

# طراحی الگوریتمی برای افزایش همگرایی فیلتر کالمن توسعه یافته مبنی بر مدل پیش بین تفاضلی در ترازایی سامانه ناوبری اینرسی و تحلیل پایداری آن

نعمت‌الله قهرمانی<sup>۱</sup>، حسن ماجد الحسن<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، ghahremani@mut.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، hassan.majed.alhassan@gmail.com

پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۴

دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۴

**چکیده:** در این مقاله نوعی فیلتر پیش‌بین با رویکرد جدید برای ترازایی سامانه ناوبری اینرسی با مدل غیرخطی ارائه و پایداری آن تحلیل شده است. پایداری فیلتر جدید بر اساس روش لیاپانوف مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. تابع لیاپانوف را به صورت تابع هزینه درجه دوم انتخاب می‌شود. این روش شرایط کافی را برای پایداری حالت تعادل در برابر عدم قطعیت و نویزهای اندازه‌گیری ارائه می‌دهد. از روش پیشنهادی برای بهبود دقت ترازایی اولیه یک سامانه ناوبری اینرسی با عدم قطعیت و خطای سمت با مقدار بزرگ استفاده شده است. مدل اندازه‌گیری این سامانه غیرخطی بوده و دارای خطای مدل‌سازی است. در این روش خطای مدل تخمین زده شده و سپس در الگوریتم فیلتر این خطا جبران می‌شود؛ به همین خاطر خطای حالت‌های تخمین نیز در مرحله بهنگام سازی اطلاعات فیلتر کاهش می‌یابد. با انجام شبیه‌سازی‌های گوناگون این روش بر روی داده‌های واقعی حسگر میکرو الکترومکانیکی MEMS و با مقایسه آن با فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن بدون بو، مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی دقت و سرعت همگرایی بالاتری نسبت به فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن بدون بو دارد. اثبات می‌شود الگوریتم جدید دارای پایداری مجانبی است.

**کلمات کلیدی:** فیلتر کالمن توسعه یافته، مدل پیش‌بین، خطای مدل، ترازایی سامانه ناوبری اینرسی. تحلیل پایداری.

## Design of a new algorithm to improve the convergence of extended Kalman filter based on incremental predictive model for inertial navigation system alignment and its stability analysis

Nemat Allah Ghahremani, Hassan Majed Alhassan

**Abstract:** In this paper, a new predictive filter for alignment of the inertial navigation system with a nonlinear model is presented, and its stability is analyzed. The stability is analyzed according to the Lyapunov method. The Lyapunov function is selected as a quadratic cost function. This method provides sufficient conditions for the stability of the estimated state against measurement uncertainty and noise. The proposed method is used to improve the initial alignment accuracy of the inertial navigation system with a large misalignment azimuth angle. The measurement model of this system is nonlinear and has a modeling error. In this method, the model error is estimated and compensated in the filter algorithm; therefore, the error of the state estimation is reduced in the updating step. By performing various simulations of this method on the real data of microelectromechanical (MEMS) sensor and comparing it with EKF and UKF, it is observed that the proposed method has higher accuracy and convergence speed than EKF and UKF. The new filter proves to have asymptotic stability.

**Keywords:** Stability analyses, predictive filter, model error, nonlinear alignment, inertial navigation system.

## ۱- مقدمه

این به شرط آن است که تمام حالت‌های سیستم کاملاً مشاهده پذیر باشند. در مرجع [۱۳]، شرایط پایداری کلاس بزرگی از خانواده فیلتر کالمن که حتی دارای حالت مشاهده ناپذیر با مدل غیرخطی می‌باشند، ارائه شده است. در این مقاله تجزیه و تحلیل پایداری با استفاده از مفهوم محدود بودن متوسط مربعات خطای فیلتر و ماتریس کوواریانس خطا صورت گرفته است.

از طرف دیگر، حتی اگر نویز به صورت گوسی باشد، به دلیل تأثیر دینامیک غیرخطی، حالت‌ها یا اندازه گیری‌ها غیر گوسی خواهند بود. فیلتر EKF نمی‌تواند با نویز غیر گوسی سازگار شود [۱۴]؛ بنابراین، مسئله تخمین در حضور نویز غیر گوسی مسئله مهمی است. تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه صورت گرفته است. مثلاً در مرجع [۱۵]، برای افزایش دقت تخمین در حضور نویز غیر گوسی در روش EKF، طراحی یک جبران کننده با عوامل غیرخطی در قالب چندجمله‌ای‌ها با پارامترهای قابل تنظیم پیشنهاد شده است که این طراحی منجر به پایداری مجانبی فیلتر می‌شود. در این مقاله، یک الگوریتم پیش بین تفاضلی<sup>۷</sup> (IPA) برای کمینه نمودن خطای مدل سازی و خطای ماتریس کوواریانس نویز فرایند و نویز اندازه گیری ارائه شده است. این فیلتر از ایده کنترل پیش بین تفاضلی تعمیم یافته<sup>۱۱</sup> (GIPC) گرفته شده است [۱۶، ۱۷]. در روش ارائه شده معادلات فضای حالت به فرم تفاضلی نوشته شده و تخمین حالت‌ها برحسب حالت‌های فعلی و گذشته بیان شده است. مهم ترین مزیت این روش آن است که در معادلات تخمین، خطای مدل پس از محاسبه جبران و تصحیح می‌شود. با ترکیب روش های EKF و IPA الگوریتم جدیدی به نام فیلتر کالمن توسعه یافته پیش بین تفاضلی<sup>۱۱</sup> (IPEKF) ارائه شده است. برای نشان دان کارایی فیلتر جدید، از این فیلتر برای انجام فرآیند ترازبایی یک سامانه ناوبری اینرسی با مدل غیرخطی استفاده شده است. روش جدید توانسته دقت و زمان همگرایی را بهبود ببخشد. همچنین در بخش چهارم پایداری فیلتر پیشنهادی با استفاده از تئوری لیاپانوف بررسی و تجزیه و تحلیل شده است.

مقاله به صورت زیر سازمان دهی شده است: در بخش دوم، فرمول بندی مسئله بیان می‌شود. در بخش سوم، معادلات فیلتر پیشنهادی استخراج شده و برخی نکات لازم برای بهینه سازی تابع هزینه بیان می‌شود. در بخش چهارم، تجزیه و تحلیل پایداری الگوریتم جدید با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف صورت می‌گیرد. در بخش پنجم، تحلیل نتایج آزمون الگوریتم پیشنهادی بیان می‌شود و در بخش ششم، نتایج مقاله ارائه می‌گردد. در ضمیمه (الف) و (ب) روابط ریاضی مدل ترازبایی غیرخطی و الگوریتم فیلتر کالمن بدون بو بیان می‌شود.

فیلتر کالمن توسعه یافته<sup>۱</sup> (EKF) معروف ترین روش برای تخمین حالت‌های سامانه‌های غیرخطی از جمله سامانه ناوبری اینرسی است. این فیلتر در تلفیق داده‌های سامانه ناوبری اینرسی<sup>۲</sup> و سامانه موقعیت یاب جهانی<sup>۳</sup> [۱، ۲]، تخمین زوایای ترازبایی اولیه<sup>۴</sup> [۳]، بهبود دقت سامانه‌های تعیین زوایای<sup>۵</sup> [۴] و تخمین حالت اینرسی [۵] دارای کاربرد است. به دلیل انتگرال گیری از معادلات ناوبری اینرسی و وجود خطا در خروجی حسگرهای اینرسی خصوصاً از نوع ارزان قیمت میکروالکترومکانیکی MEMS که دارای دقت کم می‌باشند، با گذشت زمان خطا افزایش خواهد یافت.

