مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۹، صفحه ۴۱-۲۳

# طراحی کنترل‌کننده تناسبی متغیر با زمان برای دست‌یابی به سناریوی زمانی مطلوب خروجی

مهدیه حسینقلی‌زاده آلاشتی[۱]، جعفر حیرانی نوبری[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، mah.gholizadeh@gmail.com

[۲] استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، nobari@eetd.kntu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۱۱ ویرایش اول: ۱۳۹۷/۱۰/۰۷ ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۱۱/۰۲ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۲۵

**چکیده**: یکی از پرکاربردترین و در عین حال ساده‌ترین کنترل‌کننده‌ها که همواره جهت دست‌یابی به عملکرد مناسب سیستم حلقه‌بسته مورد توجه مهندسین کنترل است، کنترل‌کننده تناسبی می‌باشد. عملکرد مناسبی که برای یک سیستم در حضور کنترل‌کننده تعریف می‌شود به بیان‌های مختلفی همچون زمان‌خیز، زمان‌نشست و حداکثر بالازدگی ارائه می‌شود. اما از نگاه این مقاله عملکرد مناسب سیستم همان مقادیر مشخصی است که خروجی می‌تواند در زمان‌های از پیش تعیین شده‌ای بپذیرد و این است که تعیین می‌کند بهره‌های کنترل‌کننده‌ی تناسبی در بازه‌های زمانی مختلف چه مقادیری داشته باشند. در حقیقت سناریویی برای خروجی مدنظر قرار می‌گیرد که مقدار خروجی را در چند زمان تعیین می‌کند و این زمان‌ها سازنده‌ی بازه‌های زمانی‌ای هستند که باید بهره‌های متغیر با همین بازه‌ها، بر سیستم اعمال شود. برای اینکه وجود بهره‌ی کنترل‌کننده‌ی تناسبی برای رسیدن به این هدف تضمین شود، لازم است مقدار خروجی در هر زمان مشخص در محدوده‌ی مجازی انتخاب شود. در مقاله‌ی حاضر این محدوده‌ی مجاز برای انواع حالت‌های پارامتر سیستم و انواع شرایط اولیه بدست آمده است. همچنین بهره کنترل‌کننده در برخی محدوده‌های مجاز خروجی یکتا نبوده و هر انتخابی از آن ویژگی خاص خود را دارد. با توجه به اینکه در مقاله‌ی حاضر، این کار با فرض شرایط اولیه غیرصفر نیز انجام شده است، می‌توانیم به خوبی بین چند کنترل‌کننده‌ی تناسبی در چند مرحله سوئیچ کنیم تا روند خروجی در زمان، روند سناریویی از پیش تعیین‌شده باشد.

**کلمات کلیدی:** روند رفتار زمانی خروجی سیستم، بهره متناظر مقدار مطلوب خروجی، کنترل‌کننده تناسبی متغیر با زمان.

# Designing of P controller to obtain desired time domain scenario of the output

Mahdieh Hosseingholizadeh Alashti, Jafar Heyrani Nobari

**Abstract**: One of the most applicable and simple controllers, which always attracts the researcher's attention to obtain a proper closed-loop performance, is the P controller. Proper performance of a system defined in the presence of controller has been proposed with different expressions like rising time, settling time and maximum overshoot. But in the view of this paper, the proper performance of the system is the output's specific value at predefined times and it determines the controller gains at time intervals. In reality, a scenario is considered for the output which defines output's values at several times .These times make time intervals and variable gains in these intervals must be applied to the system. To ensure the existence of the P controller gains for this purpose, the output value must be in an admissible range at any specific time. In this paper, this admissible range is obtained for different cases of a system parameter and initial value. Also, controller gain in some admissible ranges wasn't unique and each choice of it has its specific properties. Since in the present paper, this work is done with initial values, we can properly switch between several P controllers in some phases to achieve a predefined scenario of the output in the time domain.

**Key words**: scenario of system output in time domain, corresponding gain of desired output value, time variable P controller.

## ۱- مقدمه

کنترل‌کننده‌های PID از معروف‌ترین کنترل‌کننده‌ها در کنترل فرآیندهای صنعتی هستند که در کنترل فرآیند، درایو موتور و کنترل پرواز کاربردهای بسیاری دارند[۱]. البته تعیین بهره‌های بهینه‌ی PID بسیار چالش‌برانگیز است و پژوهشگران بسیاری سعی کرده‌ند تا الگوریتم یا استراتژی جدیدی برای تعیین بهره‌های PID ارائه دهند. البته کنترل‌کننده‌ی مقاله حاضر تنها تناسبی است ولی می‌توان ایده‌ی این مقاله را به کنترل‌کننده‌های PD و PID گسترش داد.

روش‌های تعیین پارامترهای PID به دو دسته روش‌های کلاسیک و هوشمند تقسیم می‌شوند. با استفاده از روش‌های کلاسیک همچون زیگلر-نیکولز [۲] نوسان شدید یا بالازدگی بزرگی در پاسخ سیستم مشاهده می‌شود. اخیراً روش‌های هوشمند همچون الگوریتم ژنتیک[۳]و بهینه‌سازی ازدحام ذرات[1] برای بهینه‌سازی PID ارائه شده است. با تأثیر چشم‌گیر میکروپروسسورها بر کنترل‌کننده‌های PID، ویژگی‌های جدیدی از جمله تنظیم خودکار، زمان‌بندی بهره[2][۴] و تطبیق همیشگی[۵] به کنترل‌کننده‌های PID افزوده شده است[۱،۶،۷]. در مبحث کنترل تطبیقی با فرض اینکه تغییراتی در مدل سیستم رخ می‌دهد، بهره‌های کنترل‌کننده تغییر می‌کند، مانند آنچه در[۸] و [۹] انجام شده است. اما آن‌چه که در این مقاله به آن پرداخته شده این است که برای یک سیستم مشخص و ثابت، به منظور قرارگرفتن خروجی در مقادیری مشخص در زمان‌هایی از پیش تعیین شده، ضرایب کنترل‌کننده برای هر بازه‌ی زمانی تعیین می‌شوند.

روش‌های کلاسیک مانند زیگلر-نیکولز با بررسی پاسخ پله سیستم، سعی در یافتن بهره‌های مناسب PID دارند[۱۰]. الگوریتم‌های هوش مصنوعی نیز براساس تابع برازش، سعی در یافتن پارامتر بهینه کنترل‌کننده‌ی PID دارند. برخی پژوهشگران با ترکیب PID کلاسیک و فازی توانستند به پاسخ گذرا و ماندگار بهتری دست پیدا کنند[۱۱]. در مقاله حاضر سیستم به صورت کلاسیک و با بررسی پاسخ پله سیستم کنترل می‌شود ولی بهره‌های کنترل‌کننده به روش جدید و به گونه‌ای تعیین می‌شوند که درنهایت برای یک‌سری بازه‌های زمانی، بهره‌های مختلفی بدست آمده و به سیستم اعمال می‌شود.

در کنترل کلاسیک ابتدا پاسخ مطلوب براساس مواردی از جمله حداکثر بالازدگی، زمان نشست، زمان خیز و یا خطای حالت ماندگار تعریف می‌شود. اما در مقاله‌ی حاضر پاسخ مطلوب با مقادیر مشخص خروجی در یک‌سری لحظات خاص تعریف می‌شود.

بدین معنی که در تعیین بهره‌ی تناسبی تنها مسأله‌ای که مطرح است مقدار نقطه‌ای خروجی است. این که خروجی در زمان $T$ در مقدار $y(T)$ که طراح تعیین می‌کند قرار داشته باشد تنها هدفی است که مدنظر قرار می‌گیرد. لذا فرم خروجی در زمان‌های بین نقطه‌ای اصلاً مطرح نیست؛ می‌تواند بالازدگی، پایین زدگی و هر فرمی داشته باشد. در این کار مسأله‌ی مهم نگاه نقطه‌ای به خروجی است. نتایج این مقاله برای سیستم‌هایی کاربرد دارد که بتوانند با سیستم مرتبه اول تقریب زده شوند و با توجه به اینکه برای سیستم‌های مرتبه اول تنها با یک بهره‌ی تناسبی می‌توان به اهداف موردنظر دست یافت و نیازی به کنترل‌کننده‌ی PD، PI یا PID نیست، در مقاله‌ی حاضر کنترل‌کننده، تناسبی درنظر گرفته شده است و نشان داده می‌شود که همین بهره برای تأمین اهداف موردنظر کفایت می‌کند. لذا در ادامه‌ی مقاله، برای سیستم مرتبه اول، هم بدون شرایط اولیه و هم با شرایط اولیه، با فرض زمان مشخص $T$، نمودارهای خروجی برحسب بهره‌ی کنترل‌کننده‌ی تناسبی رسم شده است تا محدوده‌ای که اگر $y(T)$ در آن انتخاب شود حتماً بهره‌های کنترل‌کننده تناسبی وجود دارند بدست آید. در حقیقت با انتخاب درست $y(T)$ طبق نمودارها، بهره‌های کنترل‌کننده تناسبی حتماً بدست می‌آیند(وجود بهره). در برخی محدوده‌ها بهره یکتا نبوده و هر کدام از آن‌ها تأثیرخاصی روی سیستم حلقه بسته خواهند داشت(یکتایی بهره). درنهایت برای هر حالت مثالی آورده شده که بهره‌هایش با استفاده از توابعی در $MATLAB$ بدست آمده است و سپس سیمولینک سیستم حلقه بسته اجرا شده است و نمودار خروجی نیز نشان داده شده است. همه‌ی این مثال‌ها تأییدی بر صحت این نکته هستند که انتخاب درست $y(T)$ حتماً ما را به بهره کنترل‌کننده تناسبی مناسب می‌رساند.

این مطالب، در دو بخش ۲ و ۳ ارائه شدند که هر کدام شامل دو زیر بخش نیز هستند. بخش ۲ برای حالتی است که مقدار اولیه خروجی صفر است و در بخش ۳ مقدار اولیه‌ی خروجی غیرصفر لحاظ شده است. دو زیربخش نیز برای هر کدام به ازای پارامتر $a$ مثبت و پارامتر $a$ منفی تعریف شده‌اند. در نهایت نکته‌ای راجع به تحمیل شدن سناریو بر خروجی بیان شده است و پس از شرح گام‌های تعیین بهره کنترل‌کننده تناسبی و نتیجه‌ی مقاله، در پیوست‌های الف تا ی اثبات قسمت‌هایی از مقاله آورده شده است تا در صورت نیاز، خواننده به آن مراجعه کرده و بدنه‌ی مقاله افزایش نیابد.

[1] Particle Swarm Optimization (PSO)

[2] Gain Scheduling

## ۲- سیستم مرتبه اول، کنترل‌کننده تناسبی و مقدار اولیه صفر خروجی

در این مقاله سیستم مرتبه اولی به صورت $G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{b}{s+a}$ و کنترل‌کننده‌ی تناسبی با بهره‌ی $k$ درنظر گرفته می‌شود. ورودی مرجع پله و مقدار اولیه خروجی نیز صفر فرض شده است. رابطه‌ی زمانی خروجی با فرض $k_1=bk$ به صورت زیر خواهد بود.

$$y(t)=\frac{k_1}{a+k_1}\left(1-e^{-(a+k_1)t}\right) \qquad (۱)$$

برای رسیدن به پاسخ این سوال که آیا برای هر انتخابی از $t$ و $y(t)$ می‌توان حتماً به $k$ای دست یافت و آیا این $k$ منحصر به فرد است یا خیر، لازم است زمان را مقدار ثابت و مثبت $T$ در نظر بگیریم و رابطه‌ی (۱) را برحسب $k_1$ رسم کنیم. تابع جدید که تنها متغیر آن $k_1$ است را $f$ می‌نامیم. یعنی:

$$f(k_1)=y(T)$$

با این مفروضات و به ازای علامت‌های مختلف $a$ بررسی دو حالت در این بخش ارائه می‌گردد.

