مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۱، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۶، صفحه ۴۹-۳۵

طراحی رویتگر حالت برای سیستم‌های تکه‌ای‌خطی زمان گسسته: رویکرد نامساوی‌های ماتریسی خطی

سعید بشیری[۱]، صالح مبیّن [۲]، فرهاد بیات[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه زنجان، saeed.bashiri@znu.ac.ir

[۲] استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه زنجان، mobayen@znu.ac.ir

[۳] دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه زنجان، bayat.farhad@znu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۴/۳۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۴/۲۵)

چکیده: در این مقاله، مسئله طراحی رویتگر حالت همراه با پسخور حالت، جهت پایدارسازی سیستم‌های تکه‌ای‌خطی زمان گسسته ارائه شده است. در این مقاله، ما دو سیستم زمان گسسته داریم که یکی از سیستم‌ها اغتشاش یافته و سیستم دیگری فاقد اغتشاش است. برای طراحی رویتگر حالت، از روش نامساوی‌های ماتریسی خطی، توابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای و لم فینسلر استفاده شده است. علاوه بر روش‌های ذکرشده فوق، روش کنترل H_∞ نیز جهت طراحی رویتگر حالت برای سیستم همراه با اغتشاش خارجی استفاده شده است. روش کنترل H_∞ سیگنال اغتشاش را تضعیف کرده و تخمین خوب و مناسبی از حالت‌های سیستم ارائه می‌دهد. در این مقاله با استفاده از لم فینسلر، مجموعه‌ای از متغیرهای کمکی برای کاهش طراحی محافظه‌کارانه معرفی‌شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده کارایی بالای روش پیشنهادشده جهت پایدارسازی سیستم حلقه بسته و دستیابی به تخمینی خوب و قابل‌قبول از متغیرهای حالت است.

کلمات کلیدی: رویتگر حالت، پسخور خروجی استاتیک، سیستم‌های زمان گسسته، نامساوی‌های ماتریسی خطی، لم فینسلر.

Observer Designing for Discrete-Time Piecewise Linear Systems: Linear Matrix Inequalities Approach

Saeed Bashiri, Saleh Mobayen, Farhad Bayat

Abstract: In this paper, the state feedback and design problem of state observer are presented to stabilize the discrete-time piecewise linear systems. In this article, we have two discrete-time systems that one of them is the disturbed system and the other is the system without disturbance. The linear matrix inequalities approach, piecewise quadratic Lyapunov functions and the Finsler's lemma are used to design the state observer. In addition to the above mentioned methods, the H_∞ control approach used to design the state observer for the system with external disturbance. The H_∞ control approach undermines the disturbance signal and provides an appropriate estimation of the system states. In this paper, by using the Finsler's lemma, a set of slack variables are introduced to reduce the design conservatism. The Simulation results show the high performance of the proposed method for stabilize the closed-loop system and achieve to the acceptable estimation of state variables.

Keywords: State observer, Static output feedback, Discrete-time systems, Linear matrix inequalities, Finsler's lemma.

۱- مقدمه

در مباحث کنترلی، قسمت اعظمی از سیستم‌های غیرخطی مانند سیستم‌های همراه با تأخیر، اشباع و ناحیه مرده را می‌توان به‌صورت سیستم‌های تکه‌ای‌خطی تبدیل کرد. همچنین اجزای مدارهای الکتریکی مانند ترانزیستورها، دیودها و کلیدهای قدرت نیز به‌صورت تکه‌ای‌خطی مدل می‌شوند. ازاین‌رو سیستم‌های تکه‌ای‌خطی اخیراً توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند [۱]. بیشتر کنترل‌کننده‌های پیشرفته مانند سیستم‌های کنترل پرواز نیز نشأت گرفته از همین سیستم‌های تکه‌ای‌خطی هستند. در سیستم‌های تکه‌ای‌خطی، عمل کلیدزنی بین حالت‌های مختلف سیستم صورت می‌گیرد که این امر نشأت گرفته از محدودیت‌های فیزیکی سیستم در حالت‌های مختلف است.

به دلیل اهمیت فراوان سیستم‌های تکه‌ای‌خطی، تاکنون روش‌های مختلفی برای تحلیل و پایداری این کلاس از سیستم‌ها معرفی شده است. به‌طور مثال در مرجع [۲]، روش کنترل تطبیقی مدل مرجع را برای پایدارسازی سیستم‌های تکه‌ای‌خطی زمان گسسته به‌کاربرده است. روش کنترل تطبیقی مدل مرجع (MRAC[۱])، روش قدرتمند و ساده‌ای است که می‌تواند مقاوم بودن سیستم در برابر تغییرات پارامتری، دینامیک‌های غیرمدل شده و نویز را تضمین کند. مقاله [۲]، روش MRAC کلیدزنی شده جدیدی را برای سیستم‌های تکه‌ای‌خطی (PWL[۲]) زمان گسسته ارائه کرده است. کنترل‌کننده مرجع [۲]، پایداری مجانبی کلی سیستم خطا را تضمین کرده و کارایی قابل قبولی را هنگامی‌که تغییرات ناگهانی در پارامترهای سیستم رخ می‌دهد، ارائه می‌کند.

یکی از این روش‌های پرکاربرد جهت تحلیل و کنترل سیستم‌های تکه‌ای‌خطی ، روش نامساوی‌های ماتریسی خطی است. نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMIs) به‌عنوان یک ابزار طراحی و روش قدرتمند محاسباتی در مباحث کنترلی پدید آمده‌اند. مزیت و کارآمدی این روش به میزان اثرگذاری محاسباتی و انعطاف‌پذیری‌اش در برخورد با مشکلات طراحی سیستم‌های مختلف بازمی‌گردد [۳،۴]. از روش نامساوی‌های ماتریسی خطی می‌توان برای حل مسائل مختلف کمینه‌سازی محدب، مانند کنترل هزینه تضمین‌شده، کنترل H_∞ و کنترل H_2 استفاده کرد. ازجمله کاربردهای LMI می‌توان به مرجع [۵] اشاره کرد که پایدارساز پسخور حالت را با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی، برای سیستم‌های غیرخطی نامعین با عوامل لیپ‌شیتز[۳] طراحی می‌کند. کنترل‌کننده مرجع [۵] باعث بهبود کارایی حالت گذرا و ماندگار سیستم می‌شود. در مقاله [۵] برای بهبود کارایی پایدارسازی، تابع غیرخطی در قانون کنترل در نظر گرفته‌شده و با استفاده از الگوریتم جستجوی دلخواه اصلاح‌شده[۴]، تنظیم می‌شود. در مسائل پایدارسازی، پاسخ سریع با بالازدگی کم مطلوب است. کنترل‌کننده پیشنهادی مقاله [۵]، پایدارسازی سیستم را در حضور اغتشاش و نامعینی‌های پارامتری تضمین می‌کند، به‌طوری‌که پاسخ حاصل‌شده، پاسخی سریع و با بالازدگی کم خواهد بود. در مرجع [۶] روشی محاسباتی جهت مطالعه و بررسی پایداری مجانبی سیستم‌های آفین چندگانه تکه‌ای (PMA[۵]) ارائه‌شده است. در مرجع [۶] بر اساس توابع لیاپانوف تکه‌ای که انتخاب می‌شوند، شرایط پایداری سیستم PMA به‌صورت ترم‌هایی از نامساوی‌های ماتریسی بیان می‌شوند. با وجود اینکه نامساوی‌های ماتریسی خطی روشی کارآمد و انعطاف‌پذیر در حل مسائل مختلف کنترلی هستند، گاهی به‌تنهایی قادر نیستند کارایی مطلوب موردنظر را برآورده سازند. لذا، استفاده از روش‌های کنترلی ترکیبی می‌تواند مفید باشد. به‌طور مثال، زمانی که سیستم موردمطالعه ما دارای نویز و اغتشاشات خارجی است، استفاده از روش LMI همراه با کنترل H_∞ می‌تواند رویکرد مناسبی برای دستیابی به عملکرد مناسب سیستم باشد.

کنترل H_∞ از معروف‌ترین روش‌های شناسایی مدل و پالایش داده‌های مخدوش است. فیلتر H_∞ مستقل از اطلاعات نویزهای فرآیند، تخمینی ارائه می‌دهد که در مقابل اغتشاشات مدل مقاوم است [۷]. مرجع [۸]، کنترل مقاوم را برای کلاسی از سیستم‌های غیرخطی نامعین بررسی می‌کند. در ابتدا، معیاری برای پایدارسازی کلی سیستم غیرخطی بدون نامعینی پیشنهاد شده است؛ سپس معیاری برای سیستم غیرخطی همراه با نامعینی‌های پارامتری پیشنهاد شده است. در این معیار، از روش نامساوی‌های ماتریسی برای طراحی کنترل پسخور حالت H_∞ مقاوم استفاده شده است. در مرجع [۹]، کنترل H_∞ برای سیستم زمان گسسته نامعین همراه با تأخیرهای زمانی، با استفاده از کنترل‌کننده‌های پسخور خروجی، موردبررسی قرارگرفته است. نامعینی‌های مرجع [۹] به‌صورت نامعینی‌های پارامتری هستند. در [۹]، با استفاده از شرایط LMI، کنترل‌کننده پسخور خروجی دینامیکی به‌گونه‌ای محاسبه می‌گردد تا پایداری نمایی سیستم حلقه بسته تضمین شده و تأثیر ورودی اغتشاش روی خروجی کنترل‌شده را کاهش دهد. در مرجع [۱۰] نیز از روش کنترل H_∞ استفاده شده است. در [۱۰] طراحی رویتگر H_∞ برای مدل فازی (T-S[۶]) زمان پیوسته صورت گرفته است. در مرجع [۱۰] روش جدیدی برای محدود کردن و اعمال کران روی مشتقات زمانی توابع عضویت ارائه شده و با معرفی تابع لیاپانوف غیرمربعی، بهره‌های کنترل‌کننده و رویتگر با استفاده از روش LMI به نحوی محاسبه می‌شوند تا پایداری مجانبی سیستم تضمین گردد.

برای بررسی پایداری یک سیستم و متغیرهای حالت مربوط به آن، باید متغیرهای حالت در دسترس باشند. در بسیاری از موارد عملی تنها تعداد اندکی از متغیرهای حالت سیستم داده‌شده قابل‌سنجش هستند.