با توجه به مشاهده ناپذیر بودن تعدادی از حالت‌های سیستم، زمان همگرایی فیلتر کالمن توسعه یافته بسیار طولانی خواهد بود، در حالی که در ترازبایی ناوبری اینرسی زمان همگرایی باید بسیار کوتاه باشد. به علت این که فیلتر کالمن توسعه یافته در خطی سازی معادلات غیرخطی از تقریب مرتبه اول سری تیلور حول آخرین مسیر تخمین استفاده می‌کند، بنابراین اگر مسیر تخمین نزدیک به مسیر نامی معادلات باشد، همگرایی محلی این روش تضمین می‌شود [۵]. در غیر این صورت خطی سازی می‌تواند منجر به عملکرد ضعیف فیلتر شده و به علت وجود خطای مدل و خطای مشخصات آماری نویز اندازه گیری و سیستم، دقت تخمین کاهش یافته و حتی فیلتر واگرا شود [۶].

برای اطمینان از همگرایی EKF، پژوهش‌های فراوانی انجام شده است. مثلاً در مرجع [۷] برای جلوگیری از واگرایی روش EKF وقتی که اطلاعات دقیقی از خطاهای مدل سازی در دسترس نیست، الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته تطبیقی<sup>۶</sup> پیشنهاد شده است. این روش ماتریس های نویز Q و R را به گونه‌ای تنظیم می‌کند که بتواند تغییرات ایجاد شده در سیستم را دنبال کند. در مقاله [۸] تجزیه و تحلیل پایداری فیلتر محو کننده تطبیقی<sup>۷</sup> با استفاده از یک ضریب فراموشی برای بهبود عملکرد فیلتر کالمن صورت گرفته است. همچنین، در مقاله [۹]، تجزیه و تحلیل همگرایی فیلتر کالمن بدون بو<sup>۸</sup> (UKF) اصلاح شده ارائه شده است. این فیلتر از روش خطی سازی آماری استفاده می‌کند که نسبت به خطی سازی روش تیلور از دقت بالاتری برخوردار است. در این مرجع نشان داده می‌شود که برعکس آن که فیلتر EKF به طور نمایی پایدار است، اما UKF یک رویگر همگرا نیست. برخی فن‌ها وجود دارد که نشان می‌دهد در صورتی که خطای تخمین اولیه و اغتشاشات به اندازه کافی کوچک باشند، فیلتر EKF به صورت محلی دارای همگرایی مجانبی خواهد بود [۱۱]. همچنین، مرجع [۱۲] با استفاده از روش لیاپانوف ثابت می‌کند که EKF دارای یک همگرایی نمایی است.

<sup>7</sup> Adaptive Fading Kalman Filter (AFKF)

<sup>8</sup> Unscented Kalman Filter (UKF)

<sup>9</sup> Incremental Predictive Algorithm (IPA)

<sup>10</sup> Generalized Incremental Predictive Control (GIPC)

<sup>11</sup> Incremental Predictive Extended Kalman Filter (IPEKF)

<sup>1</sup> Extended Kalman Filter (EKF)

<sup>2</sup> Inertial Navigation System (INS)

<sup>3</sup> Global Positioning System (GPS)

<sup>4</sup> Initial Alignment

<sup>5</sup> Attitude Determination

<sup>6</sup> Adaptive Extended Kalman Filter (AEKF)

## ۲- مدل سازی ریاضی مسأله

گرچه روش EKF به صورت محلی پایدار است، اما در برخی شرایط هنگامی که تخمین حالت از مقدار نامی دور باشد، هیچ تضمینی برای همگرایی وجود ندارد. در فرایند ترازایی INS، هنگامی که خطای تراز کوچک است مدل سیستم تقریباً خطی است. اگر خطای تراز بزرگ بوده و اطلاعات پیشین مربوط به ماتریس های خطای حالت و خطای اندازه گیری به طور دقیق مشخص نشده باشند آنگاه خطای خطی سازی می تواند باعث واگرایی الگوریتم EKF شود.

ترازایی سامانه ناوبری با روش EKF دارای پنج حالت است. از طرفی به دلیل اضافه شدن مدل ژيروسکوپ و شتاب سنج در معادلات، تعداد حالت ها به ۱۰ افزایش می یابد که سه تای آن ها مشاهده ناپذیرند. البته افزایش تعداد حالت ها باعث کاهش میزان مشاهده پذیری فیلتر و افزایش بار محاسباتی می شود. به همین علت نامعینی های ماتریس کوواریانس اندازه گیری، ممکن است باعث واگرایی فیلتر شود؛ بنابراین، فیلتر ناوبری به گونه ای باید طراحی شود که خطاهای مدل به درستی جبران شود تا فیلتر در برابر خطاهای مدل سازی مقاوم باشد. در این مقاله، فیلتر پیشنهادی برای حل مشکلات مهم فوق با پیش بینی و جبران خطاهای مدل توسعه یافته است. فیلتر پیشنهادی شامل فقط پنج حالت خطای ناوبری است و خطای مدل ژيروسکوپ و شتاب سنج با استفاده از الگوریتم پیش بین، تخمین زده می شود. در ترازایی مدل غیر خطی و زمان گسسته زیر در نظر گرفته شده است (توضیحات بیشتر مدل در ضمیمه الف آمده است):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \end{cases} \quad (1)$$

که در آن،  $\mathbf{x}_k$ ،  $\mathbf{m}_k$  و  $\mathbf{y}_{k+1}$  به ترتیب بردار حالت های سامانه، بردار ورودی سیستم (خطای مدل) و بردار اندازه گیری در لحظه  $k$  می باشند، تابع غیر خطی مدل سامانه  $\mathbf{H}_{k+1}$  مدل خطی اندازه گیری سامانه است،  $\mathbf{w}_k$  و  $\mathbf{v}_{k+1}$  به ترتیب بیانگر نویز سامانه و نویز اندازه گیری هستند. فرض می شود این نویزها سفید گوسی با میانگین صفر بوده و ماتریس کوواریانس آن ها یعنی  $\mathbf{Q}$  و  $\mathbf{R}$  مستقل از هم هستند. الگوریتم های مختلفی برای تخمین حالت مدل غیر خطی وجود دارد که هر کدام دارای ملزومات خاص خود هستند. در این مقاله، یک روش نوین برای افزایش مقاومت تخمینگر خطاهای نویز و مدل سامانه ناوبری و جبران آن ها با استفاده از مفهوم الگوریتم پیش بین مدل با بهره گیری از بهینه سازی افق محدود، ارائه شده و در فیلتر کالمن توسعه یافته بکار رفته است. در این روش تابع هزینه ای به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} J_{k+1}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1,p}, \Delta \hat{\mathbf{m}}_{k,p-1}) = \\ \min_{\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+1}} \left[ \sum_{i=1}^p (\hat{\mathbf{y}}_{k+i})^T \mathbf{R}_y (\hat{\mathbf{y}}_{k+i}) + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}) \right] \quad (2) \end{aligned}$$

subject to:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}_k) + \mathbf{w}_k; \quad \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}; \quad \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_{k-1} + \Delta \mathbf{m}_k$$

که در آن  $\hat{\mathbf{y}}_{k+i}$  خطای اندازه گیری،  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}$  تغییرات خطای مدل ناوبری،  $i = 1, 2, \dots, p$  افق آینده و  $p$  افق پیش بین می باشند. با بهینه سازی این تابع هزینه هم خطای اندازه گیری با خطای تخمین کاهش می یابد و هم خطای مدل در سامانه ناوبری کم می شود. به این ترتیب دقت ترازایی سامانه ای ناوبری در برابر نامعینی های مدل و نویز اندازه گیری و فرایند افزایش می یابد. در ادامه خواهیم دید که چگونه با بهینه سازی تابع فوق روش IPEKF استخراج می شود.

