

تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده غیرهمزمان برای سیستم‌های کلیدزنی خطی دارای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر با زمان اقامت میانگین

مهدی سیاوش^۱، فرید شیخ الاسلام^۲، جواد عسگری^۳، شهرام حاج شیرمحمدی^۴

^۱ فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، Mahdi.siavash@yahoo.com

^۲ استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، Sheikh@cc.iut.ac.ir

^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، J-askari@cc.iut.ac.ir

^۴ دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، shahramhajshir@gmail.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۴/۲/۲۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۴/۶/۱۸)

چکیده: یکی از مهمترین مسائل مطرح در سیستم‌های کلیدزنی پایداریسازی سیستم‌های کلیدزنی خطی دارای زیرسیستم‌های پایدارناپذیر می‌باشد. از طرف دیگر در کنترل سیستم‌های کلیدزنی بحث غیرهمزمانی و یا تاخیر سوئیچ سیستم نسبت به سوئیچ کنترل کننده همواره مشکلاتی در عمل برای پایداری و داشتن عملکرد مطلوب برای سیستم کلیدزنی ایجاد می‌کند. در این مقاله به بررسی پایداری سیستم کلیدزنی خطی آهسته دارای زیرسیستم‌های پایدار و پایدارناپذیر در حالت غیرهمزمانی دو سوئیچ پرداخته شده است. با استفاده از توابع شبه لیپانوف شرایطی برای تضمین پایداری سیستم کلیدزنی در حالت پیوسته و گسسته بیان شده است که می‌توان با تعیین حداقل زمان لازم برای فعالیت زیرسیستم‌های پایدار بر حسب حداکثر زمان فعالیت زیرسیستم‌های ناپایدار و شیب افزایش و کاهش انرژی زیر سیستم‌ها، پایداری سیستم کلیدزنی را تضمین کرد. آخرین مسئله‌ی بررسی شده در این مقاله طراحی کنترل کننده‌های فیدبک حالتی است که بتوانند شرایط پایداری و همچنین شرایط مورد نظر طراح از جمله حداقل زمان فعالیت زیرسیستم‌های پایدار را فراهم کند. به منظور نشان دادن کارایی روش‌ها، شبیه‌سازی‌هایی در انتهای مقاله آورده شده است.

کلمات کلیدی: سیستم‌های کلیدزنی خطی، پایداری نمایی، زیرسیستم‌های پایدارنشدنی، کنترل غیرهمزمان، زمان اقامت میانگین.

Asynchronous Control and Stabilization of Linear Switched Systems with Unstabilizable Subsystems by Average Dwell Time Approach

Mahdi Siavash, Farid Sheikholeslam, Javad Askari, Shahram Hajshirmohammady

Abstract: Stabilization of switched linear systems is one of the most important problems in the field of switched systems. On the other hand, asynchronous switching between the controller and the system may lead to an unstable closed loop system or degrade the closed loop system's performance. In this paper the problem of stabilizing a switched system with both stabilizable and unstabilizable subsystems and asynchronous switching between the controller and the system is considered. Using Lyapunov-like functions, some criteria are presented to guarantee the stability of the switched system based on the activity time of the stable and unstable subsystems and maximum number of switchings in a given time interval for both discrete-time and continuous-time cases. The last issue, verified in this paper is the design of a state feedback controller which can provide stability criteria, as well as designer's desired criteria, including minimum activity time of the stable subsystems. In order to illustrate the effectiveness of the proposed method, simulation results are presented at the end of the paper.

Keywords: Linear switched systems, Exponential stability, Unstabilizable subsystem, Asynchronous switching, Average dwell time.

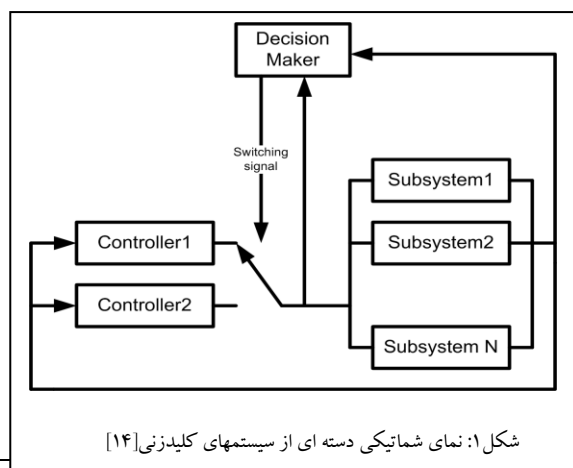
۱- مقدمه

سیستم‌های هابرید دسته مهمی از سیستم‌های صنعتی را تشکیل می‌دهند که با استفاده از تعامل دینامیک‌های پیوسته و دینامیک‌های گسسته پیشامد توصیف می‌شوند. دسته پرکاربرد از این سیستم‌ها را سیستم کلیدزنی خطی تشکیل می‌دهد که از خانواده‌ای از زیرسیستم‌ها و یک ناظر^۱ تشکیل شده است، که وظیفه آن تولید سیگنال کلیدزنی و انجام سوئیچ بین زیرسیستم‌ها می‌باشد [۱، ۲]. برای مدل‌سازی و کنترل بسیاری از فرآیندهای دینامیکی از سیستم‌های کلیدزنی استفاده می‌کنند [۳-۷]. سیستم‌های کلیدزنی براساس نوع سیگنال کلیدزنی به دو دسته دلخواه و دارای محدودیت تقسیم بندی می‌شود. روش‌های بررسی پایداری در این گونه سیستم‌ها بر اساس نوع سیستم کلیدزنی متفاوت است ولی مانند سایر سیستم‌های غیرخطی معمولاً بر اساس انتخاب تابع لیاپانوف می‌باشد. برای سیستم‌های کلیدزنی با سوئیچ دلخواه از توابع لیاپانوف مشترک^۲ CLF [۸]، توابع لیاپانوف سوئیچی^۳ SLF [۹] و برای سیستم‌های کلیدزنی با سوئیچ دارای محدودیت از لیاپانوف چندگانه^۴ MLF [۱۰] و توابع شبه لیاپانوف^۵ [۱۱] استفاده می‌کنند. سیستم‌های کلیدزنی آهسته نیز دسته وسیعی از سیستم‌های کلیدزنی دارای محدودیت می‌باشد که در آن بازه زمانی بین دو لحظه کلیدزنی باید از یک فاصله زمانی مشخص بیشتر باشد. یکی از پرکاربردترین قضایای پایداری در زمینه سیستم‌های کلیدزنی آهسته، قضیه زمان اقامت میانگین^۶ ADT می‌باشد که در آن برای تضمین پایداری باید میانگین زمانی بین دو لحظه کلیدزنی از یک مقدار مشخص به نام زمان اقامت میانگین بیشتر باشد [۱۲].

فرض بسیار مرسوم می‌باشد که در طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های کلیدزنی مطرح می‌شود این است که سوئیچ بین زیرسیستم‌ها و کنترل کننده‌ها به طور همزمان صورت می‌گیرد. در بسیاری از فرآیندها مشاهده می‌شود که کنترل کننده‌هایی که با این فرض طراحی می‌شوند در هنگام پیاده‌سازی قادر به پیاده‌سازی سیستم نمی‌باشند. در [۱۳] نمونه‌ای در مکانیزم‌های شیمیایی بیان شده است که به علت وجود این غیرهمزمانی کنترل کننده‌های طراحی شده در عمل سبب ناپایداری سیستم شده‌اند. همانطور که در شکل ۱ نمایی شماتیکی دسته‌ای از سیستم‌های کلیدزنی مشاهده می‌شود، این دسته از سیستم‌های کلیدزنی از تعدادی زیرسیستم و تعدادی کنترل کننده متناسب با هر زیرسیستم تشکیل شده است. هنگامی

که زیرسیستم فعال تغییر پیدا می‌کند واحد تصمیم‌گیری^۷ و یا ناظر نیازمند مدت زمانی می‌باشد تا بتواند زیرسیستم فعال را شناسایی کند و متناسب با آن کنترل کننده مربوطه را در حلقه کنترلی قرار دهد. این درحالیست که در فاصله زمانی مذکور کنترل کننده مربوط به زیرسیستم قبلی فعال می‌باشد که امکان دارد برای زیرسیستم فعلی، منجر به ناپایداری شود. بیشتر تلاش‌های انجام شده در زمینه کنترل غیرهمزمان سیستم‌های کلیدزنی مربوط به زیرسیستم‌هایی می‌باشد که پایدار می‌باشند و یا با استفاده از کنترل کننده‌هایی بتوان آن‌ها را پایدار کرد [۱۵، ۱۶]. در مرجع [۱۷]، با فرض اینکه تمام زیرسیستم‌ها پایداری می‌باشند شرایط پایداری با استفاده از توابع شبه لیاپانوف و قضیه زمان توقف میانگین^۸ ADT ارائه شده است.