[۱] - Model Reference Adaptive Controllers
[۲] - Piecewise Linear
[۳] - Lipschitz
[۴] - Modified Random Search Algorithm
[۵] - Piecewise Multi-Affine
[۶] - Takagi-Sugeno

ازاین‌رو، لازم است تا متغیرهای غیرقابل سنجش تخمین زده شوند. رویتگر حالت، زیر سیستمی از سیستم کنترل است که بر اساس سنجش‌هایی از متغیرهای خروجی و کنترل، تخمین متغیرهای حالت را فراهم می‌سازد [۱۱]. رویتگر حالت کاربرد فراوانی در مباحث کنترلی داشته و در تحقیقات پیشین بسیار مورداستفاده قرار گرفته است. به‌طور مثال در مرجع [۱۲]، طراحی رویتگر حالت مبتنی بر کنترل پسخور خروجی استاتیک برای سیستم‌های زمان گسسته، تحت قوانین کلیدزنی دلخواه ارائه شده است. شرایط پایداری محافظه‌کارانه برای سیستم موردمطالعه، با استفاده از روش‌های LMI، تابع لیاپانوف سوئیچ شده (SLF[۱]) و لم فینسلر مطرح شده است. مرجع [۱۳] طراحی رویتگر برای سیستم‌های کلیدزنی زمان گسسته را پیشنهاد می‌کند که توسط مدل‌های فازی (T-S) ارائه می‌شوند. مرجع [۱۳] جهت طراحی رویتگر، از تابع لیاپانوف کلیدزنی استفاده می‌کند. ترتیب کلیدزنی‌ها از پیش شناخته‌شده نیستند و جهت بهبود پایداری دینامیک‌های خطا، تابع لیاپانوف قابلیت تغییر در طول کلیدزنی ها را دارا است. در مرجع [۱۴] مسئله تخمین خطا و کنترل تحمل‌پذیر خطا برای کلاسی از سیستم‌های تکه‌ای‌خطی زمان گسسته بررسی شده است. در ابتدا رویتگر تخمین خطا برای سیستم طراحی شده است. سپس با توجه به تخمین خطای صورت گرفته، کنترل‌کننده تحمل‌پذیر خطای پسخور خروجی استاتیک تکه‌ای، طراحی شده تا پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته تضمین گشته و اثر اغتشاش تضعیف شود. شرایط کافی برای وجود رویتگر تخمین خطا و کنترل تحمل‌پذیر خطا به‌صورت ترم‌های LMI به‌دست‌آمده‌اند.

با توجه به مطالعاتی که روی کارهای پیشین انجام داده‌ایم، دریافتیم که لم فینسلر رابطی بین نامساوی‌های ماتریسی خطی و شرط پایداری لیاپانوف است. در اکثر مواقع (معمولاً برای سیستم‌های پیوسته) از شرط پایداری لیاپانوف می‌توان مستقیماً نامساوی‌های ماتریسی خطی را به دست آورده و پارامترهای مجهول را محاسبه کرد. ولی در برخی موارد (معمولاً برای سیستم‌های گسسته) نمی‌توان مستقیماً از شرط پایداری لیاپانوف، نامساوی ماتریسی خطی را به دست آورد. لذا در این حالت از لم فینسلر کمک گرفته می‌شود تا شرط پایداری لیاپانوف را به فرم نامساوی‌های ماتریسی افاین[۲] تبدیل کرد. در مقالات محدودی از لم فینسلر به همراه روش LMI جهت کنترل سیستم‌های تکه‌ای‌خطی استفاده شده است. به‌عنوان‌مثال، در مقالات [۱۶،۱۵] ، لم فینسلر به همراه روش LMI جهت کنترل پسخور خروجی استاتیک به‌کاربرده شده‌اند. کنترل‌کننده‌های استفاده‌شده در [۱۶،۱۵] قابلیت پایدارسازی مجانبی سیستم را دارا بوده و از کارایی خوبی برخوردار هستند، ولی نقطه‌ضعف‌هایی را نیز دارند. کنترل‌کننده‌های مراجع [۱۶،۱۵] تنها در صورتی قادر به پایدارسازی سیستم خواهند بود که ماتریس‌های سیستم، رتبه کامل باشند. در این پژوهش با استفاده از ساختار جدید نامساوی‌های ماتریسی، کنترل‌کننده‌ای جهت رفع مشکل پایدارسازی سیستم با ماتریس‌های رتبه غیر کامل ارائه شده است. در این پژوهش، کنترل پسخور حالت با ساختاری جدید، جهت پایدارسازی سیستم‌های تکه‌ای‌خطی ارائه شده است. همچنین کنترل‌کننده پیشنهادی شامل رویتگر حالت نیز بوده که تخمینی از متغیرهای حالت سیستم را در اختیار ما قرار می‌دهد. با توجه به شبیه‌سازی‌های صورت گرفته، با مقایسه روش پیشنهادی این پژوهش و مرجع [۱۶]، مشاهده خواهد شد که روش پیشنهادی، علاوه بر حل مشکل پایداری برای سیستم‌های تکه‌ای‌خطی با ماتریس‌های رتبه غیرکامل، از سرعت پایدارسازی و عملکرد بهتری نیز نسبت به کنترل‌کننده مرجع [۱۶] برخوردار است.

در بخش دوم این مقاله، به تعریف مسئله و معرفی سیستم می‌پردازیم. در بخش سوم، طراحی رویتگر حالت برای سیستم تکه‌ای فاقد اغتشاش خارجی مطرح شده است. بخش چهارم به طراحی رویتگر حالت برای سیستم همراه با اغتشاش خارجی پرداخته است. در بخش چهارم، نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادشده، نشان داده‌شده است و در بخش پنجم نتیجه‌گیری پژوهش ارائه شده است.

نمادها : ما در این مقاله از نمادهای استاندارد استفاده کرده‌ایم. M^T بیانگر ترانهاده M و M^{-T} به معنی $\left(M^{-1}\right)^T$ است. عبارت $M>0$ به معنی مثبت معین و $M<0$ به معنی منفی معین است. نماد "*" در برخی از ماتریس‌ها برای بیان ساختار متقارن بکار رفته است. نماد L^2 معرف فضای لبسگو است که شامل تمام توابع برداری زمان گسسته است که روی $[0,1,2,...,\infty)$ بصورت مربعی جمع‌پذیر هستند.

۱- توصیف سیستم

سیستم زمان گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \\ \quad y(k) = C_i x(k) \end{cases} \qquad (۱)$$
$$for \ \ x \in X_i \ , \ i \in I_l$$

که $x(k) \in R^n$ حالت سیستم (۱)، $u(k) \in R^m$ ورودی کنترل و $y(k) \in R^p$ خروجی اندازه‌گیری شده هستند. $\{X_i\}_{i \in I_l} \subseteq R^n$ بیانگر تقسیم فضای حالت X به تعدادی شبه فضای چندوجهی بسته است. به‌طور مثال $I_l = \{1,2,...,l\}$ شاخص مجموعه شبه فضاها است. ما به هر X_i به‌عنوان یک سلول رجوع می‌کنیم. S را مجموعه زوج‌های مرتب (i,j) شاخص‌ها در نظر می‌گیریم که اشاره به کلید زنی‌های ممکن از سلول i به سلول j دارد.

$$S = \{(i,j) : i,j \in I_l \ such\ that\ x(k) \in X_i \\ and\ \ x(k+1) \in X_j\} \qquad (۲)$$

[۱] - Switched Lyapunov Function
[۲] - Affine

معادله رویتگر برای سیستم (۱)، به‌صورت عبارت (۳) تعریف می‌شود [۱۷]:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_i\hat{x}(k) + B_iu(k) + L_i(y(k)-\hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) = C_i\hat{x}(k) \end{cases} \quad (۳)$$

معادله خطا را به‌صورت رابطه (۴) معرفی می‌کنیم:

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (۴)$$

مشتق رابطه خطا، به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (۵)$$

با جایگذاری معادله (۱) و (۳) در رابطه (۵)، نتیجه زیر حاصل می-شود:

$$\begin{aligned} e(k+1) &= [A_ix(k) + B_iu(k)] \\ &-[A_i\hat{x}(k) + B_iu(k) + L_i(y(k)-\hat{y}(k))] \end{aligned} \quad (۶)$$

و با جایگذاری $y(k)$ و $\hat{y}(k)$ از روابط (۱) و (۳) در عبارت فوق، رابطه (۷) به دست می‌آید:

$$e(k+1) = (A_i - L_iC_i)e(k) \quad (۷)$$

قانون کنترل پسخور حالت به‌صورت (۸) تعریف می‌گردد:

$$u(k) = K_i\hat{x}(k) \ , i \in I_l \quad (۸)$$

که K_i بهره پسخور حالت است. با جایگذاری قانون کنترل (۸) در رابطه (۳)، عبارت (۹) را نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{x}(k+1) = (A_i + B_iK_i)\hat{x}(k) + L_iC_ie(k) \quad (۹)$$

با توجه به عبارت $x(k) = \hat{x}(k) + e(k)$، خروجی اندازه‌گیری شده را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y(k) = C_i(\hat{x}(k) + e(k)) \quad (۱۰)$$

با توجه به روابط به‌دست‌آمده در (۷)، (۹) و (۱۰)، می‌توان معادله جدید سیستم که شامل رویتگر حالت همراه با پسخور حالت است را به‌صورت رابطه (۱۱) نوشت:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i + B_iK_i & L_iC_i \\ 0 & A_i - L_iC_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \\ y(k) = \begin{bmatrix} C_i & C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (۱۱)$$

معادله (۱۱) را به فرم ساده‌تر (۱۲) بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} h(k+1) = A_{cli}h(k) \\ y(k) = C_{cli}h(k) \end{cases}$$
$$h(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} \ , \ h(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$$
$$A_{cli} = \begin{bmatrix} A_i + B_iK_i & L_iC_i \\ 0 & A_i - L_iC_i \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$
$$C_{cli} = \begin{bmatrix} C_i & C_i \end{bmatrix}$$

در ادامه، سه لم معرفی می‌شوند که برای اثبات پایداری مجانبی سیستم (۱۲) مورداستفاده قرار می‌گیرند:

لم ۱ (لم فینسلر [۱۵]): شرایط $\xi \in R^n$ ، $P = P^T \in R^{n\times n}$ و $H \in R^{m\times n}$ که در آن شرط $rank(H) = r < n$ را داریم، در نظر بگیرید. در این صورت می‌توان جملات زیر را نتیجه گرفت:

۱- برای تمام $\xi \neq 0$ و $H\xi = 0$ خواهیم داشت: $\xi^TP\xi < 0$

۲- $\exists X \in R^{n\times m}$ به‌طوری‌که $P + XH + H^TX^T < 0$.

