دیفرانسیل همراه با عدم قطعیت مورد توجه محققین قرار گرفته است. عدم قطعیت در این سیستم‌های دینامیکی خطی، به صورت اعداد فازی که در واقع نمایش ریاضی دانش فرد خبره می‌باشد، در نظر گرفته شده است. تاکنون تحقیقات گسترده‌ای بر روی معادلات دیفرانسیل فازی در حوزه‌های گوناگون از قبیل مسائل اقتصادی [۱]، ریاضیات [۲-۵]، تئوری کنترل [۶، ۷]، موضوعات پزشکی [۸]، فرآیندهای شیمیایی [۹] و غیره، انجام شده است.

معادلات دیفرانسیل فازی تحت نوع خاصی از ریاضیات با عنوان ریاضیات فازی شکل می‌گیرند. ریاضیات فازی تا حدی با ریاضیات کلاسیک متفاوت می‌باشد. به عنوان مثال بر اساس ریاضیات فازی $\tilde{t} - \tilde{t} \neq 0$ در این رابطه \tilde{t} عدد فازی می‌باشد. در حوزه ریاضیات فازی دو رویکرد کلی برای معادلات فازی و ریاضیات فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد که یکی از آن‌ها تحت عنوان ریاضیات بازه‌ای استاندارد فازی^۲ (FSIA) است [۲، ۵، ۱۰، ۱۱] و دیگری ریاضیات بازه‌ای فازی اندازه فاصله نسبی^۳ می‌باشد [۱۲-۱۶].

در سال‌های اخیر توجه محققین برای طراحی سیستم کنترل بر روی سیستم‌های دینامیکی فازی افزایش یافته است. طراحی کنترل بهینه برای سیستم دینامیکی فازی خطی با شرایط اولیه و پارامترهای فازی در [۱۰، ۱۱] ارائه شده است. در این مقالات از مفهوم مشتق مشتق هاکوهاری تعمیم یافته قوی^۴ (SGH) و مشتق هاکوهاری تعمیم یافته^۵ (GH) برای طراحی کنترل کننده استفاده شده است. البته مشتق SGH و GH دارای برخی محدودیت‌ها است. به عنوان نمونه جواب این مشتق‌ها همواره وجود ندارد. مشکل دیگر که در این روش‌ها موجود می‌باشد، بروز پدیده رفتار غیرطبیعی در مدل‌سازی^۶ (UBM) می‌باشد [۱۷]. در پدیده UBM معادلات دیفرانسیل فازی که دارای شکل‌های مختلف با ساختار یکسان می‌باشند دارای جواب‌های متفاوت می‌باشند. به عنوان نمونه معادلات دیفرانسیل فازی $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{b}$ ، $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{b}$ و $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{x}(t)$ که دارای شرایط اولیه یکسان هستند. و \tilde{b} مشتق پذیر SGH یا GH است، دارای جواب‌های متفاوت می‌باشد.

در مقاله [۱۸] شرایط ضروری بهینگی مسئله تغییرات مقید و غیر مقید فازی مورد تحقیق قرار گرفت که در آن معادلات دیفرانسیل فازی و مشتقات موجود بر اساس تعریف مشتق GH در نظر گرفته شده است. در [۱۹] مسئله مدل‌سازی و طراحی کنترل کننده بهینه برای بیماری ایدز ارائه شده است. ساختار مدل بیماری ایدز بر اساس معادلات دیفرانسیل فازی ارائه شده است. در این مدل ضرایب و شرایط اولیه فازی و مشتقات بر اساس تعریف مشتق SGH در نظر گرفته شده است. در مقاله [۱۱] کنترل بهینه معادلات فضای حالت خطی با ضرایب فازی و شرایط اولیه قطعی مورد بررسی قرار گرفت. در این معادلات از تعریف مشتق SGH استفاده شده است. تعمیم اصل بیشینه پونت‌ریاگین به منظور دستیابی به یک کنترل کننده بهینه فازی در مرجع [۲۰] معرفی شده است. معادلات دیفرانسیل فازی بر اساس مشتق GH در این مقاله ارائه شده‌اند. در مقاله [۲۱] مسئله کنترل بهینه برای کلاسی از سیستم‌های فازی مورد بررسی قرار گرفته است. در این معادلات از تعریف مشتق SGH استفاده شده است. همچنین در مقاله [۲۲] با استفاده از مشتق GH مسئله کنترل بهینه برای سیستم‌های فازی همراه با تأخیر مورد بررسی قرار گرفته است.

کنترل زیر بهینه برای سیستم‌های دینامیکی خطی فازی تحت مشتق ریزدانه‌ای^۷ بر اساس ریاضیات فازی RDM-FIA در [۲۳] حل شده است. مسئله کنترل بهینه زمانی در مقاله [۷] با استفاده از ریاضیات RDM-FIA مورد بررسی قرار گرفته است.

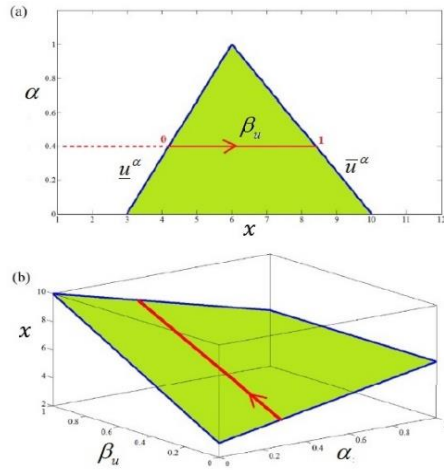
در راستای کارهای انجام شده، در این مقاله هدف طراحی کنترل ردیاب فازی برای سیستم‌های دینامیکی فازی می‌باشد. برای حل مسئله کنترل ردیاب فازی در این مقاله از مفهوم مشتق ریزدانه‌ای و ریاضیات RDM-FIA استفاده می‌شود. با استفاده از قضیه بیان شده در این مقاله تضمین می‌شود که با استفاده از کنترل فیدبک حالت فازی و پیش جبران ساز استاتیکی سیستم حلقه بسته ورودی مرجع را ردیابی خواهد کرد. در حالت کلی لازم است که برای طراحی این کنترل کننده تمام متغیرهای حالت فازی در دسترس باشد. در بسیاری از کاربردهای واقعی، اندازه‌گیری تمامی متغیرهای حالت امکان‌پذیر نیست. در این موارد برای پیاده‌سازی فیدبک حالت، تخمین متغیرهای حالت الزامی است. برای این منظور یک رویکرد فازی برای تخمین حالت‌های سیستم فازی لازم است طراحی شود. لازم به ذکر است که متغیرهای ورودی رویکرد هر لحظه مقادیر فازی می‌باشند.

در ادامه مقاله و در بخش دوم برخی از مفاهیم اساسی مربوط به حساب ریاضی فازی ارائه می‌شود. طراحی کنترل کننده و رویکرد فازی و ارائه قضایایی در این زمینه و اثبات آن‌ها در بخش سوم آورده شده است. در بخش چهارم نتایج عددی و شبیه‌سازی و در بخش پنجم، نتیجه‌گیری بیان گردیده است.

۲- مفاهیم اساسی

در این مقاله مجموعه تمام اعداد در این مقاله مجموعه تمام اعداد حقیقی به صورت R نشان داده می‌شود و مجموع تمام اعداد فازی نوع-۱ به صورت E_1 نشان داده می‌شود؛ کران بالا و پایین $-\alpha$ برش مجموعه فازی \tilde{A} به ترتیب با \tilde{A}^- و \tilde{A}^+ نشان داده می‌شود. ترانزاده یک

⁴ Strongly Generalized Hukuhara (SGH)⁵ Generalized Hukuhara (GH)⁶ Uncertain Behavior in Modeling Phenomenon (UBM)⁷ Granular differentiability (gr- differentiability)¹ Fuzzy Differential Equation (FDE)² Fuzzy Standard Interval Arithmetic (FSIA)³ Relative- Distance- Measure Fuzzy Interval Arithmetic (RDM-FIA)



شکل ۱: (a) عدد فازی مثلثی $\tilde{u} = (3, 6, 10)$ (b) تابع عضویت

افقی مربوط به این عدد

تعریف ۳: [۱۷] فرض شود \tilde{u} و \tilde{v} اعداد فازی هستند که تابع عضویت افقی آن‌ها به ترتیب به صورت $u^{gr}(\alpha, \beta_u)$ و $v^{gr}(\alpha, \beta_v)$ باشد. همچنین فرض شود منظور از “ \otimes ” یکی از چهار عمل پایه‌ای حساب، جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم باشد. بنابراین $\tilde{u} \otimes \tilde{v}$ یک عدد فازی همچون \tilde{m} است آن چنانکه

$$H(\tilde{m}) = u^{gr}(\alpha, \beta_u) \otimes v^{gr}(\alpha, \beta_v) \quad (۳)$$

فرض کنید $\tilde{m} = \tilde{u} \otimes \tilde{v}$ آنگاه

$$[\tilde{m}]^\alpha = H^{-1}(u^{gr}(\alpha, \beta_u) \otimes v^{gr}(\alpha, \beta_v)) \quad \text{بیان کننده } -\alpha \text{ برش عدد فازی } \tilde{m} \text{ می باشد.}$$

باید توجه شود که اگر \otimes عملگر تقسیم باشد آنگاه $0 \notin v^{gr}(\alpha, \beta_v)$.

باید توجه شود که تفاضل بین دو عدد فازی که در تعریف (۳) بیان شده است، تفاضل ریزدانه‌ای نامیده می‌شود.