اما در واقعیت بسیاری از سیستم‌ها ناپایدار می‌باشند که به طور ذاتی و یا به علت وجود نامعینی امکان پایدارسازی آن‌ها وجود ندارد، از این رو باید بتوان شرایطی را برای تضمین پایداری سیستم‌های کلیدزنی دارای چنین زیرسیستم‌هایی پیدا کرد. زیرسیستم‌هایی که امکان پایدارسازی آن‌ها وجود ندارند را می‌توان به چند گروه تقسیم‌بندی کرد. ساده‌ترین علتی که منجر به پایدارناپذیر شدن یک سیستم می‌شود، عدم کنترل-پذیری سیستم‌های ناپایدار می‌باشد. گروه دوم سیستم‌های ناپایداری هستند که به طور ذاتی کنترل‌پذیر هستند ولی به علت نامعینی که در سیستم وجود دارد به سیستم پایدارناپذیر تبدیل می‌شود. گروه سوم در بعضی از زیرسیستم‌ها به علت بروز عیب سیستم به سمت ناپایدار شدن می‌رود. در این بازه زمانی انرژی سیستم به طور مداوم افزایش می‌یابد و سیستم به سمت ناپایدار شدن می‌رود. همچنین پایدارناپذیری زیرسیستم‌ها در بسیاری از کاربردهای کنترلی از جمله کنترل تحت شبکه^۹ NCS اتفاق می‌افتد. به دلیل محدودیت شبکه، اطلاعات کنترل کننده‌ها در زمان‌های خاصی روی شبکه قرار می‌گیرد و این باعث می‌شود در یک زمان نتوان



شکل ۱: نمای شماتیکی دسته‌ای از سیستم‌های کلیدزنی [۱۴]

^۱ Decision Maker

^۸ Average Dwell Time

^۹ Network Control System

^۱ Supervisor

^۲ Common Lyapunov function (CLF)

^۳ Switch Lyapunov Function (SLF)

^۴ Multiple Lyapunov function (MLF)

^۵ Lyapunov-like function

^۶ Average Dwell Time

از یک مقدار مشخص بیشتر باشد. در ادامه کنترل کننده های فیدبک حالتی برای تضمین پایداری و رسیدن به عملکرد مطلوب برای سیستم های کلیدزنی در حالت پیوسته و گسسته زمان بیان شده است. در بخش دوم مقاله به بیان پیشنیازها و تعاریف مربوط به سیستم های کلیدزنی پرداخته شده است. در بخش سوم قضایای مربوط به پایداری و طراحی کنترل کننده در حالت پیوسته زمان و در بخش چهارم نیز این قضایا در حالت گسسته زمان بیان شده است. در انتها نیز دو مثال برای نشان دادن کارایی قضایای مطرح شده بیان شده است.

۲- بیان تعاریف و پیش نیازها:

تعریف ۱ - سیستم های کلیدزنی خطی را به فرم معادلات

$$\delta x(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) \quad (2)$$

توصیف می شود.

نماد δ در حالتی که سیستم، زمان پیوسته یا زمان گسسته باشد به ترتیب به صورت عملگر مشتق گیر $\delta x(t) = \dot{x}(t)$ و عملگر شیفت دهنده $\delta x(t) = x(t+1)$ اعمال می شود. همچنین $\sigma(t)$ سیگنال کلیدزنی است که توسط ناظر تولید می شود و مقادیری از مجموعه $P = \{1, \dots, N\}$ که N نشان دهنده تعداد زیرسیستم های یک سیستم کلیدزنی است، را اختیار می کند. در ضمن $x(t) \in R^n$ بردار حالت، $u(t) \in R^m$ بردار ورودی و $y(t) \in R^n$ بردار خروجی می باشد [۱].

تعریف ۲ - برای هر سیگنال کلیدزنی $\sigma(t)$ و هر زمان $T \geq t$ اگر تعداد سوئیچ در فاصله زمانی (t, T) را با $N_\sigma(t, T)$ نمایش داده شود؛ آنگاه بیان می شود سیگنال $\sigma(t)$ دارای زمان توقف میانگین τ_a خواهد بود اگر دو ثابت N_0 و τ_a وجود داشته باشد که

$$N_\sigma(t, t_0) \leq N_0 + \frac{t - t_0}{\tau_a} \quad (3)$$

برقرار باشد. در رابطه (۳) دو عدد N_0 و τ_a به ترتیب بیان گر زمان توقف میانگین و مرز برخورد می باشد [۱].

لم ش ۲۰: ماتریس های ثابت S, Q و R را با ابعاد مناسب در نظر بگیرید که R و Q ماتریس های متقارن می باشند. در نظر بگیرید. سه عبارت زیر معادل هم خواهند بود.

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \quad (4)$$

$$R(x) > 0 \quad (5)$$

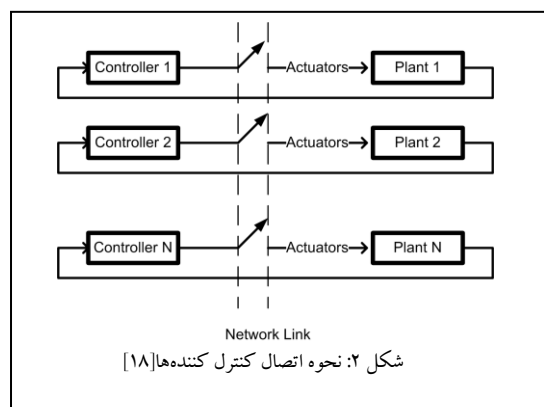
$$R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1} S(x) > 0$$

$$Q(x) > 0$$

همه ی حلقه های کنترلی را بست. بنابراین در لحظاتی تعدادی از زیرسیستم های ممکن است ناپایدار شوند و امکان پایدارسازی آن وجود ندارد، نمایی از این روش کنترلی در شکل ۲ آورده شده است [۱۸]. یک راهکار برای این منظور مدل سازی به روش سیستم کلیدزنی است. زمانی که کنترل کننده در دسترس نیست، سیستم حلقه باز است و امکان پایدارسازی آن نیز وجود ندارد را به عنوان یک گروه زیرسیستم ناپایدار سیستم کلیدزنی و هنگامی که کنترل کننده در دسترس است، سیستم حلقه بسته و پایدار می باشد را به عنوان یک گروه زیرسیستم پایدار سیستم کلیدزنی در نظر گرفت.

مراجع محدودی به بررسی همزمان دو موضوع تاخیر بین دو سوئیچ و پایداری پذیرد برخی از زیرسیستم ها پرداخته اند. در [۱۹] به بررسی پایداری سیستم کلیدزنی آهسته داری زیرسیستم های ناپایدار با استفاده از قضیه زمان اقامت^۱ پرداخته شده است. از آنجایی که قضیه زمان اقامت بر خلاف قضیه زمان اقامت میانگین که بر اساس زمان میانگین بین دو لحظه کلیدزنی است، باید زمان انجام بین هر دو لحظه کلیدزنی از یک بازه زمانی مشخص بیشتر باشد محدودیت های بسیاری را در نحوه عملکرد سیستم کلید زنی به سیستم تحمیل می کند. از این رو با توجه به بررسی های انجام شده مقاله ای که به موضوع پایداری سیستم های کلیدزنی دارای زیرسیستم های پایدارناپذیر در حالت غیرهمزمانی دو سوئیچ و با استفاده از قضیه زمان اقامت میانگین یافت نشد.