لم ۲ [۱۸]- (قضیه پایداری لیاپانوف): اگر ماتریسی به‌صورت $\hat{P}_i = \hat{P}_i^T > 0, \forall i \in I_l$ وجود داشته باشد و تابع مثبت معین $V(x) = x^T\hat{P}_ix, \forall x \in X_i$ عبارت $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ را برقرار سازد، در این صورت سیستم (۱۲) پایدار مجانبی خواهد بود. تابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای می‌تواند به‌صورت رابطه زیر محاسبه گردد:

$$A_{cli}^T\hat{P}_jA_{cli} - \hat{P}_i < 0 \ , \forall(i,j) \in S \quad (۱۳)$$

$$\hat{P}_i = \hat{P}_i^T > 0 \ , \ \forall i \in I_l \quad (۱۴)$$

لم ۳ (لم مکمل شور) اگر ماتریس‌های R و Q ماتریس‌های متقارن بوده، تعداد سطرهای S برابر با تعداد سطرهای Q و تعداد ستون-های S برابر با تعداد ستون‌های R باشند، در این صورت شرط ماتریسی $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} < 0$ معادل خواهد بود با عبارات $R < 0$ و $Q - SR^{-1}S^T < 0$.

تعریف ۱: شرط محدود کردن رشد تابع لیاپانوف در سیستم‌های کلیدزنی بدین‌صورت تعریف می‌شود که برای هر کلیدزنی لحظه‌ای باید شرط $\hat{P}_j \leq \mu\hat{P}_i$ یا $V_j(x) \leq \mu V_i(x)$ برقرار باشد. اگر نامساوی $\hat{P}_j \leq \mu\hat{P}_i$ برای همه مقادیر $\mu > 1$ برقرار نباشد، در این صورت به‌جای پایداری مجانبی فقط پایداری محلی سیستم را می‌توان نتیجه گرفت.

تعریف ۲: در مرجع [۱۶] با فرض اینکه ماتریس‌های B_{i1} و C_{i2} به ترتیب رتبه کامل ستونی و سطری هستند، ماتریس‌های تبدیل غیرتکین T_{bi} و T_{ci} به فرم (۱۵) تعریف می‌شوند:

$$T_{bi} = \begin{bmatrix} \left(B_i^TB_i\right)^{-1}B_i^T \\ B_i^{T\perp T} \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$
$$T_{ci} = \begin{bmatrix} C_i^T\left(C_iC_i^T\right)^{-1} & C_i^{\perp} \end{bmatrix}$$

با توجه به شرط ذکرشده مرجع [۱۶]، مشاهده می‌شود که ماتریس‌های تبدیل رابطه (۱۵)، تنها در صورتی برقرار هستند که ماتریس‌های B_{i1} و

C_{i2} رتبه کامل باشند. کنترل‌کننده پیشنهادشده در [۱۶]، قابلیت پایدارسازی سیستم دارای ماتریس‌های B_{i1} و یا C_{i2} با رتبه ناقص را ندارد. در این مقاله از ساختار جدید نامساوی ماتریسی خطی و ماتریس کمکی استفاده‌شده است تا پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته در شرایطی که ماتریس‌های B_{i1} و یا C_{i2} رتبه کامل نیستند نیز تضمین شود.

۲- طراحی رویتگر حالت سیستم

در این بخش بر اساس تابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای و لم فینسلر، شرایط جدید نامساوی ماتریسی خطی تعریف شده است تا بهره پسخور حالت به نحوی محاسبه شود که سیستم حلقه بسته (۱۲) پایدار مجانبی شود.

قضیه ۱ : اگر ماتریس‌های متقارن و مثبت معین E_i، Q_i، E_j، Q_j و ماتریس متقارن F_i وجود داشته باشند به‌طوری‌که نامساوی ماتریسی (۱۶) برقرار شود:

$$\begin{bmatrix} -F_i-F_i^T & 0 & A_iE_i^T+B_iW_i & L_iC_i & F_i \\ * & Q_j-2I & 0 & A_i-L_iC_i & 0 \\ * & * & -E_i^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix}<0 \qquad (۱۶)$$

در این صورت سیستم حلقه بسته (۱۲) پایدار مجانبی خواهد بود.

اثبات قضیه ۱ : برای بررسی و اثبات پایداری مجانبی سیستم (۱۲)، از لم ۲ استفاده می‌کنیم. با ضرب عبارت (۱۳) از چپ و راست به ترتیب در $h^T(k)$ و $h(k)$، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$h^T(k)A_{cli}^T\hat{P}_jA_{cli}^Th(k)-h^T(k)\hat{P}_ih(k)<0 \qquad (۱۷)$$

با توجه به عبارت $h(k+1)=A_{cli}h(k)$، رابطه (۱۷) به فرم (۱۸) نوشته می‌شود:

$$h^T(k+1)\hat{P}_jh(k+1)-h^T(k)\hat{P}_ih(k)<0 \qquad (۱۸)$$

رابطه (۱۸) را می‌توان به فرم ماتریسی (۱۹) نوشت:

$$\begin{bmatrix} h^T(k+1) & h^T(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{P}_j & 0 \\ 0 & -\hat{P}_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h(k+1) \\ h(k) \end{bmatrix}<0 \qquad (۱۹)$$

با توجه به رابطه فوق، اگر پارامتر ξ را به‌صورت $\xi=\begin{bmatrix} h(k+1) \\ h(k) \end{bmatrix}$ و پارامتر P را به‌صورت $P=\begin{bmatrix} \hat{P}_j & 0 \\ 0 & -\hat{P}_i \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، در این صورت ماتریس H را می‌توان طوری یافت که رابطه $H\xi=0$ برقرار شود. ماتریس H به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$H=\begin{bmatrix} -I & A_{cli} \end{bmatrix} \qquad (۲۰)$$

پس چون شروط $\xi\neq 0$ و $H\xi=0$ وجود دارند، عبارت $\xi^TP\xi<0$ رابطه (۱۹) برقرار است. با توجه به لم ۱، می‌توان ماتریس X را چنان یافت تا عبارت $P+XH+H^TX<0$ برقرار شود. ماتریس X را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$X=\begin{bmatrix} \hat{G}_i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

عبارت $P+XH+H^TX<0$ با جایگذاری مقادیر P، X و H به فرم (۲۲) تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_j-\hat{G}_i-\hat{G}_i^T & \hat{G}_iA_{cli} \\ * & -\hat{P}_i \end{bmatrix}<0 \qquad (۲۲)$$

ماتریس‌های $\hat{P}_j$، $\hat{P}_i$ و $\hat{G}_i$ به‌کاررفته در عبارت (۲۲) به‌صورت (۲۳) تعریف می‌شوند:

$$\hat{P}_j=\begin{bmatrix} P_j & 0 \\ 0 & Q_j \end{bmatrix},\ \hat{P}_i=\begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix}$$
$$\hat{G}_i=\begin{bmatrix} G_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

ماتریس‌های P_i، P_j، Q_i، Q_j و G_i، ماتریس‌های متقارن و مثبت معین هستند. با جایگذاری ماتریس‌های رابطه (۲۳) و A_{cli} رابطه (۱۲) در (۲۲)، عبارت (۲۴) را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} P_j-G_i-G_i^T & 0 & G_iA_i+G_iB_iK_i & G_iL_iC_i \\ * & Q_j-2I & 0 & A_i-L_iC_i \\ * & * & -P_i & 0 \\ * & * & * & -Q_i \end{bmatrix}<0 \qquad (۲۴)$$

با ضرب رابطه (۲۴) از چپ و راست به ترتیب در $diag(G_i^{-1},I,I,I)$ و ترانهاده‌اش، رابطه (۲۵) حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} G_i^{-1}P_jG_i^{-T}-G_i^{-T}-G_i^{-1} & 0 & A_i+B_iK_i & L_iC_i \\ * & Q_j-2I & 0 & A_i-L_iC_i \\ * & * & -P_i & 0 \\ * & * & * & -Q_i \end{bmatrix}<0 \qquad (۲۵)$$

با اعمال تغییر متغیر $F_i=G_i^{-1}$، رابطه (۲۵) را به‌صورت عبارت (۲۶) می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} F_iP_jF_i^T-F_i^T-F_i & 0 & A_i+B_iK_i & L_iC_i \\ * & Q_j-2I & 0 & A_i-L_iC_i \\ * & * & -P_i & 0 \\ * & * & * & -Q_i \end{bmatrix}<0 \qquad (۲۶)$$

با اعمال لم شور و تغییر متغیر $E_j=P_j^{-1}$ در رابطه (۲۶)، رابطه (۲۷) حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} -F_i - F_i^T & 0 & A_i+B_iK_i & L_iC_i & F_i \\ * & Q_j-2I & 0 & A_i-L_iC_i & 0 \\ * & * & -P_i & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix} <0 \qquad (۲۷)$$

رابطه (۲۷) را به ترتیب از چپ و راست در $diag(I,I,P_i^{-1},I,I)$ و ترانهاده‌اش ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -F_i - F_i^T & 0 & A_iP_i^{-T}+B_iK_iP_i^{-T} & L_iC_i & F_i \\ * & Q_j-2I & 0 & A_i-L_iC_i & 0 \\ * & * & -P_i^{-T} & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix} <0 \qquad (۲۸)$$

با اعمال تغییر متغیر $E_i=P_i^{-1}$ و سپس $W_i=K_iE_i^T$ در رابطه (۲۸)، نامساوی (۲۹) حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} -F_i - F_i^T & 0 & A_iE_i^T+B_iW_i & L_iC_i & F_i \\ * & Q_j-2I & 0 & A_i-L_iC_i & 0 \\ * & * & -E_i^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix} <0 \qquad (۲۹)$$

پس درصورتی‌که LMI رابطه (۲۹) برقرار باشد، سیستم (۱۲) پایدار مجانبی خواهد بود.