تعریف ۴: [۲۳، ۱۷] دو عدد فازی \tilde{u} و \tilde{v} را معادل گویند اگر

$$\text{و تنها اگر } H(\tilde{u}) = H(\tilde{v}) \text{ برای تمام } \beta_u = \beta_v \in [0, 1]$$

نکته ۳: [۱۷] فرض کنید $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in E_1$ با توجه به تعاریف (۳) و (۴) روابط زیر برقرار می‌باشد:

1. $\tilde{u} - \tilde{v} = -(\tilde{v} - \tilde{u})$
2. $\tilde{u} - \tilde{u} = 0$
3. $\tilde{u} \div \tilde{u} = 1$
4. $(\tilde{u} + \tilde{v})\tilde{w} = \tilde{u}\tilde{w} + \tilde{v}\tilde{w}$ (۴)

تعریف ۵: [۱۷] فرض شود \tilde{u} و \tilde{v} اعداد فازی هستند. $\tilde{u} \geq \tilde{v}$

اگر و تنها اگر $H(\tilde{u}) \geq H(\tilde{v})$ برای تمام $\beta_u = \beta_v \in [0, 1]$

ماتریس $Y = [y_{ij}]_{n \times n}$ به صورت Y^T نشان داده می‌شود.

تعریف ۱: [۲۴] مجموعه فازی $\tilde{u} : R \rightarrow [0, 1]$ را عدد فازی می‌نامند اگر نرمال، محدب فازی، از بالا نیمه پیوسته باشد و بستار^۱ مجموعه فازی در R فشرده باشد. عدد فازی می‌تواند همچنین به فرم پارامتری با جفت تابع $(\underline{u}^\alpha, \bar{u}^\alpha)$ ، $0 \leq \alpha \leq 1$ نشان داده شود اگر ویژگیهای زیر را داشته باشد.

۱. \underline{u}^α یک تابع غیر کاهشی، از راست پیوسته در بازه

$(0, 1]$ و در $\alpha = 0$ از چپ پیوسته است.

۲. \bar{u}^α یک تابع غیر افزایشی، از چپ پیوسته در بازه $(0, 1]$

و در $\alpha = 0$ از راست پیوسته است.

$$\underline{u}^\alpha \leq \bar{u}^\alpha \quad ۳.$$

تعریف ۲: [۲۳، ۱۷] فرض کنید $\tilde{u} : [a, b] \subseteq R \rightarrow [0, 1]$ یک عدد فازی باشد. تابع عضویت افقی

$u^{gr} = [0, 1] * [0, 1] \rightarrow [a, b]$ یک بازنمایی از $\tilde{u}(x)$ است به طوری که $u^{gr}(\alpha, \beta_u) = x$ در اینجا gr ریزدانه اطلاعاتی است که در $x \in [a, b]$ وجود دارد و $\beta \in [0, 1]$ درجه عضویت x در $\tilde{u}(x)$ است. $\beta_u \in [0, 1]$ متغیر اندازه فاصله نسبی می‌باشد و $u^{gr}(\alpha, \beta_u) = \underline{u}^\alpha + (\bar{u}^\alpha - \underline{u}^\alpha)\beta_u$.

نکته ۱: [۲۳، ۱۷] به دلیل سادگی تابع عضویت افقی به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$H(\tilde{u})^\Delta = u^{gr}(\alpha, \beta_u) \quad (۱)$$

مطابق با تعریف (۲) تابع عضویت افقی عدد فازی مثلثی $\tilde{u} \in E_1$ که به صورت (a, b, c) ، $a \leq b \leq c$ نشان داده می‌شود، می‌توان به صورت $H(\tilde{u}) = [a + (b - a)\alpha] + [(1 - \alpha)(c - a)]\beta_u$ مشخص شود. به عنوان مثال در شکل (۱) عدد فازی مثلثی $\tilde{u} = (3, 6, 10)$ و تابع عضویت افقی آن نشان داده شده است. در مقاله [۱۷] شکل پارامتری تابع عضویت افقی عدد فازی دوزنقه‌ای به صورت کلی نشان داده شده است.

نکته ۲: [۱۷] $-\alpha$ برش‌های مجموعه $\tilde{u} \in E_1$ که در واقع گستره ریزدانه اطلاعات می‌باشد به صورت رابطه (۲) به دست می‌آید [۱۷].

$$H^{-1}(u^{gr}(\alpha, \beta_u)) = [\tilde{u}]^\alpha = \left[\inf_{\lambda \geq \alpha} \min_{\beta_u} u^{gr}(\lambda, \beta_u), \sup_{\lambda \geq \alpha} \max_{\beta_u} u^{gr}(\lambda, \beta_u) \right] \quad (۲)$$

در ادامه عملیات جبری با استفاده از شکل جدید توابع عضویت افقی تعریف می‌گردد.

² Relative- Distance- Measure (RDM)

¹ supported

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in R^+ | t > N \rightarrow D_{gr}(\tilde{f}(t), \tilde{L}) < \varepsilon \quad (۷)$$

تعریف ۱۴: [۱۷] تابع فازی پیوسته $\tilde{f}: [a, b] \subseteq R \rightarrow E_1$ در نقطه $t \in [a, b]$ مشتق‌پذیر ریزدانه‌ای گویند هرگاه عدد فازی مانند $D_{gr} \tilde{f}(t) \in E_1$ وجود داشته باشد به طوری که حد زیر موجود باشد.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(t+h) - \tilde{f}(t)}{h} = {}^{gr} D \tilde{f}(t) \quad (۸)$$

قضیه ۱: [۱۷] تابع فازی $\tilde{f}: [a, b] \subseteq R \rightarrow E_1$ در نقطه $t \in [a, b]$ مشتق‌پذیر ریزدانه‌ای گویند اگر و تنها اگر تابع عضویت افقی آن در همان نقطه نسبت به t مشتق‌پذیر باشد.

$$H({}^{gr} D \tilde{f}(t)) = \frac{\partial f^{gr}(t, \alpha, \beta_f)}{\partial t}$$

تعریف ۱۵: [۱۷] فرض کنید $\tilde{X}(t) = [\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)]^T$ به طوری که $\tilde{X}: [a, b] \subseteq R \rightarrow E_1$ آنگاه ${}^{gr} D \tilde{X}(t)$ به صورت ${}^{gr} D \tilde{X}(t) = [{}^{gr} D \tilde{x}_1(t), {}^{gr} D \tilde{x}_2(t), \dots, {}^{gr} D \tilde{x}_n(t)]^T$ تعریف می‌شود.

نکته ۵: فرض کنید که $\tilde{K} = [\tilde{k}_{ij}]_{n \times 1}$ یک ماتریس فازی است. آنگاه بر اساس تعریف ${}^{gr} D \tilde{K} = 0$ که ۰ یک ماتریس صفر $n \times 1$ است.

تعریف ۱۶: [۱۷] تابع فازی $\tilde{f}: [a, b] \subseteq R \rightarrow E_1$ به صورت $\tilde{f}(t)$ در نظر گرفته شود. و فرض شود که تابع عضویت افقی آن به صورت $f^{gr}(t, \alpha, \beta_u)$ نسبت به t بر بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد. تابع فازی \tilde{f} را روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریزدانه‌ای گویند و به صورت $\int_a^b \tilde{f}(t) dt$ نشان داده می‌شود و برابر عدد فازی \tilde{m} است. آن چنانکه

$$H(\tilde{m}) = \int_a^b H(\tilde{f}(t)) dt \quad (۹)$$

۳- کنترل ردیاب فازی برای سیستم‌های

دینامیکی فازی خطی

۳-۱ طراحی فیدبک حالت فازی برای سیستم‌های

دینامیکی فازی خطی

سیستم دینامیکی خطی فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^{gr} D \tilde{X}(t) = \tilde{A} \tilde{X}(t) + \tilde{B} \tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C} \tilde{X}(t) \\ \tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0 \end{cases} \quad (۱۰)$$

در رابطه (۱۰) بردار حالت‌های فازی سیستم است، $\tilde{X}(t) = [\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)]^T$ ، $\tilde{X}: [t_0, t_f] \subseteq R^+ \cup \{0, \infty\} \rightarrow E_1$ ورودی کنترل است. خروجی

نکته ۵: فرض شود \tilde{u} عدد فازی می‌باشد که تابع عضویت افقی آن به صورت $u^{gr}(\alpha, \beta_u)$ می‌باشد. \tilde{u} عدد فازی منفی است اگر و تنها اگر $u^{gr}(\alpha, \beta_u) < 0$ برای تمام $\beta_u \in [0, 1]$

تعریف ۱۶: [۲۵] ماتریس $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}$ ، $i, j = 1, \dots, n$ ماتریس فازی نامیده می‌شود اگر پارامترهای آن، \tilde{a}_{ij} اعداد فازی باشند.

تعریف ۱۷: [۲۵] ماتریس فازی \tilde{A}^{-1} معکوس ماتریس فازی $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}$ ، $i, j = 1, \dots, n$ است، اگر و تنها اگر $H(\tilde{A}^{-1})H(\tilde{A}) = I_{n \times n}$ (۵)

در این رابطه $I_{n \times n}$ ماتریس همانی می‌باشد.

تعریف ۱۸: [۲۵] دترمینان ماتریس فازی $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}$ ، $i, j = 1, \dots, n$ که به صورت $|\tilde{A}|$ نشان داده می‌شود، معادل است با عدد فازی \tilde{m} به طوری که $H(\tilde{m}) = |H(\tilde{A})|$.

تعریف ۱۹: [۲۵] ضرب ماتریس فازی $\tilde{A}_{n \times n}$ در ماتریس فازی $\tilde{B}_{n \times m}$ که به صورت $\tilde{A} \tilde{B}$ نشان داده می‌شود معادل ماتریس فازی $\tilde{M}_{n \times m}$ است. به طوری که $H(\tilde{M}) = H(\tilde{A})H(\tilde{B})$.