## ۳- فرمول بندی IPEKF

معمولاً، در مدل سازی، خطای با میانگین غیر صفر را می توان با افزودن حالت هایی به حالت های مدل تخمین زد. افزایش تعداد حالت ها باعث کاهش میزان مشاهده پذیری فیلتر و افزایش بار محاسباتی آن می شود. در یک سامانه ناوبری به دلیل آن که ماتریس اندازه گیری متأثر از نامعینی ها می باشد، ممکن است واگرایی فیلتر رخ دهد. فیلتر پیشنهادی بدون افزایش حالت های اضافی، خطای مدل سامانه غیر خطی ناوبری را با تخمین می زند. در ادامه روابط ریاضی الگوریتم فیلتر پیشنهادی ارائه می شود.

### ۳-۱- الگوریتم پیش بین تفاضلی IPA در تخمین خطای مدل

فرم تفاضلی فضای حالت به صورت زیر می باشد:

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \Delta \mathbf{F}_k \Delta \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}_k \Delta \hat{\mathbf{m}}_k \quad (3)$$

که در آن  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k$ ،  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ ،  $\Delta \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_{k-1}$  و  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k = \hat{\mathbf{m}}_k - \hat{\mathbf{m}}_{k-1}$  می باشند. با نوشتن این فرم می توانیم تغییرات خطای مدل  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k$  را به دست آوریم. در واقع وقتی به معادلات فوق  $\Delta$  اضافه می کنیم، به معنی اضافه کردن انتگرال گیر به سیستم است. با این کار خطای مانای تخمین از بین می رود. با ترکیب معادلات فوق، معادله ای زیر به دست می آید:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{F}_k) \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_k \Delta \hat{\mathbf{m}}_k \quad (4)$$

که در آن  $\mathbf{I}$  ماتریس واحد،  $\mathbf{F}_k$  ماتریس زا کوبی تابع  $f(\cdot)$  می باشند. حالت  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  از روی حالت های  $\hat{\mathbf{x}}_k$  و  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  به دست می آیند. برای محاسبه حالت در افق آینده بر اساس معادله حالت تفاضلی (۴)، رابطه کلی زیر نوشته شده است:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+p} = & \left( \sum_{i=0}^p \mathbf{F}_k^i \right) \hat{\mathbf{x}}_k - \left( \sum_{i=1}^p \mathbf{F}_{k-1}^i \right) \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ & + \sum_{n=1}^p \left( \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}_k^i \right) \mathbf{G}_k \Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+p-n} \end{aligned} \quad (5)$$

برای سهولت محاسبات، این دسته معادلات در قالب ماتریسی به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\mathbf{X}_{k+1,p} = \mathbf{F}_x \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{x-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_m \Delta \hat{\mathbf{m}}_{k,p-1} \quad (6)$$

پارامترهای قابل تنظیم در این الگوریتم عبارت است از افق پیش‌بینی  $P$  و ماتریس‌های وزنی  $\mathbf{R}_y$  و  $\mathbf{Q}_m$  که مربوط به تابع هزینه می‌باشند. با تنظیم این پارامترها می‌توان پایداری و عملکرد مطلوب را برای سیستم تضمین کرد.

### ۳-۳ الگوریتم IPEKF برای سامانه غیر خطی

فیلتر کالمن توسعه یافته برای محاسبه حالت‌های سیستم تصادفی غیر خطی با نویز فرایند و اندازه‌گیری گوسی مستقل است. به منظور بهبود عملکرد EKF، الگوریتم پیش‌بین تفاضلی طراحی شده برای تخمین خطای مدل‌سازی ناشی از بایاس شتاب سنج‌ها و ژيروسکوپ‌ها مناسب است. برعکس فیلتر کالمن توسعه یافته، این خطای مدل‌سازی در فیلتر IPEKF به صورت متغیرهای مدل حالت نیستند. در مسئله ترازبایی سامانه ناوبری، تعداد حالت‌هایی که در فیلتر پیشنهادی باید تخمین زده شوند از ۱۰ حالت (فیلتر کالمن توسعه یافته) به پنج حالت کاهش می‌یابد؛ بنابراین، در فیلتر IPEKF درجه رؤیت پذیری فیلتر افزایش و بار محاسباتی کاهش می‌یابد. مزیت دیگر این الگوریتم نسبت به الگوریتم‌های معمول، آن است که لزوماً نویز در این روش نباید سفید باشد و می‌تواند رنگی هم باشد. همچنین روش پیشنهادی حساسیت کمتری به نویز اندازه‌گیری و فرایند دارد. ساختار الگوریتم IPEKF از اجزای زیر تشکیل می‌شود:

#### ۱- تخمین خطای مدل

برای تخمین خطای مدل از الگوریتم پیش‌بین تفاضلی IPA استفاده می‌شود. تغییرات خطای مدل از رابطه‌ی (۱۲) و خطای مدل از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_{k-1} + \Delta \mathbf{m}_k^* \quad (13)$$

برای کاهش خطای تخمین حالت، خطای مدل  $\mathbf{m}_k$  (بایاس حسگرها) در هر گام محاسبه و جبران می‌شود.

#### ۲- تخمین حالت‌های سیستم

- به روزرسانی زمانی

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = f(\hat{\mathbf{x}}_k) + \Delta \mathbf{m}_k^* \\ \mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \end{cases} \quad (14)$$

- به روزرسانی اندازه‌گیری

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T [\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}] \\ \mathbf{P}_{k+1} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] \mathbf{P}_{k+1/k} \end{cases} \quad (15)$$

در این روابط، بردار حالت، بردار خطای مدل،  $\mathbf{y}_{k+1}$  مدل اندازه‌گیری،  $\mathbf{H}_{k+1}$  ماتریس اندازه‌گیری،  $f(\hat{\mathbf{x}}_k)$  مدل ترازبایی غیر خطی و  $\mathbf{F}_k$  ژاکوبی آن است که در ضمیمه‌ی الف بیان شده‌اند. همچنین ماتریس کوواریانس خطای تخمین و  $\mathbf{K}$  بهره تخمین فیلتر کالمن می‌باشند.

که در آن  $\mathbf{x}_{k+1,p}$  بردار تخمین حالت‌ها،  $P$  افق پیش‌بینی و  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k,p-1}$  خطای مدل است که باید بهینه شود. ماتریس‌های معادله هم به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\mathbf{X}_{k+1,p} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+2} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+3} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+p} \end{bmatrix}, \quad \Delta \hat{\mathbf{m}}_{k,p-1} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{m}}_k \\ \Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+1} \\ \Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+2} \\ \vdots \\ \Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+p-1} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k + \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_k^2 + \mathbf{F}_k + \mathbf{I} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^p \mathbf{F}_k^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ (\mathbf{F}_k + \mathbf{I})\mathbf{G}_k & \mathbf{G}_k & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \left(\sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{F}_k^i\right)\mathbf{G}_k & \left(\sum_{i=0}^{p-2} \mathbf{F}_k^i\right)\mathbf{G}_k & \cdots & \mathbf{G}_k \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_{x-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k-1} \\ \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{I} + \mathbf{F}_k) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{F}_k^{i-1} \end{bmatrix}$$

بردار تخمین اندازه‌گیری‌ها در افق محدود پیش‌بین  $P$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{Y}_{k+1,p} = \mathbf{H}_{k+1,p} \mathbf{X}_{k+1,p} = \mathbf{F}_y \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{y-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{H}_y \Delta \hat{\mathbf{m}}_{k,p-1} \quad (9)$$

که در آن  $\mathbf{F}_y = \mathbf{H}_{k+1,p} \mathbf{F}_x$ ،  $\mathbf{F}_{y-1} = \mathbf{H}_{k+1,p} \mathbf{F}_{x-1}$ ،  $\mathbf{H}_y = \mathbf{H}_{k+1,p} \mathbf{G}_m$  و  $\mathbf{H}_{k+1,p} = \text{diag}(\mathbf{H}_{k+1})$  می‌باشند.