۳- طراحی رویتگر حالت سیستم همراه با اغتشاش

سیستم تکه‌ای‌خطی همراه با اغتشاش خارجی را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x(k+1)=A_ix(k)+B_{i1}u(k)+B_{i2}w(k) \\ z(k)=C_{i1}x(k)+D_{i11}u(k)+D_{i12}w(k) \\ y(k)=C_{i2}x(k)+D_{i21}w(k) \end{cases} \qquad (۳۰)$$

که $x(k)\in R^n$ حالت سیستم، $u(k)\in R^m$ ورودی کنترل، $y(k)\in R^p$ خروجی اندازه‌گیری شده، $w(k)\in R^r$ ورودی اغتشاش و $z(k)\in R^q$ خروجی کنترل‌شده می‌باشند. معادله رویتگر برای سیستم (۳۰)، به‌صورت رابطه (۳۱) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1)=A_i\hat{x}(k)+B_{i1}u(k)+L_i(y(k)-\hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k)=C_{i2}\hat{x}(k) \end{cases} \qquad (۳۱)$$

معادله خطا را نیز به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$e(k)=x(k)-\hat{x}(k) \qquad (۳۲)$$

مشتق خطا، به فرم (۳۳) حاصل می‌شود:

$$e(k+1)=x(k+1)-\hat{x}(k+1) \qquad (۳۳)$$

با جایگذاری معادله (۳۰) و (۳۱) در رابطه (۳۳)، عبارت (۳۴) را نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} e(k+1)=&[A_ix(k)+B_{i1}u(k)+B_{i2}w(k)] \\ &-[A_i\hat{x}(k)+B_{i1}u(k)+L_i(y(k)-\hat{y}(k))] \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

با جایگذاری $y(k)$ و $\hat{y}(k)$ روابط (۳۰) و (۳۱) در عبارت فوق، رابطه (۳۵) به دست می‌آید:

$$e(k+1)=(A_i-L_iC_{i2})e(k)+(B_{i2}-L_iD_{i21})w(k) \qquad (۳۵)$$

قانون کنترل پسخور حالت به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$u(k)=K_i\hat{x}(k) \ , \ i\in I_l \qquad (۳۶)$$

که K_i بهره پسخور حالت است. با جایگذاری قانون کنترل (۳۶) در رابطه (۳۱)، عبارت (۳۷) را نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{x}(k+1)=(A_i+B_{i1}K_i)\hat{x}(k)+L_iC_{i2}e(k)+L_iD_{i21}w(k) \qquad (۳۷)$$

با توجه به عبارت (۳۶) و $x(k)=\hat{x}(k)+e(k)$، خروجی کنترل‌شده را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$z(k)=C_{i1}(\hat{x}(k)+e(k))+D_{i11}K_i\hat{x}(k)+D_{i12}w(k) \qquad (۳۸)$$

با توجه به روابط به‌دست‌آمده در (۳۵)، (۳۷) و(۳۸)، می‌توان معادله جدید سیستم را که همان رویتگر حالت همراه با پسخور حالت است را به‌صورت رابطه (۳۹) نوشت:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_i+B_{i1}K_i & L_iC_{i2} \\ 0 & A_i-L_iC_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} L_iD_{i21} \\ B_{i2}-L_iD_{i21} \end{bmatrix} w(k) \\ z(k) &= \begin{bmatrix} C_{i1}+D_{i11}K_i & C_{i1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + D_{i12}w(k) \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

معادله (۳۹) را به فرم ساده‌تر (۴۰) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} h(k+1)=A_{cli}h(k)+B_{cli}w(k) \\ z(k)=C_{cli}h(k)+D_{cli}w(k) \end{cases} \\ &h(k+1)=\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} \ , \ h(k)=\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \\ &A_{cli}=\begin{bmatrix} A_i+B_{i1}K_i & L_iC_{i2} \\ 0 & A_i-L_iC_{i2} \end{bmatrix} \\ &B_{cli}=\begin{bmatrix} L_iD_{i21} \\ B_{i2}-L_iD_{i21} \end{bmatrix}, \ D_{cli}=D_{i12} \\ &C_{cli}=\begin{bmatrix} C_{i1}+D_{i11}K_i & C_{i1} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

در ادامه کار، چهارچوب H_∞ را برای رویتگر (۴۰) به‌صورت زیر بیان می‌کنیم. اگر شرایط اولیه را برای هر عدد صحیح $N>0$ و برای هر $w\in L_2\left(\left[0,N\right],R^r\right)$، به‌صورت $x(0)=0$ در نظر بگیریم، آنگاه سیگنال اغتشاش w تضعیف می‌شود. درنتیجه، رابطه (۴۱) را خواهیم داشت [۱۶]:

$$\sum_{k=0}^{N}\| z(k)\|^2 < \gamma^2 \sum_{k=0}^{N}\| w(k)\|^2 \tag{۴۱}$$

که γ یک عدد اسکالر مثبت است.

لم ٤ (قضیه پایداری لیاپانوف [۱۶]): سیستم (۴۰) را با شرایط اولیه $x(0)=0$ در نظر بگیرید. اگر تابع $V(x)=x^T\hat{P}_i x, \forall x\in X_i$ با $\hat{P}_i=\hat{P}_i^T>0, \forall i\in I_l$ وجود داشته باشد که نامساوی زیر را تصدیق کند:

$$V(x(k+1))-V(x(k))<\gamma^2\| w(k)\|^2-\| z(k)\|^2 \ , \forall k \tag{۴۲}$$

در این صورت، شرط کارایی H_∞ (۴۱) برقرار شده و سیستم (۴۰) پایدار مجانبی می‌گردد. تابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} & h^T(k+1)\hat{P}_j h(k+1)-h^T(k)\hat{P}_i h(k)< \\ & \gamma^2 w^T(k)\ w(k)-z^T(k)z(k) \ ,\forall (i,j)\in S \\ & \hat{P}_i=\hat{P}_i^T>0 \ , \ \forall i\in I_l \end{aligned} \tag{۴۳}$$

قضیه ۲ : اگر ماتریس‌های متقارن و مثبت معین E_i، Q_i، E_j، Q_j و ماتریس متقارن F_i وجود داشته باشند به‌طوری‌که نامساوی ماتریسی (۴۴) برقرار شود:

$$\begin{bmatrix} -F_i^T-F_i & 0 & 0 & A_iE_i^T+B_{i1}W_i & L_iC_{i2} & L_iD_{i21} & F_i \\ * & Q_j-2I & 0 & 0 & A_i-L_iC_{i2} & B_{i2}-L_iD_{i21} & 0 \\ * & * & -I & C_{i1}E_i^T+D_{i11}W_i & C_{i1} & D_{i12} & 0 \\ * & * & * & -E_i^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix}<0 \tag{۴۴}$$

در این صورت سیستم حلقه بسته (۴۰) پایدار مجانبی خواهد بود.

اثبات قضیه ۲ : برای بررسی و اثبات پایداری مجانبی سیستم (۴۰)، از لم ۴ استفاده می‌کنیم. عبارت (۴۳) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} h(k+1) \\ z(k) \\ h(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{P}_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{P}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(k+1) \\ z(k) \\ h(k) \\ w(k) \end{bmatrix}<0 \tag{۴۵}$$

با توجه به رابطه فوق، اگر پارامتر ξ را به‌صورت $\xi=\begin{bmatrix} h(k+1)^T & z(k)^T & h(k)^T & w(k)^T \end{bmatrix}^T$ و پارامتر P را به‌صورت

$$P=\begin{bmatrix} \hat{P}_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{P}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

در نظر بگیریم، در این صورت ماتریس H را می‌توان طوری یافت که رابطه $H\xi=0$ برقرار شود. ماتریس H به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$H=\begin{bmatrix} -I & 0 & A_{cli} & B_{cli} \\ 0 & -I & C_{cli} & D_{cli} \end{bmatrix} \tag{۴۶}$$

پس چون شروط $\xi\neq 0$ و $H\xi=0$ وجود دارند، عبارت $\xi^T P\xi<0$ رابطه (۴۵) برقرار است. با توجه به لم ۱، می‌توان ماتریس X را چنان یافت تا عبارت $P+XH+H^TX<0$ برقرار شود. ماتریس X را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$X=\begin{bmatrix} \hat{G}_i & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۴۷}$$

عبارت $P+XH+H^TX<0$ با جایگذاری مقادیر P، X و H به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_j-\hat{G}_i-\hat{G}_i^T & 0 & \hat{G}_iA_{cli} & \hat{G}_iB_{cli} \\ * & -I & C_{cli} & D_{cli} \\ * & * & -\hat{P}_i & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}<0 \tag{۴۸}$$

ماتریس‌های $\hat{P}_j$، $\hat{P}_i$ و $\hat{G}_i$ بکار رفته در عبارت (۴۸) به فرم (۴۹) تعریف می‌شوند:

$$\hat{P}_j=\begin{bmatrix} P_j & 0 \\ 0 & Q_j \end{bmatrix} \ , \ \hat{P}_i=\begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \\ \hat{G}_i=\begin{bmatrix} G_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{۴۹}$$

ماتریس‌های P_i، P_j، Q_i، Q_j و G_i ماتریس‌های متقارن و مثبت معین هستند. با جایگذاری ماتریس‌های رابطه (۴۹) و A_{cli}، B_{cli}، C_{cli} و D_{cli} رابطه (۴۰) در (۴۸)، عبارت (۵۰) را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} P_j - G_i - G_i^T & 0 & 0 & G_iA_i + G_iB_{i1}K_i & G_iL_iC_{i2} & G_iL_iD_{i21} \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 & A_i - L_iC_{i2} & B_{i2} - L_iD_{i21} \\ * & * & -I & C_{i1} + D_{i11}K_i & C_{i1} & D_{i12} \\ * & * & * & -P_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (۵۰)$$

با ضرب رابطه (۵۰) از چپ و راست به ترتیب در $diag(G_i^{-1}, I, I, I, I)$ و ترانهاده‌اش، رابطه (۵۱) حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} G_i^{-1}P_jG_i^{-T} - G_i^{-T} - G_i^{-1} & 0 & 0 & A_i + B_{i1}K_i & L_iC_{i2} & L_iD_{i21} \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 & A_i - L_iC_{i2} & B_{i2} - L_iD_{i21} \\ * & * & -I & C_{i1} + D_{i11}K_i & C_{i1} & D_{i12} \\ * & * & * & -P_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (۵۱)$$

با اعمال تغییر متغیر $F_i = G_i^{-1}$، رابطه (۵۱) را به‌صورت عبارت (۵۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} F_iP_jF_i^T - F_i^T - F_i & 0 & 0 & A_i + B_{i1}K_i & L_iC_{i2} & L_iD_{i21} \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 & A_i - L_iC_{i2} & B_{i2} - L_iD_{i21} \\ * & * & -I & C_{i1} + D_{i11}K_i & C_{i1} & D_{i12} \\ * & * & * & -P_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (۵۲)$$

با اعمال لم شور و تغییر متغیر $E_j = P_j^{-1}$ در رابطه (۵۲)، رابطه (۵۳) حاصل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} -F_i^T - F_i & 0 & 0 & A_i + B_{i1}K_i & L_iC_{i2} & L_iD_{i21} & F_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 & A_i - L_iC_{i2} & B_{i2} - L_iD_{i21} & 0 \\ * & * & -I & C_{i1} + D_{i11}K_i & C_{i1} & D_{i12} & 0 \\ * & * & * & -P_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0 \quad (۵۳)$$

