

## طراحی کنترل کننده پیش بین غیر خطی زمان پیوسته با حل دستگاه

### معادلات دیفرانسیل – جبری با شرایط مرزی به روش اختلال هموتوبی

آذر السادات شعبانی<sup>۱</sup>، علیرضا فاتحی<sup>۲</sup>، فهیمه سلطانیان<sup>۳</sup>، رضا جمیل نیا<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران. shabani\_82@yahoo.com

<sup>۲</sup> دانشیار، گروه پژوهشی آپیک، دانشکده برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران. fatehi@kntu.ac.ir

<sup>۳</sup> استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران. f\_soltanian@pnu.ac.ir

<sup>۴</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، صندوق پستی ۱۳۷۷۶-۴۱۹۹۶، رشت، ایران. jamilnia@guilan.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۱۲ ویرایش اول: ۱۳۹۷/۲/۵ ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۴/۴ پذیرش: ۱۳۹۷/۵/۲۷

**چکیده:** در این مقاله طراحی کنترل کننده پیش بین زمان پیوسته و حل معادلات دیفرانسیل-جبری حاصل از آن با استفاده از روش نیمه تحلیلی اختلال هموتوبی ارائه شده است. در هر لحظه بروزرسانی الگوریتم کنترل پیش بین زمان پیوسته، می بایست یک مساله کنترل بهینه حلقه باز حل شود. به منظور حل مساله کنترل پیش بین به صورت زمان پیوسته، مساله کنترل بهینه مذکور بایستی به روش غیرمستقیم حل شود. به این ترتیب که با بکارگیری حساب تغییرات و اصل حداقل یابی پونتریاگین، شرایط لازم و کافی بهینگی مستخرج می شود. در این مقاله نشان داده می شود که مساله طراحی کنترل کننده پیش بین زمان پیوسته با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری با شرایط مرزی معادل است. برای حل این دستگاه، روش نیمه تحلیلی اختلال هموتوبی پیشنهاد می شود که نتیجه آن بدست آمدن تابع کنترل و تابع حالت بهینه است. با داشتن این توابع می توان به آسانی از وضعیت حالت و کنترل در تمامی زمانها مطلع شد. روش ارائه شده می تواند برای طراحی کنترل کننده پیش بین زمان پیوسته سیستم های خطی، غیر خطی و همچنین سیستم های متغیر با زمان بکار رود. به منظور نشان دادن قابلیت و کارایی روش پیشنهادی چند مثال عددی همراه با شبیه سازی ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** کنترل پیش بین زمان-پیوسته، کنترل بهینه، اصل حداقل یابی پونتریاگین، معادلات دیفرانسیل-جبری، روش اختلال هموتوبی

## Design of nonlinear continuous time predictive controller by solving the differential-algebraic equations with boundary conditions using homotopy perturbation method

Azar Shabani, Alireza Fatehi, Fahimeh Soltanian, Reza Jamilnia

**Abstract:** In this paper, design of continuous time predictive controller and solving the resulting differential-algebraic equations are presented using the semi-analytical homotopy perturbation method. At any updating time of the continuous time predictive control algorithm, an optimal open loop control problem must be solved. In order to solve the predictive control problem in continuous time, the problem of optimal control is solved by an indirect method. For this purpose, the necessary and sufficient conditions for optimality are determined by applying the variational calculus and the Pontryagin's minimum principle. A system of differential-algebraic equations with boundary conditions is created. Homotopy perturbation method is proposed to semi-analytically solve this problem. By specifying the control and the state functions, we can obtain easily the control and the state values in every instance of the prediction horizon. The presented method can be used to design of continuous-time predictive controller of linear, nonlinear and time varying systems. To illustrate the reliability and efficiency of the proposed method, some numerical examples with simulation results are presented.

**Keywords:** Continuous-Time Model Predictive Control, Optimal Control, Pontryagin's Minimum Principle, differential-algebraic equations, Homotopy Perturbation Method.

## ۱- مقدمه

یک سیستم کنترل، ابزاری است که از طریق تولید و اعمال مجموعه‌ای از دستورات و ورودی‌های کنترلی، رفتار یک دستگاه و یا فرایند را به سمت مقادیر مطلوب هدایت و تنظیم می‌کند. دسته‌ای از روش‌های کنترل نوین که مدل سیستم حضور مشخص و فعالی در ساختار کنترل کننده دارد، روش کنترل پیش بین مبتنی بر مدل<sup>۱</sup> (MPC) است. کنترل پیش بین، به یک دسته از الگوریتم‌ها اشاره دارد که سیگنال کنترل را برای بهینه‌سازی رفتار آینده یک سیستم محاسبه می‌کند. این روش از دهه ۱۹۷۰ توسعه یافته است و بطور گسترده‌ای در فرایندهای صنعتی بکاربرده شده است. با این وجود بیشتر تکنیک‌های MPC به صورت زمان گسسته متمرکز شده‌اند و کمتر به شکل زمان پیوسته گسترش یافته‌اند. در سال‌های اخیر، روش‌ها و تکنیک‌های مختلفی برای حل مساله کنترل پیش بین زمان پیوسته صورت گرفته است، که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. در مقاله [۱]، بر اساس روش پرتابی چندگانه مستقیم<sup>۲</sup>، افق پیش بین<sup>۳</sup> را به زیر بازه‌هایی افزایش داده و با گسسته‌سازی متغیرهای کنترل و پارامتری کردن متغیرهای حالت، مساله کنترل بهینه<sup>۴</sup> (OC) با بعد نامتناهی را به مساله برنامه‌ریزی غیرخطی<sup>۵</sup> (NLP) با بعد متناهی تبدیل می‌کند. پس از انجام این مراحل، مساله NLP را با روش‌های عددی سریع براساس اطلاعات مشتق حل می‌کند. در [۲] و [۳]، در هر بازه نمونه برداری متغیر کنترل به صورت تابع ثابت در نظر گرفته شده است. ویژگی اصلی روش پیشنهادی مربوط به ماهیت قطعه‌ای بودن سیگنال کنترل است. این ویژگی منجر به یک مساله بهینه‌سازی قابل حل می‌شود که در آن تعداد متغیرهای کنترل کم می‌شود. مقاله [۴]، برای کاهش حجم محاسبات و سرعت بخشیدن به روند بهینه‌سازی، با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از توابع حقیقی متعامد<sup>۶</sup>، تابع کنترل را به صورت بسط سری از آنها بیان می‌کند. در مقاله [۵]، ابتدا با روش هم‌نشانی متعامد مساله کنترل بهینه را به مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کند. سپس، برای یافتن مینیمم مطلق مساله بهینه‌سازی، روش‌های بهینه‌سازی سراسری را بکار می‌برد. در [۶]، در هر لحظه نمونه برداری مساله کنترل پیش بین زمان پیوسته، مساله کنترل بهینه با استفاده از روش مستقیم<sup>۷</sup>، یعنی با پارامتری‌سازی و گسسته‌سازی متغیرهای کنترل و حالت، به مساله NLP تبدیل شده و سپس آن را به روش برنامه‌ریزی غیرخطی حل می‌کند. در [۶]، با اشاره به این که گسسته‌سازی مساله کنترل بهینه در MPC، اغلب در نقاطی با فاصله برابر انجام می‌شود و تنها در صورتی که بازه‌های نمونه برداری به اندازه کافی کوچک باشند، این گسسته‌سازی دقت لازم را دارد که همراه با حجم محاسباتی بالا است. به

این منظور برای بهبود دقت گسسته‌سازی و جلوگیری از بکارگیری تعداد زیربازه‌های زیاد، از روش شبه‌طیفی استفاده کرده‌است و متغیرهای حالت و کنترل را با چندجمله‌ایهای لاگرانژ تقریب می‌زند. در [۷]، مساله تعقیب کردن را برای سیستم‌های غیرخطی با بکارگیری MPC بیان می‌کند. به این صورت که ابتدا با مشتق‌گیریهای متوالی از معادله خروجی سیستم و بکارگیری آنها در بسط تیلور خروجی سیستم، خطای تعقیب کردن در افق پیش بین را به کمک بسط سری تیلور تقریب می‌زند. سپس، مساله بهینه‌سازی حاضر را به روش‌های متعارف حل می‌کند. ونگو و بوید در سال ۲۰۰۸، طراحی کنترل پیش بین برای سیستم‌های غیرخطی زمان گسسته را با بکارگیری بهینه‌سازی سراسری مطرح کردند. از آنجایی که مساله برنامه‌ریزی غیرخطی ممکن است نامحذب باشد، ابتدا، با روش‌های موجود آن را محذب کرده و پس از خطی‌سازی آن را حل نمودند [۸]. پانوجیا و همکارانش در سال ۲۰۱۰، حل مساله رگلاتور خطی مقید زمان پیوسته را ارائه کردند. ابتدا بازه زمانی را با روش‌های مناسب به زیربازه‌هایی افراز کرده و در هر زیر بازه، تابع کنترل را به یکی از سه روش نگهدارنده مرتبه صفر، نگهدارنده خطی قطعه‌ای و نگهدارنده مرتبه یک پارامتری نمودند. سپس، با تبدیل مساله کنترل بهینه به فرم یک مساله بهینه‌سازی با بعد متناهی، پارامترهای مجهول در پارامتری‌سازی‌ها را تعیین کردند. به این ترتیب، متغیرهای کنترل بهینه مشخص می‌شود [۹]. دیلن و همکارانش در سال ۲۰۱۴، مساله کنترل پیش بین غیرخطی را با بکارگیری الگوریتم بهینه‌سازی مشتق آزاد ارائه نمودند. از آنجایی که روش‌های بهینه‌سازی بر پایه گرادین می‌باشند، لذا برای توابعی که مشتق پذیر نیستند مناسب نیست. بنابراین الگوریتم مشتق آزاد در این مقاله بررسی و بکار گرفته شد. البته، ابتدا مسائل کنترل بهینه موجود در کنترل پیش بین با روش پرتابی پارامتری شده و سپس، مساله برنامه‌ریزی غیرخطی حاصل را با الگوریتم مشتق آزاد حل نمودند [۱۰].