### ۱-۲- پارامتر $a$ مثبت باشد

به جهت اینکه رسم خروجی برحسب $k_1$ مدنظر است، لازم است به ازای چند مقدار مهم $k_1$، مقدار خروجی بدست آید، لذا:

$$\begin{aligned}
&k_1=0\Rightarrow f=0\\
&k_1\to+\infty\Rightarrow f\to 1\\
&k_1\to-\infty\Rightarrow f\to-\infty\\
&k_1=-a\Rightarrow f=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hopital} f=\frac{1-e^{-(a+k_1)T}+Tk_1e^{-(a+k_1)T}}{1}\to f=-aT
\end{aligned} \qquad (۲)$$

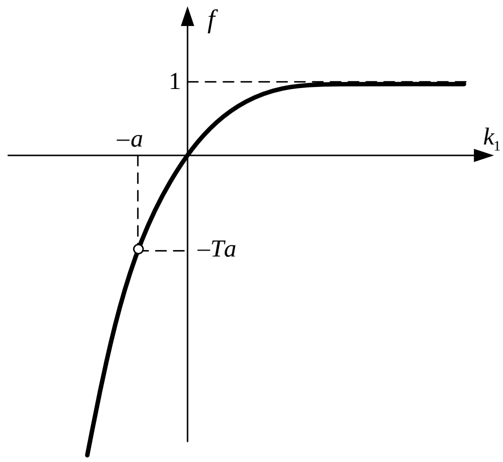
با توجه به اکیداً صعودی بودن هر دو تابع $\frac{k_1}{a+k_1}$ و $\left(1-e^{-(a+k_1)T}\right)$، حاصل‌ضرب دو تابع یعنی تابع $f$ نیز اکیداً صعودی است. توجه دارید که در نقطه $(-a,-aT)$ تابع $f$ تعریف نشده است و هیچ‌گاه نباید انتظار داشت در زمان $T$ به مقدار $-aT$ رسید. برای رسم تابع $f$ دانستن نقاط اکسترمم آن لازم است یعنی مشخص شود به ازای چه $k_1$هایی مشتق تابع $f$ صفر است و در آن‌جا تغییر علامت نیز می‌دهد. با توجه به روابطی که در پیوست الف ارائه شده است، اثبات می‌شود که مشتق تابع $f$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و منحنی $f$ هیچ نقطه اکسترممی ندارد و به صورت شکل ۱ خواهد بود.

قاعده ۱: در یک سیستم مرتبه اول با مقدار اولیه صفر خروجی و با استفاده از کنترل‌کننده‌ی تناسبی، به ازای $a>0$ در یک $T$ خاص می‌توان به هر مقدارکمتر از واحدی به غیر از مقدار $-Ta$ برای خروجی یا $f(k_1)$ رسید و $k_1$ بدست آمده یکتاست.

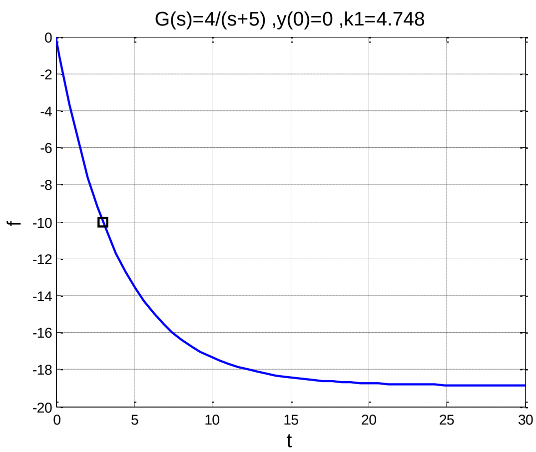
دلیل: برد تابع $f(k_1)$ برابر $(-\infty,1)$ به غیر از $-Ta$ است و تابع کاملاً یکنواست(مطابق با شکل ۱).

تبصره ۱-۱: $k_1$ متناظر باید از حل رابطه‌ی غیرخطی (۱) بدست آید و می‌توان از تابع $fsolve$ نرم‌افزار $MATLAB$ بدین منظور بهره برد. البته با انتخاب مقداری کوچک برای پارامتر $Tolfun$ یا خطای مجاز پاسخ، پاسخ تقریبی عددی تا حد زیادی دقیقاً همان پاسخ مطلوب است.

نکته ۱-۱: تنها نکته‌ای که در استفاده از تابع $fsolve$ مطرح می‌شود انتخاب حدس اولیه مناسب برای $k_1$ است که با توجه به شکل ۱، به راحتی مقداری مثبت یا منفی به عنوان حدس اولیه درنظر گرفته می‌شود، البته با توجه همزمان به اینکه مقدار خروجی در یک زمان خاص، در محدوده‌ی جواب رابطه‌ی غیرخطی (۱) یعنی مطابق شکل ۱انتخاب شده باشد.




شکل ۱- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی به ازای $a>0$ و $y(0)=0$




شکل ۲- نمودار خروجی مثال ۱

نکته ۱-۲: نکته جالب توجه دیگر در مورد شکل ۱ این است که نقطه ناپیوستگی نمودار یعنی $(-a, -Ta)$ دقیقاً در مرز پایداری و ناپایداری سیستم حلقه‌بسته رخ داده است و اگر در نهایت سیستم حلقه‌بسته‌ی پایدار مدنظر باشد، مقادیر $k > -a$ به ازای پارامتر $b$ مثبت و مقادیر $k > -a$ به ازای پارامتر $b$ منفی باید انتخاب شوند.

مثال۱- با فرض $G(s) = \frac{4}{s+5}$ و مقدار اولیه صفر خروجی؛ بهره $k_1 = bk$ کنترل‌کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه سوم در مقدار $-10$ باشد.

پاسخ: از آن‌جایی که $-aT = -15$ است و با توجه به شکل ۱، مقدار $-10$ در محدوده‌ی پایدار جواب قرار گرفته و حتماً بهره‌ی یکتایی وجود خواهد داشت. با توجه به نزدیکی مقدار $-aT$ به $-10$، حدس اولیه بهره $-3$ در نظر گرفته می‌شود(در حدود مقدار $-a$). تابع $fsolve$ بهره‌ی $-4.748$ را بدست آورد و خروجی به صورت شکل ۲ بدست آمد که مقداری پایدار داشته و در ثانیه سوم در مقدار موردنظر قرار گرفته است. توجه داشتید که با دانستن دقیق نمودار خروجی برحسب $k_1$ چقدر با اطمینان و به سرعت این کار انجام شد.

## ۲-۲- پارامتر $a$ منفی باشد

مشابه زیربخش قبل برای رسم تابع $f$ نیاز است نقاط اکسترمم آن مشخص شوند. با توجه به استدلالی که در پیوست ب آورده شده است، خروجی به ازای $a < 0$ می‌تواند به سه صورت شکل ۳ باشد.

بنابراین وقتی $-Ta = 2$ است، حداکثر مقداری که خروجی در زمان مشخص $T$ می‌تواند داشته باشد کمتر از ۲ است و نقطه‌ی ناپیوستگی تابع در ماکزیمم مقدار آن قرار می‌گیرد. و زمانی که $-Ta \neq 2$ است نیز بالازدگی‌ای در خروجی وجود خواهد داشت که نمی‌توان به بیشتر از این مقدار در زمان $T$ رسید و باید بر حسب $a$ و $T$ بدست آید. همچنین نباید انتظار داشت به مقدار $-Ta$ در زمان $T$ دست یافت.

قاعده ۲: در یک سیستم مرتبه اول با مقدار اولیه صفر و با استفاده از کنترل‌کننده‌ی تناسبی، به ازای $a < 0$ در یک $T$ خاص به هر مقدار کمتر از واحدی برای خروجی یا $f(k_1)$ می‌توان دست یافت که $k_1$ آن یکتا است و مقادیر بیشتر از یک آن محدود بوده و $k_1$ آن یکتا نیست و به مقدار $-Ta$ نیز نمی‌توان رسید.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ از منفی بی‌نهایت تا مقداری بزرگتر از واحد است(مطابق شکل ۳).

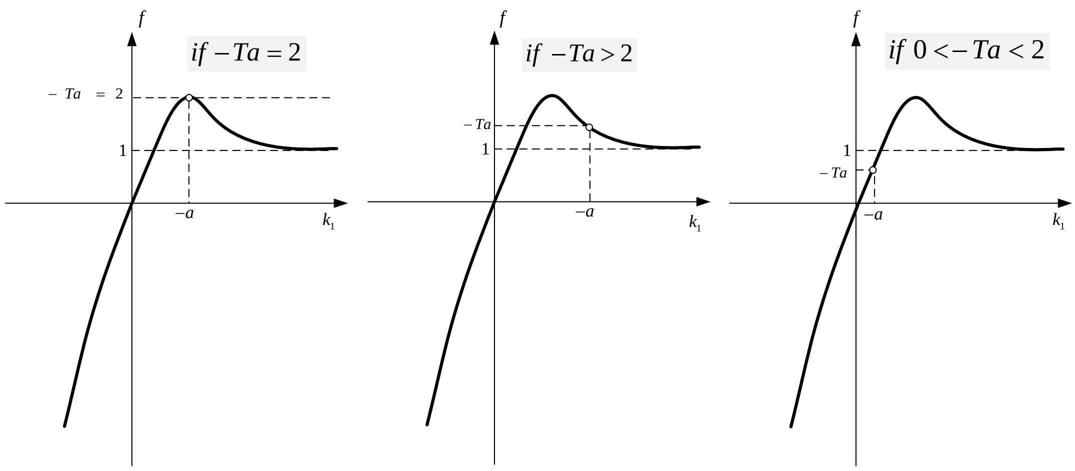
تبصره ۲-۱: در صورت لزوم، برای بدست آوردن حداکثر مقدار بزرگتر از واحد نیز کافی است پاسخ غیر از پاسخ بدیهی $k_1 = -a$ را با حل معادله‌ی غیرخطی (۶) بدست آورد.

تبصره ۲-۲: در صورتی که $-aT = 2$ باشد به مقادیر بیشتر از 2 نمی‌توان رسید.

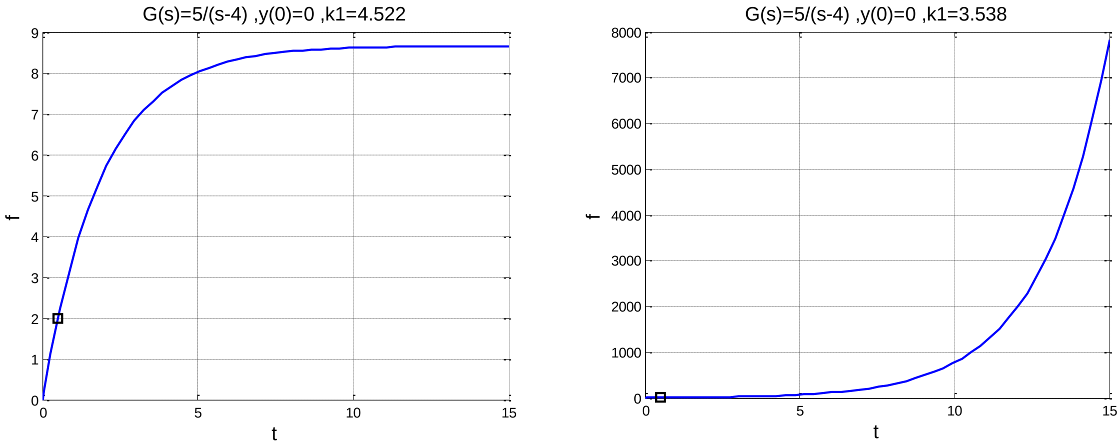
نکته ۲-۱: توجه دارید که در مقایسه با بخش ۱ علامت پارامتر $a$ چقدر در محدوده‌ی خروجی تأثیرگذار بوده و مرز پایداری و ناپایداری سیستم حلقه بسته جابجا شده است.

مثال ۲- با فرض $G(s) = \frac{5}{s-4}$ و مقدار اولیه صفر خروجی؛ بهره $k_1$ کنترل‌کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه 0.5 در مقدار 1.99 باشد.