تعریف ۱۰: [۲۳] مقادیر ویژه فازی ماتریس فازی $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}$ ، $i, j = 1, \dots, n$ که به صورت $\tilde{\lambda}_i$ نشان داده می‌شود. ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه فازی $|\tilde{\lambda}_i I_{n \times n} - \tilde{A}|$ می‌باشد.

تعریف ۱۱: [۱۷] تابع فازی $\tilde{f}: [a, b] \subseteq R \rightarrow E_1$ که شامل n عدد فازی $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n$ می‌باشد را در نظر بگیرید. تابع عضویت افقی تابع فازی $\tilde{f}(t)$ به شکل $H(\tilde{f}) = f^{gr}(t, \alpha, \beta_f)$ نشان داده می‌شود و به صورت رابطه (۶) تعریف می‌گردد که در رابطه بالا $\beta_f = (\beta_{u_1}, \beta_{u_2}, \dots, \beta_{u_n})$ متغیرهای اندازه فاصله نسبی مربوط به اعداد فازی $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n$ می‌باشند.

$$f^{gr}: [a, b] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \rightarrow [c, d] \subseteq R \quad (۶)$$

تعریف ۱۲: [۱۷] فرض کنید \tilde{u} و \tilde{v} اعداد فازی هستند $\tilde{u}, \tilde{v} \in E_1$ تابع زیر

$$D_{gr}: E_1 \times E_1 \rightarrow R^+ \cup \{0\}, D_{gr}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sup_{\alpha} \max_{\beta_u, \beta_v} \{u^{gr}(\alpha, \beta_u) - v^{gr}(\alpha, \beta_v)\}$$

فاصله بین دو عدد فازی \tilde{u} و \tilde{v} می‌باشد.

نکته ۴: تابع D_{gr} متر بر روی فضای اعداد فازی می‌باشد و متر ریزدانه‌ای نامیده می‌شود. علاوه بر آن فضای متر (E_1, D_{gr}) یک فضای متر کامل است. برای جزئیات بیشتر به مرجع [۱۷] رجوع شود.

تعریف ۱۳: [۱۷] فرض کنید تابع $\tilde{f}: [a, b] \subseteq R \rightarrow E_1$ حد تابع $\tilde{f}(t)$ عدد فازی $\tilde{L} \in E_1$ می‌باشد و به صورت $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}(t) = \tilde{L}$ نشان داده می‌شود اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R}^+ \mid t > N \rightarrow \sup_{\alpha} \max_{\beta_{X_c}} \|X_{\alpha_c, \beta_{X_c}}^{gr}(t)\| < \varepsilon \quad (۱۴)$$

سپس مطابق با تعریف متر ریزدانه‌ای ما داریم

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R}^+ \mid t > N \rightarrow D_{gr}(\tilde{X}(t), 0) < \varepsilon \quad (۱۵)$$

در نهایت بر اساس تعریف (۱۳) اثبات کامل می‌شود.

□

لم ۲: سیستم دینامیکی خطی فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} D^{gr} \tilde{X}(t) = \tilde{A} \tilde{X}(t) + K \\ \tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0 \end{cases} \quad (۱۶)$$

در رابطه بالا $K = [k_{i1}]_{n \times 1}, i = 1, \dots, n$ یک ماتریس قطعی است.

اگر مقادیر ویژه فازی ماتریس \tilde{A} اعداد فازی منفی باشند آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D^{gr} \tilde{X}(t) = 0$$

اثبات: فرض کنید $\tilde{X}^*(t)$ جواب (۱۶) باشد. مطابق آنچه در حالت قطعی

انجام می‌شود، جواب مسئله می‌تواند به صورت

$$\tilde{X}^*(t) = \tilde{X}_h^*(t) + \tilde{X}_p^*(t) \quad \text{نوشته شود که در آن } \tilde{X}_h^*(t) \text{ و}$$

$$\tilde{X}_p^*(t) \text{ به ترتیب جواب‌های همگن و غیر همگن (۱۶) هستند. به عبارت دیگر}$$

$$\tilde{X}_h^*(t) \text{ جواب مسئله زیر است.}$$

$$\begin{cases} D^{gr} \tilde{X}(t) = \tilde{A} \tilde{X}(t) \\ \tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0 \end{cases} \quad (۱۷)$$

و $\tilde{X}_p^*(t)$ جواب مسئله سیستم فازی نشان داده شده زیر است.

$$\begin{cases} D^{gr} \tilde{X}(t) = \tilde{A} \tilde{X}(t) + K \\ \tilde{X}(t_0) = 0 \end{cases} \quad (۱۸)$$

با استفاده از نکته (۵) و تعریف (۷) می‌توان اثبات کرد که

$$\tilde{X}_p^*(t) = -\tilde{A}^{-1} K \quad \text{جواب سیستم فازی (۱۸) است. به عنوان یک نتیجه}$$

جواب سیستم خطی فازی (۱۶) به صورت $\tilde{X}^*(t) = \tilde{X}_h^*(t) - \tilde{A}^{-1} K$

مشخص می‌شود. با گرفتن حد از دو طرف تساوی و میل آن به سمت بی‌نهایت

$$\text{داریم } \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}^*(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_h^*(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{A}^{-1} K \quad \text{با توجه به لم (۱)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}^*(t) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{A}^{-1} K = \tilde{A}^{-1} K \quad \text{بنابراین } \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_h^*(t) = 0$$

$$\text{که در نتیجه } \lim_{t \rightarrow \infty} D^{gr} \tilde{X}(t) = 0$$

□

قضیه ۲: سیستم دینامیکی خطی فازی (۱۰) را در نظر بگیرید. فرض کنید

یک ماتریس فازی $\tilde{K} = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n]$ وجود دارد به طوری که مقادیر

ویژه فازی ماتریس فازی $\tilde{A} - \tilde{B} \tilde{K}$ مقادیر فازی منفی هستند. خروجی سیستم

ورودی مرجع r را ردیابی می‌کند یعنی $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = r$ ، اگر ورودی کنترل

فازی به شکل زیر باشد.

$$\tilde{u}(t) = -\tilde{K} \tilde{X}(t) - [C(\tilde{A} - \tilde{B} \tilde{K})^{-1} \tilde{B}]^{-1} r \quad (۱۹)$$

$$G_{cl}(0)^{-1} = [\tilde{C}(\tilde{A} - \tilde{B} \tilde{K})^{-1} \tilde{B}]^{-1}$$

اثبات: فرض کنید $\tilde{N} + \tilde{K} M = -[C(\tilde{A} - \tilde{B} \tilde{K})^{-1} \tilde{B}]^{-1} r$

به طوری که $\tilde{N} \in E_1$ و $M \in \mathbb{R}^n$ آنگاه ما می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم.

فازی سیستم به وسیله $\tilde{y}: [t_0, t_f] \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\} \rightarrow E_1$ نشان داده

و

می‌شود

$$D^{gr} \tilde{X}(t) = [D^{gr} \tilde{X}_1(t), D^{gr} \tilde{X}_2(t), \dots, D^{gr} \tilde{X}_n(t)]^T$$

متغیرهای حالت مشتق پذیر ریزدانه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. ماتریس‌های

$$\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{n \times n}, i, j = 1, \dots, n; \tilde{B} = [\tilde{b}_{ik}]_{n \times 1}, i = 1, \dots, n; k = 1$$

ماتریس‌های فازی هستند. مسئله کنترل ردیاب فازی پیدا کردن سیگنال

کنترلی \tilde{u} است به طوری که خروجی مرجع ورودی از پیش تعیین شده را

دنبال کند. قبل از بیان مسئله کنترل ردیاب فازی نیاز است ۲ لم بیان شود که

در ادامه به بیان آن‌ها پرداخته می‌شود.

تعریف ۱۷: [۲۳] یک سیستم دینامیکی خطی فازی کنترل پذیر ریزدانه‌ای

است اگر یک ورودی کنترل فازی $\tilde{u}(t)$ وجود داشته باشد به طوری که بتواند

حالت‌های سیستم را از هر شرایط اولیه فازی $\tilde{X}(t_0)$ به هر شرایط نهایی فازی

$$\tilde{X}(t_f) \text{ در بازه زمانی محدود } [t_0, t_f] \text{ منتقل کند.}$$

گزاره ۱: [۲۳] سیستم دینامیکی فازی (۱۰) را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$A^{gr}(\alpha, \beta_A) \text{ و } B^{gr}(\alpha, \beta_B) \text{ توابع عضویت افقی ماتریس‌های } \tilde{A} \text{ و}$$

\tilde{B} باشند. در این صورت سیستم (۱۰) یا جفت (\tilde{A}, \tilde{B}) ، کنترل پذیر

ریزدانه‌ای است اگر و تنها اگر ماتریس ریزدانه‌ای (۱۱) به ازای هر

$$\alpha, \beta_A, \beta_B \in [0, 1]$$

$$\begin{bmatrix} B^{gr}(\alpha, \beta_B) A^{gr}(\alpha, \beta_A) B^{gr}(\alpha, \beta_B) \\ \vdots \\ (A^{gr}(\alpha, \beta_A))^2 B^{gr}(\alpha, \beta_B) \dots (A^{gr}(\alpha, \beta_A))^{n-1} B^{gr}(\alpha, \beta_B) \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

نکته ۶: در ادامه فرض می‌شود که سیستم دینامیکی خطی فازی (۱۰)

کنترل پذیر ریزدانه‌ای باشد.