طبق بررسی‌های انجام شده، در تمامی روش‌های فوق، در حین حل مساله کنترل پیش بین زمان پیوسته، از روش‌های خطی‌سازی، گسسته‌سازی و یا پارامتری‌سازی استفاده شده‌است و هیچکدام از آنها مسئله کنترل پیش بین را به صورت زمان پیوسته حل نکرده‌است. از طرفی همانطور که می‌دانیم موضوع کنترل مقاوم در فضای زمان پیوسته از غنای خوبی برخوردار است. لذا این‌ها از انگیزه‌های این مقاله در پیشنهاد کنترل پیش بین زمان پیوسته است و نشان داده می‌شود که طراحی کنترل کننده پیش بین سیستم‌های غیرخطی زمان پیوسته، با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری<sup>۸</sup> (DAEs) با شرایط مرزی معادل است. سپس، با حل این دستگاه به روش نیمه تحلیلی اختلال هموتوبی<sup>۹</sup> (HPM)، تابع کنترل و تابع حالت بهینه

<sup>۱</sup> Direct method<sup>۲</sup> Differential-Algebraic Equations<sup>۳</sup> Semi analytical Homotopy Perturbation Method<sup>۱</sup> Model Predictive Control<sup>۲</sup> Multiple shooting direct method<sup>۳</sup> Predictive Horizon<sup>۴</sup> Optimal control<sup>۵</sup> Nonlinear programming problem<sup>۶</sup> Orthonormal functions

به صورت زمان پیوسته مشخص می شود.

ساختار کلی بخش های مقاله به این صورت است که ابتدا مساله مورد بررسی این پژوهش، یعنی مساله کنترل پیش بین زمان پیوسته در بخش دوم بیان می گردد. از آنجایی که در هر لحظه بروزرسانی الگوریتم مورد نظر، بایستی یک مساله کنترل بهینه حل شود، لذا در بخش سوم، مساله کنترل بهینه و رویکردهای حل آن بازگویی شود. از طرفی برای حل مساله کنترل بهینه، روش غیرمستقیم<sup>۱</sup> بکاربرده شده است، که منجر به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری با شرایط مرزی می شود. برای حل این دستگاه، روش نیمه تحلیلی اختلال هموتوبی استفاده شده است که در بخش چهارم اشاره ای به این روش می شود. در بخش پنجم، الگوریتم پیشنهادی طراحی کنترل کننده پیش بین سیستم های زمان پیوسته ارائه شده است. در بخش ششم، مثال های عددی و شبیه سازی و در بخش هفتم، نتیجه گیری بیان می گردد.

## ۲- بیان مساله کنترل پیش بین زمان پیوسته

سیستم زمان پیوسته غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = k(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

با حالت  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ، شرط اولیه  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  خروجی  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  و ورودی کنترل  $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ ، که  $U$  مجموعه ای فشرده و شامل مبدا است. تابعی غیرخطی  $k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$  و  $f: \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  نسبت به تمام مولفه ها هموار (پیوسته و مشتق پذیر) است. در اینجا فرض می شود سیستم (۱) برای هر شرط اولیه  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  و هر تابع کنترل پیوسته  $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow U$  جواب منحصر بفردی دارد. با توجه به هدف طراح، که معمولاً رساندن حالت یا خروجی سیستم به مقدار مطلوب با حداقل تلاش کنترلی است، تابعی هزینه<sup>۲</sup> با افق نامتناهی زیر در نظر گرفته می شود:

$$J_\infty(x_0, u) = \int_0^\infty g(x(t), u(t), t) dt \quad (2)$$

که  $g: \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^+$  تابعی ای پیوسته است. به این ترتیب، مساله (۱) و (۲) یک مساله بهینه سازی با قیود دیفرانسیل-جبری تشکیل می دهد. اگر این مساله بهینه سازی بتواند برای افق نامتناهی حل شود و همچنین هیچ اختلال و عدم تطابق مدل و سیستم هم وجود نداشته باشد، پس می توان تابع کنترل پیداشده در لحظه  $t = 0$  را برای سیستم در تمام زمان های  $t \geq 0$  بکار برد. در حالت کلی چنین نیست و به خاطر اغتشاشات و عدم تطابق مدل و سیستم، رفتار سیستم واقعی با رفتار پیش بینی شده از مدل متفاوت است. در این مقاله، برای جبران این اختلاف، می توان از تکنیک های کنترل

افق لغزان مانند کنترل پیش بین استفاده نمود.

در کنترل پیش بین، ابتدا، بر اساس شرایط کنونی متغیرهای حالت، پیش بینی رفتار آینده سیستم از روی مدل سیستم و در نظر گرفتن تابعی هزینه، کنترل های بهینه محاسبه می شود. سپس، کنترل های بهینه محاسبه شده، در بخش کوچکی از بازه زمانی به سیستم دینامیکی اعمال می گردد. با جلو بردن بازه نمونه برداری و تکرار این فرایند، یک حلقه کنترلی ایجاد می شود. در واقع، این حلقه بسته کنترلی، از محاسبه کنترل های بهینه از شرایط لحظه ای متغیرهای حالت بدست می آید. با توجه به ایده کنترل پیش بین و تئوری مساله کنترل بهینه، می توان گفت که طراحی کنترل کننده پیش بین برای سیستم زمان پیوسته (۱) و (۲) طبق الگوریتم زیر در چهار گام انجام می شود:

**الگوریتم ۱:** ابتدا افق پیش بین HP، گام بروزرسانی  $\delta > 0$  (توجه کنید که لزوماً  $\delta$  یک مقدار ثابت نیست ولی کوچکتر از افق پیش بین تعریف می شود) و دنباله لحظات بروزرسانی  $\{t_i\}_{i \geq 0}$  بطوری که  $t_{i+1} = t_i + \delta$  را در نظر بگیرید.

- ۱- اندازه گیری و یا تعیین حالت سیستم در لحظه  $t_i$ ،  $x_{t_i}$ .
- ۲- تعریف مسئله کنترل بهینه زیر و حل آن برای مشخص کردن جواب  $u_{HP}^*: [t_i, t_i + HP) \rightarrow \mathbb{R}^m$ :

$$\min_{u \in pc([t_i, t_i + HP], \mathbb{R}^m)} J_{HP}(x, u) = \int_{t_i}^{t_i + HP} g(x(t), u(t), t) dt$$

- s.t.  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$   
 $x(t_i) = x_{t_i}$
- که  $pc([a, b], \mathbb{R}^m)$  مجموعه همه توابع پیوسته قطعه ای  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  را نشان می دهد.
- ۳- اعمال کنترل  $u_{MPC}(t) = u_{HP}^*(t)$  بر سیستم در بازه  $t \in [t_i, t_i + \delta)$  و نادیده گرفتن باقیمانده سیگنال کنترل.
- ۴- تکرار فرایند فوق برای لحظه بروزرسانی بعدی  $t_{i+1} = t_i + \delta$ .

## ۳- مساله کنترل بهینه و رویکردهای حل آن

همانطور که در بخش ۲ بیان شد، در هر گام کنترل پیش بین با یک مساله OC روبرو می شویم که می توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \min J &= \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3)$$

هدف از حل مساله کنترل بهینه، تعیین تابع کنترل قابل قبول  $u^*(t) = [u_1^*(t), \dots, u_m^*(t)]$  است که باعث شود سیستم، تابع حالت قابل

<sup>۲</sup> Cost functional

<sup>۱</sup> Indirect method

**قضیه ۱** (شرایط لازم بهینگی) [۱۳]: فرض کنید  $(x^*(t), u^*(t))$  مینیمم موضعی مساله (۳) با تابع هزینه (۴) باشد. آنگاه تابع هم حالت پیوسته مشتق پذیر  $\lambda(t): [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  وجود دارد بطوری که بر حسب تابع همیلتونین:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) [f(x(t), u(t), t)] \quad (5)$$

روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} (x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \\ \dot{\lambda}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} (x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \\ \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \leq \mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t) \\ \text{for all admissible } u(t) \in U \end{cases}$$

and

$$\left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[ \mathcal{H}(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \quad (6)$$

رابطه

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \leq \mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t)$$

تاکید بر "اصل حداقل یابی پونتریاگین" دارد، که  $u^*$  باید تابع همیلتونین  $\mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t)$  را مینیمم کند.

**قضیه ۲** (شرایط کافی بهینگی) [۱۴]: فرض کنید  $(x(t), u(t))$  جواب قابل قبول مساله (۳) با تابع هزینه (۴) باشد که در شرایط لازم بهینگی صدق می کند. اگر  $g(x, u, t)$  و هر کدام از مولفه های  $f(x, u, t)$  نسبت به  $(x, u)$  برای هر  $t \in [t_0, t_f]$  مشتق پذیر و محدب باشند آنگاه  $(x(t), u(t))$  یک مینیمم مطلق مساله کنترل بهینه است.

با توجه به فرضیات قضایای فوق، با حل دستگاه (۶) می توان جواب بهینه مساله کنترل بهینه (۳) با تابع هزینه (۴) را بیابیم. دستگاه (۶) یک مساله مقدار مرزی است که در صورت غیر خطی بودن معادلات دیفرانسیل و معادلات جبری و نوع شرایط اولیه و مرزی آن، یافتن جواب دقیق و تحلیلی برای آن مشکل می باشد. در [۱۴]، روش نیمه تحلیلی اختلال هموتوبی برای حل آن بکار گرفته شده است.

## ۴- روش اختلال هموتوبی

بیشتر پدیده هایی که در طبیعت و تکنولوژی با آنها مواجه می شویم با استفاده از معادلات دیفرانسیل غیر خطی مدل سازی می شوند که در بسیاری موارد یافتن جواب دقیق آن امکان پذیر نیست. روش های نیمه تحلیلی و عددی گوناگونی برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی وجود دارد.