در این مقاله به بررسی پایداری سیستم های کلیدزنی خطی دارای زیرسیستم های پایدارناپذیر در حضور تاخیر بین دو سوئیچ زیرسیستم و کنترل کننده با استفاده از قضیه زمان توقف میانگین پرداخته شده است. برای تضمین پایداری زیرسیستم های سیستم کلیدزنی را به دو دسته پایدار و ناپایدار تقسیم بندی شده است. با استفاده از توابع شبه لیاپانوف و شب افزایش و کاهش انرژی زیرسیستم ها و حداکثر زمان فعالیت زیرسیستم های ناپایدار، حداقل زمان لازم برای فعالیت زیر سیستم های پایدار برای تضمین پایداری نمایی سیستم کلیدزنی محاسبه شده است. همچنین به علت اینکه از قضیه زمان اقامت میانگین به جای زمان اقامت در قضایا پایداری استفاده شده است دیگر نیازی به فعالیت هر یک از سیستم ها به میزان زمان مشخص نیست بلکه باید میانگین فعال بودن بازه زمانی آن ها



شکل ۲: نحوه اتصال کنترل کننده ها [۱۸]

² Chatter bound

¹ Dwell Time

همانند شکل ۳ به صورت مکرر وبا فعالیت هریک از زیر سیستم‌ها پایدار و ناپایدار در سیستم کلیدزنی پدید می‌آیند که در شکل ۳ فقط یک حالت آن ترسیم شده است.

قضیه ۱: سیستم کلیدزنی خطی دارای روابط به فرم (۱) و ثابت‌های

$\alpha > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \beta_3 > 0, \mu \geq 1$ را در نظر بگیرید. آنگاه اگر برای هر $\sigma(t) = i \in P$ که زیرسیستم پایدار و برای هر $\sigma(t) = j \in P$ که زیرسیستم ناپایدار فعال می‌شود توابع لیپانوف $V_i: R^n \rightarrow R$ و $V_j: R^n \rightarrow R$ و همچنین دو تابع K_1 و K_2 از کلاس K_∞ وجود داشته باشند که

$$\begin{aligned} K_1(|x_i|) \leq V_i(x_i) \leq K_2(|x_i|) \\ K_1(|x_j|) \leq V_j(x_j) \leq K_2(|x_j|) \end{aligned} \quad (۷)$$

$$\dot{V}_i(x_i) \leq -\alpha(V_i(x_i)), \quad \forall t \in T_{s\downarrow}(t_l, t_{l+1}) \quad (۸)$$

$$\dot{V}_i(x_i) \leq \beta_1(V_i(x_i)), \quad \forall t \in T_{s\uparrow}(t_l, t_{l+1}) \quad (۹)$$

$$\dot{V}_j(x_j) \leq \beta_2(V_j(x_j)), \quad \forall t \in T_{u\uparrow}(t_l, t_{l+1}) \quad (۱۰)$$

$$\dot{V}_j(x_j) \leq -\beta_3(V_j(x_j)), \quad \forall t \in T_{u\downarrow}(t_l, t_{l+1}) \quad (۱۱)$$

$$V_i(x_{t_l}) \leq \mu_i(V_j(x_{t_l})), \quad \forall (i, j) \in P \times P, i \neq j \quad (۱۲)$$

آنگاه اگر رابطه (۱۳) و (۱۴) برقرار شود سیستم پایدار نمایی خواهد شد.

$$\frac{n(\ln \mu) + \beta_3 T_u + \tau_u(\beta_2 - \beta_3) + (n-1)\tau_s(\alpha + \beta_1)x(t)}{\alpha(n-1)} \leq T_s \quad (۱۳)$$

$$\frac{K(n \ln \mu + \tau_u(\beta_2 - \beta_3) + (n-1)\tau_s(\alpha + \beta_1))}{n((K-1)\alpha - \beta_3)} \leq \tau_a \quad (۱۴)$$

در رابطه (۱۳) اگر N_σ تعداد کل سوئیچ سیستم باشد، فرض می‌شود سیستم به تعداد N_σ/n بار به زیرسیستم‌های ناپایدار سوئیچ می‌کند. همچنین T_u ماکزیمم زمان فعال بودن زیرسیستم ناپایدار، T_s مینیمم زمان فعال بودن زیرسیستم پایدار و τ_s, τ_u ماکزیمم زمان غیرهمزمانی در زیرسیستم‌های ناپایدار و پایدار می‌باشند. همچنین در رابطه (۱۴) فرض شده است $1/K$ کل مدت زمان فعالیت سیستم، زیرسیستم ناپایدار فعال می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم در زمان $t \in [t_l, t_{l+1}]$ زیرسیستم پایدار فعال

می‌باشد، پس از رابطه (۸) و (۹) انتگرال گرفته می‌شود

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(x_t) &\leq e^{\beta_1 \tau_s - \alpha(t-t_l - \tau_s)} V_{\sigma(t_l)}(x_{t_l}) \\ V_{\sigma(t)}(x_t) &\leq e^{-\alpha(T_{L+1})} e^{\tau_s(\beta_1 + \alpha)} V_{\sigma(t_l)}(x_{t_l}) \end{aligned} \quad (۱۵)$$

که در رابطه (۱۵)، T_{L+1} بیانگر طول بازه از t تا t_l هست.

حال اگر بازه انتگرال گیری را یک بازه به عقب برگردانده شود با توجه به رابطه (۱۰) و (۱۱) خواهیم داشت

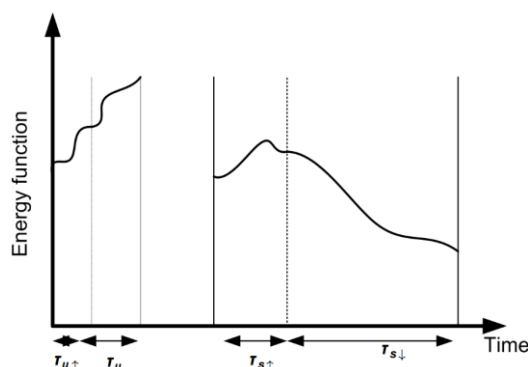
$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{pmatrix} < 0 \quad (۶)$$

توجه شود نامعادلات (۴) و (۵) غیر خطی می‌باشند و با استفاده از این لم می‌توان نامعادله را بصورت خطی تبدیل کرد.

۳- قضایای پایداری و طراحی کنترل کننده در

سیستم‌های پیوسته زمان

در این قسمت برای بررسی پایداری سیستم کلیدزنی، زیرسیستم‌ها را به دو دسته کلی زیرسیستم‌های پایدار و ناپایدار تقسیم‌بندی می‌شود. منظور از زیرسیستم‌های پایدار، زیرسیستم‌هایی است که یا به‌طور ذاتی پایدار هستند و یا با استفاده از کنترل کننده می‌توان پایدار کرد و منظور از زیرسیستم‌های ناپایدار، زیرسیستم‌هایی است که به دلایل ذکر شده در مقدمه امکان پایداری سازی آن‌ها وجود ندارد. برای اثبات پایداری سیستم کلیدزنی در این حالت باید از توابع شبه لیپانوف که اجازه افزایش انرژی زیرسیستم‌ها در هنگام فعال بودن را می‌دهند، استفاده کرد. همانطور که بیان شد در حالت کنترل غیرهمزمان سیستم کلیدزنی، چون ناظر نیازمند مدت زمانی می‌باشد که زیرسیستم فعال را تشخیص دهد و سپس کنترل کننده مربوط به آن زیرسیستم را در حلقه قرار دهد، کنترل کننده مربوط به زیرسیستم قبلی در مدار همچنان قرار دارد و در نتیجه انرژی زیرسیستم فعال افزایش پیدا می‌کند. در چنین سیستمی تابع لیپانوف سیستم کلیدزنی دارای دو زیرسیستم پایدار و ناپایدار، در سه قسمت در حال افزایش می‌باشد و تنها در قسمتی که زیرسیستم پایدار فعال است و با کنترل کننده مربوط به خود به صورت همزمان فعالیت می‌کند، کاهش می‌یابد، نمایی از انرژی این سیستم را در شکل ۳ مشاهده می‌شود.