لم ۱: فرض کنید $D^{gr} \tilde{X}(t) = \tilde{A} \tilde{X}(t)$ و مقادیر ویژه فازی ماتریس

$$\tilde{A} \text{ مقادیر فازی منفی باشند در این صورت } \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}(t) = 0$$

اثبات: مطابق تعریف (۴) و قضیه (۱)، $D^{gr} \tilde{X}(t) = \tilde{A} \tilde{X}(t)$ معادل

$$\text{است با } \frac{\partial X^{gr}(t, \alpha, \beta_{X_c})}{\partial t} = A^{gr}(\alpha, \beta_A) X^{gr}(t, \alpha, \beta_{X_c}) \text{ با}$$

در نظر گرفتن $\alpha = \alpha_c$ و $\beta_A = \beta_{A_c}, \beta_X = \beta_{X_c}$ به طوری که

α_c و β_{X_c}, β_{A_c} مقادیر ثابت در بازه $[0, 1]$ هستند آنگاه داریم

$$\dot{X}_{\alpha_c, \beta_{X_c}}^{gr}(t) = A_{\alpha_c, \beta_{A_c}}^{gr} X_{\alpha_c, \beta_{X_c}}^{gr}(t) \quad \text{که یک سیستم دینامیکی قطعی^۱}$$

است که مقادیر ویژه ماتریس $A_{\alpha_c, \beta_{A_c}}^{gr}$ منفی هستند. بدین ترتیب سیستم دینامیکی

قطعی $\dot{X}_{\alpha_c, \beta_{X_c}}^{gr}(t) = A_{\alpha_c, \beta_{A_c}}^{gr} X_{\alpha_c, \beta_{X_c}}^{gr}(t)$ پایدار مجانبی است

$$\text{به طوری که } \lim_{t \rightarrow \infty} X_{\alpha_c, \beta_{X_c}}^{gr}(t) = 0 \text{ و به طور معادل}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R}^+ \mid t > N \rightarrow \|X_{\alpha_c, \beta_{X_c}}^{gr}(t)\| < \varepsilon \quad (۱۲)$$

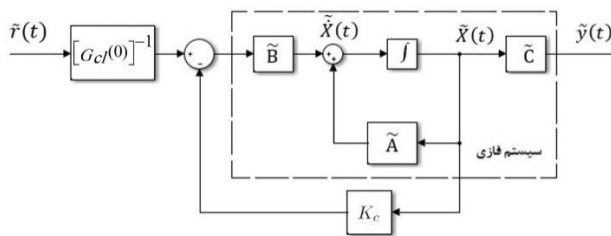
بر طبق رابطه (۱۲) ما همچنین می‌توانیم بنویسیم

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R}^+ \mid t > N \rightarrow \max_{\beta_X} \|X_{\alpha_c, \beta_{X_c}}^{gr}(t)\| < \varepsilon \quad (۱۳)$$

علاوه بر این رابطه (۱۴) نیز وجود دارد.

حل معادله $\left| \tilde{A}_i^* I_{n \times n} - \tilde{A} + \tilde{B} \tilde{K} \right| = 0$ به دست می‌آید. حل این معادله که تحت عنوان حل سیستم های خطی فازی شناخته می شود در مقاله [۲۵] مورد بررسی قرار گرفته است.

نکته ۸: برای اعمال ماتریس بهره فیدبک فازی $\tilde{K} = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n]$ به سیستم دینامیکی فازی نیاز است \tilde{K} دیفازی^۱ شود. ماتریس بهره فیدبک دیفازی شده به صورت $K_c = [k_{ci}]; i = 1, \dots, n$ نشان داده می‌شود. شمایی کلی از سیستم کنترل فازی در شکل (۲) آورده شده است.



شکل ۲: ساختار سیستم ردیاب فازی با پیش جبران ساز

۳-۲ طراحی رویکردهای فازی برای سیستم‌های دینامیکی فازی خطی

در بخش قبل طراحی سیستم‌های کنترل با فیدبک حالت ارائه گردید. همان‌طور که در آن بخش گفته شد با فرض کنترل‌پذیری کامل حالت و انتخاب مناسب بهره‌های فیدبک، قطب‌های حلقه بسته سیستم در مکان‌های موردنظر جایابی می‌شوند. در حالت کلی لازم است که تمام متغیرهای حالت برای فیدبک در دسترس باشد. در بسیاری از کاربردهای واقعی اندازه‌گیری تمامی متغیرهای حالت امکان‌پذیر نیست. در این موارد برای پیاده‌سازی فیدبک حالت، تخمین متغیرهای حالت الزامی است. برای این منظور یک رویکرد فازی برای تخمین حالت‌های سیستم فازی لازم است طراحی شود. لازم به ذکر است که متغیرهای ورودی رویکرد هر لحظه مقادیر فازی می‌باشند.

فرض کنید سیستم دینامیکی فازی به صورت (۲۶) داده شده است.

$${}^{gr}DX(t) = \tilde{A}\tilde{X}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \quad (26)$$

سیستم کنترل‌کننده فیدبک حالت $\tilde{u}(t) = -\tilde{K}\tilde{X}(t)$ در بخش قبل با فرض در دسترس بودن $\tilde{X}(t)$ طراحی شده است ولی فرض شود به جای آنکه بتوان حالت‌های سیستم را اندازه گرفت، تنها می‌توان خروجی سیستم را به صورت زیر اندازه‌گیری کرد.

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t) \quad (27)$$

اکنون سیستم دینامیکی فازی را همانند شکل (۳) در نظر بگیرید که ورودی‌های آن \tilde{u} ، \tilde{y} و خروجی آن \tilde{X} است.

$$\begin{cases} 0 = \tilde{A}M + \tilde{B}\tilde{N} \\ r = CM \end{cases} \quad (20)$$

با استفاده از رابطه (۱۰) و نکته (۳) بنابراین

$$\begin{cases} {}^{gr}DX(t) = \tilde{A}(\tilde{X}(t) - M) + \tilde{B}(\tilde{u}(t) - \tilde{N}) \\ \tilde{y}(t) - r = \tilde{C}(\tilde{X}(t) - M) \end{cases} \quad (21)$$

با استفاده از قضیه (۱) و این نکته که ${}^{gr}D(\tilde{X}(t) - M) = {}^{gr}DX(t)$ بنا بر این رابطه بالا می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$\begin{cases} {}^{gr}DX'(t) = \tilde{A}\tilde{X}'(t) + \tilde{B}\tilde{u}'(t) \\ \tilde{y}'(t) = \tilde{C}\tilde{X}'(t) \end{cases} \quad (22)$$

با این شرط که $\tilde{u}'(t) = \tilde{u}(t) - \tilde{N}$ ، $\tilde{X}'(t) = \tilde{X}(t) - M$ و $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t) - r$ با توجه به قانون کنترل $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t) - r$ در سیستم دینامیکی فازی (۱۹) و استفاده از نکته (۳) ما داریم

$$\begin{cases} {}^{gr}DX'(t) = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})\tilde{X}'(t) \\ \tilde{y}'(t) = \tilde{C}\tilde{X}'(t) \end{cases} \quad (23)$$

با توجه به اینکه مقادیر ویژه فازی ماتریس فازی $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ مقادیر فازی منفی هستند آنگاه بر اساس لم (۱) می‌تواند نتیجه شود که $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}'(t) = 0$ بنا بر این $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}(t) = M$ که همچنین معنی می‌دهد که $\lim_{t \rightarrow \infty} {}^{gr}DX'(t) = 0$ بر اساس تعریف (۱۴) سپس با جایگزینی ورودی کنترل فازی $\tilde{u}(t) = -\tilde{K}\tilde{X}(t) - \left[C(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})^{-1} \tilde{B} \right]^{-1} r$ در سیستم فازی (۱۰) ما داریم

$$\begin{cases} {}^{gr}DX(t) = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})C^{-1}(\tilde{C}\tilde{X}(t) - r) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t) \end{cases} \quad (24)$$

با گرفتن حد از دو طرف ما داریم

$$\begin{cases} 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} [(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})C^{-1}(\tilde{C}\tilde{X}(t) - r)] \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{C}\tilde{X}(t) \end{cases} \quad (25)$$

از آنجا که $(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})C^{-1} \neq 0$ پس $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{C}\tilde{X}(t) - r) = 0$ که نتیجه می‌دهد $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{C}\tilde{X}(t) = r$ و اثبات کامل می‌شود.