پاسخ: در این حالت $-Ta = 2$ است. لذا براساس شکل ۳ می‌توان حداکثر به مقدار ۲ رسید. همچنین مقدار 1.99 می‌تواند به ازای دو مقدار از بهره بدست آید. یکی از آن‌ها پاسخ پایدار دارد و دیگری ناپایدار. با توجه به مقدار $-a = 4$ که در مرز قرار گرفته یکبار حدس اولیه بهره 4.1 انتخاب شد. بدین ترتیب $fsolve$ بهره‌ی 4.522 را بدست آورد که خروجی پایدار شد. بار دیگر حدس اولیه 3.5 انتخاب شد و $fsolve$ مقدار بهره را 3.538 بدست آورد که خروجی ناپایدار شد. این نتایج در شکل ۴ نشان داده شده است. توجه داشتید که با دانستن نمودار خروجی با دقت و دوراندیشی حدس اولیه بهره انتخاب شد و هدف موردنظر بدست آمد.




شکل ۳- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی به ازای $a < 0$ و $y(0) = 0$




شکل ۴- نمودار خروجی مثال ۲ به ازای دو بهره‌ی متفاوت با دو پاسخ پایدار و ناپایدار

حال در ادامه‌ی مقاله یک گام فراتر رفته و با فرض مقدار اولیه‌ی غیرصفر، محدوده‌ی خروجی بدست می‌آید.

## ۳- سیستم مرتبه اول و کنترل‌کننده تناسبی و مقدار اولیه غیرصفر خروجی

مشابه بخش قبل، سیستم مرتبه اول به صورت $G(s)=\frac{b}{s+a}$ و کنترل‌کننده‌ی تناسبی با بهره‌ی $k$ می‌باشد. ورودی مرجع پله است و مقدار اولیه خروجی $y(0)$ است. رابطه‌ی زمانی خروجی با فرض $k_1 = bk$ و زمان مشخص $T$ به صورت زیر خواهد بود.

$$y(T) = \frac{k_1}{a+k_1}\left(1-e^{-(a+k_1)T}\right) + e^{-(a+k_1)T}y(0) \quad (۳)$$

طبق رابطه‌ی (۱)، غیر صفر بودن $y(0)$ عبارتی را به خروجی اضافه نموده است. در حقیقت $y(T)$ تابعی از $k_1$ است و آن را با $f$ نشان داده و برای استفاده از تحلیل بخش قبل، به دو بخش، به صورت $f_1+f_2$ تقسیم می‌شود.که در آن:

$$f(k_1) = y(T), \begin{cases} f_1(k_1) = \frac{k_1}{a+k_1}\left(1-e^{-(a+k_1)T}\right) \\ f_2(k_1) = e^{-(a+k_1)T}y(0) \end{cases} \quad (۴)$$

مطابق رابطه‌ی (۴) عبارت $f_1$ کاملاً برابر عبارتی است که در بخش قبل تحت عنوان $f$ و به صورت نمودار شکل ۱ به ازای $a$ مثبت و به صورت شکل ۳ به ازای $a$ منفی ارائه شده است. حال به ازای علامت‌های مختلف $a$ محدوده‌ی $f_2$ بدست می‌آید تا با استفاده از نتایج بخش قبل، محدوده‌ی $f$ تعیین شود.

### ۳-۱- پارامتر $\boldsymbol{a}$ مثبت باشد

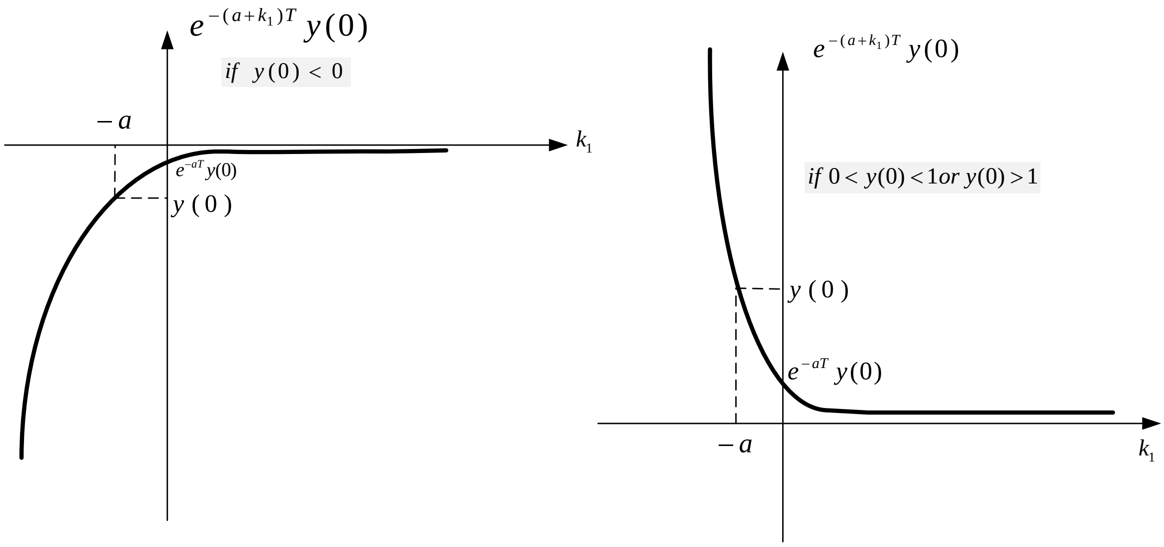
عبارت $f_2$ نیز به ازای $y(0)$ های مختلف و با توجه به علامت مثبت $a$ می‌تواند به یکی از دو صورت شکل ۵ باشد.

به این ترتیب با استفاده از $f_1$ نشان داده شده در شکل ۱ و $f_2$ نشان داده شده درشکل ۵، نمودار $f$ بدست می‌آید. برای حالتی که در آن‌ها $y(0) < 0$ است به دلیل اکیداً صعودی بودن دو نمودار، این کار آسان بوده و به صورت شکل ۶ می‌باشد.

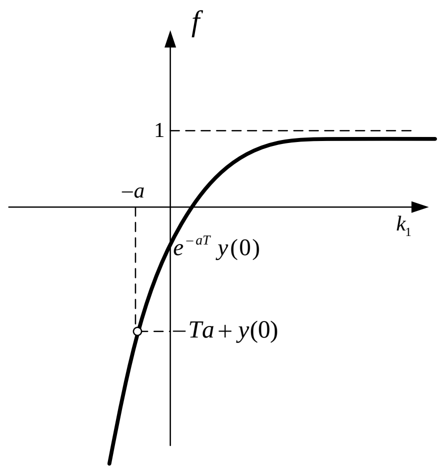
مثال ۳- با فرض $G(s)=\frac{4}{s+0.5}$ و مقدار اولیه 0.8 خروجی؛ بهره $k_1$ کنترل‌کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه 10 در مقدار $-3.5$ باشد.

پاسخ: با توجه به اینکه $-Ta + y0 = -4.2$ و $a = 0.5$ است، انتظار می‌رود خروجی به ازای بهره‌ی موردنظر مقداری پایدار داشته باشد. حدس اولیه بهره $-0.2$ انتخاب شد و $fsolve$ بهره را $-0.4715$ بدست آورد که خروجی مطابق انتظار پایدار و به صورت شکل ۷ است. همچنین توجه دارید که با اشراف به نمودار $f$ بر حسب $k_1$ با اطمینان مقداری برای بهره بدست آمد.

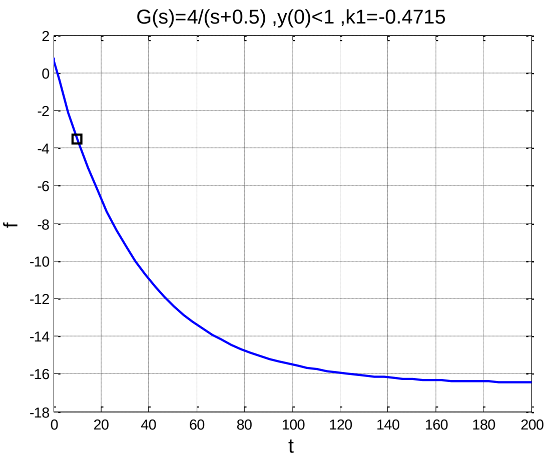
با توجه به اینکه به ازای $0 < y(0) < 1$ تابع $f_1$ اکیداً صعودی و تابع $f_2$ اکیداً نزولی است، فرم تابع $f$ باید تعیین شود. به این منظور باید ابتدا اکسترمم‌های آن بدست آید. با توجه به پیوست ج در این حالت تابع اکسترممی ندارد و نمودار آن مجدداً مطابق شکل ۶ است.




شکل ۵- نمودار $f_2$ به ازای $y(0)$های مختلف و $a > 0$




شکل ۶- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی و به ازای $y(0) < 1$ و $a > 0$




شکل ۷- نمودار خروجی مثال ۳

قاعده ۳: در یک سیستم مرتبه اول با استفاده از کنترل‌کننده‌ی تناسبی، به ازای $a > 0$ و $y(0) < 1$ در یک $T$ خاص به هر مقدار کمتر از واحدی به غیر از $-Ta + y(0)$ برای $f(k_1)$ می‌توان رسید و $k_1$ یکتاست.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ $(-\infty, 1)$ به غیر از نقطه‌ی $-Ta + y(0)$ است(مطابق شکل ۶شکل ۶).

حال مقادیری که $f$ به ازای $y(0) > 1$ می‌پذیرد، بدست خواهدآمد. با توجه به اینکه عبارت $f_1$ اکیداً صعودی است ولی عبارت $f_2$ اکیداً نزولی است ابتدا اثبات می‌شود که به ازای بهره‌های در بی‌نهایت خروجی در چه مقادیری قرار خواهد داشت.

$$f_1 = \frac{k_1}{a + k_1}\left(1 - \frac{f_2}{y(0)}\right)$$

$$f = f_1 + f_2 = \frac{k_1}{a + k_1}\left(1 - \frac{f_2}{y(0)}\right) + f_2$$

$$if\ k_1 \to -\infty \Rightarrow \frac{k_1}{a + k_1} \to 1$$

و با توجه به مقدار $y(0)$ و طبق شکل ۵:

$$y(0) > 1 \to \frac{1}{y(0)} < 1 \xrightarrow{f_2 > 0} \frac{f_2}{y(0)} < f_2 \to -\frac{f_2}{y(0)} > -f_2$$

اگر $\Delta$ را مقداری مثبت تعریف کنیم:

$$-\frac{f_2}{y(0)} = -f_2 + \Delta$$

به این ترتیب:

$$if\ k_1 \to -\infty \Rightarrow f = f_1 + f_2 = 1 - f_2 + \Delta + f_2 = 1 + \Delta > 1$$

بنابراین $y(T)$ در مقادیر بزرگ $k_1$ مقداری مثبت خواهد داشت. اما برای دانستن رفتار کامل آن باید اکسترمم‌های $f$ بدست آید. با توجه به استدلالی که در پیوست د آورده شده است، $y(T)$ حتماً در یک نقطه اکسترمم و در نقطه‌ی $k_1 = -a$ ناپیوستگی دارد و اگر $2(y(0) - 1) = aT$ باشد نقطه‌ی ناپیوستگی با نقطه‌ی اکسترمم برابر است. پس در زمان مشخص $T$ خروجی $f$ می‌تواند به یکی از سه صورت شکل ۸ باشد.

قاعده ۴: در یک سیستم مرتبه اول با استفاده از کنترل‌کننده‌ی تناسبی، به ازای $a > 0$ و $y(0) > 1$ در یک $T$ خاص به مقادیری در بازه‌ی $(-Ta + y(0), +\infty)$ برای $f(k_1)$ حتماً می‌توان رسید و مقدار کمتر از $-Ta + y(0)$ آن سقفی دارد که باید برای هر $T$ و $a$ ای طبق رابطه‌ی (۱۰) بدست آورده شود.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ از مقداری کمتر از $-Ta + y(0)$ تا مثبت بی‌نهایت، به غیر از نقطه‌ی $-Ta + y(0)$ است(مطابق شکل ۸).

