

# طراحی یک کنترلگر مد لغزشی برای سامانه‌های تصادفی کسری دارای تأخیر حالت

خسرو خاندانی<sup>۱</sup>، وحید جوهری مجد<sup>۲</sup>، مهدیه طهماسبی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> فارغ‌التحصیل دکتری، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، khosro.khandani@modares.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، majd@modares.ac.ir

<sup>۳</sup> استادیار، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تربیت مدرس، tahmasebi@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۴/۱۲/۱۸، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۴/۱۷)

**چکیده:** در این مقاله روشی برای بررسی پایداری سامانه‌های تصادفی کسری ارائه می‌شود. ابتدا با استفاده از فرمول ایتوی کسری، مفهوم عملگر بینهایت کوچک توسعه داده می‌شود، که به وسیله آن بررسی پایداری سامانه‌های تصادفی کسری با استفاده از توابع لیاپانف ممکن می‌گردد. سپس از معیار پایداری ارائه شده برای توسعه روش کنترل مد لغزشی برای سامانه‌های تصادفی کسری دارای تأخیر حالت استفاده می‌شود. روش طراحی ارائه شده رسیدن مسیرهای حالت به سطح لغزش را با احتمال یک تضمین می‌نماید. بررسی پایداری سامانه در مد لغزش نیز با استفاده از عملگر بینهایت کوچک کسری ارائه شده انجام می‌شود و شروط پایداری تصادفی سامانه در قالب نامعادلات ماتریسی خطی ارائه می‌شود. جهت نشان دادن کارایی نتایج، کاربرد آن در کنترل زاویه پره یک توربین بادی با سرعت متغیر ارائه خواهد شد.

**کلمات کلیدی:** سامانه تصادفی کسری، عملگر بینهایت کوچک کسری، کنترل مد لغزشی، نامعادلات ماتریسی خطی، کنترل زاویه پره توربین بادی.

## A Sliding Mode Control Scheme for Fractional Stochastic Systems with State Delay

**Khosro Khandani, Vahid Johari Majd, Mahdiah Tahmasebi**

**Abstract:** In this paper, a new approach is proposed for stability analysis of fractional stochastic systems. By extending the concept of infinitesimal operator using the fractional Ito formula, it becomes possible to apply it in fractional stochastic systems for stability analysis by Lyapunov functions. Thereafter, the presented stability criterion is utilized to develop the sliding mode control scheme for fractional stochastic systems with state delay. The proposed design method ensures that the state trajectories reach the sliding surface with probability one. Stability analysis of the system at sliding mode is executed using the given fractional infinitesimal operator and the stochastic stability conditions are given in the form of linear matrix inequalities. To illustrate the efficiency of the results, the application of the method is presented for the pitch control of a variable speed wind turbine.

**Keywords:** fractional stochastic system, fractional infinitesimal operator, sliding mode control, linear matrix inequalities, pitch control of a wind turbine.

## ۱- مقدمه

اصطلاح سامانه‌های تصادفی مرتبه کسری در مورد دو دسته سامانه با ویژگی‌های نسبتاً متفاوت و در عین حال بسیار نزدیک به هم به کار رفته است. اولین دسته سامانه‌های مرتبه کسری به همراه نویز گوسی معمولی هستند یعنی سامانه‌هایی که دینامیک سامانه به طور ذاتی از نوع مرتبه کسری است و این سامانه در محیطی نویزی از عوامل تصادفی تأثیر می‌پذیرد. این سامانه‌ها در سال‌های اخیر پس از معرفی سامانه‌های مرتبه کسری مورد توجه قرار گرفته‌اند. اولین بار سامانه‌های تصادفی مرتبه کسری دسته اول در [۱] معرفی شدند. این سامانه‌ها تا کنون از جنبه طراحی فیلتر کالمن [۲-۴]، کنترل خودتنظیم [۵] و کنترل بهینه LQG برای سامانه‌های کسری تصادفی خطی [۶] مورد توجه بوده‌اند. تحلیل پایداری این سامانه‌ها و استفاده از توابع لیاپانف برای بررسی پایداری سامانه‌های خطی و غیرخطی این دسته تا کنون انجام نگرفته است. این موضوع عمدتاً به این دلیل است که تحلیل پایداری مستلزم حل معادلاتی خواهد بود که شامل انتگرال‌های ولترا هستند و هنوز ابزار ریاضی لازم یعنی فرمول ایتوی ولترا برای این دسته از سامانه‌ها هنوز توسعه داده نشده است. دسته دوم سامانه‌های تصادفی کسری به دسته سامانه‌هایی اطلاق می‌شود که سامانه از نوع مرتبه صحیح بوده اما نویز موجود از نوع کسری است. به عبارت دیگر این سامانه‌ها اگر در فرم استاندارد ایتو نوشته شوند به صورت معادلات دیفرانسیل یک سامانه مرتبه صحیح هستند که با حرکت براونی کسری رانده می‌شوند و حرکت براونی کسری را به عنوان ورودی در معادلات خود شامل می‌شوند. ویژگی‌های منحصربفرد حرکت براونی کسری بخصوص دارا بودن حافظه، آن را به عنوان یک نامزد مناسب برای مدل‌سازی نویز در ریاضیات مالی [۷]، زیست‌شناسی [۸]، شبکه‌های ارتباطی و سامانه‌های اقتصادی مطرح نموده است [۹]. به دلیل همین ویژگی دارا بودن حافظه، از حرکت براونی کسری جهت مدل کردن وابستگی طولانی مدت در ترافیک شبکه نیز استفاده شده است [۱۰]. همچنین حرکت براونی کسری بهترین گزینه برای مدل کردن توربولانس در سیالات است [۱۱]، و در فرایندهای زیر انتشاری<sup>۱</sup> و فراانتشاری<sup>۲</sup> در سیالات نیز از حرکت براونی کسری برای مدل‌سازی استفاده شده است [۱۲]. از دیگر کاربردهای حرکت براونی کسری استفاده از آن در مدل سرعت باد جهت تطبیق با توربولانس تصادفی باد است [۱۳-۱۴]. در این مقاله، از این پس اصطلاح سامانه تصادفی کسری به دسته دوم سامانه‌های معرفی شده در بالا اشاره خواهد داشت. این سامانه‌ها از جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. پیدا کردن جواب برای سامانه‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل تصادفی دارای حرکت براونی کسری به دلیل غیر نیمه مارتینگال<sup>۳</sup> و غیر مارکوف بودن<sup>۴</sup> حرکت براونی کسری با مشکلات عدیده‌ای همراه است و

بسیاری از مقالات صرفاً به پیدا کردن شرایط وجود و یکتایی جواب پرداخته‌اند. برای مروری بر این نتایج می‌توان به [۱۵] رجوع کرد. اخیراً یک روش تقریب مارتینگال برای دوری از این مشکلات ارائه شده است [۱۶]. در [۱۷] یک روش عددی بررسی پایداری سامانه‌های تصادفی دارای حرکت براونی کسری ارائه شده است. در [۱۸] حصول جواب صریح برای معادلات تصادفی کسری غیرخطی با کاهش دادن آنها به معادلات تصادفی کسری خطی ممکن شده است. با این وجود بررسی تحلیلی پایداری سامانه‌های تصادفی کسری انجام نگرفته است.