قبول  $x^*(t) = [x_1^*(t), \dots, x_n^*(t)]$  را تعقیب نموده و تابعی  $J$  را حداقل نماید. برای حل این مساله و تضمین پایداری حالت ماندگار، تابع جریمه  $h(x(t_f), t_f)$  که تابعی از زمان نهایی و حالت نهایی است، به تابع هزینه اضافه می شود. به این ترتیب تابع هزینه  $J$  به صورت زیر تغییر می یابد:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (4)$$

**تعریف ۱:** زوج  $(x(\cdot), u(\cdot))$  جواب قابل قبول برای (۳) گفته می شود اگر در قیود مساله صدق نماید.

**تعریف ۲:** جواب قابل قبول  $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$  مینیمم موضعی ضعیف مساله (۳) با تابع هزینه (۴) گفته می شود اگر برای  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  و برای همه جواب های قابل قبول  $(x(\cdot), u(\cdot))$  که در شرط  $\|x - x_0\|_\infty < \varepsilon_1$  و  $\|u - u_0\|_\infty < \varepsilon_2$  صدق می کنند، داشته باشیم  $J(x_0(\cdot), u_0(\cdot)) \leq J(x(\cdot), u(\cdot))$  به طور معمول به مینیمم موضعی، جواب بهینه نیز گفته می شود.

**تعریف ۳:** جواب  $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$  مینیمم مطلق گفته می شود اگر شرایط بالا برای  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \infty$  برقرار باشد.

بطور کلی، سه روش متداول برای حل مساله کنترل بهینه وجود دارد که عبارتند از: روش برنامه ریزی پویا، روش مستقیم و روش غیرمستقیم. در روش برنامه ریزی پویا<sup>۱</sup> [۱۱]، یک سیاست بهینه یابی با بکارگیری "اصل بهینگی" بدست می آید که منجر به حل معادلات متوالی می شود. در روش های مستقیم<sup>۲</sup> [۱۲]، از طریق گسسته سازی و پارامتری سازی متغیرها، مساله کنترل بهینه به یک مساله برنامه ریزی غیر خطی تبدیل می شود. سپس، مساله حاصله با استفاده از الگوریتم های متداول حل می گردد. در روش های غیرمستقیم با استفاده از حساب تغییرات و اصل حداقل یابی پونتریاگین، شرایط لازم بهینگی که یک مساله مقدار مرزی دو نقطه ای را تشکیل می دهد، استخراج می شود. سپس، با حل آن با روش های مربوطه، تابع کنترل و تابع حالت بهینه بدست می آید. در این مقاله برای حل مساله کنترل بهینه مورد نظر از روش غیرمستقیم استفاده می شود. در ادامه، پیرامون روش غیرمستقیم قضایایی بیان می شود.

## ۳-۱ روش غیرمستقیم حل مساله کنترل بهینه [۱۰ و ۹]

در روش غیرمستقیم حل مساله کنترل بهینه، به واسطه بهره مندی از فرآیند تحلیلی و مباحث حساب تغییرات، جواب بدست آمده حداقل در شرایط لازم بهینگی صدق می کند. پس به نظر می رسد این روش، امکان ارائه پاسخ بهینه با دقت بالا را در میان روش های حل مساله کنترل بهینه دارا باشد.

<sup>2</sup> Direct method

<sup>1</sup> Dynamic Programming

که  $v_i(t), i = 0, 1, \dots$  توابع مجهول هستند که طبق روش اختلال بدست می آیند. با قراردادن  $p = 1$  در رابطه (۱۰) جواب تقریبی معادله (۸) حاصل می شود:

$$x(t) = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (11)$$

سرعت همگرایی سری (۱۱) به جواب واقعی معادله (۷)، به عملگر  $A(v)$  بستگی دارد [۵] و [۱۸]. با جایگزین کردن رابطه (۱۰) در هموتویی (۹) و برابر قرار دادن ضرایب توان های یکسان  $p$  در دو طرف تساوی، معادلات زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v_m(t)) \\ = -\mathcal{K}_{m-1}(v_0(t), v_1(t), \dots, v_{m-1}(t)), m \\ \geq 1, \quad \mathcal{B}(v_m) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

که  $\mathcal{K}_i$  ضرایب  $p^i$  در عملگر غیر خطی  $\mathcal{K}$  هستند:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(v(t)) \\ = \mathcal{K}_0(v_0(t)) + p\mathcal{K}_1(v_0(t), v_1(t)) \\ + p^2\mathcal{K}_2(v_0(t), v_1(t), v_2(t)) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

که  $m \geq 1, v_m(t)$  با حل معادلات (۱۲) به آسانی بدست می آیند.

## ۵- روش پیشنهادی برای حل مساله کنترل پیش بین غیر خطی زمان پیوسته

همانطور که در بخش (۲) بیان شد، طبق الگوریتم ۱، مساله کنترل پیش بین زمان پیوسته به طور مکرر طی چهار گام انجام می پذیرد. اکنون با توجه به دینامیک سیستم، تابعی هزینه و روش حل غیر مستقیم مساله کنترل بهینه می توانیم الگوریتم زیر را برای حل مساله کنترل پیش بین زمان پیوسته ارائه دهیم.  
تابعی هزینه و سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید [۱۹]:

$$\begin{aligned} J &= h(x(T), T) + \int_{t_0}^T g(x(t), u(t), t) dt \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= k(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (14)$$

طراحی کنترل کننده پیش بین برای مساله (۱۴)، که یک کنترل کننده فیدبک در چارچوب کنترل افق لغزان می باشد، به صورت حل دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری طبق الگوریتم زیر در چهار گام انجام می شود:

**الگوریتم ۲:** ابتدا افق پیش بین HP، گام بروزرسانی  $\delta > 0$ ، (توجه کنید که لزوماً  $\delta$  یک مقدار ثابت نیست ولی کوچکتر از افق پیش بین تعریف می شود) و دنباله لحظات بروزرسانی  $\{t_i\}_{i \geq 0}$  بطوریکه  $t_{i+1} = t_i + \delta$  را در نظر بگیرید.

روش نیمه تحلیلی اختلال هموتویی، برای حل معادلات غیر خطی [۱۵] دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری با مقادیر اولیه [۱۶]، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی [۱۷] و ... بکار گرفته شده است.

روش اختلال هموتویی، ترکیبی از روش اختلال کلاسیک و روش هموتویی می باشد [۲۶]. روش اختلال، بر پایه وجود پارامتر و یا متغیرهای کوچک (اختلال) در معادله بنا گذاشته شده است. برای بهبود این روش و بکارگیری آن در معادلات بدون اختلال، جی هوان هی [۱۲] در سال ۱۹۹۹ روش اختلال هموتویی را معرفی کرد. به این صورت که ابتدا، با بکارگیری مفهوم هموتویی در توپولوژی، اقدام به ساخت یک معادله هموتویی وابسته به معادله مورد نظر کرد. در این معادله هموتویی، پارامتر اختلال وجود دارد که در بازه  $[0, 1]$  تغییر می کند. سپس روش اختلال را بر معادله هموتویی بکار گرفت. در روش اختلال، ابتدا جواب معادله را به صورت یک سری توانی بر حسب پارامتر اختلال با ضرایب مجهول (تابع) در نظر می گیرد. سپس، با جایگزین کردن آن سری در معادله هموتویی و برابر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان پارامتر اختلال، معادلات خطی حاصل می شود که با حل دنباله وار آنها توابع مجهول در سری بدست می آیند. برای توضیح ایده اصلی روش اختلال هموتویی، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$A(x(t)) - f(t) = 0, B(x) = 0, t \in \Omega \quad (15)$$

که  $A$  عملگر دیفرانسیل کلی،  $B$  عملگر مرزی و  $f(t)$  یک تابع تحلیلی معلوم است. به طور کلی عملگر  $A$  را می توان به دو قسمت  $\mathcal{L}$  و  $\mathcal{K}$  تقسیم کرد، که  $\mathcal{L}$  عملگر خطی و  $\mathcal{K}$  عملگر غیر خطی است. بنابراین معادله (۷) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathcal{L}(x(t)) + \mathcal{K}(x(t)) - f(t) = 0, B(x) = 0 \quad (16)$$

برای حل معادله (۸)، ابتدا، یک هموتویی  $v(t, p): \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$  که در شرط زیر صدق می کند ساخته می شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(v, p) &= \mathcal{L}(v(t, p)) - \mathcal{L}(x_0(t)) + p\mathcal{L}(x_0(t)) \\ &+ p\mathcal{K}(v(t, p)) - pf(t) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

که  $v(t, p)$  یک تابع مجهول،  $p \in [0, 1]$  یک پارامتر جانشانی و  $x_0(t)$  یک تقریب اولیه از جواب معادله دیفرانسیل (۸) که باید در شرایط مرزی صدق کند، می باشند. از معادله (۹) واضح است وقتی  $p = 0$  است،  $v(t, 0) = x_0(t)$  می باشد و وقتی  $p = 1$  است،  $v(t, 1) = x(t)$  می باشد. به عبارتی، با تغییر  $p$  از صفر تا یک، جواب  $v(t, p)$  از  $x_0(t)$  بطور یکنواخت به  $x(t)$  تغییر می کند. فرض کنید جواب معادله (۹) به صورت یک سری از  $p$  نوشته شود:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (18)$$

۱- حل دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری (DAEs) زیر به روش اختلال هموتوبی برای بدست آوردن جواب های تقریبی توابع حالت  $x_{MPC}(t)$  هم حالت  $\lambda_{MPC}(t)$  و کنترل  $u_{MPC}(t)$  در بازه  $[t_i, t_i + HP]$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t) \\ \dot{\lambda} = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t), t) \right]^T \lambda(t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t), t) \\ 0 = \frac{\partial g}{\partial u}(x(t), u(t), t) + \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t), t) \right]^T \lambda(t) \\ x(t_i) = x_i \\ \lambda(t_i + HP) = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_i + HP)) \end{cases} \quad (15)$$

در روش اختلال هموتوبی، ابتدا متناظر با هر یک از معادلات (جبری و دیفرانسیل) دستگاه (۱۵)، یک هموتوبی ساخته می شود. جواب های تقریبی ای برای دستگاه (۱۵) به صورت سری هایی از مرتبه دلخواه  $s$  با ضرایب مجهول، مانند زیر در نظر گرفته می شود که با جایگزین کردن آنها در هموتوبی های ساخته شده، توابع مجهول سری بدست می آیند:

$$\begin{cases} x(t) \cong \hat{x}(t) = x_0(t) + p x_1(t) + \dots + p^s x_s(t) \\ \lambda(t) \cong \hat{\lambda}(t) = \lambda_0(t) + p \lambda_1(t) + \dots + p^s \lambda_s(t) \\ u(t) \cong \hat{u}(t) = u_0(t) + p u_1(t) + \dots + p^s u_s(t) \end{cases}$$

سپس با قرار دادن  $p = 1$ ، جواب های تقریبی دستگاه (۱۵) مشخص می شود:

$$\begin{aligned} x_{MPC}(t) &= x_0(t) + x_1(t) + \dots + x_s(t) \\ \lambda_{MPC}(t) &= \lambda_0(t) + \lambda_1(t) + \dots + \lambda_s(t) \\ u_{MPC}(t) &= u_0(t) + u_1(t) + \dots + u_s(t) \end{aligned}$$

۲- اعمال کنترل  $u_{MPC}(t)$  بر سیستم در بازه  $t \in [t_i, t_i + \delta)$  و نادیده گرفتن باقیمانده سیگنال کنترل.