رابطه (۵۳) را به ترتیب از چپ و راست در $diag(I, I, I, P_i^{-1}, I, I, I)$ و ترانهاده‌اش ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -F_i^T - F_i & 0 & 0 & A_iP_i^{-T} + B_{i1}K_iP_i^{-T} & L_iC_{i2} & L_iD_{i21} & F_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 & A_i - L_iC_{i2} & B_{i2} - L_iD_{i21} & 0 \\ * & * & -I & C_{i1}P_i^{-T} + D_{i11}K_iP_i^{-T} & C_{i1} & D_{i12} & 0 \\ * & * & * & -P_i^{-T} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0 \quad (۵۴)$$

با اعمال تغییر متغیرهای $\beta = \gamma^2$، $E_i = P_i^{-1}$ و سپس $W_i = K_iE_i^T$، رابطه (۵۴) به فرم نامساوی (۵۵) تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} -F_i^T - F_i & 0 & 0 & A_iE_i^T + B_{i1}W_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 \\ * & * & -I & C_{i1}E_i^T + D_{i11}W_i \\ * & * & * & -E_i^T \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \quad (۵۵)$$

$$\begin{bmatrix} L_iC_{i2} & L_iD_{i21} & F_i \\ A_i - L_iC_{i2} & B_{i2} - L_iD_{i21} & 0 \\ C_{i1} & D_{i12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -Q_i & 0 & 0 \\ * & -\beta I & 0 \\ * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0$$

لذا درصورتی‌که LMI رابطه (۵۵) برقرار باشد، سیستم (۴۰) پایدار مجانبی خواهد بود.

٤- شبیه‌سازی

بخش شبیه‌سازی شامل سه قسمت است. در بخش اول، نتایج شبیه‌سازی حاصل از طراحی کنترل‌کننده پسخور حالت همراه با رویتگر، برای سیستم فاقد اغتشاش خارجی ارائه می‌شود و مقایسه‌ای بین روش ارائه‌شده جدید و روش کنترلی مرجع [۱۶] صورت می‌گیرد. در بخش دوم، نتایج طراحی کنترل‌کننده پسخور حالت همراه با رویتگر، برای سیستم همراه با اغتشاش خارجی نشان داده‌شده و مشابه حالت قبل مقایسه‌ای بین روش ارائه‌شده جدید و روش کنترل مرجع [۱۶] صورت می‌گیرد. در بخش سوم، روش کنترلی این پژوهش روی یک سیستم پاندول معکوس اعمال شده و نتایج پایداری سیستم، نشان داده شده است. شرایط اولیه به‌صورت $[\hat{x}(0) \;\vdots\; e(0)] = [3 \;\; -2 \;\; 3 \;\vdots\; -1 \;\; 0 \;\; 1]$ در نظر گرفته‌شده است.

۵-۱ شبیه‌سازی کنترل پسخور حالت همراه با رویتگر برای سیستم فاقد اغتشاش خارجی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی کنترل‌کننده پسخور حالت همراه با رویتگر، برای سیستم فاقد اغتشاش خارجی، ارائه شده و مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی و روش پسخور خروجی استاتیک مرجع [۱۴] صورت گرفته است.

مثال ۱: سیستم (۵۶) با ماتریس‌های کلیدزنی (۵۷) را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} h(k+1) = A_{cli}h(k) \\ y(k) = C_{cli}h(k) \end{cases}$$
$$h(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix}, \quad h(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \tag{۵۶}$$
$$A_{cli} = \begin{bmatrix} A_i + B_iK_i & L_iC_i \\ 0 & A_i - L_iC_i \end{bmatrix}$$
$$C_{cli} = \begin{bmatrix} C_i & C_i \end{bmatrix}$$

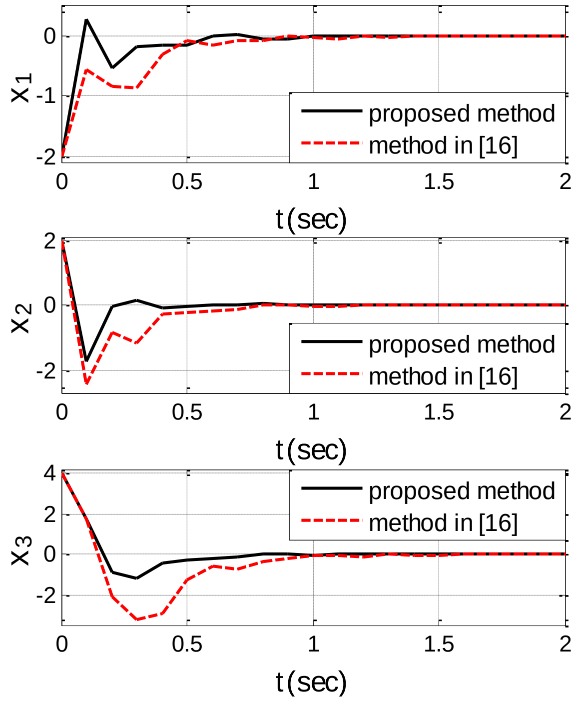
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.7786 & 0.9908 & 0.1270 \\ 0.1616 & 0.8443 & 0.8144 \\ 0.9214 & -1.7747 & 0.7825 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.3894 & 0.3263 & 0.7746 \\ 0.7806 & 0.9886 & 0.1297 \\ 0.8814 & 0.4718 & 0.3110 \end{bmatrix} \tag{۵۷}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.3049 & 0.4247 & 0.8979 \\ 0.8448 & 0.2485 & 0.6921 \\ 0.7558 & -0.9160 & 0.3636 \end{bmatrix}$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.1194 & 0.3964 & 0.2454 \\ 0.1034 & 0.2515 & 0.4983 \\ 0.6981 & 0.8655 & 0.2403 \end{bmatrix}$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2458 & 0.7409 \\ 0.2501 & 0.5257 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.2722 & 0.6055 \\ 0.1576 & 0.1580 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$B_3 = \begin{bmatrix} 0.4945 & 0.3020 \\ 0.9237 & 0.9118 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.9894 & 0.7205 \\ 0.1709 & 0.1519 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$C_1 = [0.3815 \quad 0.6916 \quad 0.7183]$$
$$C_2 = [0.0591 \quad 0.8258 \quad 0.4354]$$
$$C_3 = [0.5204 \quad 0.8010 \quad 0.9708]$$
$$C_4 = [0.6995 \quad 0.3081 \quad 0.8767]$$

با استفاده از ماتریس‌های رابطه (۵۷)، شکل ۱ نشان‌دهنده متغیرهای حالت سیستم (۵۶) و همچنین متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته بدون اغتشاش مرجع [۱۶] است. شکل ۲ نشان‌دهنده مدهای کلیدزنی سیستم (۵۶) می‌باشد. درصورتی‌که قانون کنترل را به‌صورت $u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، شکل ۳ نمایش‌دهنده قانون کنترل $u(k)$ برای روش کنترلی پیشنهاد شده و روش کنترلی مرجع [۱۶] است. شکل ۴ نیز نشان‌دهنده سیگنال‌های خطای سیستم (۵۶) است.

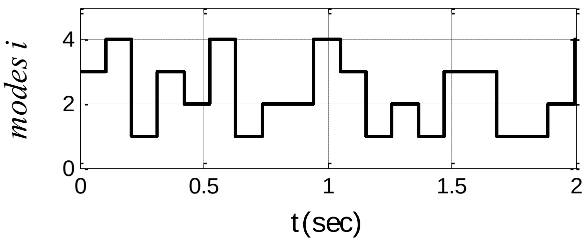
با استفاده از روش پیشنهادی، بهره پسخور حالت و بهره رویتگر حالت به‌گونه‌ای محاسبه‌شده‌اند تا سیستم (۵۶) پایدار مجانبی شده و خطا به صفر میل کند. مقدار بهره پسخور حالت، بهره رویتگر، مقادیر ویژه و سایر پارامترها، برای هر یک از مدهای کلیدزنی به‌صورت جدول ۱ محاسبه می‌شود:

جدول ۱ – پارامترهای کنترل‌کننده پیشنهادی برای سیستم (۵۶)

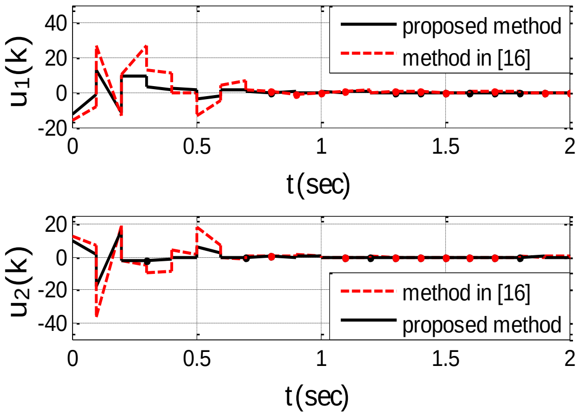
Mode 1
$K_i = \begin{bmatrix} 3.0518 & -4.0769 & -11.2791 \\ -2.5178 & -0.4613 & 3.1996 \end{bmatrix}$
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.4286 & 0.1950 & -0.1337 \\ 0.1950 & 1.2127 & 0.0927 \\ -0.13337 & 0.0927 & 1.0934 \end{bmatrix}$
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 1.2250 & 0.2385 & 0.1308 \\ 0.2385 & 1.2081 & 0.1251 \\ 0.1308 & 0.1251 & 0.9274 \end{bmatrix}$
$G_i = \begin{bmatrix} 0.8158 & 0.0980 & 0.0605 \\ 0.0980 & 0.8058 & 0.0578 \\ 0.0605 & 0.0578 & 0.6763 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.6702 \\ 0.8352 \\ 0.7784 \end{bmatrix}$
$eig = [0.1596, -0.1317, 0, 0.2236 \pm 0.4726\mathrm{i}, 0.5658]$
Mode 2
$K_i = \begin{bmatrix} -10.3648 & -11.7352 & -0.0588 \\ 3.6366 & 4.5404 & -1.3876 \end{bmatrix}$
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.6357 & 0.0360 & -0.0600 \\ 0.0360 & 1.4383 & -0.1293 \\ -0.0600 & -0.1293 & 1.2357 \end{bmatrix}$
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 1.2829 & -0.1095 & -0.0211 \\ -0.1095 & 1.0381 & -0.0304 \\ -0.0211 & -0.0304 & 0.9794 \end{bmatrix}$
$G_i = \begin{bmatrix} 1.1107 & -0.0880 & -0.0133 \\ -0.0880 & 0.9196 & -0.0215 \\ -0.0133 & -0.0215 & 0.8812 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.7570 \\ 0.9341 \\ 0.5767 \end{bmatrix}$
$eig = [0.7047, 0, -0.0312 \pm 0.0366i, -0.0415 \pm 0.0611i]$
Mode 3
$K_i = \begin{bmatrix} -1.1333 & -3.0496 & -4.0202 \\ -0.0355 & 2.5007 & 3.1915 \end{bmatrix}$
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.5669 & 0.0909 & 0.1398 \\ 0.0909 & 1.4081 & 0.0262 \\ 0.1398 & 0.0262 & 1.3477 \end{bmatrix}$
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 1.1152 & 0.1038 & -0.0430 \\ 0.1038 & 1.3564 & -0.0454 \\ -0.0430 & -0.0454 & 0.9016 \end{bmatrix}$
$G_i = \begin{bmatrix} 0.9152 & 0.0639 & -0.0283 \\ 0.0639 & 1.0724 & -0.0286 \\ -0.0283 & -0.0286 & 0.7690 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.5761 \\ 0.5045 \\ 0.5176 \end{bmatrix}$
$eig = [-0.2118, 0.0208, 0, 0.5368, -0.4131 \pm 0.2196\mathrm{i}]$
Mode 4