□

نکته ۷: به منظور اعمال کنترل‌کننده فازی (۱۹) ماتریس بهره فیدبک فازی $\tilde{K} = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n]$ باید تعیین شود. بر اساس فرض در نظر گرفته شده در قضیه (۲) ماتریس بهره فیدبک فازی \tilde{K} باعث می‌شود مقادیر ویژه فازی ماتریس فازی $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ مقادیر فازی منفی داشته باشند. سپس با در نظر گرفتن مقادیر ویژه فازی منفی $\tilde{\lambda}_i^*$; $i = 1, \dots, n$ بهره فیدبک فازی \tilde{k}_i با استفاده از

^۱ defuzzify

با در نظر گرفتن یک رویکرد با بردار حالت $\hat{X}(t)$ و بردار حالت سیستم $\tilde{X}(t)$ و تعریف خطای تخمین $\tilde{e}(t) = \tilde{X}(t) - \hat{X}(t)$ معادله حالت سیستم حلقه بسته $2n$ -بعدی پیش از وارد کردن جبران ساز استاتیکی همانند معادله (۴۳) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} {}^{gr}D\tilde{X}(t) \\ {}^{gr}D\hat{X}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{B}\tilde{K} \\ \tilde{L}\tilde{C} & \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} - \tilde{L}\tilde{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}(t) \\ \hat{X}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{B} \end{bmatrix} r(t) \quad (48)$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}(t) \\ \hat{X}(t) \end{bmatrix}$$

با اعمال تبدیل همانندی زیر

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}(t) \\ \hat{X}(t) \end{bmatrix} \quad (49)$$

در معادله (۴۸) داریم

$$\begin{bmatrix} {}^{gr}D\tilde{X}(t) \\ {}^{gr}D\tilde{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} & \tilde{B}\tilde{K} \\ 0 & \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{r}(t) \quad (50)$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{e}(t) \end{bmatrix}$$

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم توصیف شده با معادله (۵۰) عبارت است

$$G_{cl}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} & -\tilde{B}\tilde{K} \\ 0 & sI - \tilde{A} + \tilde{L}\tilde{C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})^{-1} & (sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})^{-1} \tilde{B}\tilde{K} (sI - \tilde{A} + \tilde{L}\tilde{C})^{-1} \\ 0 & (sI - \tilde{A} + \tilde{L}\tilde{C})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

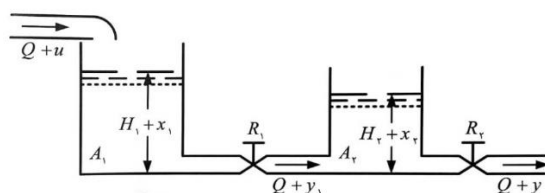
$$= \tilde{C} (sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})^{-1} \tilde{B}$$

لذا برای ایجاد ردیابی ورودی‌های مرجع ثابت داریم

$$G_{cl}(0)^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{C} (-\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})^{-1} \tilde{B} \end{bmatrix}^{-1} \quad (52)$$

۴- شبیه سازی

با مثال ۱-۴ در این بخش کنترل خروجی دو تانک سری در نظر گرفته شده است که در شکل (۵) نمایی کلی از آن نشان داده شده است.



شکل ۵: دو مخزن به هم پیوسته

در شرایط پایدار نرخ فلو ورودی و خروجی برابر Q می‌باشد و ارتفاع مایع در دو مخزن به ترتیب H_1 و H_2 می‌باشد. با تغییر نرخ فلو ورودی از Q به $Q + u$ ارتفاع مایع و فلو خروجی در تانک اول به ترتیب به $H_1 + x_1$ و $Q + y_1$ و ارتفاع مایع و فلو خروجی در تانک دوم به ترتیب به $H_2 + x_2$ و $Q + y_2$ تغییر می‌کند. مقاومت خروجی به صورت اعداد فازی \tilde{R}_1 و \tilde{R}_2 در نظر

جایگزینی معادله (۴۱) در معادله (۴۰) رابطه زیر را نتیجه می‌دهد.

$${}^{gr}D\tilde{X}(t) = [\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} - \tilde{L}\tilde{C}] \tilde{X}(t) + \tilde{L}\tilde{y}(t) \quad (42)$$

از معادلات (۳۸)، (۴۱) و (۴۲) معادله حلقه بسته سیستم به صورت (۴۳) به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} {}^{gr}D\tilde{X}(t) \\ {}^{gr}D\hat{X}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{B}\tilde{K} \\ \tilde{L}\tilde{C} & \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} - \tilde{L}\tilde{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}(t) \\ \hat{X}(t) \end{bmatrix} \quad (43)$$

خطای تخمین را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{e}(t) = \tilde{X}(t) - \hat{X}(t) \quad (44)$$

معادله دینامیکی حاکم بر خطا، با مشتق‌گیری از معادله (۴۴) و جایگذاری از (۳۸) و (۴۰) به دست می‌آید.

$${}^{gr}D\tilde{e}(t) = [\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}] \tilde{e}(t) \quad (45)$$

جایگزینی $\tilde{X}(t) = \tilde{X}(t) - \tilde{e}(t)$ در معادله (۴۱) و به کارگیری معادله (۳۸) خواهد داد

$${}^{gr}D\tilde{X}(t) = [\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}] \tilde{X}(t) + \tilde{B}\tilde{K}\tilde{e}(t) \quad (46)$$

با در نظر گرفتن معادله (۴۵) مشاهده می‌شود که با انتخاب مناسب ماتریس بهره \tilde{L} معادله (۴۵) پایدار است و $\tilde{e}(t)$ به صفر میل خواهد کرد.

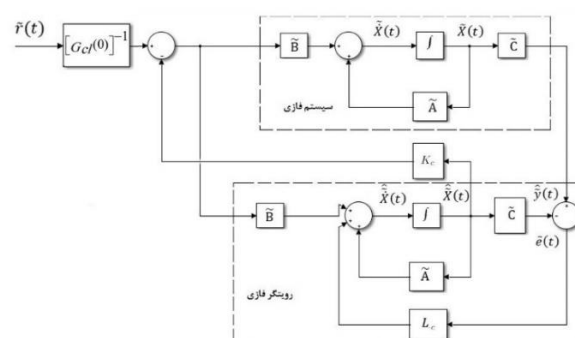
اکنون معادله (۳۶) را در نظر می‌گیریم. اگر $\tilde{e}(t) \rightarrow 0$ برای $t \rightarrow \infty$ آنگاه در صورتی که سیستم زیر پایدار باشد، $\tilde{X}(t)$ به صفر میل خواهد کرد.

$${}^{gr}D\tilde{X}(t) = [\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}] \tilde{X}(t) \quad (47)$$

با فرض کنترل‌پذیری حالت، همواره می‌توان \tilde{K} را به گونه‌ای تعیین کرد که سیستم داده‌شده با معادله (۴۷) پایدار باشد.

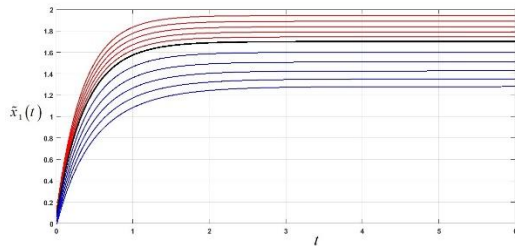
۳-۳-۱ ساختار سیستم کنترل فیدبک حالت با رویکرد برای ردیابی ورودی‌های مرجع ثابت

در این بخش ساختار کلی سیستم‌های ردیاب ورودی‌های مرجع ثابت بر اساس فیدبک حالت با رویکرد ارائه می‌شود. شمای کلی سیستم ردیاب با فیدبک حالت و رویکرد مبتنی بر جبران ساز استاتیکی در مسیر ورودی مرجع در شکل (۴) نشان داده شده است.

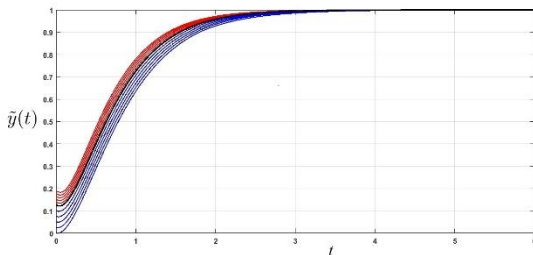


شکل ۴: شمای کلی سیستم ردیاب فازی مبتنی بر فیدبک حالت فازی، رویکرد فازی و پیش جبران ساز

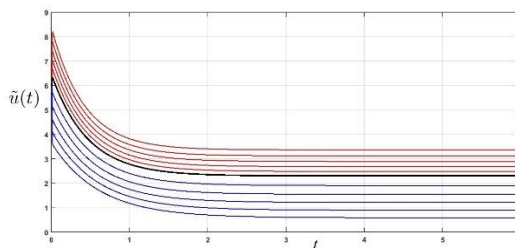
در شکل (۸) حالت فازی $\tilde{x}_1(t)$ و شکل (۹) مسیر فازی خروجی $\tilde{y}(t)$ سیستم نشان داده شده است که با اعمال سیگنال کنترل فازی نشان داده شده در شکل (۱۰) به دست آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود خروجی ورودی مرجع را به خوبی ردیابی می‌کند.



شکل ۸: مسیر فازی متغیر حالت $\tilde{x}_1(t)$

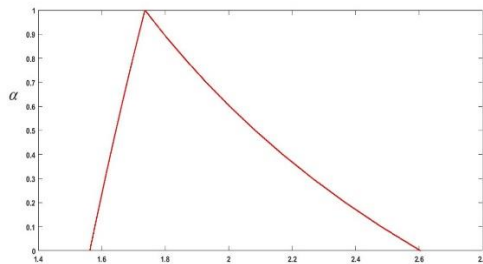


شکل ۹: مسیر فازی خروجی $\tilde{y}(t)$



شکل ۱۰: سیگنال کنترل فازی $\tilde{u}(t)$

در ادامه فرض می‌شود که حالت‌های سیستم در دسترس نیستند و تنها خروجی سیستم قابل اندازه‌گیری می‌باشد. مقدار دترمینان ماتریس ریزدانه ای (۳۷) حدوداً ۱.۷۴ می‌باشد که در شکل (۱۱) تابع عضویت آن آورده شده است، همان‌طور که در شکل دیده می‌شود و بر اساس گزاره (۲)، ماتریس ریزدانه ای (۳۷) به ازای هر $\alpha, \beta_A, \beta_B, \beta_C \in [0,1]$ مقدار دترمینان آن مخالف صفر می‌باشد و ماتریس رتبه کامل دارد و بنابراین سیستم رویت پذیر ریزدانه ای می‌باشد.