۳- تعیین حالت سیستم در لحظه  $t_{i+1}$  با تابع حالت  $x_{MPC}(t)$  بدست آمده در گام (۱)،

$$x_{t_{i+1}} = x_{MPC}(t_{i+1})$$

۴- تکرار فرایند فوق برای لحظه بروزرسانی بعدی  $t_{i+1} + \delta$ .

برای حل دستگاه (۱۵) به روش اختلال هموتوبی، مقادیر اولیه متغیرهای هم حالت،  $\lambda(t_0)$  مشخص نیست. لذا، ابتدا به صورت مجهول  $\lambda(t_0) = \alpha, \alpha \in R^n$  در نظر گرفته می شوند. سپس، بعد از حل دستگاه، مقادیر مجهول  $\alpha$  با توجه به شرط مرزی  $\lambda(t_i + HP)$  بدست می آیند.

**نکته ۱:** برای پیاده سازی کنترل کننده طراحی شده زمان پیوسته آن را به صورت نمونه-داده<sup>۱</sup> پیاده سازی می نمایم که اثر گسسته سازی در اجرای کنترل کننده پیوسته طراحی شده در سیستم های دیجیتالی دیده شود.

#### ۵-۱ پایداری

در MPC، یک مساله کنترل بهینه افق نامتناهی با دنباله ای از مسائل افق متناهی در چارچوب کنترل افق لغزان تقریب زده می شود. بطور کلی، به خاطر استفاده از افق پیش بین متناهی، پایداری سیستم حلقه بسته تضمین شده نیست. به منظور دستیابی به پایداری، روش ها و تکنیک های مختلفی ارائه شده است. در [۲۰]، با در نظر گرفتن فرضیاتی بر دینامیک سیستم، جمله جریمه حالت نهایی  $P(X(t+HP))^T$  را به تابعی هزینه و قید نامساوی نهایی  $X(t+HP) \in \Omega$  را به قیود مساله کنترل بهینه حلقه باز اضافه می نماید. سپس، وجود و نحوه انتخاب ماتریس جریمه حالت نهایی  $P$  و ناحیه نهایی  $\Omega$  به گونه ای که شرط پایداری حلقه بسته تضمین شود را نشان می دهد [قضیه ۱، ۱۸]. البته شرایط بیان شده برای پایداری، کافی است و لازم نمی باشند. وجود قید نامساوی نهایی افزوده، حل مساله کنترل بهینه حلقه باز را دشوار می کند و اجرای آنالیز مساله از نظر زمان محاسباتی با مشکل روبرو می شود. در [۲۱] نشان می دهد که یک انتخاب مناسب از افق پیش بین می تواند برقراری قید نامساوی نهایی را تضمین نماید [لم ۲، ۲۲]. سپس، در [قضیه ۱، ۲۲] شرایط پایداری سیستم حلقه بسته را بیان می کند. در [۲۲]، آنالیز پایداری کنترل کننده های افق لغزان را بر اساس تابع لیاپانوف به عنوان جمله جریمه نهایی بررسی شده است. در [قضیه ۴، ۲۰] وجود افق پیش بینی که پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین کند، بیان می کند.

#### ۶- مثال های عددی و شبیه سازی

در این بخش، می خواهیم به منظور نشان دادن قابلیت و کارایی الگوریتم پیشنهادی ۲، چند مثال عددی به همراه نتایج حاصل از شبیه سازی مربوطه ارائه نماییم. از طرفی، همانطور که می دانیم عوامل مختلفی بر روی کیفیت پاسخ تاثیر گذار است. لذا در مثال های ارائه شده، برخی از این موارد نیز بررسی شده است. در مثال ۱، یک مسئله کنترل پیش بین خطی نامتغیر با زمان<sup>۲</sup> (LTI) حل می شود، تا ایده کلی روش روشن شود. علاوه بر آن در این مثال، تاثیر انتخاب افق پیش بین بر کنترل کننده، مقاوم بودن روش پیشنهادی و مقایسه روش پیشنهادی با روش کنترل پیش بین زمان گسسته نیز مدنظر قرار گرفته است. در مثال ۲، کارایی روش پیشنهادی برای طراحی کنترل کننده پیش بین سیستم پیوسته خطی متغیر با زمان<sup>۳</sup> (LTV) چند ورودی چند خروجی<sup>۴</sup> (MIMO) به همراه تاثیر ماتریس های وزنی بر آن بررسی می شود. در مثال ۳، دینامیک غیرخطی زمان پیوسته هلیکوپتر

<sup>3</sup> Linear time varying

<sup>4</sup> Multi Input Multi Output

<sup>1</sup> Sampled Data

<sup>2</sup> Linear Time Invariant

جواب نیمه تحلیلی مرتبه  $S$  دستگاه (۲۱)، طبق روش اختلال هموتوبی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{cases} x(t) \cong \hat{x}(t) = x_0(t) + p x_1(t) + \dots + p^s x_s(t) \\ \lambda(t) \cong \hat{\lambda}(t) = \lambda_0(t) + p \lambda_1(t) + \dots + p^s \lambda_s(t) \end{cases} \quad (22)$$

توابع  $x_0(t)$  و  $\lambda_0(t)$  جواب های تقریبی اولیه دستگاه (۲۱) می باشند، که معمولاً به صورت توابع ثابت، برابر مقادیر اولیه داده شده، در نظر گرفته می شوند یعنی  $x_0(t) = x_0$  و  $\lambda_0(t) = \alpha$  توابع مجهول  $x_i(t)$ ،  $i = 0, \dots, s$  باید به گونه ای مشخص شوند که در شرایط اولیه مساله صدق کنند (توجه شود که لزوماً تابع های تقریبی  $\hat{x}(t)$  و  $\hat{\lambda}(t)$  بدست آمده، چند جمله ای مرتبه  $S$  نمی باشند. نوع تابع بدست آمده، به عملگرهای معادله و جواب تقریبی اولیه در نظر گرفته شده از معادله بستگی دارد):

$$\begin{cases} \hat{x}(t_0) = x_0: & \text{if } x_0(t) = x_0 \text{ then} \\ & x_1(t_0) = \dots = x_s(t_0) = 0 \\ \hat{\lambda}(t_0) = \alpha: & \text{if } \lambda_0(t) = \alpha \text{ then} \\ & \lambda_1(t_0) = \dots = \lambda_s(t_0) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

اگر برای هر یک از معادلات دستگاه همگن (۲۱) عملگر خطی را  $\mathcal{L} = \frac{d}{dt}$ ، و جملات باقیمانده را عملگر غیر خطی  $\mathcal{N}$  در نظر بگیریم، با توجه به هموتوبی (۹) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{x}(t)) - \frac{d}{dt}(x_0) + p \frac{d}{dt}(x_0) &= \\ p \left( -0.1(\hat{x}(t)) + \frac{-1}{2R}(\hat{\lambda}(t)) \right) \\ \frac{d}{dt}(\hat{\lambda}(t)) - \frac{d}{dt}(\alpha) + p \frac{d}{dt}(\alpha) &= \\ p \left( -0.2Q(\hat{x}(t) - y_{ref}(t)) + 0.1(\hat{\lambda}(t)) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگزین کردن سری های (۲۲) در روابط (۲۴) و سپس، مساوی قراردادن ضرایب توان های یکسان  $p$  در حل معادلات بدست آمده از آن می توان توابع مجهول را بدست آورد:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_{t_0}^t \left( -0.1x_0 + \frac{-1}{2R}\alpha \right) dt \\ x_2(t) &= \int_{t_0}^t \left( -0.1x_1(t) + \frac{-1}{2R}\lambda_1(t) \right) dt \\ &\vdots \\ \lambda_1(t) &= \int_{t_0}^t -0.2Q(x_0 - y_{ref}(t) + 0.1\alpha) dt \\ \lambda_2(t) &= \int_{t_0}^t (-0.2Qx_1(t) + 0.1\lambda_1(t)) dt \\ &\vdots \end{aligned}$$

آزمایشگاهی که در بخشی از فضای کاری پایدار و در بخش دیگر ناپایدار است، در فضای حالت آورده شده است. در بخش اول این مثال، حذف خطای حالت ماندگار و در بخش دوم مثال، اعمال روش پیشنهادی در نقطه کار ناپایدار سیستم و امکان پایدارسازی آن مورد بررسی قرار گرفته است.