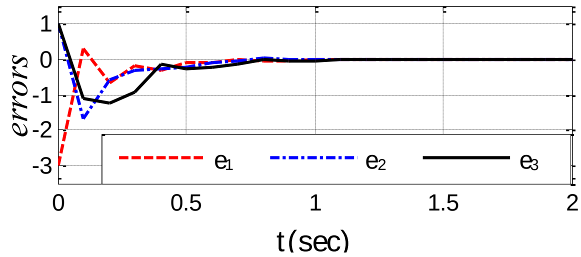
شکل ۱– متغیرهای حالت سیستم (۵۶) و سیستم مرجع [۱۶]



شکل ۲– مدهای کلیدزنی سیستم (۵۶)



شکل ۳– قانون کنترل $u(k)$ روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶]



شکل ۴– سیگنال‌های خطای سیستم (۵۶)

$$K_i = \begin{bmatrix} 4.8088 & 7.8391 & 12.7408 \\ -6.8921 & -11.4670 & -17.4865 \end{bmatrix}$$

$$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.3715 & 0.0795 & -0.0749 \\ 0.0795 & 1.4717 & 0.0066 \\ -0.0749 & 0.0066 & 0.9518 \end{bmatrix}$$

$$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 1.5283 & 0.3174 & 0.0495 \\ 0.3174 & 1.6560 & 0.0597 \\ 0.0495 & 0.0597 & 1.1495 \end{bmatrix}$$

$$G_i = \begin{bmatrix} 1.5974 & 0.3018 & 0.0467 \\ 0.3018 & 1.7144 & 0.0565 \\ 0.0467 & 0.0565 & 1.1543 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.1968 \\ 0.2786 \\ 0.2234 \end{bmatrix}$$

$$eig = [0.0548, -0.0536, 0, -0.2165 \pm 0.1266i, 0.6248]$$

برای توصیف بهتری از کارایی کنترل‌کننده پیشنهادی، شاخص‌های عملکردی را به‌صورت (۵۸) معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} IAS &= \min \int_0^{t_{ss}} |x(t)|\, dt \\ ITAS &= \min \int_0^{t_{ss}} t\,|x(t)|\, dt \\ ISS &= \min \int_0^{t_{ss}} x^2(t)\, dt \\ ITSS &= \min \int_0^{t_{ss}} t\, x^2(t)\, dt \end{aligned} \qquad (۵۸)$$

که IAS [۱] بیانگر انتگرال قدر مطلق تابع حالت، $ITAS$ [۲] انتگرال زمان در قدر مطلق تابع حالت، ISS [۳] انتگرال مجذور تابع حالت و $ITSS$ [۴] انتگرال زمان در مجذور تابع حالت هستند. با استفاده از شاخص‌های عملکرد تعریف‌شده، می‌توان مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] انجام داد. جدول ۲ نشان‌دهنده شاخص‌های عملکرد سیستم (۵۶) و شاخص‌های عملکرد سیستم معرفی‌شده مرجع [۱۶] است.

جدول ۲ – شاخص‌های عملکرد سیستم (۵۶) و سیستم مرجع [۱۶]

	IAS		
	x_1	x_2	x_3
سیستم (۵۶)	۰,۱۴۸۰	۰,۱۷۰۱	۰,۴۸۰۲
سیستم مرجع [۱۶]	۰,۲۴۴۰	۰,۲۷۳۲	۰,۷۰۰۴
	$ITAS$		
	x_1	x_2	x_3
سیستم (۵۶)	۰,۰۱۷۵	۰,۰۲۶۸	۰,۰۷۴۰
سیستم مرجع [۱۶]	۰,۰۳۴۸	۰,۰۴۱۹	۰,۱۳۴۸
	ISS		
	x_1	x_2	x_3
سیستم (۵۶)	۰,۲۰۶۰	۰,۲۱۱۶	۱,۰۱۸۵
سیستم مرجع [۱۶]	۰,۲۸۱۲	۰,۳۳۰۱	۱,۴۷۰۱
	$ITSS$		
	x_1	x_2	x_3
سیستم (۵۶)	۰,۰۰۱۶	۰,۰۰۳۸	۰,۰۳۴۳
سیستم مرجع [۱۶]	۰,۰۱۰۱	۰,۰۱۵۹	۰,۱۲۸۷

همان‌طور که مشاهده می‌شود کنترل‌کننده پیشنهادشده این پژوهش، شاخص‌های عملکرد را بهبود بخشیده و از عملکرد و سرعت پایدارسازی بهتری نسبت به کنترل‌کننده مرجع [۱۶] برخوردار است.

۵-۲ شبیه‌سازی کنترل پسخور حالت همراه با رویتگر برای سیستم دارای اغتشاش خارجی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی کنترل‌کننده پسخور حالت همراه با رویتگر، برای سیستم دارای اغتشاش خارجی، ارائه شده و مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی پژوهش و روش پسخور خروجی استاتیک مرجع [۱۶] صورت می‌گیرد.

مثال ۲: سیستم (۵۹) با ماتریس‌های کلیدزنی (۶۰) را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} h(k+1) = A_{cli}h(k) + B_{cli}w(k) \\ y(k) = C_{cli}h(k) + D_{cli}w(k) \end{cases}$$

$$h(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix}, \quad h(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$$

$$A_{cli} = \begin{bmatrix} A_i + B_{i1}K_i & L_iC_{i2} \\ 0 & A_i - L_iC_{i2} \end{bmatrix} \qquad (۵۹)$$

$$B_{cli} = \begin{bmatrix} L_iD_{i21} \\ B_{i2} - L_iD_{i21} \end{bmatrix}, \quad D_{cli} = D_{i12}$$

$$C_{cli} = \begin{bmatrix} C_{i1} + D_{i11}K_i & -C_{i1} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5871 & -0.8441 & -0.0092 \\ -0.6865 & -0.5090 & -0.8561 \\ 0.0974 & 0.4523 & -0.2280 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1089 & 0.2458 & -0.9035 \\ 0.3998 & -0.9213 & -0.4161 \\ 0.6745 & -0.5750 & 0.7138 \end{bmatrix} \qquad (۶۰)$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0.1930 & -0.4204 \\ -0.7359 & 0.0346 \\ 0.5073 & -0.9077 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} -0.4164 & 0.0244 \\ 0.8297 & -0.4366 \\ -0.0900 & -0.8416 \end{bmatrix}$$

[۱] - Integral of Absolute State
[۲] - Integral of Time Multiplied Absolute State
[۳] - Integral of Square State
[۴] - Integral of Time Multiplied Square State

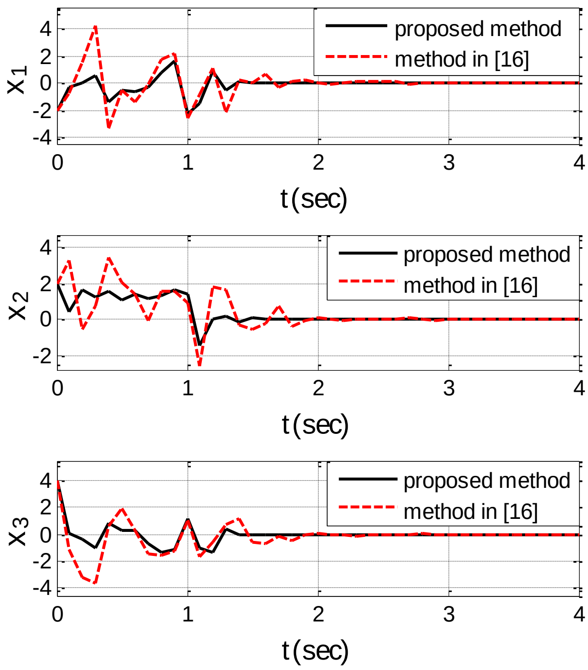
$$B_{12}=B_{22}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad C_{11}=C_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$C_{12}=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix},\quad C_{22}=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}$$

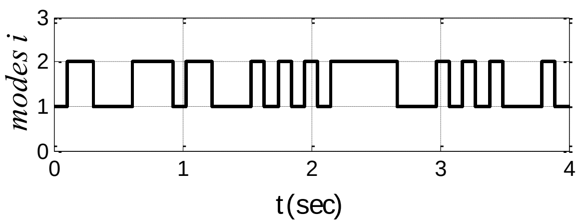
$$D_{111}=D_{211}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix},\ D_{112}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ D_{212}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

D_{121} ،D_{221} ماتریس‌های پوچی هستند. برای این مثال، سیگنال اغتشاش به‌صورت $w=\begin{cases}2\ ,\ k<10\\0\ ,\ k\geq 10\end{cases}$ در نظر گرفته‌شده است. با استفاده از ماتریس‌های رابطه (۶۰) شکل ۵ نشان‌دهنده متغیرهای حالت سیستم (۵۹) و همچنین متغیرهای حالت سیستم اغتشاش یافته مرجع [۱۶] است. شکل ۶ نشان‌دهنده مدهای کلیدزنی سیستم (۵۹) می‌باشد.