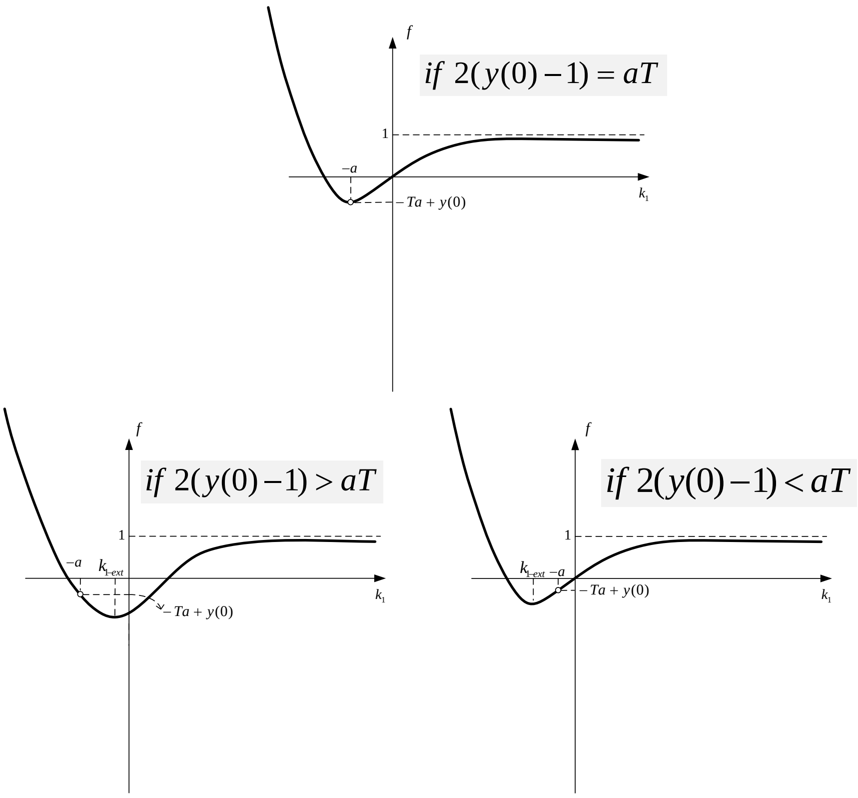
تبصره ۴-۱: مقدار بهره برای مقادیر کمتر از یک، یکتا نبوده و هم پاسخ پایدار و هم پاسخ ناپایدار می‌تواند بدست آید.

مثال ۴- با فرض $G(s) = \frac{4}{s+0.5}$ و مقدار اولیه 2 خروجی؛ بهره $k_1$ کنترل‌کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه 10 در مقدار $-2$ باشد.

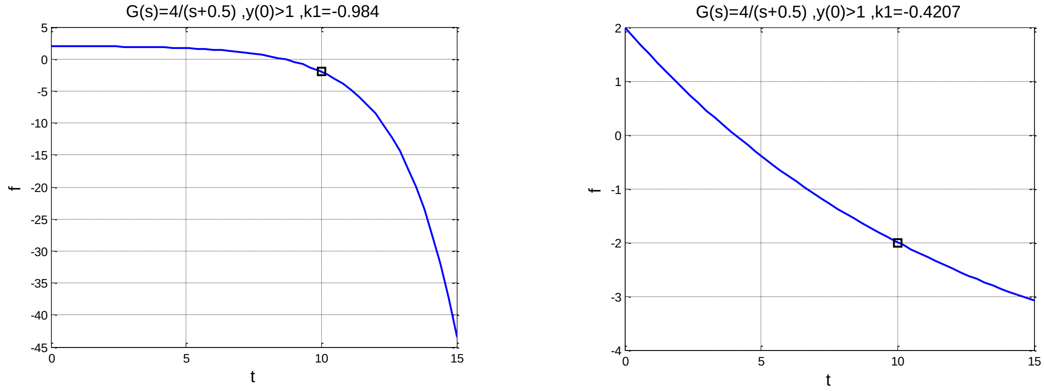
پاسخ: $-Ta + y0 = -3$ است و $-2$ در بازه‌ی $(-3, +\infty)$ قرار دارد و چون کمتر از یک است $k_1$ آن یکتا نیست. با دو انتخاب برای حدس اولیه بهره $fsolve$، دو خروجی پایدار و ناپایدار بدست آمد. با حدس اولیه $-0.3$ پاسخی پایدار و به ازای حدس اولیه $-1$ پاسخ ناپایدار حاصل شد که در شکل ۹ ملاحظه می‌شود.

## ۲-۳- پارامتر $a$ منفی باشد

با توجه به نتیجه‌ای که از قبل بدست آمد، عبارت $f_1$ به ازای $a < 0$ می‌تواند به یکی از سه صورت شکل ۳ باشد. عبارت $f_2$ نیز به ازای $y(0)$ های مختلف به صورت شکل ۱۰ می‌باشد.




شکل ۸- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی و به ازای $a > 0$ و $y(0) > 1$




شکل ۹- نمودار خروجی مثال ۴ به ازای دو بهره متفاوت

به ازای $y(0) < 0$، جمع دو عبارت $f_1$ و $f_2$ برای ساخت $f$، با توجه به اکیداً صعودی بودن دو نمودار، کار آسانی بوده و به صورت شکل ۱۱ می‌باشد.

قاعده ۵: در یک سیستم مرتبه اول با استفاده از کنترل‌کننده‌ی تناسبی، به ازای $a < 0$ و $y(0) < 0$ در یک $T$ خاص به هر مقدار کمتر از واحدی به غیر از $-Ta + y(0)$ برای $f(k_1)$ می‌توان رسید و مقدار بزرگتر از واحد آن سقفی دارد که باید برای هر $T$ و $a$ بدست آورده شود.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ از منفی بی‌نهایت تا مقداری بزرگتر از واحد، به غیر از نقطه‌ی $-Ta + y(0)$ است(مطابق شکل ۱۱).

برای حالتی که $0 < y(0) < 1$ و $y(0) > 1$ است، عبارت $f_1$ اکیداً صعودی است ولی عبارت $f_2$ اکیداً نزولی است. لذا ابتدا اثبات می‌شود به ازای بهره‌های در بی‌نهایت خروجی در چه مقادیری قرار خواهد داشت.

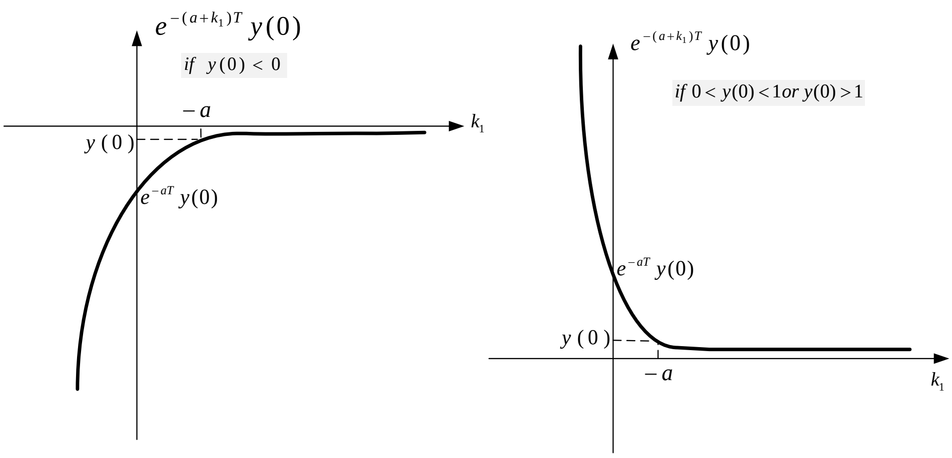
به ازای $k_1 \to -\infty$ عبارت $\frac{k_1}{a+k_1}$ با تقریب خوبی برابر واحد است و حد عبارت $f$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\lim_{k_1\to-\infty} f = \lim_{k_1\to-\infty} \frac{k_1}{a+k_1}\left(1-e^{-(a+k_1)T}\right) + e^{-(a+k_1)T}y(0) = \lim_{k_1\to-\infty} 1 + (y(0)-1)e^{-(a+k_1)T}$$

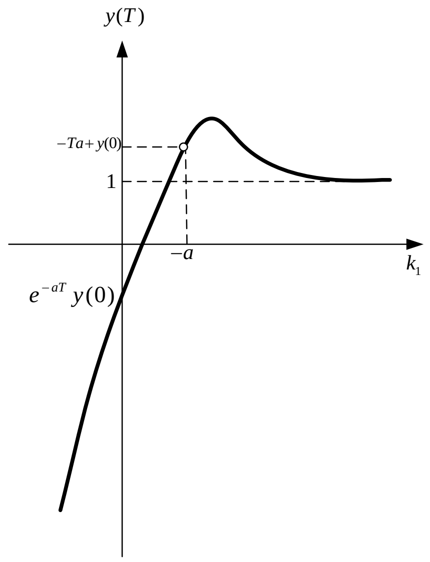
و چون $0 < y(0) < 1$ است عبارت $(y(0)-1)$ مقداری منفی خواهد داشت و لذا:

$$\lim_{k_1\to-\infty} 1 + (y(0)-1)e^{-(a+k_1)T} = -\infty$$

با توجه به پیوست ه می‌توان گفت به ازای $0 < y(0) < 1$ و $a < 0$ همواره خروجی یک اکسترمم و یک ناپیوستگی دارد و اگر $aT = 2(y(0)-1)$ باشد نقطه‌ی ناپیوستگی تابع همان نقطه‌ی اکسترمم آن خواهد شد. بنابراین نمودار $f$ به صورت شکل ۱۲ خواهد بود.




شکل ۱۰- نمودار $f_2$ به ازای $y(0)$های مختلف و $a < 0$




شکل ۱۱- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی و به ازای $a < 0$ و $y(0) < 0$

خوب است محدوده‌ی $-Ta + y(0)$ نیز برای هر حالت بدست آید.

$$\begin{aligned}
&if\ Ta > 2(y(0)-1) \rightarrow \big(2-y(0)\big) \\
&\quad > (-Ta + y(0)) \\
&\quad \xrightarrow{(2-y(0))\in(1,2)} (-Ta + y(0)) < 2 \\
&if\ Ta < 2(y(0)-1) \rightarrow \big(2-y(0)\big) \\
&\quad < (-Ta + y(0)) \\
&\quad \xrightarrow{(2-y(0))\in(1,2)} (-Ta + y(0)) > 1 \\
&if\ Ta = 2(y(0)-1) \rightarrow \big(2-y(0)\big) \\
&= (-Ta + y(0)) \\
&\xrightarrow{(2-y(0))\in(1,2)} 1 < (-Ta + y(0)) < 2
\end{aligned}$$

لذا حداکثر مقداری که تابع می‌تواند داشته باشد 2 خواهد بود.

قاعده ۶: در یک سیستم مرتبه اول با استفاده از کنترل‌کننده‌ی تناسبی، به ازای $a < 0$ و $0 < y(0) < 1$ در یک $T$ خاص به هر مقدار کمتر از واحدی به غیر از $-Ta + y(0)$ برای $f(k_1)$ می‌توان رسید و مقدار بزرگتر از واحد نیز وجود خواهد داشت که سقفی داشته و باید برای هر $T$ و $a$ بدست آورده شود.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ از منفی بی‌نهایت تا مقداری بزرگتر از یک، به غیر از نقطه‌ی $-Ta + y(0)$ است(مطابق شکل ۱۲).

تبصره ۶-۱: حداکثر مقدار بزرگتر از واحدی که می‌تواند خروجی داشته باشد حتماً مقداری کمتر از ۲ است.