#### ۶-۱ کنترل پیش بین زمان پیوسته خطی نامتغیر با زمان

در این بخش، ایده کلی روش پیشنهادی، تاثیر انتخاب افق پیش بین بر کنترل کننده، مقایسه روش پیشنهادی با روش کنترل پیش بین زمان گسسته و در نهایت مقاوم بودن روش پیشنهادی به صورت عددی بررسی می شود. مثال ۱: مساله یک ورودی یک خروجی (SISO) زمان پیوسته با سیگنال مرجع خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -0.1x(t) + u(t) \\ y(t) &= 0.1x(t) \\ y_{ref} &= 0.5\chi_{[10,20)} + 0.75\chi_{[20,30)} + 0.25\chi_{[30,\infty)} \end{aligned} \quad (16)$$

که تابع  $\chi$  عبارت است از

$$\chi_{[a,b)} = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a \leq t < b \\ 0 & t \geq b \end{cases} \quad (17)$$

هدف طراحی کنترل کننده پیش بین برای دنبال کردن سیگنال مرجع بوسیله خروجی است، لذا تابعی هزینه زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} J &= \frac{h}{2} [y(t_f) - y_{ref}(t_f)]^T H [y(t_f) - y_{ref}(t_f)] \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} [y(t) - y_{ref}(t)]^T Q [y(t) \\ &- y_{ref}(t)] + u^T R u dt \end{aligned} \quad (18)$$

طبق روش پیشنهادی، برای تشکیل دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری با شرایط مرزی، ابتدا تابع همیتونین زیر را می نویسیم:

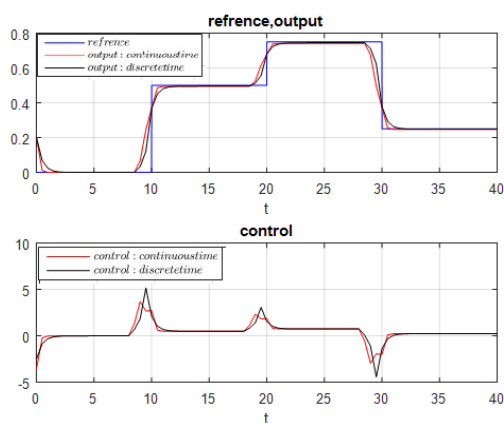
$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq Q(0.1x(t) - y_{ref}(t))^2 + Ru^2(t) + \lambda^T(t)[-0.1x(t) + u(t)] \quad (19)$$

با مشتق گیری از این تابع نسبت به  $u$  خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 2Ru + \lambda(t) = 0 \Rightarrow u = \frac{-\lambda(t)}{2R} \quad (20)$$

ماتریس (اسکالر) معین مثبت  $2R > 0$ ،  $R$ : such that  $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = 2R > 0$ ، به این ترتیب، دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی معادل مساله کنترل بهینه بر بازه بروزرسانی  $[t_0, t_f]$  عبارت است از:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.1x(t) + \frac{-\lambda(t)}{2R} \\ \dot{\lambda}(t) = -2Q(0.1x(t) - y_{ref}(t)).(0.1) + 0.1\lambda(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right|_{t=t_f} = 2H(0.1x(t_f) - y_{ref}(t_f)).(0.1) - \lambda(t_f) = 0 \end{cases} \quad (21)$$



شکل ۲: مقایسه پاسخ سیستم مثال ۱ به دو روش کنترل پیش بین زمان

پیوسته و زمان گسسته با افق پیش بین  $HP = 3$ 

جدول ۱: نتایج مقایسه کنترل پیش بین پیوسته و گسسته مثال ۱

معیار		پله اول	پله دوم	پله سوم
زمان نشست	پیوسته	۲/۲۲	۲/۳۵	۲/۹۷
	گسسته	۴/۱۶	۳/۵۲	۶/۵
نسبت حداکثر انحراف سیگنال کنترل زمان گسسته به پیوسته		۱/۵۴۰۷	۱/۴۱۸۵	۱/۶۹۳۹

با توجه به  $T_s = 0.5$ ، ماتریس های وزنی مساله زمان گسسته،  $Q_d = 0.5Q_c$  و  $R_d = 0.5R_c$  می باشد. نتایج شبیه سازی مقایسه حل مساله (۱۶) به روش پیشنهادی و مساله (۲۵) به روش کنترل پیش بین گسسته با در نظر گرفتن  $HP=3$ ،  $Q_c = 10$  و  $R_c = 0.02$  در شکل (۲) و جدول (۱) آورده شده است. مشاهده می شود که زمان نشست و دامنه سیگنال کنترلی کنترل پیش بین زمان گسسته تقریباً یک و نیم برابر زمان پیوسته است.

در الگوریتم پیشنهادی، مقدار افق پیش بین در نظر گرفته شده فقط در محاسبه مقدار شرط نهایی دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری متناظر با مسئله کنترل بهینه وارد می شود لذا می توان گفت که افزایش افق پیش بین تا زمانی که مرتبه هموتوپی ثابت باشد تاثیری در حجم محاسبات مربوط به اجرای شبیه سازی ندارد. در حالیکه در کنترل پیش بین گسسته، افزایش افق کنترل و افق پیش بین باعث افزایش بعد ماتریس ها شده که در زمان محاسبه معکوس ماتریس ها و عملیات مقدماتی ماتریس ها که در بدست آوردن سیگنال کنترل وجود دارد تاثیر می گذارد. برای نشان دادن این موضوع، در مثال ۱ زمان محاسبات با در نظر گرفتن افق پیش بین برابر ۲ و ۶ بطور متوسط ۰/۱۵ درصد تغییر می کند به عبارتی حجم محاسبات تغییر آتچنانی ندارد. این نتیجه ای است که از نظر تئوری هم انتظار می رفت.

با حل معادلات فوق، توابع  $x_i(t)$ ،  $i = 1, \dots, s$  و  $\lambda_i(t)$  مشخص می شوند. با قراردادن روابط (۲۲)، تقریب هایی از تابع حالت  $x(t)$  و تابع هم حالت  $\lambda(t)$  و سپس به کمک  $u(t) = \frac{-\lambda(t)}{2R}$ ، تابع کنترل مشخص می شود.

نتایج شبیه سازی با در نظر گرفتن پارامترهای مساله به صورت  $s = 2R = 0.02$ ،  $Q = H = 10$ ، گام بروزرسانی  $\delta = 0.5$  و دو مقدار افق پیش بین  $HP = 2, 3$  در شکل (۱) نشان داده شده است. جواب های تقریبی تابع حالت و تابع کنترل بدست آمده عبارت هستند از ( $HP = 2$ ):

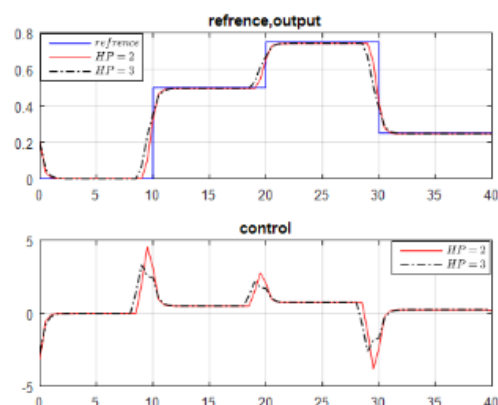
$$x(t) = \begin{cases} 2 - 3.3148t & [0, 0.5] \\ 0.6266 - 0.5679t & [0.5, 1] \\ 0.1560 - 0.0973t & [1, 1.5] \\ 0.0351 - 0.0167t & [1.5, 2] \\ \vdots & \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 9.688t - 3.1147 & [0, 0.5] \\ 1.6598t - 1.3635 & [0.5, 1] \\ 0.2843t - 0.3757 & [1, 1.5] \\ 0.04871t - 0.0887 & [1.5, 2] \\ \vdots & \end{cases}$$

همانطور که در شکل (۱) مشاهده می شود، کنترل کننده پیش بین، سیگنال مرجع را در طول افق پیش بین دارد، لذا با توجه به پیش بینی خطا در آینده، سیگنال کنترل را زودتر از پیش آمدن تغییر در سیگنال مرجع اعمال می کند.

برای مقایسه روش پیشنهادی با کنترل پیش بین زمان گسسته [۲۳]، ابتدا با در نظر گرفتن زمان نمونه برداری  $T_s = 0.5$ ، مساله زمان پیوسته (۱۶) را به سیستم زمان گسسته تبدیل می کنیم:

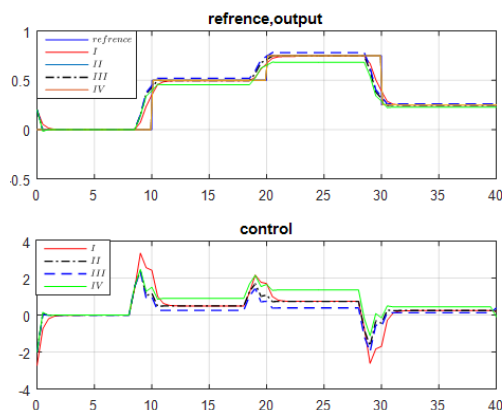
$$\begin{cases} x(k+1) = 0.9512x(k) + 0.4877u(k) \\ y(k) = 0.1x(k) \end{cases} \quad (25)$$

شکل ۱: پاسخ سیستم کنترل پیش بین زمان پیوسته مثال ۱، برای دو مقدار افق پیش بین  $HP = 2, 3$



سیگنال مرجع بوسیله خروجی به روش کنترل پیش بین زمان پیوسته پیشنهادی است. لذا، تابعی هزینه زیر را در نظر می گیریم:

$$J = \overbrace{[y(t_f) - y_{ref}(t_f)]^T \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} [y(t_f) - y_{ref}(t_f)]}^h + \int_{t_0}^{t_f} [y(t) - y_{ref}(t)]^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} [y(t) - y_{ref}(t)] + u^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} u dt \quad (27)$$



شکل ۳) بررسی مقاوم بودن روش پیشنهادی مثال ۱ با مقادیر ویژه ۰/۱، ۰/۰۵ و ۰/۲

ابتدا تابع همیلتونین را تشکیل می دهیم:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq [y(t) - y_{ref}(t)]^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} [y(t) - y_{ref}(t)] + u^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} u + \lambda^T(t) f(x, u, t) \quad (28)$$

با مشتق گیری از آن نسبت به  $u$  داریم:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 2 \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} u + \lambda^T(t) \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{-0.5}{2R_1} \lambda_1(t) \\ u_2 = \frac{-(2 + \sin t)}{2R_2} \lambda_2(t) \end{cases}$$

such that  $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = 2 \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} > 0$ ,  $\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$ : ماتریس معین مثبت:

(29)

به این ترتیب، دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی مساله عبارت است از:

با توجه به وجود اغتشاشات نامعلوم و عدم تطابق دقیق مدل و پلنت، بحث مقاوم بودن<sup>۱</sup> روش پیشنهادی از اهمیت اساسی و مهمی برخوردار است. اما در این مثال، میزان مقاومت روش به نامعینی در پارامترهای مدل به صورت عددی بررسی شده است. در روش پیشنهادی، مقدار حالت در هر بازه بروزرسانی بر اساس تابع حالت بدست آمده از گام قبلی اندازه گیری می شود. نتایج بررسی مقاوم بودن روش پیشنهادی، برای چهار حالت زیر در شکل (۳) مشاهده می شود:

- I. اندازه گیری حالت سیستم در هر بازه بروزرسانی بر اساس حالت بدست آمده از حل مساله.
- II. اندازه گیری حالت سیستم در هر بازه بروزرسانی بر اساس اعمال سیگنال کنترل بدست آمده بر مدل (۱۶).
- III. اندازه گیری حالت سیستم در هر بازه بروزرسانی بر اساس اعمال سیگنال کنترل بدست آمده بر مدل (۱۶) همراه با نامعینی که مقدار ویژه آن ۰/۰۵ - در نظر گرفته شده است.
- IV. اندازه گیری حالت سیستم در هر بازه بروزرسانی بر اساس اعمال سیگنال کنترل بدست آمده بر مدل (۱۶) همراه با نامعینی که مقدار ویژه آن ۰/۲ - در نظر گرفته شده است.