شکل ۳: تابع انرژی زیرسیستم‌ها در حالت کنترل غیرهمزمان

چهار بازه زمانی شکل ۳ را در حالت غیرهمزمانی $T_{u\uparrow}(t_l, t_{l+1})$ و $T_{s\uparrow}(t_l, t_{l+1})$ به ترتیب برای زیرسیستم‌های ناپایدار و پایدار و همچنین در حالت همزمانی به دو قسمت $T_u(t_l, t_{l+1})$ و $T_{s\downarrow}(t_l, t_{l+1})$ را به ترتیب برای زیرسیستم‌های ناپایدار و پایدار تقسیم بندی می‌شود. همان طور که مشخص است توابع انرژی زیر سیستم‌ها

$$c_0 = \mu^{N_0} e^{\frac{N_0}{n} \beta_3 (T_u)} e^{\frac{\tau_u}{n} \frac{N_0}{n} (\beta_2 - \beta_3)} \times e^{-\frac{(n-1)N_0}{n} \alpha (T_s)} e^{\frac{(n-1)N_0}{n} (\alpha + \beta_1) (\tau_s)} \quad (22)$$

$$c = \sqrt{\frac{c_0}{\lambda_{\min}(p)}}$$

حال برای بدست آوردن زمان اقامت میانگین مجاز بین دو سوئیچ، با توجه به اینکه فرض می شود $1/K$ کل مدت زمان فعالیت سیستم، زیرسیستم ناپایدار فعال می باشد، رابطه (۱۷) را می توان به صورت

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \leq \mu^{N_\sigma} e^{\beta_3 \frac{(t-t_0)}{K}} e^{\tau_u \frac{N_\sigma}{n} (\beta_2 - \beta_3)} e^{-\frac{(K-1)}{K} \alpha (t-t_0)} e^{\frac{(n-1)N_\sigma}{n} (\alpha + \beta_1) \tau_s} V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) \quad (23)$$

بازنویسی کرد و با استفاده از رابطه (۳) می توان نوشت

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \leq \mu^{N_0} e^{\tau_u \frac{N_0}{n} (\beta_2 - \beta_3)} e^{\frac{(n-1)N_0}{n} (\alpha + \beta_1) \tau_s} (\mu e^{\frac{(\beta_2 - \beta_3) \tau_u}{n}} e^{\frac{(n-1)(\alpha + \beta_1) \tau_s}{n}})^{\frac{t-t_0}{\tau_u}} e^{\frac{1}{K} \beta_3 (t-t_0)} e^{\frac{(K-1)}{K} \alpha (t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) \quad (24)$$

و برای برقراری پایداری نمایی زمانی که t به سمت بینهایت برود، باید $V_{\sigma(t)}$ به سمت صفر میل کند. از این رو در رابطه (۲۳) باید مجموع توان های شامل توان t منفی باشد، که همان رابطه (۱۴) قضیه ۱ می باشد.

$$\frac{K(n \ln \mu + \tau_u (\beta_2 - \beta_3) + (n-1) \tau_s (\alpha + \beta_1))}{n((K-1)\alpha - \beta_3)} \leq \tau_u$$

نکته ۱: در این قضیه مشاهده می شود که می توان با کنترل مینیمم

مدت زمان فعالیت زیرسیستم پایدار نسبت به ماکزیمم مدت زمان فعالیت زیرسیستم ناپایدار و ضرایب افزایش و کاهش انرژی زیرسیستم ها، سیستم کلیدزنی را پایدار کرد. از طرف دیگر چون در اثبات این قضیه از ADT استفاده شده است، میانگین مدت زمان سوئیچ بین زیرسیستم ها نیز باید از یک مقدار مشخص بیشتر باشد.

در قضیه ۱ مشاهده شد که با انتخاب تابع لیپانوف، مقادیر α ، β_1 ، β_2 و β_3 مشخص می شوند و آنگاه در روابط (۱۴، ۱۳) تنها مقدار ماکزیمم و مینیمم زمان فعال بودن زیرسیستم ها دست طراح می باشد. از این رو دنبال روش طراحی کنترل کننده فیدبک حالتی هستیم که طراح بتواند شیب افزایش و کاهش انرژی سیستم را نیز مشخص کند تا دارای درجه آزادی بیشتری باشد. در روش معرفی شده تنها مشخصات زیرسیستم و ضرایب α ، β_1 ، β_2 و β_3 به الگوریتم داده می شود و در نهایت توابع لیپانوف و مقادیر کنترل کننده ها را مشخص می کند. بدیهی

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \leq e^{-\alpha(T_{L+1})} e^{\tau_s (\beta_1 + \alpha)} \mu e^{\beta_2 \tau_u + \beta_3 (t_1 - t_{1-1} \tau_u)} V_{\sigma(t_{1-1})}(x_{t_{1-1}}) \quad (16)$$

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \leq e^{-\alpha(T_{L+1})} e^{\tau_s (\beta_1 + \alpha)} \mu e^{\beta_3 (T_L)} e^{\tau_u (\beta_2 - \beta_3)} V_{\sigma(t_{1-1})}(x_{t_{1-1}})$$

که در رابطه (۱۶)، T_L میانگین طول بازه از t_{l-1} تا t_{l+1} هست.

در ادامه اگر فرض شود تعداد N_σ/n از زیرسیستم ها ناپایدار باشد، آنگاه اگر بازه های انتگرال گیری را تا t_0 به عقب برگردانده شود؛ با توجه به اینکه ماکزیمم طول بازه زیرسیستم ناپایدار را T_u و مینیمم طول بازه زیرسیستم پایدار T_s تعریف شده است، رابطه

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \leq \mu^{N_\sigma} e^{\frac{N_\sigma}{n} \beta_3 (T_u)} e^{\tau_u \frac{N_\sigma}{n} (\beta_2 - \beta_3)} e^{-\frac{(n-1)N_\sigma}{n} \alpha (T_s)} e^{\frac{(n-1)N_\sigma}{n} (\alpha + \beta_1) \tau_s} V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) \quad (17)$$

بدست می آید و اگر N_σ را با استفاده از قضیه زمان توقف میانگین (۳) جایگذاری شود، رابطه

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \leq \mu^{N_0} e^{\frac{N_0}{n} \beta_3 (T_u)} e^{\tau_u \frac{N_0}{n} (\beta_2 - \beta_3)} e^{-\frac{(n-1)N_0}{n} \alpha (T_s)} e^{\frac{(n-1)N_0}{n} (\alpha + \beta_1) \tau_s} (\mu e^{\frac{\beta_3 T_u}{n}} e^{\frac{(\beta_2 - \beta_3) \tau_u}{n}} e^{-\frac{(n-1)\alpha (T_s)}{n}} e^{\frac{(n-1)(\alpha + \beta_1) \tau_s}{n}})^{\frac{t-t_0}{\tau_u}} V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) \quad (18)$$

حاصل می شود. برای برقراری پایداری مجانبی سراسری وقتی که t به سمت بینهایت برود، باید $V_{\sigma(t)}$ به سمت صفر میل کند. در رابطه (۱۸) قسمت اول عبارت زمانی که t به سمت بینهایت برود، عدد ثابتی است و برای اینکه $V_{\sigma(t)}$ به سمت صفر میل کند، باید مجموع توان های e منفی باشد یعنی

$$\ln(\mu) + \frac{\beta_3 T_u}{n} + \frac{(\beta_2 - \beta_3) \tau_u}{n} - \frac{(n-1)\alpha (T_s)}{n} + \frac{(n-1)(\alpha + \beta_1) \tau_s}{n} < 0 \quad (19)$$

که با بردن عبارت T_s به یک سمت تساوی، رابطه (۱۳) حاصل می شود.

از طرفی برای رسیدن به پایداری نمایی با توجه به تعریف آن به صورت $\|x(t)\| \leq c (\|x(t_0)\|) e^{-\lambda t}$ و اتخاذ تابع لیپانوف به صورت $V_p(x_t) = x^T p x$ برای برقراری پایداری نمایی مقدار λ و c از رابطه (۲۱) و (۲۲) محاسبه می شود.

$$\lambda = \frac{1}{2\tau_u} (\ln \mu + \frac{1}{n} \beta_3 (T_u) + \tau_u \frac{1}{n} (\beta_2 - \beta_3) - \frac{(n-1)}{n} \alpha (T_s) + \tau_s \frac{(n-1)}{n} (\beta_1 + \alpha)) \quad (22)$$

است که این ضرایب با توجه به زیرسیستم ها همیشه دارای جواب نمی- باشند و امکان دارد، نامعادلات حل ناشدنی شوند.