از طرف دیگر، بررسی پایداری و طراحی سامانه کنترل برای سامانه‌های تصادفی رانده شده با حرکت براونی معمولی انجام پذیرفته است. برای مرور نتایج پایداری برای این دسته از سامانه‌ها می‌توان به [۱۹-۲۲] رجوع نمود و جهت بررسی چند راهبرد کنترلی برای این دسته از سامانه‌ها به مراجع [۲۳-۲۵] مراجعه شود. از بین روش‌های متنوع کنترلی برای سامانه‌های تصادفی، روش کنترل مد لغزشی با توجه به پاسخ سریع، عملکرد قابل قبول در زمان گذرا، دقت بالا، پیاده‌سازی آسان و از همه مهمتر مقاوم بودن در برابر عدم قطعیت‌های مدل و اغتشاشات خارجی مورد توجه بوده است. این روش همچنین به مقاوم بودن در برابر اثرات تأخیر زمانی شناخته شده است [۲۶]. در [۲۷] یک قانون کنترل مد لغزشی برای سامانه‌های تصادفی تأخیردار دارای عدم قطعیت ارائه شده است و شرایط کافی برای پایداری سامانه حلقه بسته استخراج شده است. این روش امکان رسیدن به پایداری مجانبی در احتمال با عملکرد  $H^\infty$  را فراهم می‌آورد. همچنین نشان داده شده است که برای دسته خاصی از سامانه‌های تصادفی، طراحی کنترل سطح لغزشی  $H^\infty$  با حل نامعادلات ماتریسی خطی قابل حصول است. این روش در [۲۸] به سامانه‌های تصادفی غیرخطی توسعه داده شده است. در [۲۹-۳۰] یک سطح لغزشی انتگرالی برای سامانه تصادفی ساخته شده و شرایط کافی برای وجود سطح به صورت نامعادلات ماتریسی خطی ارائه شده است. در [۳۱] با توجه به در دسترس نبودن حالت‌های سامانه تصادفی از نوع ایتو، روش سطح لغزشی بر اساس تخمینی از حالت‌های سامانه به کار گرفته شده است و شرایط کافی برای پایداری مجانبی در احتمال برای سامانه تصادفی حلقه بسته ارائه شده است. در این مقاله نوع حرکت براونی استاندارد فرض شده است. کنترل سطح لغزشی انتگرالی برای سامانه‌های تصادفی از نوع ایتو در [۳۲] انجام گرفته است. مزیت این روش امکان مقابله با عیب‌ها و اغتشاشات سامانه و پایدارسازی سامانه عیب است. بیشتر نتایج بدست آمده در این مقالات مبتنی بر فرمول ایتو و محاسبه عملگر بینهایت کوچک یک تابع لیاپانف هستند.

در این مقاله یک سامانه تصادفی کسری که با حرکت براونی کسری رانده می‌شود، در نظر گرفته شده است. در ابتدا با استفاده از فرمول ایتوی کسری [۳۳]، عملگر بینهایت کوچک کسری معرفی می‌شود و قضیه پایداری مبتنی بر توابع لیاپانف برای سامانه‌های تصادفی کسری ارائه و اثبات می‌شود. سپس از این قضیه در استخراج قانون کنترل لغزشی مناسب

<sup>۱</sup> sub-diffusive<sup>۲</sup> super-diffusive<sup>۳</sup> non semi-martingale<sup>۴</sup> non Markovian

که در آن کرنل  $\Theta(t, s)$  برابر  $H^{-\frac{1}{2}}(t-s)$  است. به ازای  $H = \frac{1}{2}$  حرکت براونی کسری تبدیل به حرکت براونی خواهد شد و مشتق آن همان نویز سفید گوسی خواهد بود. به ازای  $H > \frac{1}{2}$  حرکت براونی کسری یک فرایند با حافظه بلندمدت نامیده می‌شود و به ازای  $H < \frac{1}{2}$  یک فرایند با حافظه کوتاه‌مدت خواهیم داشت. مدل ارائه شده در رابطه (۱)، دینامیک سامانه‌ای را توصیف می‌کند که در کاربردهایی نظیر سامانه‌های اقتصادی دارای تأخیر زمانی، سامانه‌های زیستی و سامانه‌هایی که دینامیک آن‌ها متأثر از سیالات محیط است مانند توربین بادی، هواپیما و سامانه‌های تنظیم استاندارد آلودگی‌های موجود در آب به کار می‌رود [۹]. در ادامه ابتدا تعریف پایداری تصادفی را مرور می‌کنیم که در این مقاله در قضیه ۱ از آن استفاده خواهیم کرد و سپس دو لم مفید که در اثبات قضایا از آنها استفاده می‌شود ارائه می‌گردد.

#### تعریف ۱ [۳۸] (پایداری تصادفی یا پایداری در احتمال<sup>۲</sup>).

فرض کنید  $x(t; x_0, t_0)$  جواب یک معادله دیفرانسیل تصادفی در زمان  $t$  با شرایط اولیه  $x_0$  در زمان  $t_0$  باشد، در این صورت جواب  $x = 0$  معادله دیفرانسیل تصادفی پایدار تصادفی است اگر به ازای  $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$  داده شده،  $\delta(\varepsilon, \varepsilon_1, t_0) > 0$  وجود داشته باشد به طوری که بتوان از  $\|x_0\| \leq \delta$  نتیجه گرفت که:

$$P \left\{ \sup_{t \geq t_0} \|x(t; x_0, t_0)\| > \varepsilon \right\} < \varepsilon \quad (۴)$$

لم ۱ [۳۵]. برای هر بردار حقیقی  $a$  و  $b$ ، و به ازای ماتریس  $X > 0$  با ابعاد مناسب می‌توان نوشت:

$$a^T b + b^T a \leq a^T X a + b^T X^{-1} b \quad (۵)$$

لم ۲ (مکمل شور). ماتریس‌های ثابت  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  را در

نظر بگیرید. فرض کنید  $\Omega_1 = \Omega_1^T$  و نیز  $\Omega_2 > 0$ . آنگاه خواهیم داشت:

$$\Omega_1 + \Omega_3^T \Omega_2^{-1} \Omega_3 < 0 \quad (۶)$$

اگر و تنها اگر:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_3^T \\ \Omega_3 & -\Omega_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (۷)$$