همانطور که در شکل (۳) مشاهده می شود، علی رغم اینکه سرعت پلنت حلقه باز دو برابر تغییر کرده است، پاسخ خروجی تغییر قابل توجهی ندارد. این نشان می دهد که روش پیشنهادی، نسبت به تغییر نامعینی در سرعت پلنت حلقه باز مقاومت خوبی دارد.

## ۲-۶ کنترل پیش بین زمان پیوسته خطی متغیر با زمان

مثال ۲: سیستم MIMO زمان پیوسته LTV زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) = \begin{bmatrix} 0.25 \sin t + 0.5 & 0 \\ 0 & -0.25 \sin 2t - 0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 + \sin t \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \quad (26)$$

مقادیر ویژه سیستم عبارتند از:

$\{0.25 \sin t + 0.5, -0.25 \sin 2t - 0.5 \mid t \in \mathbb{R}\}$   
واضح است که مقادیر ویژه در بازه های  $[0.25, 0.75]$  و  $[-0.75, -0.25]$  تغییر می کنند، لذا سیستم ناپایدار است.

فرض کنید حالت اولیه سیستم  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$  یا خروجی متناظرش  $y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$  و سیگنال مرجع  $y_{ref} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  باشد. هدف دنبال کردن

<sup>۱</sup> Robustness

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = (0.25 \sin t + 0.5)x_1(t) + 0.5 \left( \frac{-0.5}{2R_1} \lambda_1(t) \right) \\ \dot{x}_2(t) = (-0.25 \sin 2t - 0.5)x_2(t) + (2 + \sin t) \left( \frac{-(2 + \sin t)}{2R_2} \lambda_2(t) \right) \\ \dot{\lambda}_1(t) = -2Q_1(x_1(t) - y_{1ref}(t)) + 2Q_2(-x_1(t) - x_2(t) - y_{2ref}(t)) - 0.25 \sin t \lambda_1(t) - 0.5 \lambda_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = 2Q_2(-x_1(t) - x_2(t) - y_{2ref}(t)) + 0.25 \sin 2t \lambda_2(t) + 0.5 \lambda_2(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \left. \frac{\partial h}{\partial x_1} \right|_{t=t_f} = 2H_1(x_1(t_f) - y_{1ref}(t_f)) - 2H_2(-x_1(t_f) - x_2(t_f) - y_{2ref}(t_f)) - \lambda_1(t_f) = 0 \\ \left. \frac{\partial h}{\partial x_2} \right|_{t=t_f} = -2H_2(-x_1(t_f) - x_2(t_f) - y_{2ref}(t_f)) - \lambda_2(t_f) = 0 \\ \lambda(t_0) = \alpha \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t_0) = x_0, \quad \text{if } x_0(t) = x_0 \\ \text{then } x_1(t_0) = \dots = x_s(t_0) = 0 \\ \hat{\lambda}(t_0) = \alpha, \quad \text{if } \lambda_0(t) = \alpha \\ \text{then } \lambda_1(t_0) = \dots = \lambda_s(t_0) = 0 \end{array} \right. \quad (30)$$

جواب نیمه تحلیلی مرتبه S دستگاه (30)، طبق روش اختلال هموتوبی به

صورت زیر در نظر گرفته می شود:

اگر برای هر یک از معادلات دستگاه همگن (30) عملگر خطی را

$\mathcal{L} = \frac{d}{dt}$  و عملگر غیر خطی  $\mathfrak{N} = f(x, u, \lambda)$  در نظر بگیریم و برای توابع متغیر با زمان  $f(t)$  بسط تیلور مرتبه دلخواه  $r$  حول نقطه  $t_0$  را قرار

دهیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) \cong \hat{x}_1(t) = x_{01}(t) + p x_{11}(t) + \dots + p^s x_{s1}(t) \\ x_2(t) \cong \hat{x}_2(t) = x_{02}(t) + p x_{12}(t) + \dots + p^s x_{s2}(t) \\ \lambda_1(t) \cong \hat{\lambda}_1(t) = \lambda_{01}(t) + p \lambda_{11}(t) + \dots + p^s \lambda_{s1}(t) \\ \lambda_2(t) \cong \hat{\lambda}_2(t) = \lambda_{02}(t) + p \lambda_{12}(t) + \dots + p^s \lambda_{s2}(t) \end{array} \right. \quad (31)$$

توابع مجهول  $x_{ij}(t)$  و  $\lambda_{ij}(t)$ ,  $j = 1, 2$  و  $i = 0, \dots, s$  را

به گونه ای بدست می آوریم که:

$$\begin{aligned} g_1 &= \text{taylor}(\sin t, t_0, r) \\ g_2 &= \text{taylor}(\sin 2t, t_0, r) \end{aligned}$$

آنگاه با توجه به هموتوبی (9) داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\hat{x}_1(t)) - \frac{d}{dt}(x_{01}) + p \frac{d}{dt}(x_{01}) = p \left( (0.25 g_1 + 0.5) \hat{x}_1(t) + 0.5 \left( \frac{-0.5}{2R_1} \hat{\lambda}_1(t) \right) \right) \\ \frac{d}{dt}(\hat{x}_2(t)) - \frac{d}{dt}(x_{02}) + p \frac{d}{dt}(x_{02}) = p \left( \begin{array}{l} (-0.25 g_2 - 0.5) \hat{x}_2(t) + \\ (2 + g_1) \left( \frac{-(2 + g_1)}{2R_2} \hat{\lambda}_2(t) \right) \end{array} \right) \\ \frac{d}{dt}(\hat{\lambda}_1(t)) - \frac{d}{dt}(\alpha_1) + p \frac{d}{dt}(\alpha_1) = p \left( \begin{array}{l} -2Q_1(\hat{x}_1(t) - y_{1ref}(t)) + \\ 2Q_2(-\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t) - y_{2ref}(t)) - \\ 0.25 g_1 \hat{\lambda}_1(t) - 0.5 \hat{\lambda}_1(t) \end{array} \right) \\ \frac{d}{dt}(\hat{\lambda}_2(t)) - \frac{d}{dt}(\alpha_2) + p \frac{d}{dt}(\alpha_2) = p \left( \begin{array}{l} 2Q_2(-\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t) - y_{2ref}(t)) + \\ 0.25 g_2 \hat{\lambda}_2(t) + 0.5 \hat{\lambda}_2(t) \end{array} \right) \end{array} \right.$$

نتایج شبیه سازی با در نظر گرفتن پارامترهای مساله به صورت  $s = 3$

(تعداد جملات سری هموتوبی)،  $r = 3$  (مرتبه سری تیلور)، گام بروزرسانی  $\delta = 0.1$ ، افق پیش بین  $HP = 2$  و ماتریس های وزنی زیر در شکل (4) دیده می شود.

$$I, \quad R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(33)

با مساوی قراردادن ضرایب توان های یکسان  $p$  در (33) و حل معادلات بدست آمده می توان توابع مجهول را بدست آورد. سپس، با قرار دادن توابع بدست آمده در معادلات (31)، تقریب هایی از تابع حالت  $x(t)$  تابع هم حالت  $\lambda(t)$  و سپس به کمک (29)، تابع کنترل  $u(t)$  مشخص می شود.

جواب های تقریبی تابع حالت و تابع کنترل بدست آمده برای انتخاب ماتریس های وزنی ( $I$ ) عبارت هستند از:

$$\begin{aligned} II. \quad R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ III. \quad R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \begin{cases} 4.5900t - 2.5000t^2 + 0.1912t^3 & [0,0.1] \\ 0.0726 + 4.0445t - 4.2969t^2 + 0.1508t^3 - 0.0036t^4 - 0.0002t^5 & [0.1,0.2] \\ \vdots & \end{cases} \\ x_2(t) &= \begin{cases} 3 - 48.1927t + 136.2786t^2 + 103.1506t^3 + 19.1210t^4 - 0.1946t^5 & [0,0.1] \\ 1.5171 - 22.1763t + 32.1109t^2 + 27.5618t^3 + 4.0592t^4 - 0.5013t^5 + & [0.1,0.2] \\ 0.0155t^6 - 0.0006t^7 & \\ \vdots & \end{cases} \\ u_1(t) &= \begin{cases} 9.1799 - 14.5900t - 100.7648t^2 - 78.9141t^3 - 9.6559t^4 & [0,0.1] \\ 8.2591 - 26.3414t + 31.8454t^2 - 19.6921t^3 - 2.3895t^4 + 0.1688t^5 - 0.0028t^5 & [0.1,0.2] \\ \vdots & \end{cases} \\ u_2(t) &= \begin{cases} -23.3464 + 136.6536t - 766.6469t^2 - 717.9417t^3 - 188.4085t^4 - 19.8201t^5 & [0,0.1] \\ -12.9709 + 75.4939t - 158.1542t^2 - 185.4210t^3 - 47.3085t^4 - 2.4951t^5 + & [0.1,0.2] \\ 0.6232t^6 - 0.0262t^7 + 0.0004t^8 & \\ \vdots & \end{cases} \end{aligned}$$