### ۳-۲ بهینه‌سازی خطای مدل بر اساس معادله تفاضلی

تابع هزینه تعریف شده در رابطه (۱) دارای متغیرهای  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k$  تا  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+p-1}$  است و با حل مسئله بهینه‌سازی مقادیر بهینه آن‌ها محاسبه می‌شود و فقط اولین عنصر محاسبه شده به فرآیند اعمال می‌شود. در زمان بعدی تمام محاسبات قبل دوباره تکرار می‌شود. با بهینه‌سازی این تابع هزینه بردار  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k,p-1}^* = -\mathbf{K}_k^{IPA} (\mathbf{F}_y \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{y-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (10)$$

که در آن:

$$\mathbf{K}_k^{IPA} = (\mathbf{H}_y^T \mathbf{R}_y \mathbf{H}_y + \mathbf{Q}_m)^{-1} \mathbf{H}_y^T \mathbf{R}_y \quad (11)$$

در هر گام بهینه‌سازی فقط اولین مقدار محاسبه شده به فرآیند اعمال می‌شود، یعنی:

$$\Delta \hat{\mathbf{m}}_k^* = -[\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]^T \mathbf{K}_k^{IPA} (\mathbf{F}_y \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_{y-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (12)$$

که در آن  $J_{\min} = V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$  و  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k^*$  تابعی از  $\hat{\mathbf{x}}_k$  است (معادله (۱۲)). حال با توجه به فرض دوم قضیه، جواب بهینه  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k^*$  تضمین می‌شود. در معادله (۱۸) مشاهده می‌شود که  $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$  مثبت معین بوده و می‌تواند یک تابع لیاپانوف مناسب باشد. در لحظه  $k+1$  با استفاده از رابطه (۱۸) تابع لیاپانوف به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) = \sum_{i=1}^p \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i} + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i}) \quad (19)$$

با بهینه‌سازی تابع هزینه (۱۷) جواب بهینه  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+1}^*$  به دست آمده و از معادله (۱۹) خواهیم داشت:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) = \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p} + \sum_{i=1}^{p-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i} + (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+p})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+p}) + \sum_{i=1}^{p-1} (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i}) \quad (20)$$

در این حالت با توجه به فرض محدودیت  $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$  داریم:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) \leq \sum_{i=1}^{p-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+i} + \sum_{i=1}^{p-1} (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i}) = V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) \quad (21)$$

به این ترتیب، نا تساوی (۲۱) به صورت زیر درمی‌آید.

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) \leq V'(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) \quad (22)$$

تابع  $V'(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1)$  شامل خطای مدل و حالت می‌باشد و با تابع  $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$  برابر است. از طرفی داریم.

$$V'(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1+p} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k)^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k) \quad (23)$$

با توجه به محدودیت  $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$  در فرض اول، خواهیم داشت:

$$V'(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = -\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k)^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k) \quad (24)$$

با در نظر گرفتن روابط (۲۲) و (۲۴) نتیجه می‌شود:

$$V(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, k+1) - V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) \leq -\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k)^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_k) < 0 \quad (25)$$

بنابراین می‌بینیم که  $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$  به صورت منفی معین است. پس با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف، معادله (۱۹) یک نقطه تعادل پایدار مجانبی در مبدأ دارد.

ماتریس‌ها وزنی  $\mathbf{R}_x$  و  $\mathbf{Q}_m$  ماتریس‌های متقارن و مثبت معین هستند که به صورت قطری در نظر گرفته می‌شوند. چون هدف کمینه کردن تابع هزینه (۱۶) است باید ماتریس  $\mathbf{R}_x$  مثبت معین باشد. بزرگ شدن ماتریس وزنی  $\mathbf{R}_x$  باعث می‌شود که مؤلفه حالت‌ها اهمیت بیشتری نسبت به خطای مدل داشته باشد؛ همچنین پاسخ با سرعت و دقت بیشتری ورودی مرجع را دنبال کند.

## ۴. تجزیه و تحلیل پایداری مجانبی الگوریتم IPA استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف

در این بخش، شرایط کافی که پایداری مجانبی روش پیشنهادی را تضمین می‌کند، به دست می‌آید. در لحظه فعلی  $k$ ، مسیر آینده خطای مدل یا  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1} : i=1, 2, \dots, p$  با بهینه‌سازی تابع هزینه زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^p (\hat{\mathbf{y}}_{k+i} - \mathbf{y}_{k+i}^r)^T \mathbf{R}_y (\hat{\mathbf{y}}_{k+i} - \mathbf{y}_{k+i}^r) + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}) \quad (16)$$

در سیستم ترازایی اولیه، خروجی مرجع صفر است ( $\mathbf{y}_{k+i}^r = 0$ ). با استفاده از مدل پیش‌بین اندازه‌گیری ( $\hat{\mathbf{y}}_{k+i} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}$ )، می‌توان تابع هزینه را به صورت زیر ساده کرد:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^p (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k+i/k})^T \mathbf{R}_y (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}) + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}) \quad (17)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^p (\hat{\mathbf{x}}_{k+i/k})^T \mathbf{R}_x (\hat{\mathbf{x}}_{k+i/k}) + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})$$

که در آن  $\mathbf{R}_x = \mathbf{H}^T \mathbf{R}_y \mathbf{H}$  بوده و فقط با به دست آمدن اولین عنصر کنترل بهینه  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k^*$  اجرا می‌شود. در لحظه بعدی همان مراحل بهینه‌سازی تکرار می‌شوند. مسئله اصلی پایداری، برقراری محدودیت  $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$  می‌باشد. حال قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

**قضیه ۱-** تابع هزینه (۱۷) را با فرضیات زیر در نظر بگیرید.

- فرض کنید محدودیت  $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$  که در آن  $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k}$  حالت نهایی است، برقرار بوده و خطای مدل یا  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1} : i=1, 2, \dots, p$  جواب بهینه مسئله است.
- همچنین برای هر لحظه  $k$ ، یک جواب مثل  $\Delta \hat{\mathbf{m}}_k^*$  وجود دارد که با توجه به محدودیت  $\hat{\mathbf{x}}_{k+p/k} = 0$  تابع هزینه  $\mathbf{J}$  را کمینه می‌کند.
- با توجه به این فرضیات، الگوریتم تخمین پیش‌بین خطای مدل، پایدار مجانبی است.

**اثبات:** ایده اصلی در اثبات پایداری الگوریتم IPA در نظر گرفتن تابع هزینه (۱۷) به عنوان یک تابع لیاپانوف است. پایداری الگوریتم زمانی است که تغییرات تابع هزینه در تمام مسیرها همیشه غیرمنفی باشد (یعنی  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}_k) < 0$ )؛ بنابراین، با معادل قرار دادن تابع لیاپانوف  $V(\hat{\mathbf{x}}_k, k)$  با تابع هزینه کمینه در افق محدود ( $J_{\min}$ )، به صورت زیر پایداری مجانبی آن را اثبات می‌کنیم.

$$V(\hat{\mathbf{x}}_k, k) = \sum_{i=1}^p \hat{\mathbf{x}}_{k+i}^T \mathbf{R}_x \hat{\mathbf{x}}_{k+i} + \sum_{i=1}^p (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1})^T \mathbf{Q}_m (\Delta \hat{\mathbf{m}}_{k+i-1}) \quad (18)$$

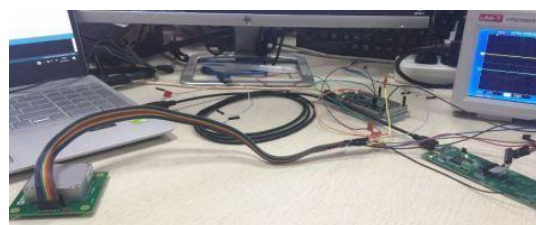
## ه- تحلیل نتایج آزمون الگوریتم پیشنهادی

در این بخش عملکرد فیلتر پیشنهادی در یک آزمون واقعی تحلیل خواهد شد. برای ارزیابی الگوریتم ارائه شده در تخمین زوایای ترازبایی اولیه یک سامانه ناوبری اینرسی، این الگوریتم روی سخت افزارهای آزمایشگاهی پیاده سازی شده و با انجام آزمون های گوناگونی از صحت عملکرد نرم افزارها و سخت افزارها اطمینان حاصل شده است. در آزمون ها، از سامانه ناوبری اینرسی میکروالکترومکانیکی نوع ADIS16488A استفاده شده است. در جدول ۱ مشخصات این حسگرهای اینرسی آمده است.