مثال ۵- با فرض $G(s) = \frac{4}{s-5}$ و مقدار اولیه 0.5 خروجی؛ بهره $k_1$ کنترل‌کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه 3 در مقدار 15.3 باشد.

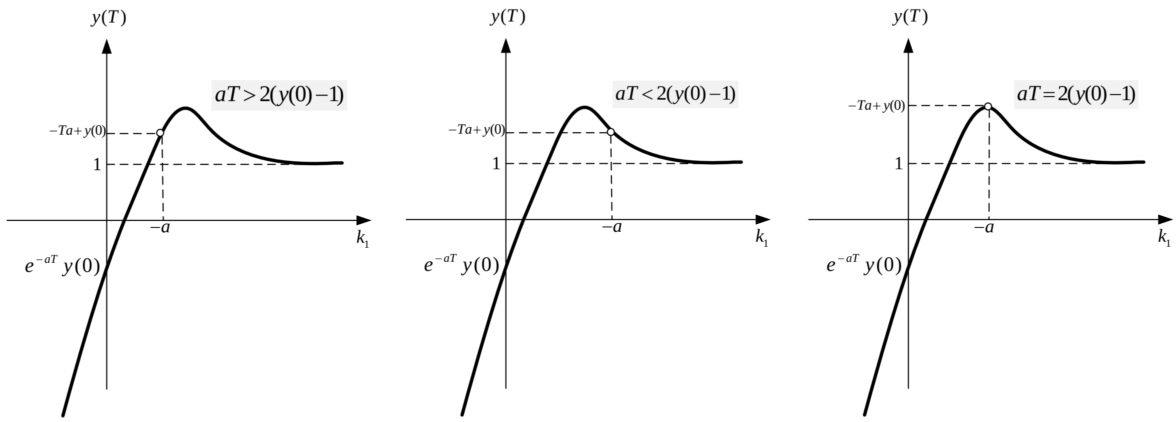
پاسخ: $-Ta + y0 = 15.5$ است و $Ta < 2(y(0)-1)$ است. با دو انتخاب برای حدس اولیه بهره $fsolve$، دو خروجی پایدار و ناپایدار بدست آمد. با حدس اولیه 7 پاسخی پایدار با بهره‌ی 5.01 و به ازای حدس اولیه 7− پاسخ ناپایدار با بهره 5− حاصل شد که در شکل ۱۳ ملاحظه می‌شود.

در ادامه به ازای $y(0) > 1$ مقادیری که $f$ می‌تواند بپذیرد را بررسی می‌کنیم.

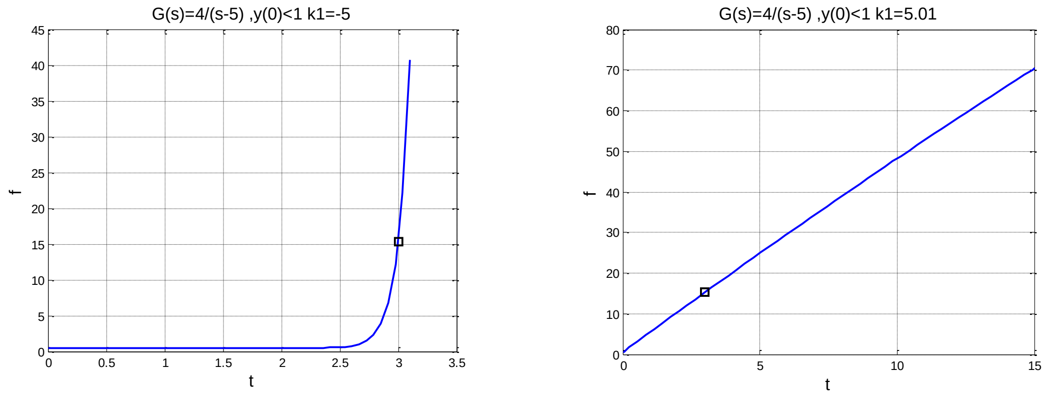
مشابه استدلالی که برای $0 < y(0) < 1$ به ازای بهره در بی‌نهایت شد، به ازای $y(0) > 1$ عبارت $(y(0) - 1)$ مقداری مثبت خواهد داشت و لذا:

$$\lim_{k_1\to-\infty} 1 + (y(0)-1)e^{-(a+k_1)T} = +\infty$$
$$\lim_{k_1\to+\infty} f \to 1$$

بنابراین می‌توان گفت به ازای $y(0) > 1$، $f$ مقداری مثبت خواهد داشت. همچنین به دلیل منفی بودن علامت $a$ عبارت $-Ta + y(0)$ مثبت و بزرگتر از یک است.

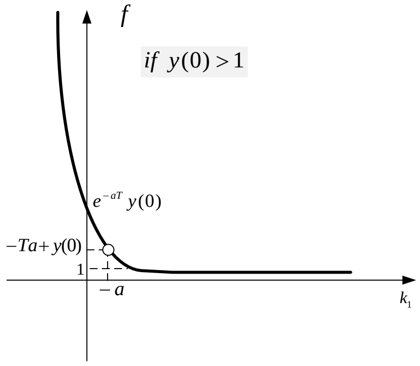



شکل ۱۲- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی و به ازای $a < 0$ و $0 < y(0) < 1$




شکل ۱۳- نمودار خروجی مثال ۵ به ازای دو بهره متفاوت

اما برای دانستن رفتار کامل آن باید اکسترمم‌های آن بدست آید که براساس پیوست ی هیچ اکسترممی وجود ندارد. لذا تابع $f$ به صورت شکل ۱۴شکل ۱۴ خواهد بود. بنابراین به ازای $a<0$ و مقادیر $y(0)>1$ به هر مقدار بزرگتر از یک برای $y(T)$ می‌توان دست یافت.




شکل ۱۴- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی و به ازای $a<0$ و $y(0)>1$

قاعده ۷: در یک سیستم مرتبه اول با استفاده از کنترل‌کننده‌ی تناسبی، به ازای $a<0$ و $y(0)>1$ در یک $T$ خاص به هر مقدار بزرگتر از واحدی به غیر از $-Ta+y(0)$ برای $f(k_1)$ می‌توان رسید.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ از $(1,+\infty)$ به غیر از نقطه‌ی $-Ta+y(0)$ است(مطابق شکل ۱۴).

مثال ۶- با فرض $G(s)=\frac{1}{s-7}$ و مقدار اولیه 3 خروجی؛ بهره $k_1$ کنترل‌کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه 4 در مقدار 30 باشد. همچنین بهره $k_1$ کنترل‌کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه 4 در مقدار 33 باشد.

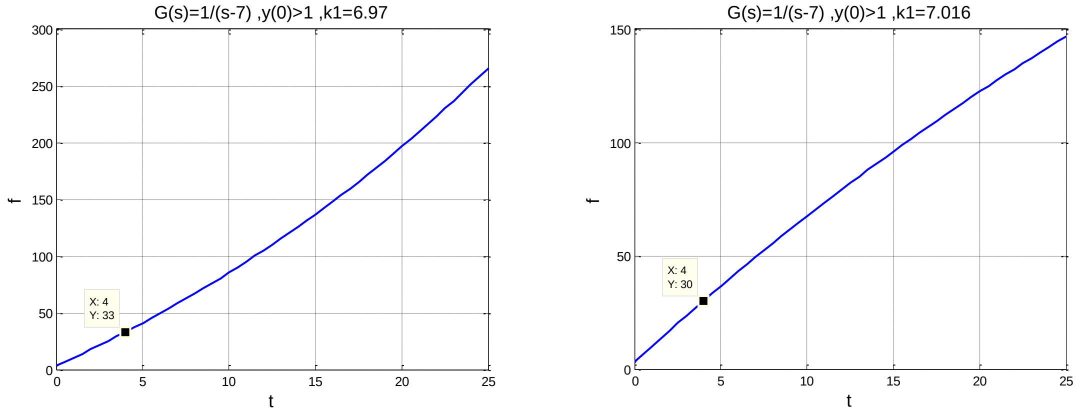
پاسخ: $-Ta+y0=31$ است. با انتخاب $-1$ برای حدس اولیه بهره $fsolve$، دو خروجی پایدار که در آن در زمان خاص در مقدار 30 قرار دارد و ناپایدار که در همان زمان در مقدار 33 قرار دارد بدست آمد. نتایج در شکل ۱۵ نشان داده شده است که مطابق دانسته‌های بدست آمده از شکل ۱۴ است.

## ۴- تحمیل‌شدن سناریو به خروجی

با توجه به نتایج بدست آمده، نکته‌ی جالب توجهی بوجود آمده است که در این بخش توضیح داده می‌شود. این نکته تحمیل روند سناریو به خروجی سیستم حلقه‌بسته‌ی مرتبه اول با کنترل‌کننده‌ی تناسبی است. به این معنی که بسته به علامت پارامتر $a$ تنها می‌توان سناریوهای خاصی به خروجی نسبت داد.

به فرض اگر پارامتر $a$ مثبت باشد و مقدار لحظه‌ی صفر خروجی، کمتر از واحد باشد با توجه به شکل ۶ خروجی هیچ‌گاه در گام اول سناریو نمی‌تواند مقدار بزرگتر از یک بپذیرد و مجدداً با توجه به شکل ۶ در گام‌های بعدی سناریو نیز نمی‌تواند هیچ‌گاه مقدار بزرگتر از یک داشته باشد. یعنی در این حالت حتماً سناریوی خروجی در تمام زمان‌ها باید نمایی کمتر از واحد ترتیب داده شود.

همچنین اگر پارامتر $a$ مثبت بوده و مقدار لحظه‌ی صفر خروجی بزرگتر از یک باشد، با توجه به شکل ۸ در گام اول به مقادیر بزرگتر از یک و کمتر از یک(البته با سقف مشخص) می‌توان رسید. اما در هر گامی از سناریو که خروجی به مقدار کمتر از واحد برسد با توجه به شکل ۶، از آن به بعد دیگر نمی‌توان به مقدار بیشتر از واحدی در خروجی دست یافت. پس نمی‌توان هیچ‌گاه برای این سیستم همزمان بالازدگی و پایین‌زدگی(نسبت به مقدار یک) مشاهده کرد که کاملاً درست و مطابق انتظار است.



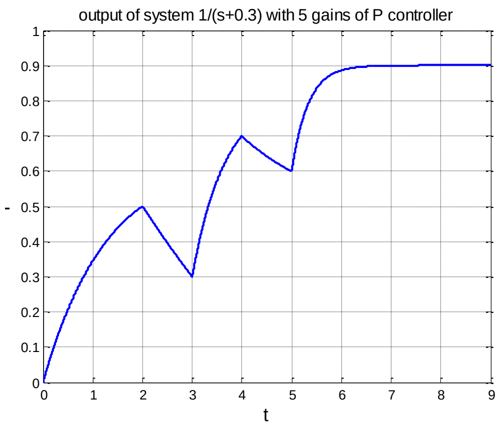

شکل ۱۵- نمودار خروجی مثال ۶ به ازای دو بهره متفاوت

همچنین اگر پارامتر $a$ منفی باشد و مقدار لحظه‌ی صفر خروجی کمتر از واحد باشد، براساس شکل ۳ و شکل ۱۱ می‌توان در اولین گام یا گام‌های ابتدایی بالازدگی‌ای برای سناریوی خروجی متصور شد، اما همین که سناریو به مقدار بیشتر از یک رود، براساس شکل ۱۴ نهایتاً در گام‌های بعد خروجی می‌تواند به مقدار یک برسد. لذا نمی‌توان هم بالازدگی و هم پایین‌زدگی(نسبت به مقدار یک) در روند خروجی مشاهده کرد که با توجه به نوع سیستم و کنترل‌کننده کاملاً درست و منطقی است.