در این بخش هدف، کنترل مسیر مجزای SISO، افقی است. در عمل با بستن هر یک از دو پیچ جداگانه ای که برای سلب حرکت از هلیکوپتر در صفحه های افقی و عمودی تعبیه شده اند، و فرمان ندادن به ورودی مسیر قفل شده، می توان دو زیر سیستم SISO مستقل به وجود آورد. برای شروع طراحی کنترل کننده، ابتدا، معادلات دیفرانسیل غیرخطی فضای حالت حاکم بر هلیکوپتر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} f_{\psi}(x(t), u_1(t), t) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{I}(-\tau_g \sin(x_1) - B_{\phi} x_2 + a_1 x_3^2 + b_1 x_3) \\ x_4 \\ \frac{1}{T_1^2}(u_1 - x_3 - 2T_1 x_4) \end{bmatrix} \\ x(t) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \\ g_{\psi}(x(t), u_1(t), t) &= [x_1] \end{aligned} \quad (34)$$

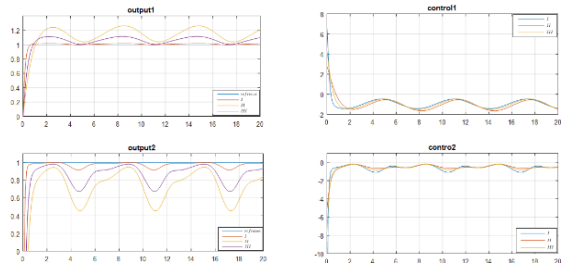
در مدل دینامیکی بیان شده، چهار متغیر حالت وجود دارد که حالت و رفتار سیستم را در هر لحظه بیان می نمایند و یک متغیر کنترل وجود دارد که نحوه رفتار سیستم را کنترل می کند. پارامترهای این مدل در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲: پارامترهای فضای حالت سیستم دینامیکی مثال (۳)

$a_1 = 0.1807$	$I = 0.0054$	$T_1 = 0.3$
$b_1 = 0.0028$	$B_{\phi} = 0.0011$	$\tau_g = 0.0755$

از آنجایی که تابعی هزینه بر اساس متغیرهای حالت نوشته می شود، برای بدست آوردن نقطه ی تعادل  $x_d$  با فرض خروجی مرجع  $y_d$ ، حالتی که

با توجه به نتایج شکل (۴)، دیده می شود که با تنظیم ماتریس های وزنی می توان خطای ماندگار و نوسانات پاسخ سیستم را کاهش داد. در این مثال، بهترین پاسخ در انتخاب های ماتریس های وزنی فوق، انتخاب ( $I$ ) است که خروجی اول تقریباً بدون نوسان سیگنال مرجع را دنبال می کند.



شکل (۴) پاسخ سیستم کنترل پیش بین پیوسته مثال ۲ با انتخاب های ماتریس

وزنی  $I$ ،  $II$  و  $III$

### ۳-۶ کنترل پیش بین زمان پیوسته غیرخطی (مثال کاربردی هلیکوپتر مدل CE150) [۲۵]

در این بخش عملکرد روش پیشنهادی برای طراحی کنترل کننده پیش بین برای هلیکوپتر آزمایشگاهی مدل CE150 بررسی می شود. در هلیکوپتر، زاویه ی صفحات چرخش اصلی و جانبی ثابت هستند و تنها کارکرد پره ها، حفظ تعادل زاویه ای در دو صفحه ی عمودی و افقی با مشخصه های زاویه ای  $\psi$  و  $\phi$  می باشد. تنها ورودی های کنترلی هلیکوپتر تعداد دور چرخش پره های آن است. که به ترتیب با  $u_1$  و  $u_2$  نشان داده می شوند. گشتاور تولید شده توسط پره ی اصلی عمدتاً در صفحه ی عمودی Elevation ( $\psi$ ) تاثیر می گذارد و گشتاور تولید شده توسط پره ی جانبی در صفحه ی افقی Azimuth ( $\phi$ ) تاثیر دارد. با بررسی شرایط کنترل پذیری و رویت پذیری دو زیر سیستم SISO افقی و عمودی مطمئن می شویم که هر دو قابل کنترل هستند.

(۳۸)

نتایج شبیه سازی، برای حفظ موقعیت هلی کوپتر در زاویه  $70^\circ$   $1.2217(rad)$ ، با پارامترهای داده شده در جدول ۳، در شکل (۵) نشان داده شده است. طبق روش پیشنهادی، جواب های تقریبی توابع حالت و تابع کنترل مساله با در نظر گرفتن پارامترهای جدول ۳ مربوط به شکل (۵) عبارت هستند از:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \begin{cases} 1.0472 + 0.3153t^2 & [0,0.05] \\ 1.0472 + 0.0017t + 0.2966t^2 & [0.05,0.1] \\ \vdots & \end{cases} \\ x_2(t) &= \begin{cases} 0.6306t - 0.0642t^2 & [0,0.05] \\ 0.0003 + 0.6481t - 0.5495t^2 & [0.05,0.1] \\ \vdots & \end{cases} \\ x_3(t) &= \begin{cases} 0.6093 - 0.2476t^2 & [0,0.5] \\ 0.6095 - 0.0138t - 0.0462t^2 & [0.05,0.1] \\ \vdots & \end{cases} \\ x_4(t) &= \begin{cases} -0.4952 + 2.5437t^2 & [0,0.05] \\ -0.0080 - 0.3240t + 2.3161t^2 & [0.05,0.1] \\ \vdots & \end{cases} \\ u(t) &= \begin{cases} 3.6041 - 97.4538t + 614.1250t^2 & [0,0.05] \\ 9.8578 - 155.3022t + 597.2224t^2 & [0.05,0.1] \\ \vdots & \end{cases} \end{aligned}$$

همانطور که در شکل (۵) دیده می شود، با شروع از نقطه  $[1.0472, 0, 0.6093, 0]$  و اعمال تابع کنترل بدست آمده بر هلی کوپتر، سیستم، مسیر مرجع را با خطای حالت ماندگار دنبال می کند. برای حذف خطای حالت ماندگار، انتگرال گیر به مساله اضافه می کنیم. با این کار تعداد حالت های سیستم ۲ تا اضافه می شود. نتایج شبیه سازی مسئله کنترل پیش بین پیوسته برای این سیستم جدید و تنظیم مجدد پارامترهای ماتریس های وزنی، در شکل (۶) آورده شده است. در این بخش، هدف، بررسی طراحی کنترل کننده به روش پیشنهادی برای یک سیستم ناپایدار و امکان پایداری آن است. از آنجایی که هلی کوپتر در زاویه  $70^\circ$  درجه پایدار است، اما از زاویه حدود  $85^\circ$  درجه به بالا ناپایدار می باشد [۲۵]، لذا طراحی کنترل کننده پیش بین برای زاویه  $90^\circ$  درجه (۱۵۷۰۸/۱۰۰) بررسی می شود. نتایج شبیه سازی، با در نظر گرفتن پارامترهای جدول ۳ شکل (۷)، در شکل (۷) مشاهده می شود.

جدول ۳: پارامترهای مثال ۳، برای زاویه  $70^\circ$  درجه بدون انتگرال گیر شکل (۵)، با انتگرال گیر شکل (۶) و زاویه  $90^\circ$  درجه شکل (۷)

پارامترها	شکل (۵)	شکل (۶)	شکل (۷)
HP	2	2	2
s	3	3	3
$\delta$	0.05	0.1	0.1
R	1	1	0.25
$H_1 = H_3$	8	8	0.25, 1, 10, 20
$Q_1 = Q_3$	80	80	10

هلی کوپتر مستقیماً رو به جلو و با زاویه ی  $\mathbf{r}$  قرار داشته باشد، معادلات زیر بایستی حل شود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) = 0 \\ y_d = r \end{cases} \quad (35)$$

با حل معادلات فوق نقطه تعادل بدست می آید:

$$\text{if } y_d = 70^\circ = 0.9397(\text{radian}) \text{ then } \hat{x} = [0.9397, 0, 0.6189, 0]^T \text{ and } \hat{u} = [0.6189]$$

$$\text{if } y_d = 90^\circ = 1.5708(\text{radian}) \text{ then } \hat{x} = [1.5708, 0, 0.6387, 0]^T \text{ and } \hat{u} = [0.6387]$$

هدف حفظ هلی کوپتر در نقطه تعادل است، لذا برای طراحی کنترل کننده، تابعی هزینه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \min J = & [x_1(t_f) - x_{1ref}(t_f)]^T H_1 [x_1(t_f) - x_{1ref}(t_f)] + [x_3(t_f) - x_{3ref}(t_f)]^T H_3 [x_3(t_f) - x_{3ref}(t_f)] \\ & + \int_{t_0}^{t_f} [x_1(t) - x_{1ref}(t)]^T Q_1 [x_1(t) - x_{1ref}(t)] + [x_3(t) - x_{3ref}(t)]^T Q_3 [x_3(t) - x_{3ref}(t)] + u^T R u dt \end{aligned} \quad (36)$$

طبق الگوریتم ۲، با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی زیر با روش اختلال هموتوبی در هر زیر بازه بروزرسانی، تابع حالت و تابع کنترل بهینه بدست می آیند:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{I} (-\tau_g \sin(x_1) - B_0 x_2 + a_1 x_3^2 + b_1 x_3) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{T_1^2} \left( -x_3 - 2T_1 x_4 - \frac{1}{T_1^2 2R} \lambda_4 \right) \\ \dot{\lambda}_1 = -2Q_1 (x_1 - x_{1d}) + \frac{\tau_g}{I} \lambda_2 \cos(x_1) \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + \frac{B_0}{I} \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_3 = -2Q_3 (x_3 - x_{3d}) - \frac{2a_1}{I} \lambda_2 x_3 - \frac{b_1}{I} \lambda_2 + \frac{1}{T_1^2} \lambda_4 \\ \dot{\lambda}_4 = -\lambda_3 + \frac{2T_1}{T_1^2} \lambda_4 \\ u = \frac{-1}{T_1^2 2R} \lambda_4 \end{cases} \quad (37)$$