جدول ۱: مشخصات حسگرهای اینرسی ADIS16488A [۲۰]

| نام پارامتر           | ژیروسکوپ                                    | شتاب سنج                           |
|-----------------------|---|------------------------------------|
| Misalignment Axis     | $\pm 0.05^\circ$                            | $\pm 0.035^\circ$                  |
| Nonlinearity          | 0.01% of FS                                 | 0.1% of FS                         |
| Bias Repeatability    | $\pm 0.2^\circ/\text{sec}$                  | $\pm 16 \text{ mg}$                |
| In-Run Bias Stability | 5.1 $^\circ/\text{hr}$                      | 0.07 mg                            |
| Random Walk           | 0.26 $^\circ/\text{hr}$                     | 0.029 m/sec $^\circ/\text{hr}$     |
| Output Noise          | 0.135 $^\circ/\text{sec rms}$               | 1.29 mg rms                        |
| Noise Density         | 0.0059 $^\circ/\text{sec}/\sqrt{\text{Hz}}$ | 0.063 mg $^\circ/\sqrt{\text{Hz}}$ |

سخت افزار و لوازم آزمون ترازبایی سامانه ناوبری در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲: سخت افزارهای جانبی آزمایشگاه

در این آزمایش، فرایند ترازبایی با استفاده از داده های ثابت خودرو برای ۱۲۰۰ ثانیه انجام می شود. زمان نمونه برداری برای سامانه ناوبری اینرسی، برابر ۰/۰۱ ثانیه و افق پیش بینی یا  $p$  برابر ۱۰ می باشد. برای اندازه گیری تأثیر خطای کوواریانس اندازه گیری در دقت همگرایی تخمین زوایای اولیه، آزمایش ترازبایی سه بار طبق جدول ۳ تکرار می شود.

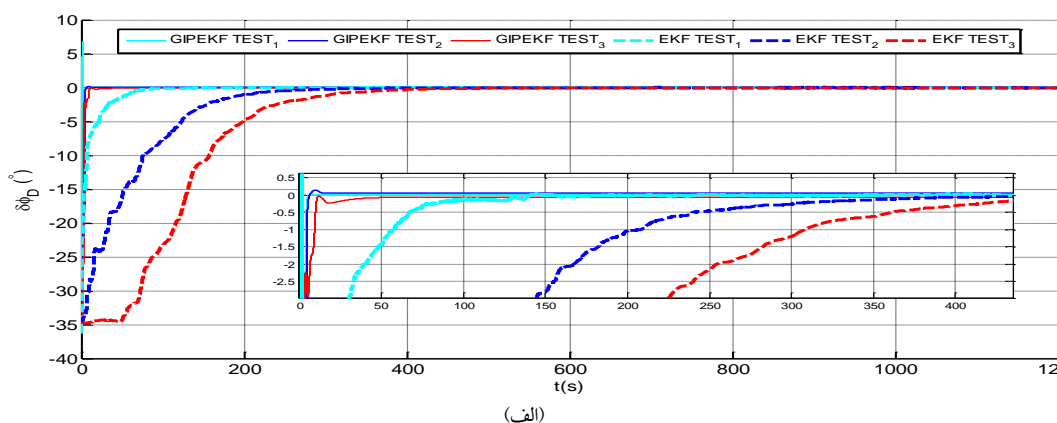
### ۵-۱- نتایج تحلیل عملکرد IPEKF

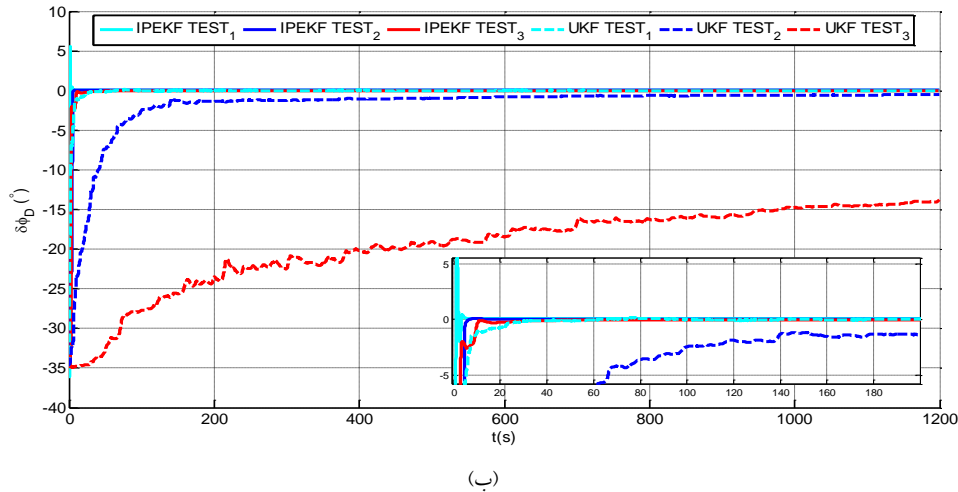
برای تجزیه و تحلیل عملکرد فیلتر طراحی شده، این فیلتر با فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن بدون مقایسه شده است. فیلتر کالمن بدون بو [۹]، با استفاده از تعداد محدودی از نقاط سیگمایی که با دقت انتخاب شده اند بهره می برد تا بدین وسیله تابع توزیع احتمال را به دست آورد. برخلاف فیلتر کالمن توسعه یافته که به دلیل استفاده از ماتریس ژاکوبی در فرآیند خطی سازی، دارای دقت کمی است، فیلتر کالمن بدون بو مجموعه مینمال نقاط سیگما را محاسبه نموده و به دقت بالاتری دست می یابد (توضیحات بیشتر الگوریتم فیلتر کالمن بدون بو در ضمیمه (ب) آمده است).

در جدول ۲ سه نوع آزمون توضیح داده شده است. در آزمون ۳، دقت برآورد خطای سمت هنگام استفاده از فیلتر جدید برابر  $0.19' \pm 0.87' / 4$  است، در حالی که دقت تخمین زاویه سمت با استفاده از فیلتر EKF  $48' \pm 52'$  و از فیلتر UKF  $10712'$  است (ازایی تغییرات کوواریانس اندازه گیری، UKF دارای حساسیت بیشتر از EKF می باشد). می بینیم که الگوریتم پیشنهادی به طور قابل توجهی دقت برآورد زاویه سمت را در مقایسه با EKF و UKF بهبود می بخشد.