شکل ۱۱: دترمینان ماتریس ریزدانه ای رویت پذیری

مقادیر ویژه فازی روینگر $\tilde{\lambda}_1 = (-4, -3.5, -3)$ و $\tilde{\lambda}_2 = (-5.5, -4.8, -4.5)$ در نظر گرفته می‌شود و ماتریس بهره روینگر فازی $\tilde{L} = [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2]$ مطابق شکل (۱۲) به دست می‌آید. مقدار دیفازی بدست آمده نیز در شکل (۱۲) نشان داده شده است.

گرفته شده است. با در نظر گرفتن شرایط اولیه و مقاومت خروجی که دارای عدم قطعیت فازی می‌باشد، مدل ریاضی سیستم دو تانک به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} {}^{gr}D\tilde{x}_1(t) \\ {}^{gr}D\tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_2\tilde{R}_2} & \frac{1}{A_1\tilde{R}_1} \\ \frac{1}{A_2\tilde{R}_1} & -\frac{1}{A_2\tilde{R}_1} - \frac{1}{A_2\tilde{R}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} \quad (53)$$

$$\tilde{y}(t) = [0 \quad 1.25] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

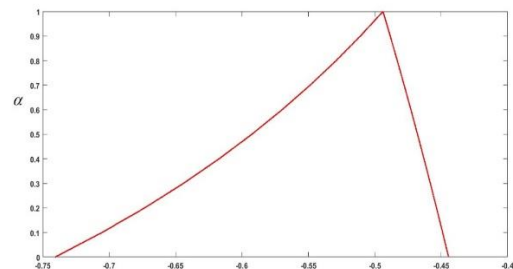
در رابطه بالا \tilde{R}_1 و \tilde{R}_2 به ترتیب حدوداً ۰.۹ و ۰.۸ می‌باشند و شرایط اولیه حدوداً ۰.۱ در نظر گرفته می‌شود؛ که این عدم دقیق بودن‌ها به صورت اعداد فازی مثلی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$0.\tilde{9} = (0.6, 0.9, 1), \quad 0.\tilde{8} = (0.7, 0.8, 1) \quad (54)$$

$$0.\tilde{1} = (0, 0.1, 0.15)$$

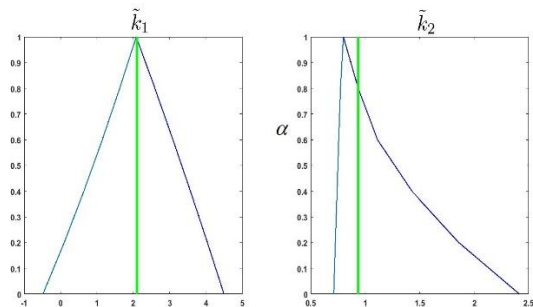
فرض کنید که ورودی مرجع $r=1$ می‌باشد. هدف پیدا کردن کنترل کننده فازی \tilde{u} می‌باشد به طوری که خروجی $\tilde{y}(t)$ ورودی مرجع را دنبال کند.

مقدار دترمینان ماتریس ریزدانه ای (۱۱) حدوداً ۰.۴۹ می‌باشد که در شکل (۶) تابع عضویت آن آورده شده است، همان‌طور که در شکل دیده می‌شود و بر اساس گزاره (۱)، ماتریس ریزدانه ای (۱۱) به ازای هر $\alpha, \beta_A, \beta_B \in [0,1]$ مقدار دترمینان آن مخالف صفر می‌باشد و ماتریس رتبه کامل دارد و بنابراین سیستم کنترل پذیر ریزدانه ای می‌باشد.



شکل ۶: دترمینان ماتریس ریزدانه ای کنترل پذیری

مطابق با قضیه (۲) کنترل کننده مطابق رابطه (۱۹) می‌باشد. با در نظر گرفتن مقادیر ویژه فازی $\tilde{\lambda}_1 = (-1.7, -2, -2.5)$ و $\tilde{\lambda}_2 = (-3.5, -3, -2.5)$ بر اساس نکته (۷) ماتریس بهره فیدبک فازی $\tilde{K} = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2]$ مطابق شکل (۷) به دست می‌آید. مقدار دیفازی بدست آمده نیز در شکل (۷) نشان داده شده است.

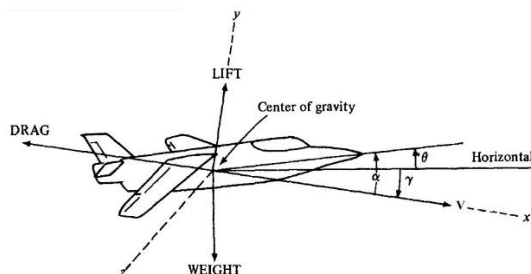


شکل ۷: بهره فیدبک حالت فازی. خطوط سبز مقادیر دیفازی می‌باشند

شکل ۱۶: تفاضل دو متغیر فازی $\tilde{y}(t)$ و $\tilde{y}(t)$

مثال ۴-۲: کنترل فرود هواپیما

در این بخش هدف کنترل فرود هواپیما می باشد. هواپیمای جت در شکل (۱۷) نشان داده شده است. جهت x در امتداد بردار سرعت هواپیما و y و z مطابق شکل می باشند. α زاویه حمله، θ زاویه اوج و γ زاویه مسیر پرواز است.



شکل ۱۷: محور ها و زوایای هواپیما

برای سادگی مسئله فرضیات زیر در نظر گرفته شده است.

- ۱- از حرکت افقی صرفه نظر شده است و حرکت فقط در صفحه $x-y$ در نظر گرفته می شود.
- ۲- سرعت هواپیما در هنگام فرود تقریباً ثابت در نظر گرفته شده است. به دلیل وزش باد در هنگام فرود کنترل سرعت در یک مقدار دقیق ممکن نمی باشد و این مقدار تقریبی بوسیله عدد فازی نمایش داده شده است.

- ۳- زاویه مسیر پرواز γ کوچک در نظر گرفته شده است به طوریکه $\sin \gamma = \gamma$ و $\cos \gamma = 1$ وقتی که زاویه برحسب رادیان اندازه گیری شده باشد.

- ۴- حرکت طولی هواپیما کاملاً توسط انحراف زاویه بالک بالابر $\delta_e(t)$ که در شکل (۱۸) نشان داده شده است کنترل می شود.

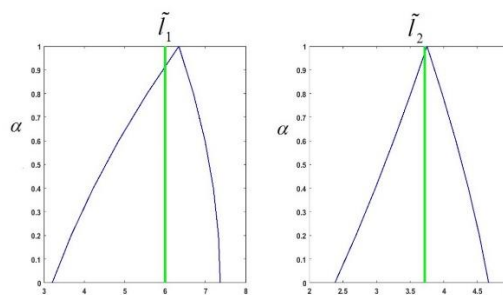
- ۵- معادلات دینامیکی حاکم بر هواپیما توسط دستگاه معادلات دیفرانسیل که حول شرایط تعادل پرواز خطی شده است بیان می شود.



شکل ۱۸: انحراف زاویه بالابر

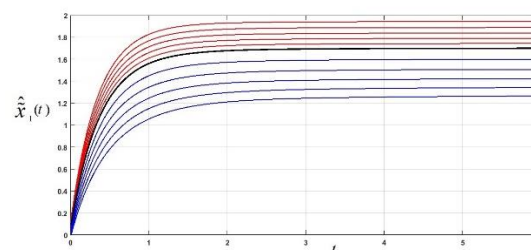
ارتفاع سطح پرواز از باند فرود h ، سرعت تغییرات ارتفاع \dot{h} ، زاویه اوج θ و سرعت تغییرات زاویه اوج $\dot{\theta}$ ، به عنوان متغیرهای حالت انتخاب شده اند. اگر $X_1 = h$ ، $X_2 = \dot{h}$ ، $X_3 = \theta$ ، $X_4 = \dot{\theta}$ و $U = \delta_e$ تعریف شوند، معادلات دینامیکی حرکت هواپیما در حوالی شرایط تعادل پرواز به صورت (۵۵) می باشد.

$$\begin{bmatrix} {}^{gr}D\tilde{x}_1(t) \\ {}^{gr}D\tilde{x}_2(t) \\ {}^{gr}D\tilde{x}_3(t) \\ {}^{gr}D\tilde{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{b}_4 \end{bmatrix} \tilde{U}(t) \quad (55)$$

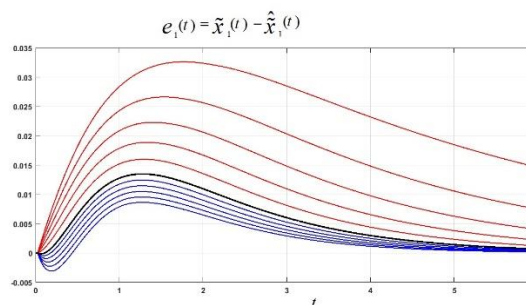


شکل ۱۲: بهره رویگر فازی، خطوط سبز مقادیر دیفازی می باشند

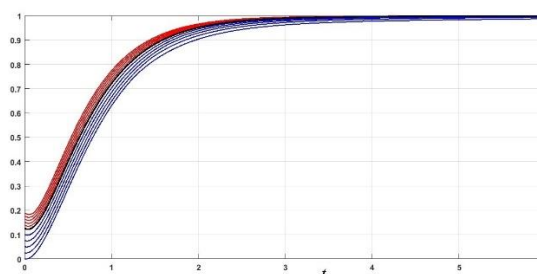
در شکل (۱۳) حالت فازی $\hat{x}_1(t)$ و شکل (۱۴) تفاضل خطای بین $\hat{x}_1(t)$ و $\tilde{x}_1(t)$ نشان داده شده است و در شکل‌های (۱۵) و (۱۶) مسیر فازی خروجی $\tilde{y}(t)$ و تفاضل آن با $\hat{y}(t)$ نشان داده شده است.