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_{ii}x(t) & \forall t \in T_u(t_l, t_{l+1}) \\ A_{ji}x(t) & \forall t \in T_{u\uparrow}(t_l, t_{l+1}) \end{cases} \quad (33)$$

نوشت، که در آنها

$$A_{ii} = A_i + B_i K_i, \quad A_{ij} = A_i + B_i K_j \quad (34)$$

$$A_{ji} = A_j + B_j K_i, \quad A_{jj} = A_j + B_j K_j \quad (35)$$

حال دو دسته توابع شبه لیاپانوف را بصورت مربعی و به شکل

معادلات فرم

$$V_i = x^T P_i x, \quad V_j = x^T P_j x \quad (36)$$

در نظر گرفته می شود. حال عبارات

$$\dot{V}_i + \alpha V_i = x(t)^T [A_{ii}P_i + P_i A_{ii} + \alpha P_i] x(t) \quad (37)$$

$$\dot{V}_i - \beta_1 V_i = x(t)^T [A_{ij}P_i + P_i A_{ij} - \beta_1 P_i] x(t) \quad (38)$$

$$\dot{V}_j - \beta_2 V_j = x(t)^T [A_{ji}P_j + P_j A_{ji} - \beta_2 P_j] x(t) \quad (39)$$

$$\dot{V}_j - \beta_3 V_j = x(t)^T [A_{jj}P_j + P_j A_{jj} - \beta_3 P_j] x(t) \quad (40)$$

را تشکیل می دهیم. با توجه به فرضیات قضیه ۱-۴ که شرایط تضمین-

کننده پایداری را بیان می کند باید عبارات داخل کروشه منفی معین

باشند، به بیان دیگر

$$A_{ii}P_i + P_i A_{ii} + \alpha P_i \leq 0 \quad (41)$$

$$A_{ij}P_i + P_i A_{ij} - \beta_1 P_i \leq 0$$

$$A_{ji}P_j + P_j A_{ji} - \beta_2 P_j \leq 0 \quad (42)$$

$$A_{jj}P_j + P_j A_{jj} - \beta_3 P_j \leq 0$$

حال با جایگذاری A_{ii} , A_{ij} , A_{ji} در معادلات (۴۱) و (۴۲) خواهیم

داشت

$$A_i^T P_i + K_i^T B_i^T P_i + P_i A_i + P_i B_i K_i + \alpha P_i \leq 0 \quad (43)$$

$$A_i^T P_i + K_j^T B_i^T P_i + P_i A_i + P_i B_i K_j - \beta_1 P_i \leq 0 \quad (44)$$

$$A_j^T P_j + K_j^T B_j^T P_j + P_j A_j + P_j B_j K_j - \beta_2 P_j \leq 0 \quad (45)$$

$$A_j^T P_j + K_i^T B_j^T P_j + P_j A_j + P_j B_j K_i - \beta_3 P_j \leq 0 \quad (46)$$

چون در عبارت فوق دو مقدار P و K عبارات مجهولی هستند،

نامساوی های ماتریسی به صورت غیرخطی ظاهر شده اند که برای خطی

سازی آن ها دو طرف نامساوی (۴۳) و (۴۴) را در P_i^{-1} و دو طرف

نامساوی (۴۵) و (۴۶) را در P_j^{-1} ضرب کرده و از تغییر متغیر-

های $P_j^{-1} = S_j$ و $P_i^{-1} = S_i$ استفاده کرد به معادلات ۲۵ تا ۲۸

خواهیم رسید. همچنین با توجه به رابطه (۱۲) در قضیه ۱ که بیان کننده

شرایط تضمین پایداری سیستم است خواهیم داشت $P_i < \mu P_j$ و

یا $S_i^{-1} < S_j^{-1}$ که همان عبارت (۲۹) می باشد.

قضیه ۲: سیستم سوئیچ خطی $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t)$

و ثابت های $\alpha > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$ و $\mu \geq 1$ را در

نظر بگیرید. اگر ماتریس های مثبت معین $P_i^{-1} = S_i$ و $P_j^{-1} = S_j$

که اندیس های i مربوط به زیرسیستم های پایدار و اندیس های j مربوط به

زیرسیستم های پایدارناپذیر می باشند، وجود داشته باشند به نحوی که برای

هر i و j نابرابر داشته باشیم

$$A_i S_i + B_i U_{ii} + S_i A_i^T + U_{ii}^T B_i^T + \alpha S_i \leq 0 \quad (25)$$

$$A_i S_i + B_i U_{ij} + S_i A_i^T + U_{ij}^T B_i^T - \beta_1 S_i \leq 0 \quad (26)$$

$$A_j S_j + B_j U_{ji} + S_j A_j^T + U_{ji}^T B_j^T - \beta_2 S_j \leq 0 \quad (27)$$

$$A_j S_j + B_j U_{jj} + S_j A_j^T + U_{jj}^T B_j^T - \beta_3 S_j \leq 0 \quad (28)$$

$$S_j \leq \mu S_i \quad (29)$$

که در آن

$$U_{ij} = K_j S_i, \quad U_{ii} = K_i S_j \quad (30)$$

$$U_{ij} = K_i S_j, \quad U_{jj} = K_j S_j$$

آنگاه یک دسته کنترل کننده پایدارساز وجود خواهد داشت که با هر

سوئیچ دلخواه که شرط (۱۳) و (۱۴) را برآورده کند، سیستم پایدار

مجبانی نمای خواهد بود و مقدار بهره از رابطه (۳۱) محاسبه می شود.

$$K_i = U_{ii} S_i^{-1}, \quad K_j = U_{jj} S_j^{-1} \quad (31)$$

اثبات: بار دیگر انرژی زیرسیستم ها را همانند شکل (۳) در نظر

بگیرید و مشاهده می شود برای دو دسته زیرسیستم و دو دسته کنترل-

کننده، چهار حالت حلقه کنترلی می تواند بسته شود. برای زیرسیستم های

ناپایدار در حالت غیرهمزمانی، کنترل کننده مخصوص زیرسیستم های

پایدار در مدار قرار می گیرد و در حالت همزمانی هم کنترل کننده

مخصوص خود زیرسیستم در حلقه بسته می شود و به همین منوال برای

زیرسیستم های پایدار حلقه کنترلی همراه با دو گروه کنترل کننده بسته

می شود.

به همین علت دینامیک زیرسیستم های پایدار به همراه کنترل کننده

فیدبک حالت به فرم $u = Kx$ برای سیستم کلیدزنی خطی می توان

معادلات

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_{ii}x(t) & \forall t \in T_{s\downarrow}(t_l, t_{l+1}) \\ A_{ij}x(t) & \forall t \in T_{s\uparrow}(t_l, t_{l+1}) \end{cases} \quad (32)$$

نوشت و همچنین دینامیک زیرسیستم های ناپایدار به همراه کنترل کننده را

نیز می توان به صورت معادله

۴- قضایای بررسی پایداری و طراحی کنترل کننده در سیستم های گسسته زمان

باتوجه به انجام محاسبات رایانه ای و نیاز روز افزون از استفاده از مدل های گسسته در زمان در تحلیل و طراحی سیستم های کنترلی در این بخش قضایای مربوط به بررسی پایداری و طراحی کنترل کننده برای سیستم های کلیدزنی در حالت گسسته در زمان بیان شده است.

قضیه ۳: سیستم کلیدزنی $x(k+1) = A_{\sigma}x(k) + B_{\sigma}u(k)$ و ثابت های $1 > \alpha > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$ و $\mu \geq 1$ را در نظر بگیرید که در آن لحظات نمونه برداری به ترتیب $k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ می باشد. آنگاه اگر برای هر $\sigma(t) = i \in P$ که زیرسیستم پایدار و هر $\sigma(t) = j \in P$ که زیرسیستم ناپایدار فعال می شود $V_i: R^n \rightarrow R$ و $V_j: R^n \rightarrow R$ و همچنین دو تابع κ_1 و κ_2 از کلاس K_{∞} وجود داشته باشند که

$$\begin{aligned} \kappa_1(|x_k|) \leq V_i(x_t) \leq \kappa_2(|x_k|) \\ \kappa_1(|x_k|) \leq V_j(x_t) \leq \kappa_2(|x_k|) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\Delta V_i(x_k) \leq -\alpha(V_i(x_k)), \quad \forall t \in T_{s\downarrow}(k_l, k_{l+1}) \quad (48)$$

$$\Delta V_i(x_k) \leq \beta_1(V_i(x_k)), \quad \forall t \in T_{s\uparrow}(k_l, k_{l+1}) \quad (49)$$

$$\Delta V_j(x_k) \leq \beta_2(V_j(x_k)), \quad \forall t \in T_{u\uparrow}(k_l, k_{l+1}) \quad (50)$$

$$\Delta V_j(x_k) \leq \beta_3(V_j(x_k)), \quad \forall t \in T_{u\downarrow}(k_l, k_{l+1}) \quad (51)$$

$$V_i(x_k) \leq \mu_i(V_j(x_k)), \quad \forall (i, j) \in P \times P, i \neq j \quad (52)$$

آنگاه اگر رابطه (۵۳) برقرار شود و میانگین فواصل بین دو لحظه کلیدزنی از رابطه (۵۴) پیروی کند، سیستم پایدار مجانبی نمایی خواهد شد.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-n)\ln(1-\alpha)}(n \ln(\mu) + (n-1)\ln(\frac{1+\beta_1}{1-\alpha}))\tau_s \\ + \ln(\frac{1+\beta_2}{1+\beta_3})\tau_u + k_u \ln(1+\beta_3) < k_s \end{aligned} \quad (53)$$

$$\frac{K(n \ln \mu + \tau_u \ln(\frac{1+\beta_2}{1+\beta_3}) + (n-1)\tau_s \ln(\frac{1+\beta_1}{1-\alpha}))}{n((1-K)\ln(1-\alpha) - \ln(1+\beta_3))} < \tau_a \quad (54)$$

که در آن k_s مینیمم بازه فعال بودن یک زیرسیستم پایدار و k_u ماکزیمم بازه فعال بودن یک زیرسیستم ناپایدار است. همچنین τ_s و τ_u ماکزیمم بازه غیرهمزمانی در زیرسیستم های ناپایدار و پایدار می باشند و همچنین به نسبت $1/K$ کل بازه های سوئیچ که با $k - k_0$ نمایش داده می شود، زیرسیستم های ناپایدار فعال باشند.