برای سامانه در نظر گرفته شده استفاده می‌شود. شرایط کافی برای پایداری حلقه بسته سامانه در قالب نامعادلات ماتریسی خطی ارائه می‌گردد. اثبات می‌شود که مد لغزش وجود دارد و مسیرهای سامانه به آن می‌رسند و بر روی آن باقی می‌مانند. نوآوری‌های مقاله را به صورت زیر می‌توان خلاصه نمود: ارائه قضیه پایداری مبتنی بر توابع لیپانف برای سامانه‌های تصادفی کسری و همچنین اثبات وجود مد لغزشی با احتمال یک برای این دسته از سامانه‌ها. بقیه مقاله به صورت زیر تنظیم شده است. در بخش دوم مقدمات و تعریف مسئله ارائه می‌شود. در بخش سوم معرفی عملگر بینهایت کوچک کسری انجام می‌شود و قضیه پایداری لیپانف با استفاده از آن اثبات می‌گردد. در بخش چهارم طراحی کنترلگر مد لغزشی برای سامانه تصادفی کسری دارای تأخیر حالت انجام می‌شود. در بخش پنجم کاربرد روش ارائه شده بر روی کنترل زاویه پره<sup>۱</sup> یک توربین بادی با سرعت متغیر بررسی می‌شود و نیز یک مثال عددی ارائه می‌گردد. در نهایت در بخش ششم نتیجه گیری ارائه می‌گردد.

#### ۲- طرح مسئله و مباحث مقدماتی

دسته سامانه‌های مورد مطالعه در این مقاله ساختاری به صورت زیر دارند:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-\tau) \\ &+ Bu(t) + Cx(t)W^H(t) \end{aligned} \quad (۱)$$

که در این رابطه  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت سامانه،  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  بردار ورودی کنترل،  $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  و  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس‌های ثابت معلوم هستند،  $\tau \in [0, \infty)$  تأخیر حالت است که ثابت فرض شده است و  $W^H(t)$  نویز کسری یک بعدی با پارامتر هرست  $\frac{1}{2} < H < 1$  است. همچنین داریم:  $C = C_1 C_2$  که در آن  $C_1, C_2^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$  معادله (۱) را می‌توان در فرم ایتوی کسری به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} dx(t) &= [Ax(t) + A_d x(t-\tau) + Bu(t)]dt \\ &+ Cx(t)dB^H(t) \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن  $B^H(t)$  حرکت براونی کسری با پارامتر هرست  $H$  در بازه  $(\frac{1}{2}, 1)$  است. حرکت براونی کسری یک فرایند گوسی است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴]:

$$B^H(t) = \int_0^t \Theta(t, s) dB(s) \quad (۳)$$

<sup>۲</sup> Stability in probability

<sup>۱</sup> Pitch control

## ۳- تحلیل پایداری

این عملگر، حالت توسعه یافته عملگر بی‌نهایت کوچک است که برای سامانه‌های تصادفی کسری تعریف می‌نماییم. حال با استفاده از این رابطه ثابت می‌کنیم که به ازای یک تابع لیاپانف در صورتی که قضیه زیر برقرار باشد پایداری تضمین شده خواهد بود.

**قضیه ۱ [۳۸]:** سامانه تصادفی کسری (۱۲) را در نظر بگیرید. اگر یک تابع  $V(t, x(t))$  وجود داشته باشد، به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} V(0, t) = 0 \quad V(x, t) \geq \mu(|x|), \\ V_x(x, t)C(t)x(t) \in L(0, T) \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن  $L(0, T)$  خانواده‌ای از فرایندهای تصادفی است که در قضیه ۳,۷ [۳۳] تعریف شده است. در این صورت جواب بدیهی رابطه (۱۲) پایدار تصادفی خواهد بود اگر:

$$L^H V(x, t) \leq 0 \quad (۸)$$

اثبات.

با توسعه رویکرد در پیش گرفته شده در [۳۸] اثبات را انجام می‌دهیم. فرض کنید  $\varepsilon \in (0, 1)$ ،  $r \in (0, h)$  و مقدار اولیه  $x_0 \in S_\delta$  یک مقدار دلخواه باشد. برای سادگی فرض کنید  $x(t; x_0) = x(t)$  می‌توان  $\delta(\varepsilon, r) \in (0, r)$  طوری پیدا کرد که:

$$\frac{1}{\varepsilon} \sup_{x \in S_\delta} V(x, 0) \leq \mu(r) \quad (۹)$$

تعریف می‌کنیم:

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : x(t) \notin S_r\} \quad (۱۰)$$

حال با استفاده از عملگر بینهایت کوچک کسری معرفی شده به ازای هر  $t \geq 0$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} V(x(\tau \wedge t), \tau \wedge t) = V(x_0, 0) \\ + \int_0^{\tau \wedge t} L^H V(x(s), s) ds \\ + \int_0^{\tau \wedge t} V_x(x(s), s)C(s)dB(s) \end{aligned} \quad (۱۱)$$

با امید ریاضی گرفتن از دو طرف این رابطه و با استفاده از رابطه (۱۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E[V(x(\tau \wedge t), \tau \wedge t)] = V(x_0, 0) \\ + E\left[\int_0^{\tau \wedge t} L^H V(x(s), s) ds\right] \leq V(x_0, 0) \end{aligned} \quad (۱۲)$$

به ازای  $\tau \leq t$  داریم  $|x(\tau \wedge t)| = |x(\tau)| = r$  و رابطه (۱۴)

نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} E[V(x(\tau \wedge t), \tau \wedge t)] \geq \\ E\left[\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} V(x(\tau), \tau)\right] \geq \mu(r)P\{\tau \leq t\} \end{aligned} \quad (۱۳)$$

برای بررسی پایداری سامانه تصادفی کسری معرفی شده لازم است که ابتدا عملگر بینهایت کوچک کسری را معرفی نماییم. برای استفاده از توابع لیاپانف برای بررسی پایداری سامانه تصادفی کسری، استفاده از این عملگر ضروری است. برای این کار لازم است که از فرمول ایتری تصادفی برای حرکت براونی کسری استفاده نماییم [۳۳]. با استفاده از این رابطه استخراج عملگر بینهایت کوچک تابع لیاپانف ممکن خواهد بود. در [۳۶] برای سامانه‌ای به صورت زیر:

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB^H(t) \quad (۱)$$

که در آن  $f(t, x(t))$  و  $g(t, x(t))$  توابع غیرخطی حقیقی هستند، رابطه زیر برای یک تابع لیاپانف  $V(t, x(t))$  به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} dV(t, x(t)) = \left[ \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} f(t, x(t)) \right] dt \\ + \left[ g(t, x(t)) \frac{\partial^2 V(t, x(t))}{\partial x^2} \int_0^t g(s, x(s))\phi(s, t) ds \right] dt \\ + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} g(t, x(t))dB^H(t) \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن:

$$\phi(t, s) = H(2H-1)|s-t|^{2H-2} \quad (۳)$$

برای استخراج این رابطه از فرمول ایتری کسری استفاده شده است. بنابراین عملگر بینهایت کوچک در حالت کلی به صورت زیر معرفی شده است [۳۶]:

$$\begin{aligned} L^H = \frac{\partial}{\partial t} + f(t, x(t)) \frac{\partial}{\partial x} \\ + g(t, x(t)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \phi(s, t) g(s, x(s)) ds \end{aligned} \quad (۴)$$

این رابطه به طور کلی و برای توابع غیرخطی  $f(t, x(t))$  و  $g(t, x(t))$  صحیح نیست. برای اثبات این موضوع مراجعه شود به [۳۷]. مبتنی بر بحثی که در خصوص فرمول ایتری کسری در [۳۷] مطرح شده است می‌توان در حالت خطی که در آن  $f(t, x(t)) = A(t)x(t)$  و  $g(t, x(t)) = C(t)x(t)$  عملگر بینهایت کوچک را برای سامانه‌ای با ساختار:

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + C(t)x(t)dB^H(t) \quad (۵)$$

به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} L^H = \frac{\partial}{\partial t} + A(t)x(t) \frac{\partial}{\partial x} \\ + C(t)x(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \phi(s, t)C(s) ds \end{aligned} \quad (۶)$$

سطح لغزش را باید طوری تعریف نماییم که ماتریس  $A-BK$  شرط پایداری هرویتز را ارضا کند. همچنین برای داشتن سطح لغزش غیر تصادفی دارای تغییرات متناهی باید داشته باشیم:  $GC_1 = 0$ . در این صورت رابطه سطح لغزش شکل غیرتصادفی به خود می‌گیرد و خواهیم توانست از  $s(t)$  مشتق زمانی بگیریم و با صفر قرار دادن آن در سطح لغزشی قانون کنترل  $u_{eq}(t)$  را استخراج کنیم. فرض شده است که  $G = B^T P$ . در نتیجه به ازای  $P > 0$  و متقارن،  $GB$  نامنفرد خواهد شد. سیگنال کنترل  $u_{eq}(t)$  در روی سطح لغزش به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u_{eq}(t) = -Kx(t) - (GB)^{-1}GA_d x(t-\tau) \quad (2)$$

جهت راندن سامانه به سطح لغزش  $s(t) = 0$ ، سیگنال کنترل در قضیه زیر ارائه می‌شود که می‌تواند رسیدن به سطح لغزش را تضمین نماید.

**قضیه ۲.** سامانه تصادفی کسری دارای تأخیر حالت رابطه (۱) با سطح لغزش داده شده در رابطه (۲۳) را در نظر بگیرید. سیگنال کنترل که می‌تواند رسیدن به سطح لغزش را تضمین نماید به صورت زیر خواهد بود:

$$u(t) = -Kx(t) - (GB)^{-1}\mu(t)\text{sign}(s(t)) \quad (3)$$

که در این رابطه  $\mu(t) \in \mathcal{R}^{m \times m}$ ، بهره سوپرجینگ است که یک ماتریس قطری  $m \times m$  زمان وردها است که برابر است با:

$$\mu(t) = \|GA_d x(t-\tau)\| + \eta \quad (4)$$

که در آن  $\eta$  یک ثابت مثبت است و نیز داریم:  
 $\text{sign}(s(t)) = [\text{sign}(s_1(t)) \quad \text{sign}(s_2(t)) \quad \dots \quad \text{sign}(s_m(t))]$   
 که در آن تابع  $\text{sign}(s_i(t))$  به ازای  $1 \leq i \leq m$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{sign}(s_i(t)) = \begin{cases} 1, & \text{if } \text{sign}(s_i(t)) > 0 \\ 0, & \text{if } \text{sign}(s_i(t)) = 0 \\ -1, & \text{if } \text{sign}(s_i(t)) < 0 \end{cases} \quad (5)$$

**اثبات.** تابع لیاپانف را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$V(t) = \frac{1}{2}s^T(t)s(t) \quad (6)$$

از آنجا که:

$$\dot{s}(t) = GA_d x(t-\tau) - \mu(t)\text{sign}(s(t)) \quad (7)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\dot{V}(t) = s^T(t)\dot{s}(t) \\ = \|s^T(t)\| \|GA_d x(t-\tau)\| - \mu \|s(t)\| \quad (8)$$

که در آن تابع نشانگر<sup>۱</sup> مجموعه  $\{\tau \leq t\}$  است. در صورتی که رابطه  $\tau \leq t$  برقرار باشد، مقدار تابع نشانگر برابر یک و در غیر این صورت مقدار آن برابر صفر خواهد بود. با استفاده از رابطه (۱۶)، روابط (۱۹) و (۲۰) به رابطه زیر کاهش می‌یابند:

$$P\{\tau \leq t\} \leq \varepsilon \quad (14)$$

بنابراین  $P\{\tau \leq \infty\} \leq \varepsilon$  وقتی که  $t \rightarrow \infty$ ، و یا به طور معادل:

$$P\{|x(t)| < r, \forall t \geq t_0\} \geq 1 - \varepsilon \quad (15)$$

که اثبات را خاتمه می‌دهد. با توجه به روابط بالا پایداری اثبات شده با استفاده از این قضیه، پایداری در احتمال خواهد بود.

#### ۴- طراحی کنترلگر مود لغزشی

سامانه تصادفی کسری (۱) را در نظر بگیرید. برای این سامانه کنترلگر سطح لغزشی طراحی خواهیم کرد که اهداف زیر را برآورده سازد. اول اینکه مد لغزش وجود داشته باشد و مسیرهای حالت سامانه به سمت سطح لغزش رانده شوند و برای زمان‌های بعدی روی این سطح باقی بمانند. دومین هدف اثبات پایداری در احتمال سامانه در مد لغزش است. برای نیل به این اهداف سطح لغزش انتگرالی به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$s(t) = Gx(t) - \int_0^t G(A-BK)x(s)ds \quad (1)$$

در اینجا  $G \in \mathcal{R}^{m \times n}$  و  $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$  ماتریس‌های ثابت طراحی هستند. این سطح لغزش به دو دلیل از نوع تناسبی انتگرالی انتخاب شده است: دلیل اول اینکه در این روش طراحی همانطور که در ادامه خواهد آمد، بررسی پایداری تصادفی سامانه در مد لغزش در حضور نویز تصادفی انجام خواهد شد. با این وجود جهت تضمین مقاوم بودن سامانه نسبت به نویز از لحظه اولیه جمله انتگرالی نیز به سطح لغزش افزوده شده است. دلیل دوم به نامعادلات ماتریسی خطی استخراج شده برمی‌گردد. در ادامه خواهیم دید که شرایط پایداری در قالب نامعادلات ماتریسی خطی ارائه خواهند شد که فقط با استفاده از جمله تناسبی جوابی برای این معادلات وجود نخواهد داشت. دلیل اصلی انتخاب سطح لغزش از این نوع در این مقاله، وجود شرط محدود کننده  $GC_1 = 0$  است که احتمال امکان‌پذیری<sup>۲</sup> نامعادلات ماتریسی خطی استخراج شده را در صورت استفاده از سطح لغزش تناسبی کاهش می‌دهد. بنابراین ناگزیر به افزایش تعداد ماتریس‌های طراحی هستیم. از طرف دیگر با اضافه کردن جمله انتگرالی به سطح لغزش امکان جبران‌سازی اولیه با قرار دادن مقادیر ویژه ماتریس  $A-BK$  در سمت چپ محور موهومی فراهم می‌شود.