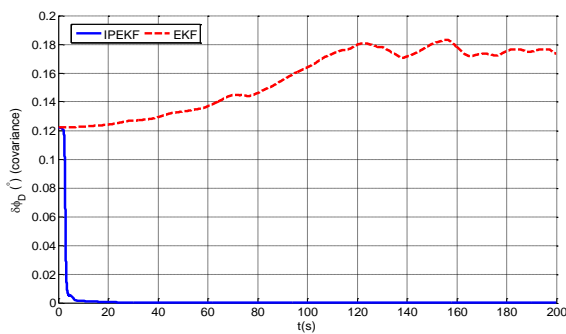
جدول ۲: نتایج آزمایش ترازبایی برای زاویه عدم انطباق سمت.

| انحراف استاندارد خطای تخمین (arc.min) |       |      | خطای RMSE تخمین زاویه سمت (arc.min) |        |      | زمان همگرایی (sec) |     |       | پارامتر مورد ارزیابی |       |
|---------------------------------------|-------|------|-------------------------------------|--------|------|--------------------|-----|-------|----------------------|-------|
| IPEKF                                 | EKF   | UKF  | IPEKF                               | EKF    | UKF  | IPEKF              | EKF | UKF   | نوع فیلتر            | آزمون |
| 0.14                                  | 0.91  | 0.8  | 0.39                                | 1.12   | 0.82 | 8                  | 150 | 50    | $(\sigma_R=10^{-3})$ | ۱     |
| 0.03                                  | 10.42 | 15.1 | 2.67                                | 11.38  | 50.7 | 20                 | 400 | 300   | $(\sigma_R=10^{-2})$ | ۲     |
| 0.19                                  | 48    | 162  | 4.087                               | 58.009 | 1071 | 52                 | 524 | >1200 | $(\sigma_R=10^{-1})$ | ۳     |



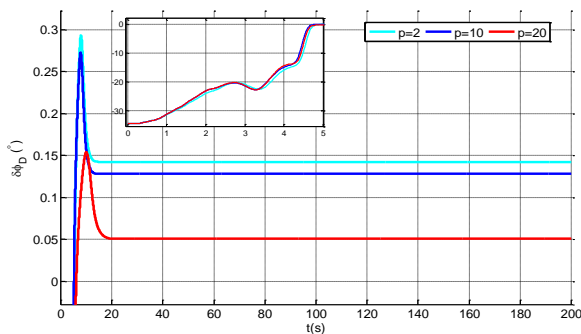


شکل ۳: (الف) همگرایی زاویه سمت توسط IPEKF و EKF, (ب) همگرایی زاویه سمت توسط IPEKF و UKF



شکل ۵: همگرایی کوواریانس خطای زاویه سمت در روش‌های IPEKF و EKF با بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری

در ادامه نتایج شبیه‌سازی برای  $p=2$ ,  $p=10$ ,  $p=20$  و  $p=20$  در شکل ۶ آورده شده است. افق پیش‌بین خروجی باید به حد کافی بزرگ باشد تا خروجی بتواند به مقدار ماندگار همگرا شود. در این آزمون چون سیستم غیرخطی است افق پیش‌بینی به حد کافی باید بزرگ باشد. کوچک بودن افق پیش‌بینی خروجی باعث می‌شود که الگوریتم تخمین مناسبی را از رفتار آینده سیستم نداشته باشد:



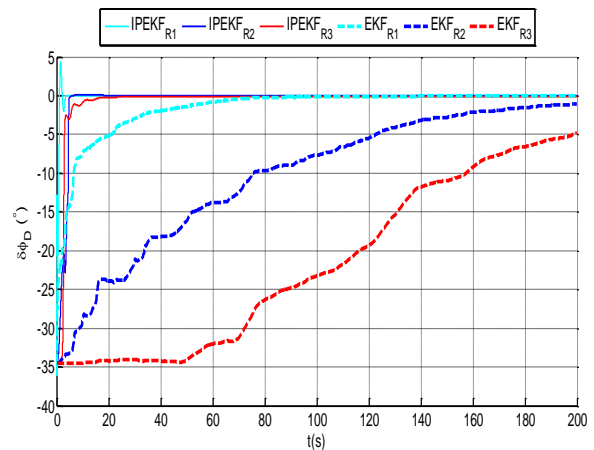
شکل ۶: همگرایی تخمین زاویه سمت برای  $p=2$ ,  $p=10$  و  $p=20$

در شکل ۶ به خوبی مشخص است که با بزرگ شدن افق پیش‌بینی خطای همگرایی کم می‌شود.

نتایج ترازایی زاویه سمت و زمان همگرایی آن در جدول ۲ آمده است. شکل ۳(الف) مقایسه همگرایی زاویه سمت را با استفاده از IPEKF و EKF و شکل ۳(ب) مقایسه همگرایی زاویه سمت را با استفاده از IPEKF و UKF نشان می‌دهد.

## ۵-۲- نتایج تحلیل پایداری

در شکل ۴ نتایج تأثیر بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری و کوواریانس خطای حالت‌های فرآیند روی زاویه سمت، مربوط به الگوریتم جدید و فیلتر کالمن توسعه یافته به طور هم‌زمان نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در روش جدید میزان همگرایی افزایش یافته است.



شکل ۴: همگرایی زاویه سمت در روش‌های IPEKF و EKF با بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری

در شکل ۵ نتایج تأثیر بزرگ شدن کوواریانس خطای اندازه‌گیری و کوواریانس خطای حالت‌های فرآیند روی کوواریانس خطای زاویه سمت مربوط به الگوریتم جدید و فیلتر کالمن توسعه یافته به طور هم‌زمان نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در روش جدید میزان پایداری افزایش یافته است.

بار محاسباتی الگوریتم‌های UKF و EKF را می‌توان از روی تعداد عملیات ریاضی در هر ثانیه از اجرای آن محاسبه نمود [۲۱]. فرض می‌کنیم بعد بردار حالت  $n$  و بعد بردار اندازه‌گیری  $m$  و بعد آف پیش‌بینی  $p$  است؛ بنابراین، تعداد عملیات ریاضی در هر ثانیه برای هر بار اجرای الگوریتم‌ها طبق جدول ۳ آمده است. از جدول ۳ ملاحظه می‌شود که بار محاسباتی IPEKF بسیار کمتر از EKF و UKF می‌باشد.

جدول ۳: مقایسه‌ی بار محاسباتی الگوریتم‌های UKF و EKF و IPEKF

| الگوریتم | رابطه‌ی تعداد عملیات ریاضی در هر ثانیه                  | تعداد حالت‌ها   | بار محاسباتی |
|----------|---|---|--------------|
| EKF      | $6n^3 + 6n^2m + 4nm^2 + m^3 + nm - n$                   | $1 \Rightarrow n$<br>$2 \Rightarrow m$                      | ۷۳۷۸         |
| UKF      | $(16/3)n^3 + 6n^2m + 4nm^2 + 11n^2 + m^3 + nm + 3n$     | $1 \Rightarrow n$<br>$2 \Rightarrow m$                      | ۷۸۵۱         |
| IPEKF    | $6n^3 + 6n^2m + 4nm^2 + m^3 + nm - n + n^2p^2m + n^2pm$ | $5 \Rightarrow n$<br>$2 \Rightarrow m$<br>$1 \Rightarrow p$ | ۶۵۶۰         |
|          |   | $5 \Rightarrow n$<br>$2 \Rightarrow m$<br>$2 \Rightarrow p$ | ۱۳۷۳         |

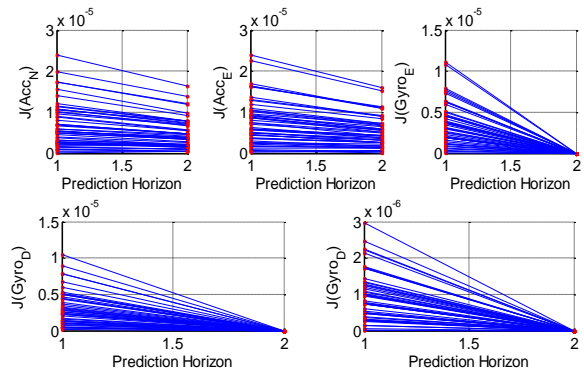
## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ترازبایی اولیه برای سامانه ناوبری اینرسی میکرو الکترومکانیکی با استفاده از یک مدل ترازبایی غیرخطی در نظر گرفته شد. با استخراج مدل غیرخطی خطا برای این سیستم و با در نظر گرفتن حالت سکون حسگرهای اینرسی (صفر بودن سرعت واقعی حسگرها) خطای زوایای تراز و سمت تخمین زده شد. عملکرد و مقاومت الگوریتم پیشنهادی با فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن بدون مقایسه گردید.