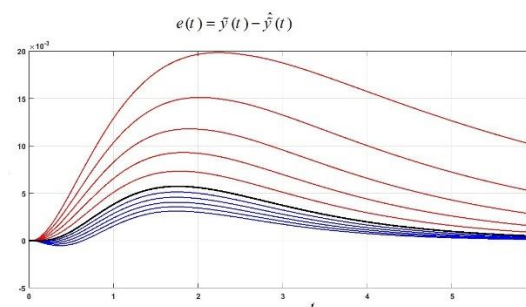
شکل ۱۳: مسیر فازی متغیر حالت $\hat{x}_1(t)$



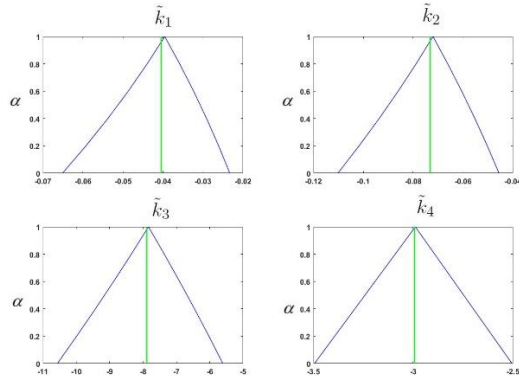
شکل ۱۴: تفاضل دو متغیر فازی $\hat{x}_1(t)$ و $\tilde{x}_1(t)$



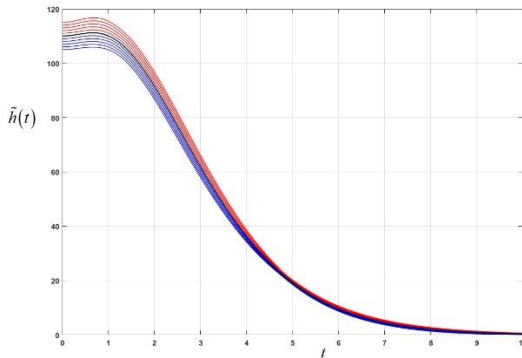
شکل ۱۵: مسیر فازی خروجی $\hat{y}(t)$



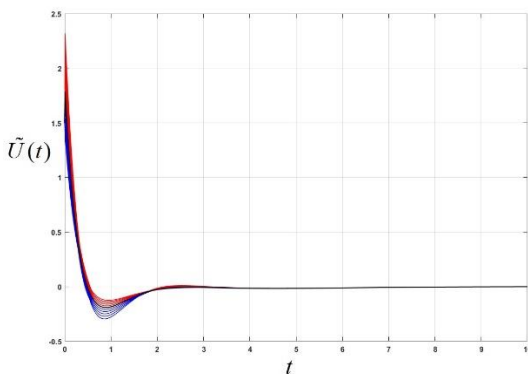
هدف طراحی کنترل کننده ای با ضرایب فیدبک $\tilde{K} = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, \tilde{k}_4]$ است که مقادیر ویژه سیستم را به $\tilde{\lambda}_1 = (-1.1, -1, -0.9)$ ، $\tilde{\lambda}_2 = (-1.2, -1.1, -1.05)$ ، $\tilde{\lambda}_3 = (-3, -2.5, -2)$ و $\tilde{\lambda}_4 = (-4, -3.5, -3)$ تغییر دهد. مقادیر ضرایب فازی فیدبک حالت در شکل (۲۰) آورده شده است.



شکل ۲۰: بهره فیدبک حالت فازی. خطوط سبز مقادیر دیفازی می باشند در شکل (۲۱) مسیر فازی خروجی $\tilde{h}(t)$ سیستم نشان داده شده است که با اعمال سیگنال کنترل فازی $\tilde{U}(t)$ نشان داده شده در شکل (۲۲) به دست آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود خروجی، ورودی مرجع را به خوبی ردیابی می‌کند.



شکل ۲۱: مسیر فازی خروجی $\tilde{h}(t)$



شکل ۲۲: سیگنال کنترل فازی $\tilde{U}(t)$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \\ \tilde{x}_4(t) \end{bmatrix}$$

ضرایب \tilde{a}_{ij} و \tilde{b}_4 مربوط به پارامترهای هواپیما هستند که به صورت (۵۶) می‌باشند.

$$\tilde{a}_{22} = -\frac{1}{\tilde{T}_s}, \quad \tilde{a}_{23} = \frac{\tilde{V}}{\tilde{T}_s} \quad (56)$$

$$\tilde{a}_{42} = \frac{1}{\tilde{V}\tilde{T}_s^2} - \frac{2\xi\omega_s}{\tilde{V}\tilde{T}_s} + \frac{\omega_s^2}{\tilde{V}}$$

$$\tilde{a}_{43} = \frac{2\xi\omega_s}{\tilde{T}_s} - \omega_s^2 + \frac{1}{\tilde{T}_s^2}, \quad \tilde{a}_{44} = \frac{1}{\tilde{T}_s} - 2\xi\omega_s$$

$$\tilde{b}_4 = \omega_s^2 K_s \tilde{T}_s$$

در ضرایب بالا پارامترهای ω_s ، \tilde{T}_s ، K_s و ξ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$K_s = \text{بهره ثابت}$$

$$\tilde{T}_s = \text{ثابت زمانی}$$

$$\omega_s = \text{فرکانس طبیعی نامیرا}$$

$$\xi = \text{ضریب میرایی}$$

$$\tilde{V} = \text{سرعت}$$

مقادیر عددی در نظر گرفته شده برای این پارامترها به صورت (۵۷) می‌باشد.

$$K_s = -0.95 \text{ sec}^{-1} \quad (57)$$

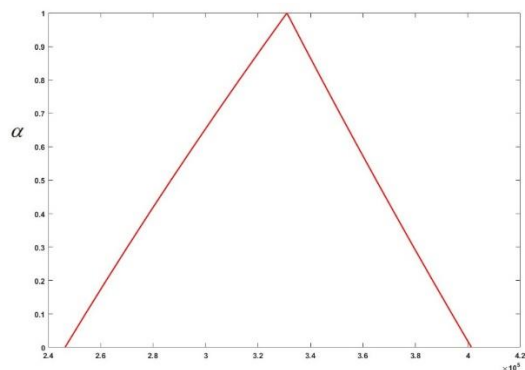
$$\tilde{T}_s = 2.5 \text{ sec} = (2.2, 2.5, 2.7)$$

$$\omega_s = 1 \text{ radian/sec}$$

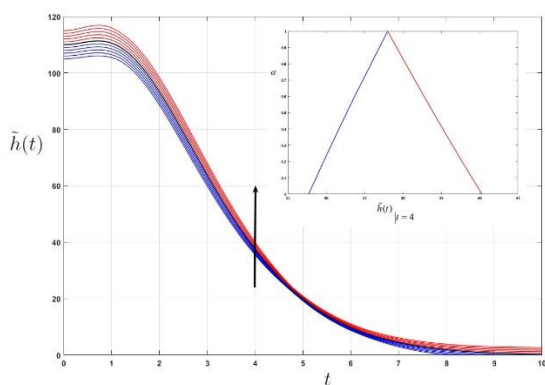
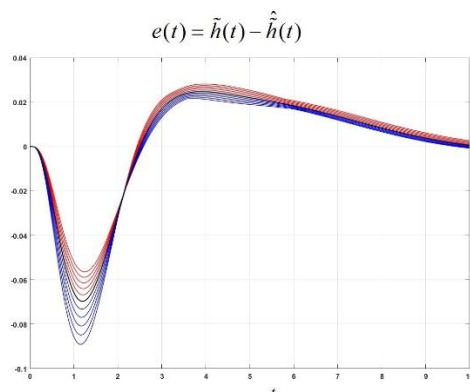
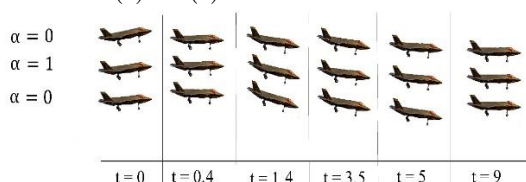
$$\xi = 0.5$$

$$\tilde{V} = 255 \text{ ft/sec} = (250, 255, 260)$$

سرعت هواپیما حدوداً $\tilde{V} = 255 \text{ ft/sec}$ است که به دلیل وزش باد می‌باشد، ارتفاع هواپیما قبل از فرود حدوداً $\tilde{h} = 110 \text{ (ft)} = (105, 110, 115)$ است. هواپیما در حالت حلقه باز و بدون کنترل ناپایدار می‌باشد. تابع عضویت مقدار درمیان ماتریس ریزدانه ای (۱۱) در شکل (۱۹) آورده شده است، همان‌طور که در شکل دیده می‌شود و بر اساس گزاره (۱)، ماتریس ریزدانه ای (۱۱) به ازای هر $\alpha, \beta_A, \beta_B \in [0, 1]$ مقدار درمیان آن مخالف صفر می‌باشد و ماتریس رتبه کامل دارد و بنابراین سیستم کنترل پذیر ریزدانه ای می‌باشد.