اثبات: روند اثبات همانند قضیه ۱ می باشد. به طوری که در ابتدا فرض می شود سیستم در یک زیر بازه پایدار و یا ناپایدار باشد و سپس به بازه های سوئیچ عقب تر باز می گردیم تا به بازه اولیه برسیم. آنگاه اگر هنگامی که k به سمت بی نهایت برود، مقدار $V_{\sigma(k)}$ به سمت صفر میل کند، سیستم پایدار مجانبی سراسری خواهد بود و چون این روند کاهشی بصورت نمایی باشد سیستم پایدار نمایی سراسری خواهد شد.

قضیه ۴: سیستم کلیدزنی $x(k+1) = A_{\sigma}x(k) + B_{\sigma}u(k)$ و ثابت های $1 > \alpha > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$ و $\mu \geq 1$ را در نظر بگیرید. اگر ماتریس های مثبت معین $P_i^{-1} = S_i$ و $P_j^{-1} = S_j$ که اندیس های i مربوط به زیرسیستم های پایدار و اندیس های j مربوط به زیرسیستم های پایدار ناپذیر می باشند، وجود داشته باشند به نحوی که برای هر i و j نابرابر داشته باشیم $S_j < \mu S_i$

$$\begin{pmatrix} -S_i & A_i S_i + B_i U_{ii} \\ * & -(1-\alpha)S_i \end{pmatrix} \leq 0 \quad (55)$$

$$\begin{pmatrix} -S_i & A_i S_i + B_i U_{ij} \\ * & (1+\beta_1)S_i \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} -S_j & A_j S_j + B_j U_{ji} \\ * & (1+\beta_2)S_j \end{pmatrix} \leq 0 \quad (56)$$

$$\begin{pmatrix} -S_j & A_j S_j + B_j U_{jj} \\ * & (1+\beta_3)S_j \end{pmatrix} \leq 0$$

برقرار باشند. آنگاه یک دسته کنترل کننده پایدارساز وجود خواهد داشت که با هر سوئیچ دلخواه که شرط (۵۳) و (۵۴) را برآورده کند، سیستم پایدار مجانبی نمایی یکنواخت سراسری خواهد بود.

اثبات: برای طراحی یک دسته کنترل کننده وابسته به زیرسیستم به صورت فیدبک حالت، همانند حالت پیوسته به چهار صورت، حلقه کنترلی بسته می شود و معادلات دینامیکی سیستم به همراه کنترل کننده برای زیرسیستم پایدار به صورت زیر می شود.

$$x(k+1) = \begin{cases} A_{ii}x(k) & \forall t \in T_{s\downarrow}(k_l, k_{l+1}) \\ A_{ij}x(k) & \forall t \in T_{s\uparrow}(k_l, k_{l+1}) \end{cases} \quad (57)$$

و برای زیرسیستم ناپایدار نیز به همین صورت تحقق می یابد.

$$x(k+1) = \begin{cases} A_{jj}x(k) & \forall t \in T_{u\downarrow}(k_l, k_{l+1}) \\ A_{ji}x(k) & \forall t \in T_{u\uparrow}(k_l, k_{l+1}) \end{cases} \quad (58)$$

و اگر توابع لیپانوف را به صورت $V_i = x^T P_i x$, $V_j = x^T P_j x$ نظر گرفته شود می توان نوشت:

$$\Delta V_i(x_k) + \alpha V_i(x_k) = x_k^T (A_{ii}^T P_i A_{ii} + \alpha P_i - P_i) x_k \quad (59)$$

$$\Delta V_i(x_k) - \beta_1 V_i(x_k) = x_k^T (A_{ij}^T P_i A_{ij} - \beta_1 P_i - P_i) x_k \quad (61)$$

همچنین با توجه به (۵۲) در قضیه ۳ که بیان کننده شرایط پایداری سیستم است خواهیم داشت $P_i < \mu P_j$ و یا $S_i^{-1} < \mu S_j^{-1}$ که همان $S_j < \mu S_i$ می باشد.

۵- نتایج شبیه سازی

مثال ۵-۱) یک سیستم کلیدزنی دارای دو زیرسیستم پیوسته

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۷۲)$$

را در نظر بگیرید. زیرسیستم اول کنترل ناپذیر و دارای دو مقدار ویژه ناپایدار و مساوی ۱ می باشد ولی زیرسیستم دوم با وجود ناپایداری کنترل ناپذیر می باشد. هدف این مثال بدست آوردن کنترل کننده هایی است که مینیمم زمان لازم برای فعالیت یک زیرسیستم پایدار که به عنوان مثال ۴،۲ ثانیه باشد را برآورده کنند. این کار با استفاده از انتخاب مناسب ضرایب $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ امکان پذیر می شود. مقادیر شبیه سازی $n=2, \tau_s=0.12s, \tau_u=0.12s, T_u=1.3s, k=4.2, \mu=1.2$ و همچنین ضرایب افزایش و کاهش انرژی زیرسیستم هم بصورت $\alpha=1, \beta_1=2, \beta_2=8$ انتخاب می شوند. برای اینکه زیرسیستم با مینیمم زمان ۴،۲ ثانیه پایدار شود، بنابر قضیه ۴-۱ مقدار β_3 باید برابر ۲،۱ انتخاب شود. با این ضرایب، توابع لیانوف با استفاده از قضیه ۵-۱ و نرم افزار یالمپ [۲۰] به صورت

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2.58 & 1.51 \\ 1.51 & 1.25 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.63 \\ -0.63 & 1.70 \end{bmatrix} \quad (۷۳)$$

و معادلات کنترل کننده بصورت

$$k_1 = [-0.774 \quad -2.247], k_2 = [-2.0884 \quad -2.045] \quad (۷۴)$$

بدست می آیند. در شکل ۴ و ۵ پاسخ حالت و انرژی زیرسیستم هنگامی که مینیمم زمان فعال بودن زیرسیستم پایدار ۴،۲ ثانیه باشد آورده شده است، که نشانگر کارایی قضایای معرفی شده می باشد. همچنین بنابر قضیه ۱ مینیمم میانگین زمان بین دو سوئیچ باید از ۱،۹۹ ثانیه بیشتر باشد که در شبیه سازی ۲،۷ ثانیه است که از مقدار مینیمم بیشتر است. البته در شکل ۴ سیستم با توجه به نحوه انتخاب شرایط اولیه و همچنین ضرایب $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ دارای بالازدگی های مختلفی خواهد بود که قابل توجه نیز می باشد.

$$\Delta V_j(x_k) - \beta_2 V_j(x_k) = x_k^T (A_{ji}^T P_j A_{ji} - \beta_2 P_j - P_j) x_k \quad (۶۲)$$

$$\Delta V_j(x_k) - \beta_3 V_j(x_k) = x_k^T (A_{jj}^T P_j A_{jj} - \beta_3 P_j - P_j) x_k \quad (۶۳)$$