نمونه‌ای از این کار در شکل ۱۶ انجام شده است. در شکل ۱۶ که مربوط به سیستمی با $a$ مثبت است برای اینکه خروجی سیستم حلقه‌بسته در زمان‌های دو، سه، چهار، پنج و هفت ثانیه به ترتیب در۰/۵، ۰/۳، ۰/۷ ، ۰/۶ و ۰/۹ قرار گیرد بهره‌های ۰/۵، ۰/۱۳۴-، ۱/۲۵۵، ۰/۲۶۳ و ۲/۷۲ اعمال شده است. همچنین توجه دارید که برای پایدار بودن سیستم حلقه‌بسته، آخرین بهره‌ی اعمالی باید سیستم حلقه‌بسته‌ی پایداری بدست دهد. به همین جهت قضیه زیر مطرح می‌شود:

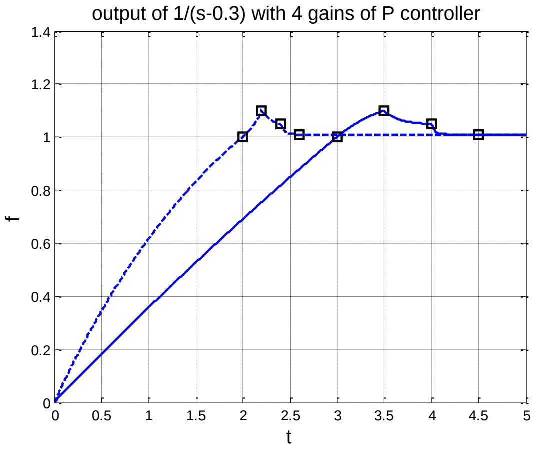
**قضیه پایداری:** شرط لازم و کافی برای پایداری این روش، پایداری کنترل‌کننده پایانی است.

**اثبات:** می‌دانیم سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان بدون شرایط اولیه در صورتی پایدار BIBO است که به ازای هر ورودی کراندار، خروجی آن نیز کراندار و محدود باشد. با توجه به اینکه در تنظیم سناریو مقادیر خروجی در لحظات میانی توسط طراح تحمیل می‌شود، محدود است و می‌ماند سرنوشت خروجی پس از پایانی‌ترین تحمیل که برای آن هم کافی است کنترل کنندهٔ پایانی پایدار باشد تا خروجی کراندار و محدود بماند که یعنی شرط داده شده کافی است. از طرفی روشن است که اگر کنترل کنندهٔ پایانی ناپایدار باشد، حتماً ورودی‌ای از آن پس می‌توان داشت که خروجی را بی‌کران کند و از همین رو شرط داده شده لازم نیز هست.

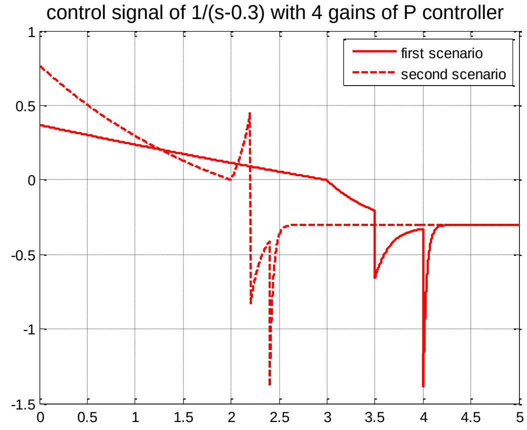



شکل ۱۶- نمودار خروجی سیستم $\frac{1}{s+0.3}$ با پنج بهره‌ی متغیر با زمان کنترل‌کننده‌ی تناسبی

نتایج نمونه‌ای دیگر که مربوط به سیستمی با $a$ منفی است در شکل ۱۷ و شکل ۱۸ نشان داده شده است. در این نمونه دو سناریو برای خروجی ترتیب داده شده است. سناریوی اول در زمان ۴/۵ ثانیه به پایان می‌رسد و زمان بین سوئیچ‌ها ۰/۵ ثانیه‌ای است و سناریوی دوم که با خط‌چین نشان داده شده است در زمان ۲/۶ به پایان می‌رسد و زمان بین سوئیچ‌ها ۰/۲ ثانیه‌ای است. در سناریوی اول برای اینکه خروجی سیستم حلقه‌بسته در زمان‌های سه، سه و نیم، چهار و چهارونیم ثانیه به ترتیب در ۱ ، ۱/۱، ۱/۰۵ و ۱/۰۱ قرار گیرد بهره‌های ۰/۳۶، ۲/۰۵، ۶/۵۸ و ۲۸/۲۷ اعمال شده است. در سناریوی دوم برای اینکه در زمان‌های ۲، ۲/۲، ۲/۴ و ۲/۶ خروجی در همان مقادیر سناریوی اول قرار گیرد بهره‌های ۰/۷۷، ۴/۴۳-، ۸/۳ و ۲۸/۲۳ اعمال شده است. توجه دارید که تلاش کنترلی در سناریوی دوم بیشتر است، چرا که در بازه‌ی زمانی فشرده‌تری به همان مقادیر خروجی دست پیدا کرده است. این طراح است که همواره باید با توجه به اهداف مدنظرش تصمیم بگیرد که کدام سناریو مناسب‌تر است. شاید محدودیت تلاش کنترلی او را مجاب به استفاده از سناریوی اول کند و یا سرعت بیشتر او را به استفاده از سناریوی دوم سوق دهد.




شکل ۱۷- نمودار خروجی سیستم $\frac{1}{s-0.3}$ با چهار بهره‌ی متغیر با زمان کنترل‌کننده‌ی تناسبی




شکل ۱۸- سیگنال کنترلی سیستم $\frac{1}{s-0.3}$ با چهار بهره‌ی متغیر با زمان کنترل‌کننده‌ی تناسبی

## ۵- گام‌های تعیین بهره کنترل‌کننده تناسبی به روش ارائه شده در مقاله

جهت بکارگیری راحت روش ارائه شده در این مقاله، در این بخش مراحل طراحی به صورت یک الگوریتم ارائه می‌شود. ابتدا باید تابع تبدیل حلقه باز سیستم(پارامترهای $a$ و $b$) به همراه مقدار اولیه خروجی($y(0)$) مشخص باشند. آن‌گاه مراحل زیر طی می‌شود.

گام ۱- تعیین بازه‌ی زمانی سوییچ($T-T_p$) و مقدار خروجی در انتهای بازه($y(T)$) توسط طراح مطابق با جدول ۱

گام ۲- انتخاب حدس اولیه مناسب برای بهره‌تناسبی($k_1$) با استفاده از نمودارهای ۱،۳،۶،۸،۱۱،۱۲و۱۴

گام ۳- استفاده از تابع $fsolve$ نرم‌افزار $MATLAB$ جهت تعیین بهره تناسبی $k_1$

گام ۴- اگر آخرین سوییچ است به پایداری حلقه بسته توجه شود و در غیر این صورت به گام ۱ بروید.

توجه کنید که $T_p$ زمان سوییچ قبلی است که در اولین سوییچ صفر است و در سوییچ‌های بعدی زمان سوییچ قبلی است تا همواره بازه‌ی زمانی که باید خروجی در طی آن به مقدار مطلوب برسد بدست آید. همچنین توجه داشته باشید که در صورتی که از جدول پیروی کرده و از نمودارهای مربوطه استفاده کنید حتماً بهره متناظر وجود دارد.

در مقام مقایسه با دیگر روش‌ها مثلاً روش‌هایی که تطبیقی هستند و بهره‌های کنترلی متغیر با زمان بدست می‌دهند بر مبنای یک فرض مهم که وجود یک تغییر در سیستم مثلاً تغییر در یک پارامتر خاص سیستم است، استوارند. در این روش‌ها زمانی بهره کنترلی تغییر می‌کند که تغییری رخ دهد. اما در این روش خود طراح سناریوی تغییر را چیده و هیچ تغییر ناخواسته‌ای در سیستم رخ نداده است، لذا آنچه در این نوشته آمده می‌تواند به چگونگی انتخاب بهره در تطبیق نیز کمک کند ولی نمی‌توان این روش را با روش‌های تطبیقی بطور مستقیم مقایسه نمود چرا که انگیزهٔ تغییر بهره در هر یک متفاوت است. همچنین در روشی همچون زیگلر نیکولز، در نهایت یک بهره به دست می‌دهد اما روش این مقاله، روشی چندبهره‌ای است که مسلماً از روش تک‌بهره‌ای زیگلرنیکولز ظاهری بهتر دارد ولی چون در آنجا هدف دادن یک بهره برای کل مسیر بوده است از این جهت بهتر است. لذا اساساً مقایسه به شکل متداول به نظر مناسب نمی‌رسد بلکه شاید بهتر این باشد که بگوییم نوع نگاهی که در اینجا ارائه شده است، یک بده بستانی با سایر روشها می‌تواند داشته باشد. . همچنین تأکید می‌گردد که هرچند در اینجا روشی برای طراحی ارائه شده ولی بیشترِ کوشش، صرفِ بررسیِ امکان وجود جواب و محدوده‌های اعمال آن شده است.

## ٦- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر برای سیستم‌هایی که بتوانند با یک سیستم مرتبه اول تقریب زده شوند با کنترل‌کننده مناسب، محدوده‌ای که خروجی می‌تواند به ازای یک بهره‌ی خاص در زمانی مشخص در آن قرار داشته باشد بدست آمد. نشان داده شد که در یک سیستم مرتبه اول تنها با کنترل‌کننده تناسبی می‌توان به همه‌ی اهداف موردنظر رسید و نیازی به استفاده از کنترل‌کننده‌های PD، PI یا PID نیست. لذا محاسبه‌ی محدوده‌ی مجاز خروجی برای حالت‌های مختلفی از سیستم انجام شد و با مثال‌هایی صحت آن‌ها نیز تأیید شد. قرار داشتن خروجی در محدوده‌ی مجاز شرط جواب داشتن معادله‌های غیرخطی‌ای است که از آن‌ها، بهره‌ها بدست می‌آید. این معادلات غیرخطی با توابعی در نرم‌افزار MATLAB حل می‌شوند. حدس اولیه این توابع می‌تواند به خوبی براساس نمودارهای ارائه شده انتخاب شوند. در برخی نمودارها با اکسترمم زدن خروجی، برای محدوده‌هایی دو مقدار برای بهره می‌توانست بدست آید که با تغییر

حدس اولیه هردوی این بهره‌ها بدست می‌آمدند و هر کدام از دو بهره، سیستم حلقه‌بسته‌ی خاصی را بدست می‌دادند.

نکته حائز اهمیتی که خروجی اصلی این مقاله است این می‌باشد که چون با شرایط اولیه غیرصفر نیز محدوده‌ی خروجی بدست آمد، می‌توان با چند مرحله سوییچ و تغییر بهره کنترل‌کننده روند خاصی را به خروجی برحسب زمان تحمیل نمود. به این معنی که اگر سناریویی برای خروجی چیده شود که مشخص کند در چند لحظه‌ی مختلف در چه مقادیری قرار گیرد، این لحظات بازه‌های زمانی‌ای را می‌سازند که با روش ارائه شده در مقاله، بهره‌های متغیر در بازه‌های زمانی منطبق با سناریو، می‌توانند بدست آیند. دو نمونه از انجام این کار در مقاله ارائه شد.

همچنین در این مقاله به ازای علامت‌های مختلف پارامتر $a$ و مقادیر مختلف $y(0)$ برد خروجی یا همان محدوده‌هایی که حتماً بهره‌ی تناسبی متناظری دارند بدست آمد و ملاحظه شد در برخی محدوده‌ها این بهره یکتا نیست. نتایج بدست آمده جهت دسترسی آسان‌تر در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۱- نتایج حاصله در مقاله به ازای حالت‌های مختلف

| **علامت $a$** | **مقدار $y(0)$** | **برد خروجی تابع ($\alpha$ برای هر $a$ و $T$ باید حساب شود)** | **محدوده‌ی برد تابع با $k_1$ غیریکتا** |
|---|---|---|---|
| **مثبت** | **صفر** | $(-\infty,1)-\{-Ta\}$ | -- |
| **منفی** | **صفر** | $(-\infty,1)\cup[1,\alpha]-\{-Ta\}$ | بزرگتر از یک |
| **مثبت** | **کوچکتر از یک** | $(-\infty,1)-\{-Ta+y(0)\}$ | -- |
| **مثبت** | **بزرگتر از یک** | $(\alpha,-Ta+y(0))\cup(-Ta+y(0),+\infty)$ | کوچکتر از یک |
| **منفی** | **کوچکتر از یک** | $(-\infty,1)\cup[1,\alpha]-\{-Ta+y(0)\}$ | بزرگتر از یک |
| **منفی** | **بزرگتر از یک** | $(1,+\infty)-\{-Ta+y(0)\}$ | -- |

## ۷- پیوست الف

در این قسمت اکسترمم‌های تابع $f$ به ازای $y(0)=0$ و $a>0$ بدست می‌آیند.