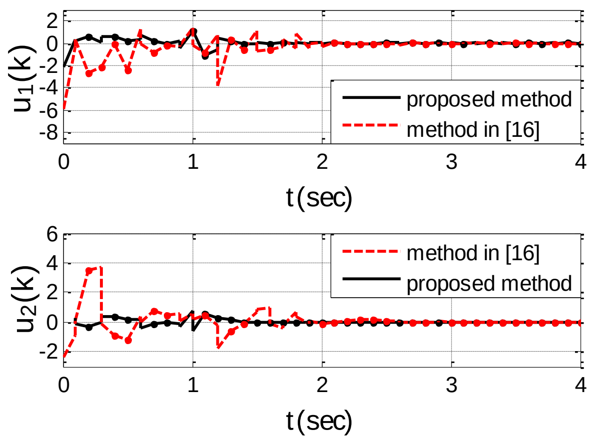
درصورتی‌که قانون کنترل را به‌صورت $u(k)=\begin{bmatrix}u_1(k)\\u_2(k)\end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، شکل ۷ نمایش‌دهنده کنترل $u(k)$ روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] است. شکل ۸ نیز نشان‌دهنده سیگنال‌های خطای سیستم (۵۹) است.



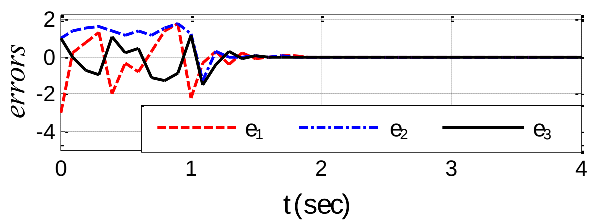
شکل ۵- متغیرهای حالت سیستم (۵۹) و سیستم مرجع [۱۶]



شکل ۶- مدهای کلیدزنی سیستم (۵۹)



شکل ۷- کنترل $u(k)$ روش پیشنهادی و روش کنترلی [۱۶]



شکل ۸- سیگنال‌های خطای سیستم (۵۹)

با استفاده از روش پیشنهادی این پژوهش، بهره پسخور حالت و بهره رویتگر حالت به‌گونه‌ای محاسبه‌شده‌اند که پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته (۵۹) تضمین شود. مقدار بهره پسخور حالت، بهره رویتگر، مقادیر ویژه و سایر پارامترها برای هر یک از مدهای کلیدزنی به‌صورت جدول ۳ محاسبه می‌شود:

جدول ۳ – پارامترهای کنترل‌کننده پیشنهادی برای سیستم (۵۹)

Mode 1
$K_i=\begin{bmatrix}-1.9677&-1.5422&-0.8203\\-0.5798&-0.8935&-0.2860\end{bmatrix}$
$Q_j=Q_i=\begin{bmatrix}1.3078&-0.0742&0.4355\\-0.0742&1.9199&0.0149\\0.4355&0.0149&1.7320\end{bmatrix}$
$P_j=P_i=\begin{bmatrix}3.5149&1.1139&-0.7322\\1.1139&2.2472&-1.2178\\-0.7322&-1.2178&2.2698\end{bmatrix}$
$G_i=\begin{bmatrix}1.5753&0.2847&-0.1422\\0.2847&1.1429&-0.3977\\-0.1422&-0.3977&1.1907\end{bmatrix}$
$L_i=\begin{bmatrix}-0.3635\\-0.6713\\0.0107\end{bmatrix},\ \gamma=[6.3193]$
$eig=[0.0669\pm 0.6144i,-0.6464,$ $-0.0583,-0.4565\pm 0.2591i]$
Mode 2

$$K_i=\begin{bmatrix}0.0072 & 0.5595 & 0.6345\\ 0.2398 & -0.3879 & -0.9961\end{bmatrix}$$

$$Q_j=Q_i=\begin{bmatrix}1.4108 & -0.1706 & 0.3283\\ -0.1706 & 1.7083 & -0.4096\\ 0.3283 & -0.4096 & 1.4349\end{bmatrix}$$

$$P_j=P_i=\begin{bmatrix}3.4062 & -1.0004 & 1.2157\\ -1.0004 & 1.8871 & -1.7348\\ 1.2157 & -1.7348 & 5.3120\end{bmatrix}$$

$$G_i=\begin{bmatrix}1.5911 & -0.2565 & 0.1747\\ -0.2565 & 0.9976 & -0.4222\\ 0.1747 & -0.4222 & 1.9163\end{bmatrix}$$

$$L_i=\begin{bmatrix}-0.2540\\ -0.4992\\ 0.0627\end{bmatrix},\ \gamma=\begin{bmatrix}6.3764\end{bmatrix}$$

$$eig=[0.7274\pm 0.3127i,-0.1357,\\ -0.4135,0.3757\pm 0.4592i]$$

با استفاده از شاخص‌های عملکرد (۵۸) می‌توان مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] انجام داد. جدول ۴ نشان‌دهنده شاخص‌های عملکرد سیستم (۵۹) و شاخص‌های عملکرد سیستم مرجع [۱۶] است:

جدول ۴ – شاخص‌های عملکرد سیستم (۵۹) و سیستم مرجع [۱۶]

		IAS	
	x_1	x_2	x_3
سیستم (۵۹)	۱٫۲۰۰۳	۱٫۳۵۸۳	۱٫۱۰۱۵
سیستم مرجع [۱۶]	۱٫۴۵۸۹	۱٫۸۷۳۹	۱٫۴۹۳۷
		ITAS	
	x_1	x_2	x_3
سیستم (۵۹)	۰٫۷۹۸۲	۰٫۷۸۵۱	۰٫۶۳۲۴
سیستم مرجع [۱۶]	۱٫۰۴۴۲	۱٫۱۴۵۸	۰٫۹۰۶۲
		ISS	
	x_1	x_2	x_3
سیستم (۵۹)	۱٫۳۲۱۸	۱٫۷۳۹۳	۱٫۷۸۸۴
سیستم مرجع [۱۶]	۲٫۰۸۶۷	۳٫۳۰۹۴	۲٫۲۹۳۰
		ITSS	
	x_1	x_2	x_3
سیستم (۵۹)	۰٫۷۴۰۴	۰٫۸۹۳۶	۰٫۶۵۰۲
سیستم مرجع [۱۶]	۱٫۲۶۹۱	۱٫۵۰۱۷	۰٫۷۸۳۰

مشاهده می‌شود که شاخص‌های عملکرد کنترل‌کننده این مقاله، مقدار کمتری را نسبت به شاخص‌های عملکرد کنترل‌کننده SOF مرجع [۱۶] دارا است. لذا کنترل‌کننده پیشنهادی، از سرعت پایدارسازی و عملکرد بهتری نسبت به کنترل‌کننده مرجع [۱۶] برخوردار است.

۵-۳ شبیه‌سازی کنترل پسخور حالت پاندول معکوس

در این بخش، پایداری سیستم پاندول معکوس را توسط روش پیشنهادی این پژوهش و روش کنترلی مرجع [۱۶] بررسی می‌کنیم.

مثال ۳: مدل پاندول معکوس را به‌صورت رابطه (۶۱) در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=\dfrac{-g\sin(x_1)-\dfrac{2b}{lm}x_2-\dfrac{amlx_2^2\sin(2x_1)}{2}-\dfrac{a\cos(x_1)u}{2}}{\dfrac{4l}{3}-aml\cos^2(x_1)} \end{cases} \quad (۶۱)$$

که x_1 بیانگر زاویه پاندول از محور عمودی و x_2 معرفی کننده سرعت زاویه‌ای هستند. $g=9.8m/s^2$ ثابت گرانش، m جرم پاندول، $a=1/(M+m)$، M جرم ارابه، $2l$ طول پاندول، b ضریب میرایی پاندول حول محور و u نیروی اعمال‌شده به ارابه هستند. در این شبیه‌سازی، پارامترهای پاندول به‌صورت $m=2kg$، $M=8kg$، $2l=1m$ و $b=0.5Nm/\sec$ در نظر گرفته شده‌اند. سیستم (۶۱) را حول مبدأ و $x=\left(\pm\dfrac{\pi}{4},0\right)$ خطی سازی کرده و با زمان نمونه‌برداری $T=0.01$، گسسته سازی می‌کنیم. لذا سیستم تکه‌ای‌خطی زمان گسسته پاندول معکوس به‌صورت رابطه (۶۲) به دست می‌آید [۱۹]:

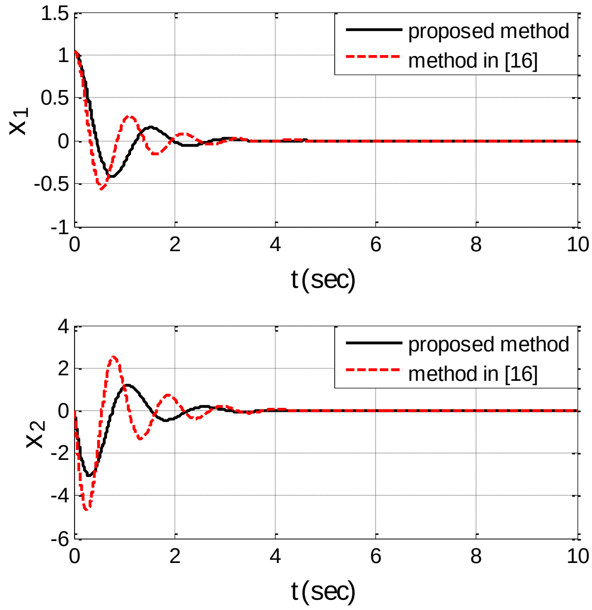
$$x(k+1)=\begin{cases} A_1x(t)+B_1u(t) & \text{if } |x_1(t)|<\dfrac{\pi}{4} \\ A_2x(t)+B_2u(t) & otherwise \end{cases} \quad (۶۲)$$
$$y(t)=Cx(t)$$

که داریم:

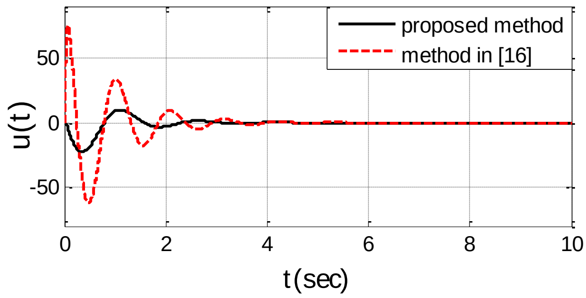
$$A_1=\begin{bmatrix}0.99914 & 0.0099473\\ -0.17219 & 0.98919\end{bmatrix}$$
$$A_2=\begin{bmatrix}0.99929 & 0.0099478\\ -0.14245 & 0.98934\end{bmatrix} \quad (۶۳)$$
$$B_1=\begin{bmatrix}0\\ -0.001756\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}0\\ -0.1141\end{bmatrix}$$
$$C_1=C_2=C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

شرایط اولیه را برای مثال فوق به‌صورت $x(0)=\begin{bmatrix}\dfrac{\pi}{3} & 0\end{bmatrix}^T$ و $\hat{x}(0)=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از ماتریس‌های رابطه (۶۳)، شکل ۹ نشان‌دهنده متغیرهای حالت سیستم پاندول معکوس با استفاده از روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] است. درصورتی‌که قانون کنترل را به‌صورت $u(k)=\begin{bmatrix}u_1(k)\\ u_2(k)\end{bmatrix}$ در نظر

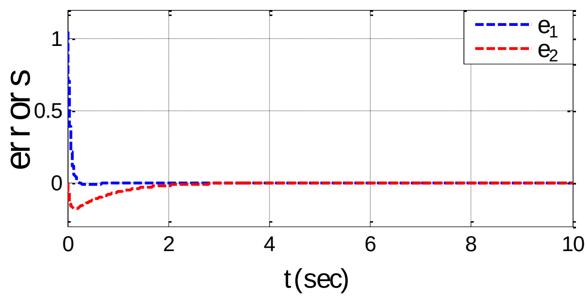
بگیریم، شکل ۱۰ نمایش‌دهنده قانون کنترلی $u(k)$ برای روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] است. شکل ۱۱ نیز نشان‌دهنده سیگنال‌های خطای سیستم کنترل‌شده پاندول است.