<sup>۱</sup> indicator function  
<sup>۲</sup> feasibility

$$L^H V(x(t), t) < e^{-\lambda \int_0^t \int_0^s \phi(s, \tau) d\tau ds} \times \\ [2x^T(t)P(A - BK)x(t) \\ + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \tau)Qx(t - \tau) \\ + 2x^T(t)[PA_d - PB(GB)^{-1}GA_d]x(t - \tau)] \quad (14)$$

با استفاده از لم ۱:

$$-2x^T(t)[PB(GB)^{-1}GA_d]x(t - \tau) \leq \\ x^T(t)PB(GB)^{-1}Gx(t) + x^T(t - \tau)A_d^T PA_d x(t - \tau) \quad (15)$$

از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود که:

$$L^H V(x(t), t) < \\ [x^T(t) \quad x^T(t - \tau)] \Lambda \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix} e^{-\lambda \int_0^t \int_0^s \phi(s, \tau) d\tau ds} \quad (16)$$

که در آن  $\Lambda$  برابر است با:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Gamma_3 & PA_d \\ A_d^T P & \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

که در آن:

$$\Gamma_3 = P(A - BK) + (A - BK)^T P + Q \\ + 2PB(B^T PB)^{-1} B^T P \quad (18)$$

حال با اعمال مکمل شور، رابطه  $\Lambda < 0$  و رابطه (۳۴) معادل خواهند بود و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

**نکته ۱:** با توجه به اینکه تابع سطح لغزش همچنان تابعی از  $x(t)$  با دینامیک داده شده در رابطه (۱۲) است و به دلیل اینکه  $x(t)$  دارای ماهیت تصادفی کسری است، بنابراین تمام برابری‌ها و نابرابری‌ها در روابط مربوط به اثبات قابلیت رسیدن به سطح لغزش در قضیه ۲ به صورت تقریباً مطمئن<sup>۱</sup> (یا با احتمال یک) برقرار خواهند بود. بنابراین رسیدن به مد لغزش به صورت تقریباً مطمئن (یا با احتمال یک) خواهد بود. از طرف دیگر در اثبات پایداری سامانه در مد لغزش، اثبات پایداری با استفاده از توابع لیاپانف به صورت اثبات پایداری در احتمال انجام می‌شود. در این حالت با توجه به ظاهر شدن جمله تصادفی کسری در رابطه (۳۱)، از قضیه ۱ برای استخراج شرایط پایداری استفاده می‌شود. همانطور که در اثبات قضیه ۱ آورده شده است، در این حالت اثبات پایداری به صورت پایداری در احتمال قابل انجام است.

با انتخاب بهره سوئیچینگ به صورت رابطه (۴)  $\dot{V}(t) < \eta \|s\|$  تضمین خواهد شد و رسیدن به سطح لغزش اتفاق می‌افتد.

۴-۱ بررسی پایداری سامانه دارای تأخیر حالت در مد لغزش

پس از رسیدن مسیره‌های سامانه به روی سطح لغزش، دینامیک سیستم روی این سطح در معادله زیر صدق خواهد کرد:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + A_d x(t - \tau) \\ + Cx(t)W^H(t) \quad (9)$$

قضیه زیر شرایط پایداری این سامانه را ارائه می‌دهد:

**قضیه ۳.** سامانه تصادفی کسری (۱) در نظر بگیرید. دینامیک این سامانه که در مد لغزش در معادله (۹) صدق می‌کند، پایدار است اگر ماتریس‌های متقارن مثبت معین  $P$  و  $Q$  وجود داشته باشند که در شرایط زیر صدق نمایند.

$$GC_1 = 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & PA_d & \sqrt{2}PB \\ A_d^T P & \Gamma_2 & 0 \\ \sqrt{2}B^T P & 0 & -B^T PB \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

که در آن:

$$\Gamma_1 = P(A - BK) + (A - BK)^T P + Q$$

$$\Gamma_2 = -Q + A_d^T PA_d$$

**اثبات.** تابع لیاپانف را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$V(x(t), t) = \\ \left[ x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Qx(s)ds \right] e^{-\lambda \int_0^t \int_0^s \phi(s, \tau) d\tau ds} \quad (12)$$

که در آن  $\lambda$  یک ثابت مثبت است. این تابع شرایط قضیه ۱ را ارضا می‌کند. با استفاده از عملگر بینهایت کوچک معرفی شده خواهیم داشت:

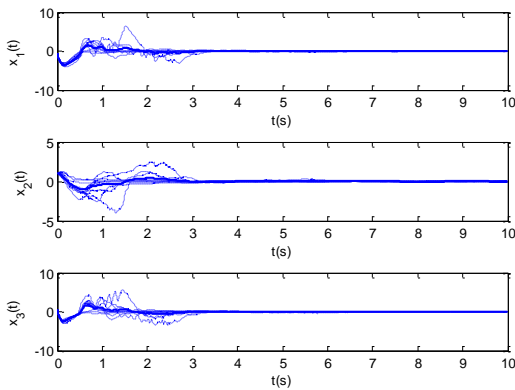
$$L^H V(x(t), t) = e^{-\lambda \int_0^t \int_0^s \phi(s, \tau) d\tau ds} \times \\ (2x^T(t)P(A - BK)x(t) \\ + 2x^T(t)[PA_d - PB(GB)^{-1}GA_d]x(t - \tau) \\ + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \tau)Qx(t - \tau) \\ + [2x^T C^T PCx - \lambda x^T Px] \int_0^t \phi(t, \tau) d\tau \\ - \lambda \int_{t-\tau}^t x^T(s)Qx(s)ds \int_0^t \phi(t, \tau) d\tau) \quad (13)$$

با انتخاب  $\lambda$  به اندازه کافی بزرگ، دو خط آخر در رابطه بالا منفی خواهد شد و می‌توان نوشت:

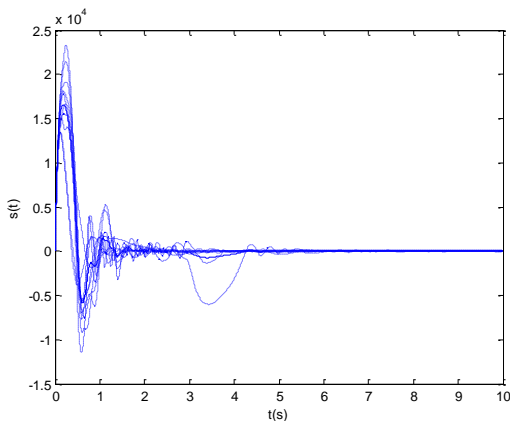
<sup>۱</sup> Almost surely

$$Q = \begin{bmatrix} 55.5555 & -22.8138 & -64.5439 \\ -22.8138 & 170.3799 & 53.4269 \\ -64.5439 & 53.4269 & 127.1720 \end{bmatrix}$$

با اعمال سیگنال کنترل رابطه (۳) به ازای  $\eta = 10^{-5}$  در رابطه (۴) پاسخ سامانه حلقه بسته را در طول ۱۰ مسیر حرکت براونی کسری رسم می‌نماییم. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است. در شکل ۱ مسیرهای سامانه در طول ۱۰ مسیر حرکت براونی کسری به صورت خط چین رسم شده است و میانگین آنها به صورت خط پیوسته نمایش داده شده است. شکل ۲ تابع سطح لغزش را در طول ۱۰ مسیر حرکت براونی کسری نمایش می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود مسیرهای سیستم به صورت تصادفی پایدار شده‌اند و روش ارائه شده به خوبی اثر نویز کسری را از بین برده است.



شکل ۱: مسیرهای حالت در طول ۱۰ مسیر حرکت براونی کسری (خط چین) و میانگین آنها (خط پیوسته) در مثال ۱



شکل ۲: تابع سطح لغزش در طول ۱۰ مسیر حرکت براونی کسری (خط چین) و میانگین آنها (خط پیوسته) در مثال ۱

### مثال ۲ (کنترل زاویه پره توربین بادی با سرعت متغیر با استفاده از روش ارائه شده):

مدل‌سازی سرعت باد در توربین‌های بادی از اهمیت بسزایی برخوردار است. روش‌های متعددی جهت مدل‌سازی سرعت باد ارائه شده است. اخیراً نشان داده شده است که حرکت براونی کسری به خوبی

**تکنه ۲:** در صورتی که سامانه بدون تأخیر حالت به صورت زیر در نظر گرفته شود در این صورت قضیه ۳ به صورت زیر کاهش خواهد یافت:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Cx(t)W^H(t) \quad (19)$$

**قضیه ۴.** سامانه تصادفی کسری (۱۹) را با سطح لغزش رابطه (۲۳) و سیگنال کنترل  $u(t) = -Kx(t) - \alpha s(t) - \beta \operatorname{sgn}(s(t))$  در نظر بگیرید. فرض کنید  $GB$  غیر منفرد باشد. آنگاه دینامیک این سامانه در مد لغزش با سیگنال کنترل معادل  $u_{eq}(t) = -Kx(t)$  پایدار است اگر یک ماتریس متقارن مثبت معین  $P$  وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق نماید.

$$GC_1 = 0 \quad (20)$$

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P < 0 \quad (21)$$

اثبات مشابه اثبات قضیه ۳ به سادگی قابل استخراج است. در بخش بعدی مقاله چند نمونه شبیه‌سازی را ارائه می‌دهیم و کاربرد قضایای مطرح شده را در کنترل زاویه پره یک توربین بادی بررسی خواهیم کرد.

### ۵- نمونه‌های شبیه‌سازی

**مثال ۱:** سامانه تصادفی کسری رابطه (۱) را با پارامترهای زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.9 & 0.5 \\ 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

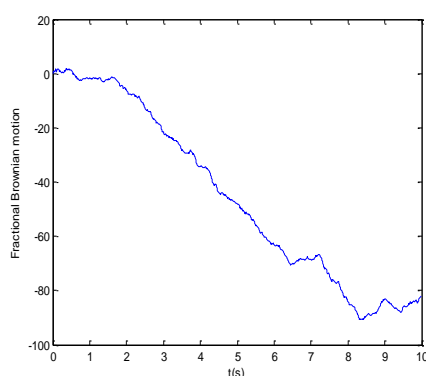
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0.05 \quad -0.1 \quad 0.1]$$

شرایط اولیه به صورت  $x(0) = [-0.5 \quad 1 \quad 0.5]$  است و همچنین مقدار تأخیر حالت سامانه برابر  $\tau = 0.5$  در نظر گرفته شده است. پارامتر هرست حرکت براونی کسری برابر  $H = 0.7$  در نظر گرفته شده است. ماتریس طراحی برابر  $K = [-8.7424 \quad 18.2794 \quad 21.0424]$  انتخاب می‌شود تا مقادیر ویژه  $A - BK$  در  $\{-5, -3 \pm j\}$  قرار بگیرند. با حل نامعادلات ماتریسی قضیه ۳ مشاهده می‌کنیم که معادلات دارای جواب هستند و ماتریس  $P$  و  $Q$  برابر خواهد بود با:

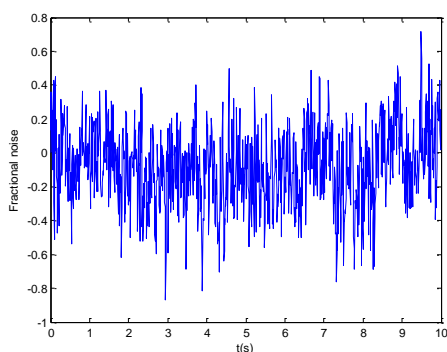
$$P = \begin{bmatrix} 97.9338 & -2.6916 & -99.9925 \\ -2.6916 & 81.0892 & 15.1311 \\ -99.9925 & 15.1311 & 110.3775 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3.8821 & -66.3127 & -2.0885 & 2.0385 \\ -66.3127 & 2.84 \times 10^4 & 1.5710 & -1.3520 \\ -2.0885 & 1.5710 & 1.3794 & -1.3445 \\ 2.0385 & -1.3540 & -1.3445 & 1.3160 \end{bmatrix}$$

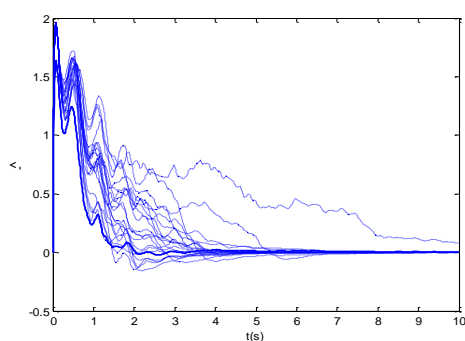
با استفاده از روش ارائه شده و به ازای  $\alpha = 10^{-7}$  و  $\beta = 10^{-5}$  در قضیه ۴ سیگنال کنترل را به سامانه اعمال می‌کنیم. شکل ۵ نحوه تغییر خطای زاویه پره را نشان می‌دهد. این شبیه‌سازی به ازای ۲۰ مسیر تصادفی مختلف حرکت براونی کسری ایجاد شده است. در این شکل خط چین‌ها نشان‌دهنده خطا در ۲۰ مسیر عنوان شده هستند. خط پیوسته میانگین خطا در این ۲۰ مسیر را نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است روش ارائه شده به خوبی قادر به پایدارسازی خطا و رساندن زاویه پره توربین به زاویه نامی و ماندن در آن در زمان کوتاه است.