با توجه به رابطه‌ی (۱):

$$f(k_1)=\frac{k_1}{a+k_1}\left(1-e^{-(a+k_1)T}\right)$$

لذا:

$$\frac{df}{dk_1}=\frac{1}{(a+k_1)^2}\left(a+e^{-(a+k_1)T}\left[-a+aTk_1+Tk_1^2\right]\right) \tag{۵}$$

با برابر صفر قرار دادن رابطه‌ی (۵) و با فرض $k_1\neq-a$:

$$k_1^2+ak_1-\frac{a}{T}=-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T} \tag{۶}$$

فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} q_1&=k_1^2+ak_1-\frac{a}{T}\\ q_2&=-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T}\end{aligned} \tag{۷}$$

آن‌گاه:

$$\frac{df}{dk_1}=\frac{Te^{-(a+k_1)T}}{(a+k_1)^2}(q_1-q_2) \tag{۸}$$

با توجه به مثبت بودن ضریب رابطه‌ی بالا، عبارت $q_1-q_2$ علامت مشتق را تعیین می‌کند.

سمت راست تساوی (۶) به فرم نمایی و سمت چپ آن به فرم سهموی است. به دلیل مثبت بودن ضریب $k_1^2$ تقعر سهموی مثبت است و می‌تواند به این صورت نوشته شود.

$$q_1=k_1^2+ak_1-\frac{a}{T}=\left(k_1+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-\frac{a}{T}$$

به ازای مقادیر مختلف $k_1$ این سهموی به صورت شکل ۱۹ خواهد بود. عبارت $-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T}$ نیز به دلیل علامت مثبت $a$ حتماً مقداری منفی داشته و به صورت شکل ۲۰ می‌باشد.

از تلاقی این دو شکل مقدار $k_1$ ای بدست می‌آید که به ازای آن مشتق تابع $f$ برابر صفر است. برای اینکه این دو تابع تلاقی داشته باشند لازم و کافی است که نقطه مینیمم سهموی پایین‌تر از تابع نمایی قرار گیرد. از آن‌جایی که مقدار تابع نمایی به ازای $k_1$ نقطه‌ی مینیمم یعنی $k_1=-\frac{a}{2}$ برابر $-\frac{a}{T}e^{\frac{aT}{2}}$ است. پس شرط صفر شدن مشتق $f$ به صورت زیر می‌باشد.

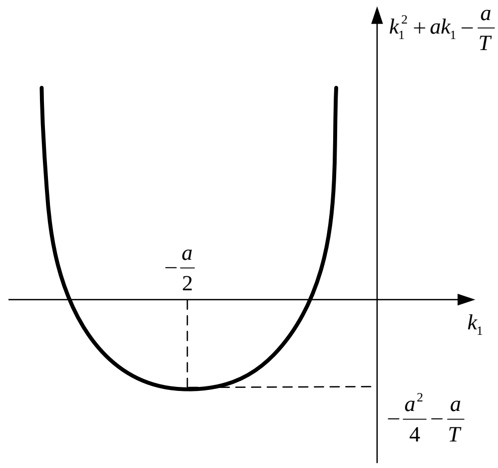
$$-\frac{a^2}{4}-\frac{a}{T}<-\frac{a}{T}e^{\frac{aT}{2}}\rightarrow -a^2T-4a<-4ae^{\frac{aT}{2}}\rightarrow a^2T+4a>4ae^{\frac{aT}{2}}\rightarrow aT+4>4e^{\frac{aT}{2}}$$

با تعریف $x=\frac{aT}{2}$ شرط بالا به صورت زیر درمی‌آید:

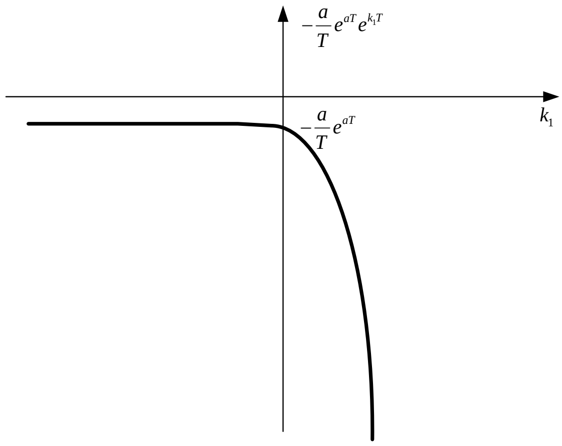
$$2x+4>4e^x\rightarrow x+2>2e^x$$

با رسم دو طرف رابطه بالا مطابق شکل ۲۱ مشاهده می‌شود که هیچ گاه رابطه‌ی بالا برقرار نمی‌شود و همواره به ازای $a>0$ رابطه $x+2<2e^x$ برقرار است.

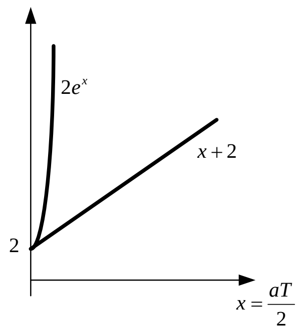
به این ترتیب اثبات شد که به ازای هیچ $k_1$ای تساوی (۶) برقرار نشده و مشتق تابع $f$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و منحنی $f$ هیچ نقطه اکسترممی ندارد.




شکل ۱۹- نمودار $k_1^2 + ak_1 - \frac{a}{T}$ به ازای $a > 0$




شکل ۲۰- نمودار $-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T}$ به ازای $a > 0$




شکل ۲۱- نمودار $2e^x$ و $x + 2$ به ازای $x$ های مثبت

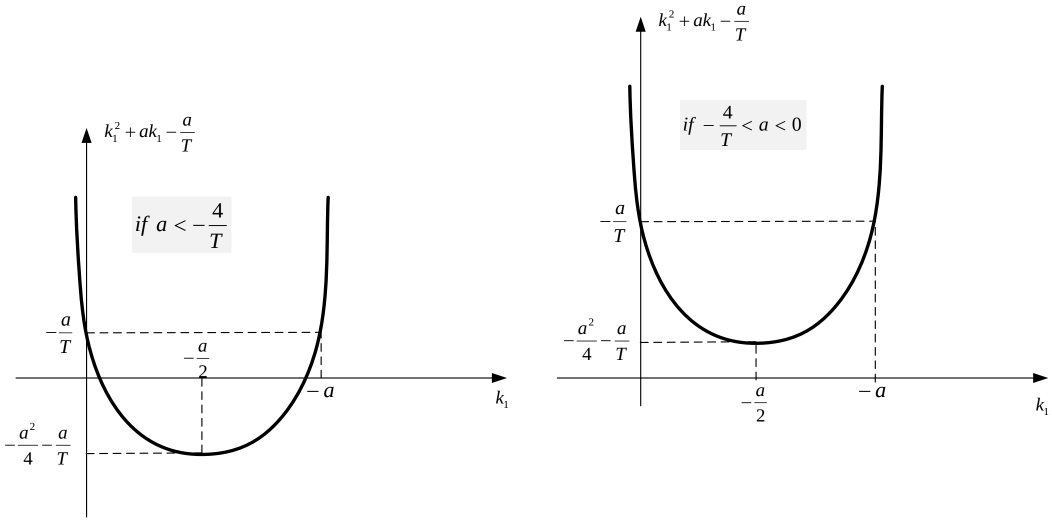
## ۸- پیوست ب

در این قسمت اکسترمم‌های تابع $f$ به ازای $y(0) = 0$ و $a < 0$ بدست می‌آیند.

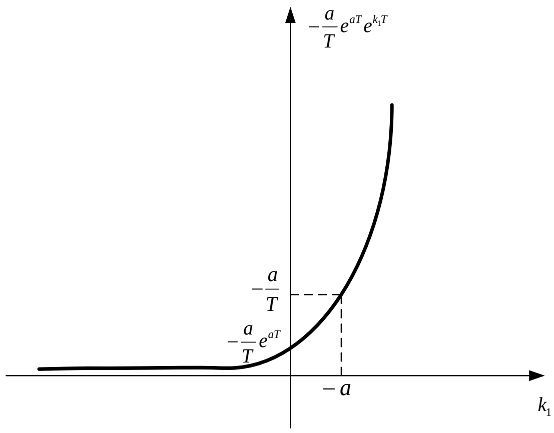
مشابه ضمیمه الف نقاط اکسترمم تابع $f$ از تساوی (۶) بدست می‌آیند. سهموی سمت چپ تساوی به یکی از دو صورت شکل ۲۲ می‌تواند باشد.

عبارت $-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T}$ نیز حتماً مقداری مثبت دارد و به صورت شکل ۲۳ می‌باشد.

نکته‌ی بسیار مهمی که باید اینجا ذکر شود این است که طبق رابطه‌ی (۸) عبارت $q_1 - q_2$ تعیین کننده علامت مشتق تابع است. با توجه به بزرگ بودن عبارت $q_1$ و $q_2$ ساده‌تر است از مشتق آن‌ها برای تعیین علامت مشتق تابع بهره ببریم. اگر $M_{q_1}$ مشتق $q_1$ و $M_{q_2}$ مشتق $q_2$ باشد، در صورتی که هم قبل و هم بعد از نقطه‌ی تلاقی $q_1$ و $q_2$، شیب یکی از این دو همواره بیشتر باشد، علامت مشتق تابع تغییر می‌کند؛ یا به عبارت دیگر اگر قبل از نقطه‌ی تلاقی شیب یکی بیشتر باشد و بعد از تلاقی شیب دیگری بیشتر باشد، آن‌گاه نقطه‌ی تلاقی دیگر نقطه‌ی اکسترمم یا نقطه‌ی تغییر علامت مشتق تابع نخواهد بود.