شکل ۹- متغیرهای حالت پاندول معکوس با روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶]



شکل ۱۰- قانون کنترلی $u(k)$ روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶]



شکل ۱۱- سیگنال‌های خطای حاصل از روش پیشنهادی

با استفاده از روش پیشنهادی، بهره پسخور حالت و بهره رویتگر حالت طوری محاسبه‌شده‌اند که سیستم پاندول معکوس پایدار مجانبی گشته و خطا به صفر میل کند. مقدار بهره پسخور حالت، بهره رویتگر، مقادیر ویژه و سایر پارامترها، برای هر یک از مدهای کلیدزنی به‌صورت جدول ۵ محاسبه می‌شود:

جدول ۵ - پارامترهای روش کنترلی پیشنهادشده

Mode 1
$K_i = [4.8917 \quad 8.4818]$
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.2615 & 0.0154 \\ 0.0154 & 1.0640 \end{bmatrix}$
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 4.6418 & -1.8715 \\ -1.8715 & 2.5622 \end{bmatrix}$
$G_i = \begin{bmatrix} 3.6066 & -1.4350 \\ -1.4350 & 1.9762 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.1765 \\ -0.1357 \end{bmatrix}$
$eig = [0.8248, 0.9870, 0.9867 \pm 0.0405i]$
Mode 2
$K_i = [3.4636 \quad 7.8124]$
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.1789 & -0.0079 \\ -0.0079 & 1.0536 \end{bmatrix}$
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 4.2974 & -1.6575 \\ -1.6575 & 2.1032 \end{bmatrix}$
$G_i = \begin{bmatrix} 3.3423 & -1.2861 \\ -1.2861 & 1.7481 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.1409 \\ -0.1867 \end{bmatrix}$
$eig = [0.8571, 0.9903, 0.9873 \pm 0.0404i]$

با استفاده از شاخص‌های عملکرد (۵۸) می‌توان مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] انجام داد. جدول ۶ نشان‌دهنده شاخص‌های عملکرد حاصل از روش پیشنهادی و شاخص‌های عملکرد روش کنترلی مرجع [۱۶] است:

جدول ۶ – شاخص‌های عملکرد روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶]

	x_1	x_2
IAS		
کنترل پیشنهادی	۰,۵۸۹۴	۲,۳۶۵۹
روش کنترلی [۱۶]	۰,۶۰۵۵	۳,۴۱۷۲
ITAS		
کنترل پیشنهادی	۰,۴۴۹۸	۱,۹۶۰۰
روش کنترلی [۱۶]	۰,۵۰۵۴	۳,۰۲۲۹
ISS		
کنترل پیشنهادی	۰,۲۸۸۳	۴,۰۷۲۸
روش کنترلی [۱۶]	۰,۳۷۸۳	۷,۱۵۱۶
ITSS		
کنترل پیشنهادی	۰,۰۹۶۷	۱,۹۲۱۸
روش کنترلی [۱۶]	۰,۱۰۶۳	۳,۹۰۹۸

همان‌طور که مشاهده می‌شود، کنترل‌کننده طراحی‌شده پیشنهادی علاوه بر پایدارسازی مجانبی سیستم پاندول معکوس، از مقادیر شاخص‌های عملکرد کمتری برخوردار بوده و لذا سرعت پایدارسازی بالاتری را نسبت به کنترل‌کننده SOF مرجع [۱۶] دارا است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، طراحی رویتگر حالت و همچنین پایدارسازی پسخور حالت، برای دو سیستم تکه‌ای‌خطی زمان گسسته ارائه شد. به‌منظور طراحی رویتگر حالت و کنترل‌کننده پایدارساز پسخور حالت، از روشی ترکیبی شامل نامساوی‌های ماتریسی خطی، توابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای و روش کنترلی H_∞ استفاده شده است. روش پیشنهادشده علاوه بر اینکه اثر سیگنال اغتشاش وارده به سیستم را تضعیف کرده و تخمین خوبی از متغیرهای حالت را ارائه می‌دهد، پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را نیز تضمین می‌کند. در طراحی این کنترل‌کننده از ساختار جدید نامساوی ماتریسی خطی استفاده شده که باعث می‌شود تا روش کنترلی پیشنهادشده ، مزایایی نسبت به کنترل‌کننده ارائه‌شده در مرجع [۱۶] داشته باشد. مزیت کنترل‌کننده این پژوهش، قابلیت پایدارسازی سیستم‌های تکه‌ای‌خطی با ماتریس‌های رتبه غیرکامل است، درصورتی‌که روش کنترلی مرجع [۱۶] توانایی پایدارسازی سیستم‌هایی با ماتریس‌های رتبه غیرکامل را ندارد. همچنین روش کنترلی با ساختار جدید LMI ، از شاخص‌های عملکرد و سرعت پایدارسازی بهتری نسبت به کنترل‌کننده [۱۶] برخوردار است. در پژوهش‌های آتی می‌توان رویتگر حالت را برای سیستم زمان گسسته دارای تأخیرهای زمانی ثابت یا متغیر با زمان طراحی کرد.

مراجع

[1] J. Xu and L. Xie, 2005,'' Null controllability of discrete-time planar bimodal piecewise linear systems,'' International Journal of Control, Taylor & Francis, pp.1486-1496.

[2] M. Bernardo, U. Montanaro, J. M. Olm and S. Santini, 2012,''Model reference adaptive control of discrete-time piecewise linear systems,'' International Journal of Robust and Nonlinear Control, Wiley, vol.23, no.7, pp.709-730.

[3] W. Assawinchaichote, S. K. Nguang, P. Shi and E. Boukas, 2008,'' H∞ fuzzy state-feedback control design for nonlinear systems with D-stability constraints: an LMI approach,'' Mathematics and Computers in Simulation, Elsevier, vol.78, no.4, pp.514-531.

[4] B. Xu, Y. Xu and L. He, 2011,'' LMI-based stability analysis of impulsive high-order Hopfield-type neural networks,'' Mathematics and Computers in Simulation- Elsevier, vol.86, pp. 67-77.

[5] S. Mobayen, 2015,''Optimal LMI-based state feedback stabilizer for uncertain nonlinear systems with time-varying uncertainties and disturbances,'' Complexity, vol.21, no.6.

[6] AT. Nguyen, M. Sugeno and V. Campos, 2016,'' LMI-based stability analysis for piecewise multi-affine systems,'' IEEE Transactions on Fuzzy Systems, no.99.

[7] D. Simon, 2006, *Optimal State Estimation, Kalman, H∞, and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons, INC.

[8] C. H. Lien , K. W. Yu , Y. F. Lin , Y. J. Chung and L. Y. Chung, 2008, ''Robust reliable H∞ control for uncertain nonlinear systems via LMI approach,'' Applied Mathematics and Computation-Elsevier, vol.198, no.1, pp.453-462.

[9] S. Xu and T. Chen, 2004,''Robust H∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers,'' Systems & Control Letters-Elsevier, vol.51, no.4, pp.171-183.

[10] LK. Wang, HG. Zhang and XD. Liu, 2016,'' H∞ Observer design for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy model with unknown premise variables via nonquadratic lyapunov function,'' IEEE Transactions on Cybernetics, vol.48, no.9, pp.1986-1996.

[۱۱] مولف: ک. اوگاتا، ''*سیستم های کنترل دیجیتال*''، مترجمین: پ. جبه دار مارالانی و ع، خاکی صدیق، موسسه انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۹۱ ، جلد ۲، چاپ ۷.

[12] J. Li, Y. Liu, 2007, ''Stabilization of a class of discrete-time switched systems via observer-based output feedback,'' Journal of Control Theory and Applications, Springer, vol.5, no.3, pp.307-311.

[13] Z. Lendek, P. Raica and J. Lauber, 2014,'' Observer design for switching nonlinear systems,'' Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2014 IEEE International Conference on.

[14] G. He, Y. Liu, J. Zhang, W. Yu, 2016,'' Robust observer-based fault estimation and tolerant control scheme for class of discrete piecewise systems,'' Intelligent Control and Automation (WCICA), 2016 12th World Congress on.

[15] X. Du and G.H. Yang, 2010, '' Improved LMI conditions for H∞ output feedback stabilization of linear discrete-time systems,'' International Journal of Control, Automation and Systems, Springer, vol.8, no.1, pp.163-168.

[16] D. Da-Wei, Y. Guang-Hong, 2009, ‘’ Static output feedback control for discrete-time piecewise linear systems: an LMI approach,’’ Acta Automatica Sinica, Elsevier, vol.35, no.4, pp.337-344.

[17] S. Ibrir and S. Diopt, 2008, ‘’Novel LMI conditions for observer-based stabilization of lipschitzian nonlinear systems and uncertain linear systems in discrete-time’’, Applied Mathematics and Computation, Elsevier, vol.206, no.2, pp.579-588.

[18] X. Du and G.H. Yang, 2009,’’ New characterizations of positive realness and static output feedback control of discrete-time systems,’’ International Journal of Control, Taylor & Francis, vol.82, no.8, pp.1485-1495.

[19] G Feng, M Chen and TJ Zhang, 2005,’’ Observer design of piecewise discrete time linear systems,’’ Control and Automation, 2005. ICCA '05. International Conference on.