شکل ۱۹: درمیان ماتریس ریزدانه ای کنترل پذیری

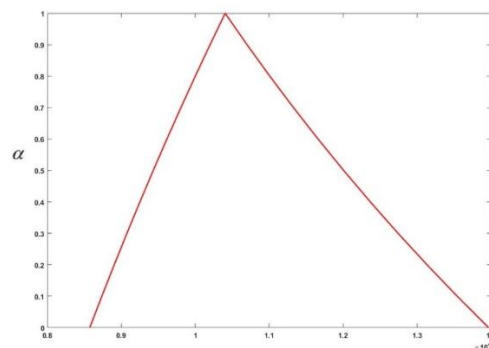
شکل ۲۵: مسیر فازی خروجی $\hat{h}(t)$ شکل ۲۶: تفاضل دو متغیر فازی $\hat{h}(t)$ و $\tilde{h}(t)$ 

شکل ۲۷: حرکات مورد انتظار هواپیماها در حضور کنترل کننده و رویکر

۸- نتیجه گیری

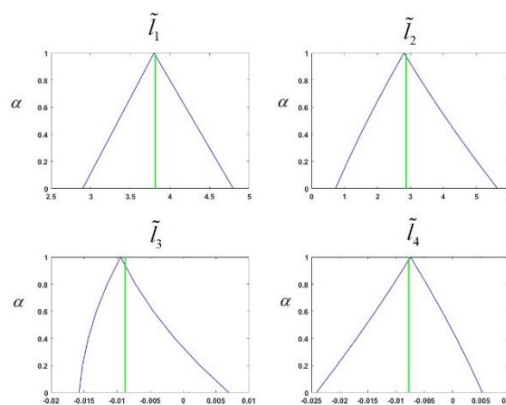
در این مقاله بر اساس مفاهیم مشتق ریزدانه ای و ریاضیات بازه‌ای فازی اندازه فاصله نسبی، مسئله کنترل ردیاب فازی برای سیستم‌های دینامیکی خطی فازی مورد بررسی قرار گرفت است. در این سیستم ها عدم قطعیت به صورت اعداد فازی که در واقع نمایش ریاضی دانش فرد خبره می باشد، در نظر گرفته شده است. با استفاده از قضیه (۲) نشان داده شد که خروجی سیستم که دارای پارامترهای غیر قطعی می باشد ورودی مرجع را ردیابی می کند. ورودی کنترل فازی به فرم فیدبک حالت فازی سیستم می باشد. به دلیل اینکه همواره امکان اندازه گیری حالت های سیستم وجود ندارد در این مقاله برای تخمین حالت های سیستم یک رویکر فازی طراحی گردید و شرط لازم برای طراحی رویکر فازی که همان رویت پذیری ریزدانه ای می باشد، ارائه گردید. به دلیل اینکه اعداد فازی موجود در معادلات دیفرانسیل فازی از دانش فرد خبره بدست می آید، هر چه اطلاعات و دانش فرد خبره بیشتر باشد مقدار عدم قطعیت در اعداد فازی و به طبع آن عدم قطعیت در بهره فیدبک حالات کمتر شده و نتایج بدست آمده دقیق تر می باشد. در این مقاله به دلیل استفاده از رویکرد ریاضیات بازه‌ای فازی اندازه فاصله نسبی مشکلات موجود در روش های SGH و GH مانند عدم وجود داشتن جواب مشتق و پدیده رفتار غیر طبیعی در

در ادامه فرض می شود که حالت های سیستم در دسترس نیستند و تنها خروجی سیستم قابل اندازه گیری می باشد. تابع عضویت مقدار دترمینان ماتریس ریزدانه ای (۳۷) در شکل (۲۳) آورده شده است، همان طور که در شکل دیده می شود و بر اساس گزاره (۲)، ماتریس ریزدانه ای (۳۷) به ازای هر $\alpha, \beta_A, \beta_C \in [0, 1]$ مقدار دترمینان آن مخالف صفر می باشد و ماتریس رتبه کامل دارد و بنابراین سیستم رویت پذیر ریزدانه ای می باشد.



شکل ۲۳: دترمینان ماتریس ریزدانه ای رویت پذیری

مقادیر ویژه فازی رویکر $\tilde{\lambda}_1 = (-0.5, -0.3, -0.1)$ و $\tilde{\lambda}_2 = (-1, -0.8, -0.5)$ و $\tilde{\lambda}_3 = (-1.8, -1.5, -1.3)$ و $\tilde{\lambda}_4 = (-2.5, -2.2, -2)$ در نظر گرفته می شود و ماتریس بهره رویکر فازی $\tilde{L} = [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3, \tilde{l}_4]$ مطابق شکل (۲۴) به دست می آید. مقدار دیفازی بدست آمده نیز در شکل (۲۴) نشان داده شده است.



شکل ۲۴: بهره رویکر فازی، خطوط سبز مقادیر دیفازی می باشند

در شکل های (۲۵) و (۲۶) مسیر فازی خروجی $\hat{h}(t)$ و تفاضل آن با $\tilde{h}(t)$ نشان داده شده است. حرکات فازی هواپیمای با در نظر گرفتن شرایط فازی در شکل (۲۷) نشان داده شده است. نتایج نشان می دهد که، کنترل کننده و رویکر با موفقیت فرود هواپیما را کنترل می کند.

- Applications," *Int. J. Fuzzy Syst*, vol. 17, pp. 22-30, 2015.
- [13] A. Piegat and M. Pluciński, "Fuzzy Number Addition with the Application of Horizontal Membership Functions," *Hindawi Publishing Corporation Scientific World Journal*, vol. 1, pp. 1-16, 2015.
- [14] A. Piegat and M. Landowski, "Fuzzy Arithmetic Type 1 with Horizontal Membership Functions, Uncertainty Modeling part of Studies in Computational Intelligence," *Springer, Cham*, vol. 683, pp. 233-250, 2017.
- [15] M. Landowski, "Comparison of RDM Complex Interval Arithmetic and Rectangular Complex Arithmetic," *Intelligent Systems and Computing*, vol. 534 pp. 49-57, 2016.
- [16] A. Piegat and M. Landowski, "Two interpretations of multidimensional RDM interval arithmetic-multiplication and division," *Int. J. Fuzzy Syst.*, vol. 15, pp. 488-496, 2013.
- [17] M. Mazandarani, N. Pariz, and A. V. Kamyad, "Granular Differentiability of Fuzzy-Number-Valued Functions," *Journal Of IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, vol. 99, pp. 1-14, 2018.
- [18] B. Farhadinia, "Necessary optimality conditions for fuzzy variational problems," *Information Sciences*, vol. 181, pp. 1348-1357, 2011.
- [19] H. Zarei, A. V. Kamyad, and A. A. Heydari, "Fuzzy Modeling and Control of HIV Infection," *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 2012, pp. 1-17, 2012.
- [20] B. Farhadinia, "Pontryagin's Minimum Principle for Fuzzy Optimal Control Problems," *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, vol. 11, pp. 27-43, 2014.
- [21] M. H. F. M. Najariyan, "A new approach for solving a class of fuzzy optimal control systems under generalized Hukuhara differentiability," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 352, pp. 1836-1849, 2015.
- [22] W. Witayakiatlerd, "Nonlinear Fuzzy Differential Equation with Time Delay and Optimal Control Problem," *Hindawi Publishing Corporation*, vol. 1, pp. 1-14, 2015.
- [23] M. Mazandarani and N. Pariz, "Sub-optimal control of fuzzy linear dynamical systems under granular differentiability concept," *ISA Transactions*, vol. 76, pp. 1-17, 2018.
- [24] Z. H. J., *Fuzzy set theory and its applications*. Springer Business Economics, 2001.
- [25] S. abbasi and A. jalali, "A Novel Approach for Solving Fully Fuzzy Linear Systems and their Duality," *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol. 37, pp. 2609-2619, 2019.
- مدلسازی را ندارد. در انتها با استفاده از دو مثال اثر بخشی کنترل کننده فازی طراحی شده مورد بررسی قرار گرفته است.
- ## مراجع
- [1] M. Mazandarani and M. Najariyan, "Differentiability of type-2 fuzzy number-valued functions," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, no. 3, pp. 710-725, 2014.
- [2] N. Hoa, "Fuzzy fractional functional differential equations under Caputo gH-differentiability," *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, vol. 22, pp. 1134-1157, 2015.
- [3] H. V. Long, N. T. K. Son, and N. V. Hoa, "Fuzzy fractional partial differential equations in partially ordered metric spaces," *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, vol. 14, pp. 107-126, 2017.
- [4] V. Lupulescu, L. Dong, and N. V. Hoa, "Existence and uniqueness of solutions for random fuzzy fractional integral and differential equations," *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, vol. 29, pp. 27-42, 2015.
- [5] H. V. Long, N. T. KimSon, and H. T. ThanhTam, "The solvability of fuzzy fractional partial differential equations under Caputo gH-differentiability," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 309, pp. 35-63, 2017.
- [6] M. Najariyan and M. Farahi, "A new approach for solving a class of fuzzy optimal control systems under generalized Hukuhara differentiability," *J Franklin Inst*, pp. 1836-1849, 2015.
- [7] M. Mazandarani and Y. Zhao, "Fuzzy Bang-Bang control problem under granular differentiability," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 355, no. 12, pp. 4931-4951, 2018.
- [8] M. Mazandarani and M. Najariyan, "Type-2 Fuzzy Fractional Derivatives," *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, vol. 19, pp. 1-48, 2014.
- [9] F. Ghaemi, R. Yunus, A. Ahmadian, and S. Salahshour, "Application of fuzzy fractional kinetic equations to modelling of the acid hydrolysis reaction," *Abstract and Applied Analysis*, 2013.
- [10] M. Najariyan and M. Farahi, "optimal control of fuzzy linear controlled system with fuzzy initial conditions," *Iranian journal of fuzzy systems* vol. 10, pp. 21-35, 2013.
- [11] M. Najariyan and M. Farahi, "A new approach for the optimal fuzzy linear time invariant controlled system with fuzzy coefficients," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 259, Part B, pp. 682-694, 2014.
- [12] A. Piegat and M. Landowski, "Horizontal Membership Function and Examples of its