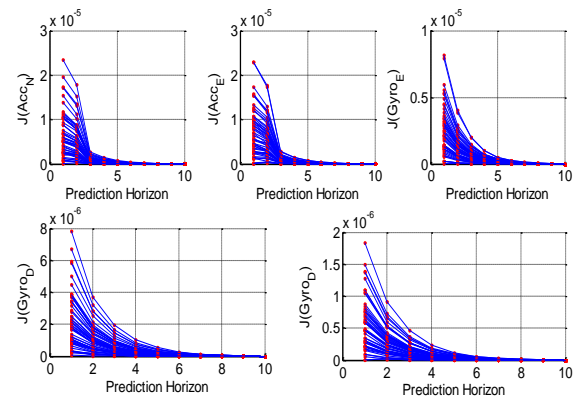
روش جدید IPEKF که ترکیبی از فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر پیش‌بین تفاضلی تعمیم یافته است برای تخمین خطاهای مدل‌سازی و نویز استفاده شد. الگوریتم‌های متداول به خاطر ناشناخته بودن خطای حسگرهای اینرسی با مشکل همگرایی مواجه می‌شوند. این مشکل در روش ارائه شده در این مقاله برطرف شده است. علاوه بر این، درجه‌ی مشاهده‌پذیری روش IPEKF نسبت به روش EKF افزایش یافته و بار محاسباتی آن در مقایسه با سایر روش‌ها به خاطر کاهش تعداد حالت‌ها، کاهش می‌یابد.

مسئله اصلی این مقاله، نشان دادن پایداری و همگرایی روش پیشنهادی با استفاده از تئوری لیاپانوف بود. طبق نتایج به دست آمده از آزمون‌ها، مقایسه‌ی روش نوین با فیلتر کالمن توسعه یافته و فیلتر کالمن بدون بو، بهبود دقت و عملکرد الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد.

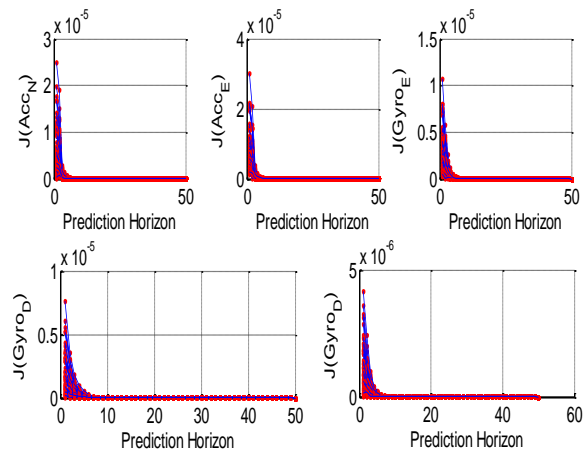
در شکل‌های ۷، ۸ و ۹ نتایج مربوط به تأثیر افزایش آف پیش‌بینی در تابع هزینه الگوریتم جدید نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که تابع هزینه نزولی است.



شکل ۷: تابع هزینه در حالت  $p=2$



شکل ۸: تابع هزینه در حالت  $p=10$



شکل ۹: تابع هزینه در حالت  $p=50$

## ۵-۳- مقایسه بار محاسباتی روش‌های UKF و EKF و IPEKF



**ضمیمه ب - الگوریتم UKF [۹]**

۱-مقداردهی اولیه این فیلتر با متوسط و کوواریانس حالت پیش‌بینی شده زیر صورت می‌گیرد:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}} \quad (ب-۱)$$

$$\mathbf{P}_0 = (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T$$

۲-مجموعه نقاط سیگما از متوسط و کوواریانس حالت پیشین طبق رابطه زیر تولید کنید

$$\mathbf{x}_{i,k}^a = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{0,k}^a, & i=0 \\ \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^a + \gamma \sqrt{\mathbf{P}_k^a}, & i=1 \dots L \\ \hat{\mathbf{x}}_{i,k}^a - \gamma \sqrt{\mathbf{P}_k^a}, & i=L+1 \dots 2L \end{cases} \quad \text{where: } \begin{cases} \gamma = \sqrt{L+\lambda} \\ \kappa = 3-L \\ \lambda = \alpha^2(L+\kappa) - L \\ 10^{-4} < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (ب-۲)$$

۳-نقاط سیگما را توسط معادله مدل غیرخطی زیر انتقال دهید.

$$\mathbf{x}_{i,k+1|k}^a = f(\mathbf{x}_{i,k}^a, \mathbf{m}_k, k) \quad (ب-۳)$$

۴- میانگین و کوواریانس نقاط انتقال داده‌شده را توسط رابطه زیر محاسبه کنید.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{mean} \mathbf{x}_{i,k+1|k}^a \quad (ب-۴)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{cov} (\mathbf{x}_{i,k+1|k}^a - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) (\mathbf{x}_{i,k+1|k}^a - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T$$

۵-وزن‌های  $W_i^{cov}$  و  $W_i^{mean}$  از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} W_0^{mean} = \frac{\lambda}{L+\lambda} \\ W_0^{cov} = \frac{\lambda}{L+\lambda} + (1-\alpha^2 + \beta), \quad \beta = 2 \\ W_i^{mean} = W_i^{cov} = \frac{1}{2(L+\lambda)}, \quad i=1,2,\dots,2L \end{cases} \quad (ب-۵)$$

۶- نقاط سیگما را در معادله اندازه‌گیری قرار داده و آن‌ها را انتقال دهید.

$$\mathbf{y}_{i,k+1|k} = h(\mathbf{x}_{i,k+1|k}^a, \mathbf{m}_k, k) \quad (ب-۶)$$

۷- میانگین اندازه‌گیری را پیشگویی کنید.

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{mean} \mathbf{y}_{i,k+1|k} \quad (ب-۷)$$

۸- کوواریانس خطا را پیشگویی کنید.

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{R}_{k+1} + \sum_{i=0}^{2L} W_i^{cov} [\mathbf{y}_{i,k+1|k} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}] [\mathbf{y}_{i,k+1|k} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}]^T \quad (ب-۸)$$

۹- ماتریس همبستگی بین  $\mathbf{y}, \mathbf{x}$  را حساب کنید.

$$\mathbf{P}_{xz,k+1|k} = \mathbf{R}_{k+1} + \sum_{i=0}^{2L} W_i^{cov} [\mathbf{x}_{i,k+1|k}^a - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] [\mathbf{y}_{i,k+1|k} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}]^T \quad (ب-۹)$$

**ضمیمه الف - مدل ترازایی غیرخطی الگوریتم**

**IPEKF**

در سامانه ناوبری اینرسی، قبل از شروع به ناوبری لازم است ترازایی اولیه که تخمین اولیه از وضعیت جسم (ماتریس تبدیل) نسبت به دستگاه مرجع (دستگاه جغرافیایی) تعیین می‌شود. این ترازایی اولیه طی دو مرحله‌ی ترازایی غیردقیق<sup>۱</sup> و ترازایی دقیق<sup>۲</sup> به صورت متوالی انجام می‌شود. می‌توان مدل ترازایی غیرخطی را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= f(\mathbf{x}_t) + \mathbf{m}_t + \mathbf{w}_t \\ \mathbf{y}_{t+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{v}_{t+1} \end{aligned} \quad (الف-۱)$$