با شرایط مرزی

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \\ x_3(t_0) = x_{30} \\ x_4(t_0) = x_{40} \end{cases}$$

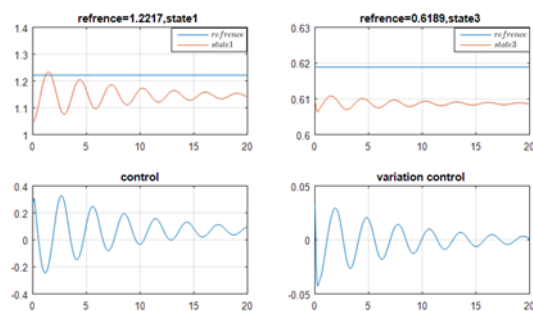
و

$$\begin{cases} 2H_1 (x_1(t_f) - x_{1ref}) - \lambda_1(t_f) = 0 \\ \lambda_2(t_f) = 0 \\ 2H_3 (x_3(t_f) - x_{3ref}) - \lambda_3(t_f) = 0 \\ \lambda_4(t_f) = 0 \end{cases}$$

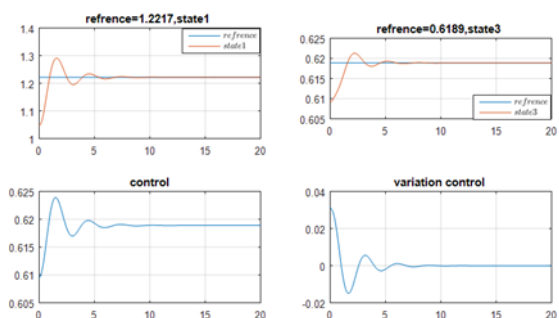
زمان پیوسته است و نشان داده می شود که طراحی کنترل کننده پیش بین سیستم های غیرخطی زمان پیوسته، با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری (DAEs) با شرایط مرزی معادل است. با حل متوالی دستگاه مذکور، به روش نیمه تحلیلی اختلال هموتوبی، تابع کنترل و تابع حالت بدست می آید. بر خلاف روش هایی که تابع کنترل را در بازه های پرورسانی ثابت فرض می کنند، در این روش، تابع کنترل و تابع حالت بهینه برای تمامی زمان ها مشخص می شوند. همانطور که در مثال ها نیز دیده می شود این روش قابلیت حل مساله زمان پیوسته خطی، غیر خطی، نامتغیر با زمان و متغیر با زمان را دارد. حل مساله به روش پیشنهادی زمان محاسباتی بالایی دارد و در حال حاضر تنها برای سیستم های کند مانند فرایندهای شیمیایی که زمان نمونه برداری بالایی دارند مناسب است. بحث کاهش زمان محاسباتی در روش پیشنهادی کنترل پیش بین زمان پیوسته، موضوع تحقیقاتی آتی نویسندگان می باشد. همچنین، بحث مقاوم بودن روش پیشنهادی از اهمیت بسزایی برخوردار است و در مثال اول، مقاوم بودن روش به صورت عددی بررسی و نشان داده شد. با این وجود بدیهی است بررسی تحلیلی این مسئله نیاز به تحقیقات بیشتری دارد.

## مراجع

- [1] Kirches C., Wirsching L., Bock J.P, 2012, "Efficient direct multiple shooting for nonlinear model predictive control on long horizon", Schloder Journal of Process Control 22, pp. 540– 550.
- [2] Magni L., Scattolini R., 2004, "Model predictive control of continuous time nonlinear systems with piecewise constant control", IEEE transactions on automatic control, vol. 49, NO. 6, pp. 900 – 906.
- [3] Magni L., Scattolini R., 2007, "Tracking of non-square nonlinear continuous time systems with piecewise constant model predictive control", Journal of Process Control 17, pp. 631–640.
- [4] Wang L., 2001, "continuous time model predictive control design using orthonormal functions", INT.J.control, vol. 74, NO. 16, pp. 1588-1600.
- [5] Cizniar M., Fikar M., Latifi M.A., 2008, "Design of constrained nonlinear model predictive control based on global optimization", 18<sup>th</sup> European Symposium on Computer Aided Process Engineering – ESCAPE 18 Bertrand Braunschweig and Xavier Joulia (Editors).
- [6] Findeisen R., Raff T., Allgower F., 2007, "Sampled-Data Model Predictive Control for Constrained Continuous Time Systems," Advanced Strategies in Control Systems with Input and Output Constraints, pp.207-235.
- [7] Li S.E., Xu S.H., Ku D., 2016, "Efficient and accurate computation model predictive control using

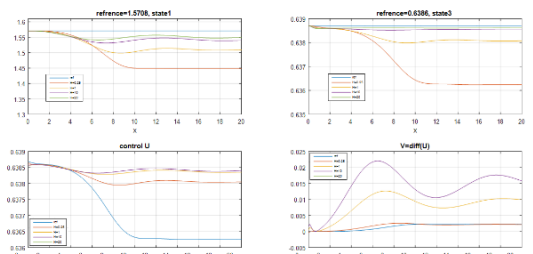


شکل ۵) پاسخ کنترل پیش بین زمان پیوسته هلیکوپتر برای زاویه ۷۰ درجه



شکل ۶) پاسخ کنترل پیش بین زمان پیوسته هلیکوپتر برای زاویه ۷۰ درجه با

اضافه کردن انگرال گیر و تنظیم پارامترها



شکل ۷) پاسخ کنترل پیش بین زمان پیوسته برای حفظ زاویه ۹۰ درجه

(۱/۵۷۰۸ رادیان) مثال ۳، برای مقادیر مختلف ماتریس وزنی H

همانطور که دیده می شود با طراحی کنترل کننده توانسته ایم وضعیت هلی-کوپتر را در زاویه ۹۰ درجه حفظ کنیم. هدف از نتایج ارائه شده در شکل (۷)، نشان دادن رابطه خطای ماندگار با ماتریس وزنی است و دیده می شود که با تنظیم ماتریس های وزنی می توان خطای ماندگار را تنظیم نمود. نتایج برای ماتریس های وزنی متفاوت  $H = 0.25, 1, 10, 20$  آورده شده است.

## ۵- نتیجه گیری

از آنجایی که در کارهای انجام شده در زمینه طراحی کنترل کننده پیش بین زمان پیوسته، مساله را نهایتاً به شکل یک سیستم زمان گسسته تبدیل نموده و به صورت زمان گسسته حل نموده اند. از طرفی همانطور که می دانیم موضوع کنترل مقاوم در فضای زمان پیوسته از غنای خوبی برخوردار است. لذا این ها از انگیزه های این مقاله در پیشنهاد کنترل پیش بین

- homotopy perturbation method and their engineering applications", International Journal of Computer Mathematics, Vol. 87, No. 9, pp.1950-1974.
- [18] Roozi A., Alibeiki E., Hosseini S.S., Ebrahimi M., 2011, "Homotopy perturbation method for special nonlinear partial differential equations", Journal of King Saud University - Science, vol 23, issue 1, pp. 99-103.
- [19] Ayati Z., Biazar J., 2015, "On the convergence of Homotopy perturbation Method", Journal of the Egyptian Mathematical Society, vol.23 (2), pp. 424-428.
- [20] Chen H., Allgower F., 1998, "A Quasi-Infinite Horizon Nonlinear Model Predictive Control Scheme with Guaranteed Stability", Automatica, Vol. 34, No. 10, pp. 1205-1217.
- [21] Chen H., Allgower F., 1997, "A quasi infinite horizon nonlinear predictive control scheme for stable", IFAC Proceedings Volumes, Vol. 30, No. 9, pp. 529-534.
- [22] Jadbabaie A., Hauser J., 2005, "On the stability of receding horizon control with a general terminal cost", IEEE Transactions on Automatic control, Volume 50, issue 5, pp. 674 - 678.
- [23] Camacho E.F., Bordons C., Model Predictive Control, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer, Cham, 2004.
- [24] Fu H.S, Han B., 2006, A homotopy method for nonlinear inverse problems, Applied Mathematics and Computation, vol.183, pp. 1270-1279.
- [۲۵] طاهرسیما، حنیف. "طراحی کنترل کننده هوشمند برای هلیکوپتر آزمایشگاهی"، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، پایان نامه کارشناسی ارشد، ۱۳۸۵.
- [۲۶] قربانی، اصغر. "روش اختلال هموتوبی هی و کاربرد آن"، دانشگاه فردوسی مشهد، پایان نامه کارشناسی ارشد، ۱۳۸۶.
- pseudospectral discretization", Neurocomputing, 177, pp. 363-372.
- [8] Chen W.H., 2004, "Predictive Control of General Nonlinear Systems Using Approximation", IEE proceedings: control theory and applications, 151 (2), pp. 137-144.
- [9] Wang, Y., Boyd, S., (2008), "Fast model predictive control using online optimization", The International Federation of Automatic Control, Vol. 41, pp. 6974-6979.
- [10] Pannocchia, G., Rawlings, J. B., Mayne, D. Q., Marquardt, M., (2010), "On computing solutions to the continuous time constrained linear quadratic regulator", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 55, pp. 2192-2198.
- [11] Daehlen, J. S., Otto Eikrem, G., (2014), "Nonlinear model predictive control using trust region derivative free optimization", Journal of Process Control, Vol. 24, pp. 1106-1120.
- [12] D.E. Kirk, "Optimal control theory: an introduction", Dover Books on Electrical Engineering Series, 2004.
- [13] T.J. Böhme, B. Frank, "Direct Methods for Optimal Control", In: Hybrid Systems, Optimal Control and Hybrid Vehicles. Advances in Industrial Control. Springer, Cham, 2017.
- [14] Mangasarian O.L., 1996, "sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems", J. SIAM control, Vol. 4, No. 1.
- [15] He J. H., 1999 "Homotopy perturbation technique", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 178 (3), pp. 257-262.
- [16] Aslam Noor M., 2010, "Some iterative methods for solving nonlinear equations using homotopy perturbation method", international journal of computer mathematics, Vol. 87, No. 1, pp. 141-149.
- [17] Soltanian F., Dehghan M., Karbassi S.M., 2010, "Solution of the differential algebraic equations via