حال با جایگذاری A_{ii}, A_{ij}, A_{ji} و A_{jj} به روابط

$$\Delta V_i(x_k) + \alpha V_i(x_k) = x_k^T ((A_i + B_i K_i)^T P_i (A_i + B_i K_i) + (\alpha - 1) P_i) x_k \quad (۶۴)$$

$$\Delta V_i(x_k) - \beta_1 V_i(x_k) = x_k^T ((A_i + B_i K_i)^T P_i (A_i + B_i K_i) - (\beta_1 + 1) P_i) x_k \quad (۶۵)$$

$$\Delta V_j(x_k) - \beta_2 V_j(x_k) = x_k^T ((A_j + B_j K_j)^T P_j (A_j + B_j K_j) - (\beta_2 + 1) P_j) x_k \quad (۶۶)$$

$$\Delta V_j(x_k) - \beta_3 V_j(x_k) = x_k^T ((A_j + B_j K_j)^T P_j (A_j + B_j K_j) - (\beta_3 + 1) P_j) x_k \quad (۶۷)$$

خواهیم رسید که با استفاده از لم شر معادلات (۶۸) تا (۶۹) بدست می آیند.

$$\begin{pmatrix} -P_i & P_i A_i + P_i B_i K_i \\ * & -(1 - \alpha) P_i \end{pmatrix} \leq 0 \quad (۶۸)$$

$$\begin{pmatrix} -P_i & P_i A_i + P_i B_i K_i \\ * & (1 + \beta_1) P_i \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} -P_j & P_j A_j + P_j B_j K_j \\ * & (1 + \beta_2) P_j \end{pmatrix} \leq 0 \quad (۶۹)$$

$$\begin{pmatrix} -P_j & P_j A_j + P_j B_j K_j \\ * & (1 + \beta_3) P_j \end{pmatrix} \leq 0$$

و با انجام تغییر متغیرهای $S_i^{-1} = P_i^{-1}$ و $S_j^{-1} = P_j^{-1}$ به روابط (۷۰) تا (۷۱) می توان رسید.

$$\begin{pmatrix} -S_i^{-1} & S_i^{-1} A_i + S_i^{-1} U_{ii} \\ * & -(1 - \alpha) S_i^{-1} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (۷۰)$$

$$\begin{pmatrix} -S_i^{-1} & S_i^{-1} A_i + S_i^{-1} U_{ij} \\ * & (1 + \beta_1) S_i^{-1} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} -S_j^{-1} & S_j^{-1} A_j + S_j^{-1} U_{ji} \\ * & (1 + \beta_2) S_j^{-1} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (۷۱)$$

$$\begin{pmatrix} -S_j^{-1} & S_j^{-1} A_j + S_j^{-1} U_{jj} \\ * & (1 + \beta_3) S_j^{-1} \end{pmatrix} \leq 0$$

و با انجام عملیات مزدوج ترانواده و ضرب کردن (۷۰) در $\begin{pmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i \end{pmatrix}$

و (۷۱) در $\begin{pmatrix} S_j & 0 \\ 0 & S_j \end{pmatrix}$ روابط (۵۵) و (۵۶) حاصل خواهد شد.

نکته ۲: همان طور که در مثال ۵-۱ اشاره شد حداقل زمان میانگین بین دو سوئیچ برای تضمین پایداری بنابر قضیه ۱، ۱٫۹۹ ثانیه می باشد که در این مثال مقدار ۲٫۷۷ ثانیه لحاظ شده است. این در حالیست که حداکثر زمان فعالیت زیر سیستم ناپایدار ۱٫۴۲ ثانیه می باشد که کمتر از حداقل زمان میانگین بین دو سوئیچ است. این نکته بیان گر برتری کارایی قضیه زمان توقف میانگین و قضایای مطرح شده بر اساس آن در این مقاله بر قضیه زمان توقف که در مقالات دیگر مطرح شده، می باشد. زیرا با استفاده از قضایای ۱ و ۲ توانسته شد حداقل زمان لازم فعالیت زیرسیستم های پایدار را به طوریکه میانگین زمان بین دو سوئیچ بیشتر از مقدار مشخصی که از قضایای پایداری حاصل شده است، را بدست آورد باشد.

مثال ۵-۲) یک سیستم کلیدزنی دارای دو زیرسیستم گسسته

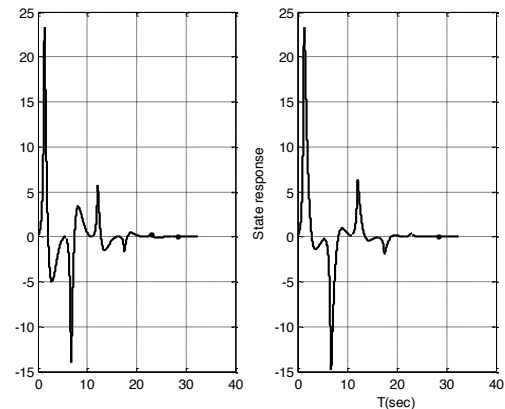
$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (75)$$

را در نظر بگیرید. زیرسیستم اول که کنترل ناپذیر است و دارای دو مقدار ویژه ناپایدار ۱ و ۲ می باشد ولی زیرسیستم دوم با وجود ناپایداری کنترل پذیر می باشد. زمان نمونه برداری را در این مثال ۰٫۱ ثانیه در نظر گرفته شده است. هدف این مثال بدست آوردن کنترل کننده هایی می باشد که مینیمم زمان لازم برای فعالیت یک زیرسیستم پایدار که به عنوان مثال ۰٫۶ ثانیه می باشد را برآورده کنند. این کار با استفاده از انتخاب مناسب ضرایب α ، β_1 ، β_2 و β_3 امکان پذیر می شود. مقادیر شبیه سازی $k = 4.2$ ، $n = 2$ ، $\tau_s = 0.1s$ ، $\tau_u = 0.12s$ ، $T_u = 1.2s$ و همچنین ضرایب افزایش و کاهش انرژی زیرسیستم هم بصورت $\mu = 1.2$ ، $\beta_1 = 2$ ، $\beta_2 = 3.5$ و $\beta_3 = 3$ انتخاب می شود. برای اینکه زیرسیستم با مینیمم زمان ۰٫۶ ثانیه پایدار شود، بنابر قضیه ۴-۲ مقدار α باید برابر ۰٫۹۵ انتخاب شود. با این ضرایب، توابع لیپانوف و کنترل کننده ها بصورت

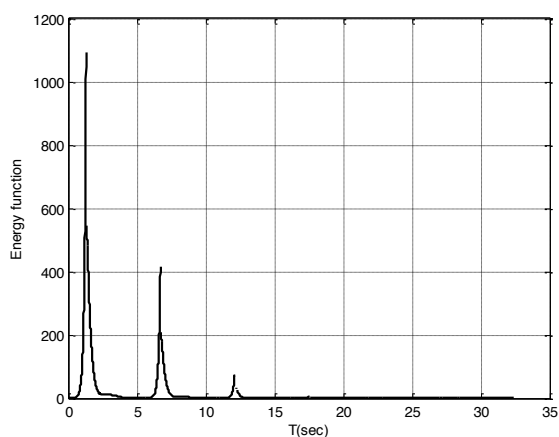
$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.035 \\ 0.035 & 0.226 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.45 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$k_1 = [-3.18 \ 0.19] \quad k_2 = [-2.12 \ 0.12] \quad (77)$$

بدست می آید. همان طور که مشخص است توسط کنترل کننده k_2 زیر سیستم ناپایدار دوم تبدیل به زیرسیستم پایدار می شود. شکل ۷ و ۸ پاسخ حالت و انرژی زیرسیستم هنگامی که مینیمم زمان فعال بودن زیرسیستم پایدار ۰٫۷ ثانیه باشد آورده شده است، که نشانگر کارایی قضایای معرفی شده می باشند. همچنین بنابر قضیه ۳ حداقل میانگین زمان بین دو سوئیچ باید از ۰٫۳۳ ثانیه بیشتر باشد که در شبیه سازی این مثال، ۱٫۱ ثانیه است که از مقدار مینیمم بیشتر است.