شکل ۳: یک مسیر نمونه از حرکت براونی کسری به ازای  $H=0.8$  در مثال ۲



شکل ۴: مسیر نمونه نویز کسری اعمال شده به توربین بادی در مثال ۲



شکل ۵: نحوه تکامل خطای زاویه پیچ در ۲۰ مسیر حرکت براونی کسری (خط -

چین) و میانگین آن‌ها (خط پیوسته) در مثال ۲

قادر به مدل‌سازی حرکات تصادفی توربولانسی باد است [۱۳-۱۴]. در یک توربین بادی با سرعت متغیر، یک گشتاور در روتور توربین متناسب با سرعت باد تولید می‌شود که انرژی را به توربین تزریق می‌کند. زاویه تیغه توربین به عنوان ورودی کنترل در بسیاری از مقالات در نظر گرفته شده است. در سمت ژنراتور، گشتاور ژنراتور به عنوان ورودی کنترل می‌تواند در نظر گرفته شود. جهت گرفتن حداکثر توان لازم است که روتور توربین سرعت روتور مرجعی را ردیابی نماید. در حالت کلی سرعت باد دارای ماهیت تصادفی نسبت به زمان است. در نظر نگرفتن این عوامل در نهایت ممکن است به ایجاد هارمونیک‌های ناخواسته در خروجی ژنراتور منجر شود و موجب تغییرات در ضریب توان شود. حرکات توربولانسی باد از عوامل خارجی هستند که در بسیاری از مقالات به صورت نویز گوسی مدل می‌شوند. اما همانطور که گفته شد توربولانس باد دارای طبیعت کسری تصادفی است و بهترین مدل برای توصیف آن حرکت براونی کسری است. بنابراین مدل توربین بادی به همراه مدل نویز کسری را می‌توان در قالب رابطه (۴۰) نوشت که در آن بردار حالت برابر  $x(t) = [\hat{\theta}_s \quad \hat{\Omega}_r \quad \hat{\Omega}_g \quad \hat{\beta}]^T$  است که در آن  $\hat{\theta}_s$  اختلاف زاویه پیچش<sup>۱</sup> از مقدار نامی آن،  $\hat{\Omega}_r$  و  $\hat{\Omega}_g$  به ترتیب اختلاف مقادیر سرعت زاویه‌ای روتور و ژنراتور از مقادیر نامی آنها و  $\hat{\beta}$  اختلاف مقدار زاویه پره از مقدار مطلوب است. در این مدل هدف به حداقل رساندن خطای بین متغیرهای سامانه و مقادیر نامی آن‌ها است. بخصوص صفر کردن خطای بین زاویه تیغه توربین و مقدار زاویه نامی و در نتیجه ثابت نگه داشتن توان تولیدی در مقدار بهینه هدف اصلی است. ورودی کنترل برابر  $u(t) = [\beta_{ref} \quad \Omega_z]^T$  است که در آن  $\beta_{ref}$  زاویه مرجع تیغه توربین و  $\Omega_z$  سرعت زاویه‌ای گشتاور-صفر<sup>۲</sup> است و نیز داریم [۳۹]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1.88 \times 10^{-3} & -3.65 \times 10^{-6} & 3.65 \times 10^{-6} & 8.72 \times 10^{-4} \\ 265.42 & 0.513 & -0.516 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2000 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2.71 \times 10^{-3} \\ 2000 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = C_1 \times C_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

در شکل ۳ یک مسیر نمونه از حرکت براونی کسری به ازای پارامتر هرست  $H = 0.8$  نمایش داده شده است. یک مسیر نویز کسری توربولانسی اعمال شده به توربین نیز در شکل ۴ نشان داده شده است. از روابط (۲۰) و (۲۱) مقدار ماتریس  $P$  برابر خواهد بود با:

<sup>۱</sup> torsion angle

<sup>۲</sup> zero-torque angular velocity



- [7] Dung, N.T., "Mackey-Glass equation driven by fractional Brownian motion", *Physica A*, vol. 391, pp.5465-5472, 2012.
- [8] Boudrahem, S., Rougier, P.R., "Relation between postural control assessment with eyes open and center of pressure visual feedback effects in healthy individuals", *Express Berlin Resumen*, vol. 195, pp. 145-152, 2009.
- [9] Biagini, F., Hu, Y., Oksendal, B., Zhang, T., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian motion and applications*, Springer. London, 2008.
- [10] Park, K., Willinger, W., *Self-similar network traffic and performance evaluation*, New York: Wiley, 2000.
- [11] Wijeratne, C., Bessaih, H., "Fractional Brownian Motion and an Application to Fluids", *Stochastic Equations for Complex Systems* (pp. 37-52). Springer International Publishing, 2015.
- [12] Novak, M.M., *Paradigms of complexity: Fractals and structures in the sciences*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [13] Calif, R., Schmitt, F.G., "Modeling of atmospheric wind speed sequence using a lognormal continuous stochastic equation," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics.*, vol. 109, pp.1-8, 2012.
- [14] M.M. Meerschaert, F. Sabzikar, "Tempered fractional Brownian motion", *Statistics and Probability Letters*, vol. 83, pp. 2269–2275, 2013.
- [15] Mishura, Y.S., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [16] Dung, N.T., "Semi-martingale approximation of fractional Brownian motion and its applications", *Computers and Mathematics with applications*, vol. 61, no. 7, pp. 1844-1854, 2011.
- [17] Neuenkirch, A., "Optimal approximation of SDE's with additive fractional noise", *Journal of Complex systems*, vol.22, pp. 459-474, 2006.
- [18] Zeng, C., Yang, Q., Chen, Y.Q., "Solving nonlinear stochastic differential equations with fractional Brownian motion using reducibility approach", *Nonlinear dynamics*, vol. 67, pp. 2719-2726, 2012.
- [19] Verriest, E.I. Flochinger, P., *Stability of stochastic systems with uncertain time delay*, *Systems and control letters*, vol.24, pp. 41-47, 1995.
- [20] Wang, Z., Qiao, H. Burnham, K.J., "On the stabilization of bilinear uncertain time-delay stochastic systems with Markovian jumping

## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله، دسته‌ای از سامانه‌های تصادفی کسری مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از فرمول ایتوی کسری عملگر بینهایت کوچک کسری معرفی گردید و مبتنی بر آن قضیه پایداری سامانه‌های تصادفی کسری با استفاده از توابع لیپانف اثبات شد. نشان داده شد که شرط پایداری در مورد این دسته سامانه‌ها با شرط پایداری در مورد سامانه‌های تصادفی غیرکسری که از طریق استفاده از فرمول ایتوی معمولی بدست می‌آید مشابه است. با این وجود انتخاب توابع لیپانف مناسب راحت نخواهد بود. در قسمت بعدی مقاله روش طراحی کنترل مد لغزشی برای سامانه‌های تصادفی کسری ارائه شد. نشان داده شد که با استفاده از عملگر بینهایت کوچک کسری معرفی شده، بررسی پایداری این سامانه‌ها در مد لغزش امکان‌پذیر خواهد شد. بر همین اساس قضایای پایداری در احتمال دینامیک سامانه کسری دارای تأخیر حالت و نیز بدون تأخیر در مد لغزش ارائه شد. نشان داده شد که مد لغزش ارائه شده وجود دارد و مسیرهای سامانه به صورت تصادفی با احتمال یک به سطح لغزش تعریف شده می‌رسند و روی آن باقی می‌مانند.

## مراجع

- [1] Sierociuk, D., Dzieliński, A., "Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation", *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 16, no.1, pp.129-140, 2006.
- [2] Sierociuk, D., Tejado, I., Vinagre, B.M., "Improved fractional Kalman filter and its application to estimation over lossy networks", *Signal Processing*, vol. 91, pp.542–52, 2011.
- [3] Sadeghian, H., Salarieh, H., Alasty, A., Meghdari, A., "On the general Kalman filter for discrete time stochastic fractional systems", *Mechatronics*, vol. 23, pp. 764–771, 2013.
- [4] Sadeghian, H., Salarieh, H., Alasty, A., Meghdari, A., "On the fractional-order extended Kalman filter and its application to chaotic cryptography in noisy environment", *Applied Mathematical Modelling*, vol. 38, no. 3, pp.961-973, 2013.
- [5] Tsai, J.H.S., Chien, T.H., Guo, S.M., Chang, Y.P., Shieh, L.S., "State-Space Self-Tuning Control for Stochastic Fractional-Order Chaotic Systems", *IEEE Transactions on circuits and systems*, vol.54, no.3, pp. 632-642, 2007.
- [6] Sadeghian, H., Salarieh, H., Alasty, A., Meghdari, A., "On the linear-quadratic regulator problem in one-dimensional linear fractional stochastic systems", *Automatica*, vol. 50, no. 1, pp. 282-286, 2013.

- [30] Gao, Q., Feng, G., Liu, L., Qiu, J., Wang, Y., "An ISMC approach to robust stabilization of uncertain stochastic time-delay systems, IEEE transactions on industrial electronics", vol. 61, pp. 6986-6994, 2014.
- [31] Niu, Y., Ho, D.W.C., "Robust observer design for Ito stochastic time delay systems via sliding mode control", Systems and control letters, vol. 55, pp. 781-793, 2006.
- [32] Liu, M., Shi, P., "Sensor fault estimation and tolerant control for Ito stochastic systems with a descriptor sliding mode approach", Automatica, vol. 49, pp. 1242-1250, 2013.
- [33] Duncan, T.E., Hu, Y., Pasik-Duncan, B., "Stochastic calculus for fractional Brownian motion. I. Theory", SIAM Journal of control and optimization, vol. 38, pp.582-612, 2000.
- [34] Lim, S.C., Sithi, V.M., "Asymptotic properties of the fractional Brownian motion of Riemann-Liouville type", Physics Letters A , vol. 206, pp. 311-317, 1995.
- [35] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V., Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Philadelphia, PA, USA, SIAM, 1994.
- [36] Zeng, C., Yang, Q., Chen, Y.Q., "Lyapunov techniques for stochastic Differential equations driven by fractional Brownian motion", Abstract and applied analysis, vol. 2014, pp. 1-9, 2014.
- [37] Khandani Kh., Majd, V.J., Tahmasebi, M., "Comments on "Solving nonlinear stochastic differential equations with fractional Brownian motion using reducibility approach" [Nonlinear Dyn. 67, 2719-2726 (2012)]," Nonlinear Dynamics, vol. 82, pp. 1605-1607, 2015.
- [38] Khasminskii, R., Stochastic stability of differential equations. Springer-Verlag, 2012.
- [39] Bianchi, F.D. , Mantz, R.J., Christiansen, C.F., "Power regulation in pitch-controlled variable speed WECS above rated wind speed" Renewable Energy, vol. 29, pp.1911-1922, 2004.
- parameters", IEEE Transactions on Automatic control, vol. 47, pp.640-646, 2002.
- [21] Malinowski, M.T., "Itô type stochastic fuzzy differential equations with delay", Systems and Control Letters, vol.61, pp. 692-701, 2012.
- [22] Mao, X., Koroleva, N., Rodkina, A., "Robust stability of uncertain stochastic differential delay systems", Systems and control letters, vol. 35, pp. 325-336, 1998.
- [23] Wu, L., Ho, D.W.C., "Sliding mode control of singular stochastic hybrid systems", Automatica, vol.46, pp. 779-783, 2010.
- [24] Nguyen, D., "Asymptotic behavior of linear fractional stochastic differential equations with time-varying delays", Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol.19, pp.1-7, 2014.
- [25] Xu, S., and Chen, T., "Robust  $H_\infty$  control for uncertain stochastic systems with state delay", IEEE transactions on automatic control, vol. 47, pp. 2089-2094, 2002.
- [26] Perruquetti, W. and Barbot, J.P., Sliding mode control in engineering, New York, NY: Marcel Dekker, 2002.
- [27] Niu, Y., Wang, X. Ho, D.W.C., Lam, J., "Robust integral sliding mode control for uncertain stochastic systems with time varying delay", Automatica, vol. 41, pp. 873-880, 2005.
- [28] Niu, Y., Ho, D.W.C., Wang, X., "Robust  $H_\infty$  control for nonlinear stochastic systems: A sliding mode approach", IEEE transactions on automatic control, vol. 53, no. 7, pp. 1695-1701, 2008.
- [29] Ji, Y., Qiu, J., "Robust stability for uncertain stochastic systems with time-varying delay via sliding mode control", Applied mathematics and computation, vol. 238, pp. 70-81, 2014.