متغیرهای حالت موردنیاز برای تعریف خطای سرعت عبارت‌اند از:  $\delta v_E$  و  $\delta v_N$ . متغیرهای حالت موردنیاز برای تعریف خطاهای زاویه،  $[\varphi_N \ \varphi_E \ \varphi_D]$  می‌باشند؛ بنابراین، بردار حالت این مسئله به صورت زیر است:

$$\mathbf{x}_t = [\delta v_N \ \delta v_E \ \varphi_N \ \varphi_E \ \varphi_D]^T \quad (الف-۲)$$

بردار خطای مدل سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{m}_t = [\Delta f_N \ \Delta f_E \ \Delta \omega_D \ \Delta \omega_E \ \Delta \omega_N]^T \quad (الف-۳)$$

مدل غیرخطی خطاها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \delta v_N^n = (1-c\varphi_D) f_N^n + s\varphi_D f_E^n + 2\omega_D \delta v_y^n \\ \quad - (\varphi_E c\varphi_D + \varphi_N s\varphi_D) f_D^n + \Delta f_N \\ \delta v_E^n = -s\varphi_D f_N^n + (1-c\varphi_D) f_E^n - 2\omega_D \delta v_y^n \\ \quad + (-\varphi_E s\varphi_D + \varphi_N c\varphi_D) f_D^n + \Delta f_E \\ \dot{\varphi}_x = (1-\cos\varphi_z)\omega_N + \varphi_y \omega_D + \delta v_E/r \\ \dot{\varphi}_y = \sin\varphi_z \omega_N - \varphi_x \omega_D - \delta v_N/r \\ \dot{\varphi}_z = -(\varphi_y \cos\varphi_z + \varphi_x \sin\varphi_z)\omega_N - \delta v_E \tan\varphi/r \end{cases} \quad (الف-۴)$$

و مدل اندازه‌گیری به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\mathbf{y}_{t+1} = \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (الف-۵)$$

ماتریس ژاکوبی تابع  $f(\mathbf{x})$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega_D & -s\varphi_D f_D^n & -c\varphi_D f_D^n & F_{15} \\ -2\omega_D & 0 & c\varphi_D f_D^n & -s\varphi_D f_D^n & F_{25} \\ 0 & 1/r & 0 & \omega_D & \omega_N s\varphi_D \\ -1/r & 0 & -\omega_D & 0 & \omega_N c\varphi_D \\ 0 & -\tan\varphi/r & -\omega_N s\varphi_D & -\omega_N c\varphi_D & F_{55} \end{bmatrix} \quad (الف-۶)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} F_{15} &= f_E^n c\varphi_D + f_N^n s\varphi_D + (\varphi_E s\varphi_D - \varphi_N c\varphi_D) f_D^n \\ F_{25} &= f_E^n s\varphi_D - f_N^n c\varphi_D - (\varphi_E c\varphi_D + \varphi_N s\varphi_D) f_D^n \\ F_{55} &= (-\varphi_N c\varphi_D + \varphi_E s\varphi_D)\omega_N \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Fine alignment

<sup>1</sup> Coarse alignment

filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems”, IEEE transactions on automatic control, vol. 42, no. 4, pp. 581-586, 1997.

- [11] K. Reif and R. Unbehauen, “The extended Kalman filter as an exponential observer for nonlinear systems”, IEEE Transactions on Signal processing, vol. 47, no. 8, pp. 2324-2328, 1999.
- [12] K. Reif et al., “Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter”, IEEE Transactions on Automatic control, vol. 44, no. 4, pp. 714-728, 1999.
- [13] T. Karvonen et al., “On Stability of a Class of Filters for Nonlinear Stochastic Systems”, SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 58, no. 4, pp. 2023-2049, 2020.
- [14] M. Ren, Q. Zhang, and J. Zhang, “An introductory survey of probability density function control”, Systems Science & Control Engineering, vol. 7, no. 1, pp. 158-170, 2019.
- [15] Q. Zhang, “Performance enhanced Kalman filter design for non-Gaussian stochastic systems with data-based minimum entropy optimisation”, AIMS Electronics and Electrical Engineering, vol. 3, no. 4, pp. 382-396, 2019.
- [16] N. Ghahramani and F. Towhidkhal, “Constrained incremental predictive controller design for a flexible joint robot”, ISA transactions, vol. 48, no. 3, pp. 321-326, 2009.
- [17] N. Ghahramani, A. Naghash, and F. Towhidkhal, “Incremental Predictive Command of Velocity to Be Gained Guidance Method”, JAST, vol. 5, no. 3, pp. 99-105, 2008.
- [18] K.R. Britting, Inertial navigation systems analysis, Johan Wiley and Sons. Inc, New York, 1971.
- [19] D. Titterton, J.L. Weston, and J. Weston, Strapdown inertial navigation technology, IET, Vol. 17, 2004.
- [20] ADIS16488A, Tactical Grade Ten Degrees of Freedom Inertial Sensor, Analog Devices, “<http://www.analog.com>”, access: 2018.

[۲۱] س. ظهیری، م. نصیری، ر. هاونگی، ح. الیاسی، “طراحی یک فیلتر تلفیق غیرخطی بهینه مبتنی بر الگوریتم بهینه سازی گروه ذرات برای سیستم ناوبری تلفیقی INS/GPS”، فصلنامه علمی دریا فنون، دوره ۵، شماره ۳، صفحه ۱-۱۷، ۲۰۱۸.

۱۰- برای به دست آوردن تخمین بهینه از معادلات فیلتر کالمن استفاده کنید.

## مراجع

- [1] N. Nagui et al., “Improved GPS/IMU Loosely Coupled Integration Scheme Using Two Kalman Filter-based Cascaded Stages”, Arabian Journal for Science and Engineering, vol. 46, no. 2, pp. 1345-1367, 2021.
- [2] N. A. Anbu and D. Jayaprasanth. “Integration of Inertial Navigation System with Global Positioning System using Extended Kalman Filter”, in International Conference on Smart Systems and Inventive Technology, IEEE, 2019.
- [3] H. Rahimi and A. A. Nikkhah, “Improving the speed of initial alignment for marine strapdown inertial navigation systems using heading control signal feedback in extended Kalman filter”, International Journal of Advanced Robotic Systems, vol. 17, no. 1, 2020.
- [4] F. Farhangian and R. Landry, “Accuracy improvement of attitude determination systems using EKF-based error prediction filter and PI controller”, Sensors, vol. 20, no. 14, pp. 4055, 2020.
- [5] W. Liu and et al., “TLIO: Tight Learned Inertial Odometry”. IEEE Robotics and Automation Letters, vol. 5, no. 4, pp. 5653-5660, 2020.
- [6] S. Song and J. Wu, “Motion State Estimation of Target Vehicle under Unknown Time-Varying Noises Based on Improved Square-Root Cubature Kalman Filter”, Sensors, vol. 20, no. 9, pp. 2620, 2020.
- [7] I. Hashlamon, “A new adaptive extended Kalman filter for a class of nonlinear systems”, Journal of Applied and Computational Mechanics, vol. 6, no. 1, pp. 1-12, 2020.
- [8] K. H. Kim et al., “The stability analysis of the adaptive fading extended Kalman filter using the innovation covariance”, international journal of control, automation and systems, vol. 7, no. 1, pp. 49-56, 2009.
- [9] A. Daid, E. Busvelle, and M. Aidene, “On the convergence of the unscented Kalman filter”, European Journal of Control, vol.57, pp. 125-134, 2021.
- [10] M. Boutayeb, H. Rafaralahy, and M. Darouach, “Convergence analysis of the extended Kalman