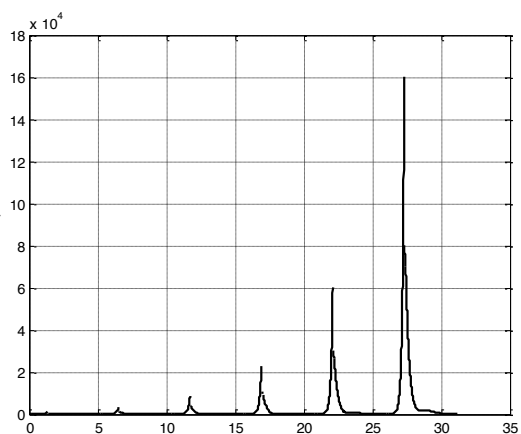


شکل ۴: پاسخ حالت مثال ۵-۱ با T_s برابر ۴٫۲ ثانیه



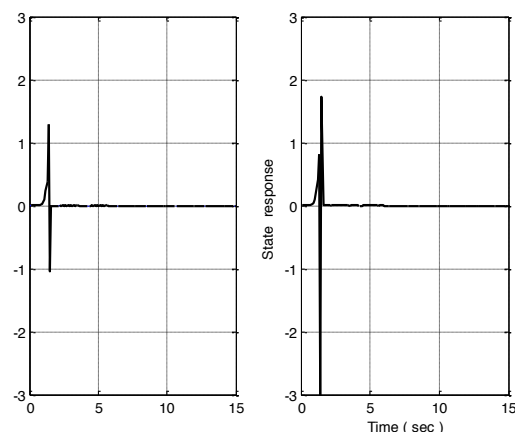
شکل ۵: انرژی سیستم مثال ۵-۱ با T_s برابر ۴٫۲ ثانیه

همچنین در شکل ۶ نمودار انرژی سیستم هنگامی که مینیمم زمان فعال بودن زیرسیستم پایدار کمتر از ۴٫۲ ثانیه آورده شده است و مشاهده می شود که انرژی سیستم رو به افزایش می رود و یا به عبارت دیگر سیستم ناپایدار شده است.



شکل ۶: انرژی سیستم مثال ۱ با T_s برابر ۳٫۹ ثانیه

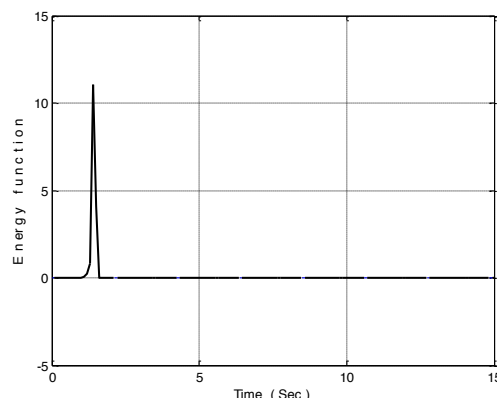
زیرسیستم های ناپایدار بیشتر باشد برای تضمین پایداری مینیمم زمان فعالیت زیرسیستم های پایدار نیز باید افزایش یابد. از طرف دیگر چون در این مقاله از قضیه زمان اقامت میانگین برای اثبات پایداری استفاده شده است، حداقل زمان اقامت میانگین نیز بر اساس پارامترهای سیستم محاسبه شد. همچنین از آنجایی که همواره تمام حالت ها سیستم در اختیار طراح نمی باشد، به عنوان پیشنهاد برای کارهای آتی طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی می توان مد نظر قرار گرفت. همچنین همانطور که اشاره شد ضرایب طراحی در شبیه سازی ها کاملاً دلخواه در نظر گرفته شده است، می توان با در نظر گرفتن یک معیار بهینگی، این ضرایب را طوری انتخاب کرد که در نهایت پاسخ گذرای سیستم مطلوب تر شود که می توان برای تحقیقات بعدی مد نظر قرار داد.



شکل ۷: پاسخ متغیر اول حالت مثال ۵-۲ با T_s برابر با ۰,۷ ثانیه

مراجع

- [1] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Birkhauser, Boston, MA, 2003.
- [2] P. J. Antsaklis, "A brief introduction to the theory and application of hybrid systems," In *Proc IEEE. Special Issue on Hybrid Systems: Theory and Applications*, 2000.
- [3] M. F. Testro, A. M. Karlsson, S. P. Svensson, and I. Lundstrom, "A model for switched-like phenomena in biological systems," *Biophysical chemistry*, vol. 94, no. 1, pp. 1-9, 2001.
- [4] Z. Jia, C. Dong, H. Cheng, and Q. Wang, "A robust fault detection for control system of morphing aerial vehicle based on switched system approach," In *Control and Decision Conference (CCDC), 2015 27th Chinese*, pp. 3147-3152, 2015.
- [5] J. D. Boskovic, R. K. Mehra, "Multi-mode switching in flight control," In *Proceedings of the 19th Digital Avionics Systems Conference*, Philadelphia, 2000.
- [6] J. D. Boskovic, and R. K. Mehra, "Multivariable adaptive controller design for a class of non-affine models arising in flight control," In *Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control*, Florida, 2001.
- [7] E. Palmer and G. Ledwich, "Switching control for power systems with line losses," In *IEEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution*, 1999, vol. 146, pp. 435-440.
- [8] K. S. Narendra and J. Balakrishnan, "A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices," *Automatic Control, IEEE Transaction on*, vol. 39, no. 12, pp. 2469-2471, 1994.



شکل ۸: انرژی سیستم مثال ۵-۲ با T_s برابر ۰,۷ ثانیه

نکته ۳: انتخاب ضرایب α , β_1 , β_2 و β_3 در این مثال ها به صورت دلخواه صورت گرفته است. ولی نحوه انتخاب این ضرایب تاثیر مستقیمی بر پاسخ های گذرا خواهند گذاشت. به عنوان مثال اگر حداکثر شیب ممکن برای افزایش تابع انرژی در حالت زیرسیستم ناپایدار را کاهش داده و یا زمان فعالیت زیر سیستم ناپایدار را کاهش دهیم، بالادستی نیز کاسته خواهد شد. از طرفی دیگر در صورت انتخاب نامناسب این ضرایب نامساوی های ماتریسی خطی دیگر دارای جواب نخواهند بود.

۸- نتیجه گیری

در این مقاله شرایط پایداری سیستم کلیدزنی دارای زیرسیستم های پایدارناپذیر در حضور غیرهمزمانی سوئیچ سیستم و کنترل کننده بیان شده است. این موضوع با استفاده از توابع شبه لیپانوف و اجازه دادن به زیرسیستم به افزایش یافتن انرژی به صورت محدود بدست آمده است. این قضایا با توجه به ماکزیمم زمان فعالیت زیرسیستم ناپایدار و ضرایب افزایش و کاهش انرژی زیرسیستم ها و مینیمم زمان فعالیت زیرسیستم های پایدار بدست آمده است. به بیان دیگر هر مقدار که بازه زمانی فعالیت

- [15] R. Wang, J. Xing, C. Zhou, P. Wang, and Q. Yang. "Finite-time asynchronously switched control of switched systems with sampled-data feedback," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol.33, no. 12, pp: 3713-3738, 2014.
- [16] C. Yuan, and F. Wu, "Asynchronous switching output feedback control of discrete-time switched linear systems," *International Journal of Control* ahead-of-print, pp: 1-9, 2015.
- [17] L. Zhang, and H. Gao, "Asynchronously switched control of switched linear systems with average dwell time," *Automatica*, vol. 46, no. 5, pp, 953-958, 2010.
- [18] H. Lin, G. Zhai, L. Fang and P. J. Antsaklis, "Stability and H_∞ performance preserving scheduling policy for networked control systems," *InProc. 16th IFAC World Congress on Automatic Control*, 2005.
- [19] H. Zhang, Y. Mao, and Y. Gao, "Exponential Stability and Asynchronous Stabilization of Switched Systems With Stable and Unstable Subsystems," *Asian Journal of Control*, vol.15, no. 5, pp. 1426-1433, 2013.
- [20] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, and E. E. Yaz. "Linear matrix inequalities in system and control theory," *Proceedings of the IEEE* vol.85, no. 4, pp. 698-699, 1997.
- [21] J. Löfberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," In *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, pp. 284-289, 2004.
- [9] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung, "Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach," *Automatic Control, IEEE Transactions on* vol. 47, no. 11, pp.1883-1887, 2002
- [10] M. S. Branicky, "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 43, no. 4, pp. 475-482, 1998.
- [11] L. Zhang, Lixian and P. Shi, "Stability,-gain and asynchronous control of discrete-time switched systems with average dwell time," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 9, pp. 2192-2199, 2009.
- [12] J. P. Hespanha, "Stability of switched systems with average dwell-time," In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, vol. 3, pp. 2655-2660, 1999.
- [13] P. Mhaskar, N. H., El-Farra and P. D. Christofides, "Robust predictive control of switched systems: satisfying uncertain schedules subject to state and control constraints," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 22, no. 2, pp. 161-179, 2008.
- [14] Z., Sun, *Switched linear system control and design*, Springer, London, 2005.