شکل ۲۲- نمودار $k_1^2 + ak_1 - \frac{a}{T}$ به ازای $a < 0$




شکل ۲۳- نمودار $-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T}$ به ازای $a < 0$

با توجه به شکل ۲۲ و شکل ۲۳ حتماً دو نمودار در $k_1 = -a$ تلاقی داشته و مقدار آن‌ها در این نقطه $-\frac{a}{T}$ است. البته باید بررسی شود آیا $k_1 = -a$ نقطه‌ی اکسترمم هست یا خیر. لذا:

$$k_1 = -a + \varepsilon$$
$$\rightarrow \begin{cases} M_{q_1} = 2k_1 + a = -a + 2\varepsilon \\ M_{q_2} = -ae^{aT}e^{k_1T} = -ae^{\varepsilon T} = -a - a\varepsilon T \end{cases}$$
$$k_1 = -a - \varepsilon$$
$$\rightarrow \begin{cases} M_{q_1} = 2k_1 + a = -a - 2\varepsilon \\ M_{q_2} = -ae^{aT}e^{k_1T} = -ae^{-\varepsilon T} = -a + a\varepsilon T \end{cases}$$

بنابراین برای مقایسه‌ی شیب دو نمودار در دو حالت شکل ۲۲ مقدار $-aT$ با 2 باید مقایسه شود.لذا:

$$if\ a < -\frac{4}{T} \rightarrow -aT > 4$$
$$\rightarrow \begin{cases} k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow M_{q_2} > M_{q_1} \\ k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow M_{q_2} < M_{q_1} \end{cases}$$
$$\rightarrow -a\ is\ not\ an\ extreme$$

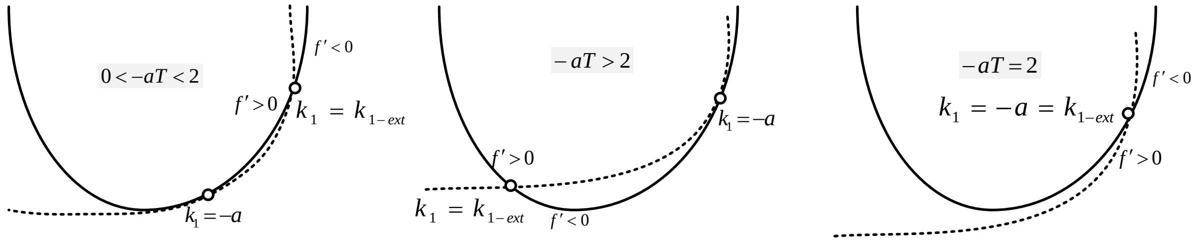
$$if\ -\frac{4}{T} < a < 0$$
$$\rightarrow \begin{cases} 0 < -aT < 2 \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow M_{q_2} < M_{q_1} \\ k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow M_{q_2} > M_{q_1} \end{cases} \rightarrow -a\ is\ not\ an\ extreme \\ 2 < -aT < 4 \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow M_{q_2} > M_{q_1} \\ k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow M_{q_2} < M_{q_1} \end{cases} \rightarrow -a\ is\ not\ an\ extreme \end{cases}$$

بنابراین نقطه‌ی $k_1 = -a$ نقطه‌ی اکسترمم نخواهد بود. تنها حالت باقی‌مانده $-aT = 2$ است که در این صورت با این تقریبی که برای $e^x$ لحاظ کردیم، قبل و بعد از $k_1 = -a$ شیب $q_1$ و $q_2$ برابر بوده و نمی‌توانیم از نکته‌ی مطرح شده استفاده کنیم. اما اگر تقریب $e^x$ را در این حالت با سه جمله انجام دهیم به نتیجه‌ی زیر خواهیم رسید.

$$k_1 = -a + \varepsilon$$
$$\rightarrow \begin{cases} M_{q_1} = 2k_1 + a = -a + 2\varepsilon \\ M_{q_2} = -ae^{aT}e^{k_1T} = -ae^{\varepsilon T} = -a - a\varepsilon T - \dfrac{a\varepsilon^2T^2}{2} \end{cases}$$
$$\rightarrow M_{q_2} > M_{q_1}$$
$$k_1 = -a - \varepsilon$$
$$\rightarrow \begin{cases} M_{q_1} = 2k_1 + a = -a - 2\varepsilon \\ M_{q_2} = -ae^{aT}e^{k_1T} = -ae^{-\varepsilon T} = -a + a\varepsilon T - \dfrac{a\varepsilon^2T^2}{2} \end{cases}$$
$$\rightarrow M_{q_2} > M_{q_1}$$

بنابراین با توجه به نکته‌ی مطرح‌شده نقطه‌ی $k_1 = -a$ تنها در حالتی که $-aT = 2$ است اکسترمم تابع است چون هم مشتق تابع در آن‌جا صفر است و هم تغییر علامت می‌دهد.

پس دو حالت می‌تواند رخ دهد، یا دو شکل نقطه تقاطع دیگری هم دارند و یا فقط در همین نقطه متقاطع هستند. با توجه به مرتبه اول بودن تابع برحسب $k_1$، حداکثر یک اکسترمم می‌تواند وجود داشته باشد.
وقتی $-aT = 2$ است $k_1 = -a$ تنها اکسترمم آن است. اگر $0 < -aT < 2$ باشد اکسترمم در $k_1$ای بزرگتر از $-a$ رخ می‌دهد و با توجه به علامت مشتق این نقطه یک ماکزیمم است. اما اگر $2 < -aT$ باشد اکسترمم در $k_1$ای کوچکتر از $-a$ رخ داده و این نقطه نیز ماکزیمم است این سه حالت در شکل ۲۴ نشان داده شده است. این شکل براساس مقایسه‌ی انجام شده بین شیب دو نمودار قبل و بعد از $a-$ رسم شده است. بنابراین اثبات شد که به ازای $-aT = 2$ نقطه‌ی ناپیوستگی تابع یعنی $k_1 = -a$ در محل ماکزیمم نمودار قرار می‌گیرد و در غیر این صورت $k_1 = -a$ نقطه‌ی ناپیوستگی نمودار بوده و ماکزیمم در نقطه‌ی دیگری؛ که از حل معادله‌ی غیرخطی (۶) بدست می‌آید؛ وجود خواهد داشت که یا قبل از $k_1 = -a$ قرار دارد و یا بعد از آن.




شکل ۲۴- حالت‌های مختلف تلاقی دو نمودار $-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T}$ و $k_1^2 + ak_1 - \frac{a}{T}$

## ۹- پیوست ج

در این قسمت اکسترمم‌های تابع $f$ به ازای $0 < y(0) < 1$ و $a > 0$ بدست می‌آیند.

$$f = \frac{k_1}{a+k_1}\left(1-e^{-(a+k_1)T}\right) + e^{-(a+k_1)T}y(0)$$

لذا:

$$\frac{df}{dk_1} = \frac{1}{(a+k_1)^2}\Big(a + e^{-(a+k_1)T}\big[-a + aTk_1 + Tk_1^2\big]\Big) - Te^{-(a+k_1)T}y(0) \qquad (۹)$$

با فرض $k_1 \neq -a$ شرط صفر شدن مشتق $f$ به صورت زیر است:

$$k_1^2\big(T - Ty(0)\big) + k_1\big(aT - 2aTy(0)\big) - a(1 + Tay(0)) = -ae^{(a+k_1)T} \qquad (۱۰)$$

با تعریف:

$$\begin{cases} m_1 = k_1^2\big(T - Ty(0)\big) + k_1\big(aT - 2aTy(0)\big) - a(1 + Tay(0) \\ m_2 = -ae^{(a+k_1)T} \end{cases} \qquad (۱۱)$$

نقاط تلاقی $m_1$ با $m_2$، نقاط اکسترمم $f$ هستند. ابتدا علامت ضریب $k_1^2$ در $m_1$ را تعیین می کنیم.

$$0 < y(0) < 1 \to 0 < Ty(0) < T \to -T < -Ty(0) < 0 \to 0 < T - Ty(0) < T$$

بنابراین تقعر سهموی $m_1$ رو به بالا است. مقدار کمینه‌ی این سهموی به ازای $k_1$ای به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{dm_1}{dk_1} = 2k_1\big(T - Ty(0)\big) + aT - 2aTy(0) = 0 \to k_{1-min} = \frac{-a + 2ay(0)}{2\big(1 - y(0)\big)} \qquad (۱۲)$$

به دلیل اینکه $k_1 = -a$ نقطه‌ی مهمی است، خوب است ببینیم $k_1$ بدست آمده نسبت به $-a$ چگونه است.

$$k_{1-min} = \frac{-a + 2ay(0)}{2\big(1 - y(0)\big)} = -a\frac{1 - 2y(0)}{2 - 2y(0)} \xrightarrow{|2-2y(0)|>|1-2y(0)|} \frac{1 - 2y(0)}{2 - 2y(0)} < 1 \to k_{1-min} > -a$$

همچنین مقدار $m_1$ در این بهره برابر است با:

$$=> m_{1-min} = -\frac{a^2T}{4(1 - y(0))} - a$$

همچنین با توجه به مثبت بودن علامت عبارت $\frac{a^2T}{4(1-y(0))}$ مقدار $m_{1-min} < -a$ است.

به ازای $k_1 = -a$ هر دو نمودار $m_1$ و $m_2$ در مقدار $-a$ قرار دارند. لذا دو نمودار در $k_1 = -a$ با یکدیگر تلاقی دارند و این نقطه نقطه‌ی ناپیوستگی تابع $f$ نیز هست.

برای تعیین نحوه‌ی تلاقی دو نمودار و بررسی اکسترمم بودن یا نبودن نقاط تلاقی، مطابق آن‌چه در پیوست ب بیان شد، از شیب دو نمودار قبل و بعد از نقطه‌ی $k_1 = -a$ بهره می‌بریم. شیب نمودار $m_1$ را با $M_{m_1}$ و شیب نمودار $m_2$ را با $M_{m_2}$ نشان می‌دهیم.

لذا:

$$M_{m_1} = 2k_1\big(T - Ty(0)\big) + aT - 2aTy(0)$$
$$M_{m_2} = -aTe^{(a+k_1)T}$$

با فرض اینکه ε مقدار کوچک مثبتی باشد، بهره‌ی کوچکتر از $k_1 = -a$ برابر است با $k_1 = -a - \varepsilon$ و بهره‌ی بزرگتر از آن برابر است با $k_1 = -a + \varepsilon$. لذا:

$$k_1 = -a - \varepsilon \to \begin{cases} M_{m_1} = -aT + 2\varepsilon T(y(0) - 1) \\ M_{m_2} = -aT + \varepsilon T(aT) \end{cases} \qquad (۱۳)$$

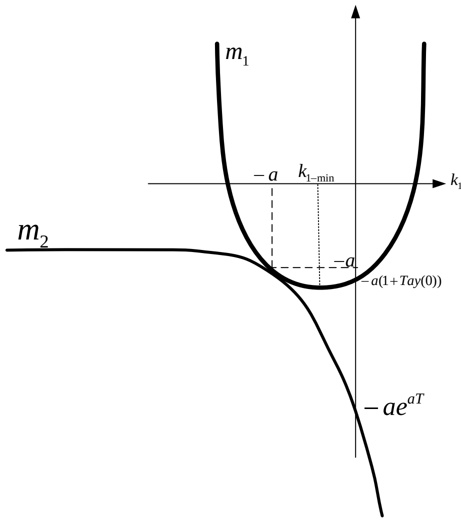
با توجه به اینکه $-aT$ مقداری است منفی و $(y(0) - 1)$ نیز مقداری است منفی، لذا به ازای $k_1 = -a - \varepsilon$، $\left|M_{m_1}\right| > \left|M_{m_2}\right|$ است.

همچنین:

$$k_1 = -a + \varepsilon \to \begin{cases} M_{m_1} = -aT - 2\varepsilon T(y(0) - 1) \\ M_{m_2} = -aT - \varepsilon T(aT) \end{cases} \qquad (۱۴)$$

پس به ازای $k_1 = -a + \varepsilon$، $\left|M_{m_2}\right| > \left|M_{m_1}\right|$ است. پس دو نمودار حتماً به صورت شکل ۲۵ تلاقی دارند.

بنابراین در این حالت تابع $f$ اکسترممی ندارد.




شکل ۲۵- نحوه‌ی تلاقی دو نمودار $m_1$ و $m_2$ به ازای $a > 0$ و $0 < y(0) < 1$

## ۱۰-پیوست د

در این قسمت اکسترمم‌های تابع $f$ به ازای $y(0) > 1$ و $a > 0$ بدست می‌آیند.

$$f = \frac{k_1}{a+k_1}\left(1-e^{-(a+k_1)T}\right)+e^{-(a+k_1)T}y(0)$$

با توجه به پیوست قبل با فرض $k_1 \neq -a$ شرط صفر شدن مشتق $f$ تلاقی دو نمودار $m_1$ و $m_2$ طبق رابطه‌ی (۱۱) است. در حقیقت نقاط تلاقی $m_1$ با $m_2$، می‌توانند نقاط اکسترمم $f$ باشند. ابتدا علامت ضریب $k_1^2$ در $m_1$ را تعیین می‌کنیم.

$$y(0)>1 \rightarrow Ty(0)>T \rightarrow -Ty(0)<-T \rightarrow T-Ty(0)<0$$

بنابراین تقعر سهموی $m_1$ رو به پایین است. مقدار بیشینه این سهموی به ازای $k_1$ای به صورت رابطه‌ی (۱۲) خواهد بود وخوب است ببینیم $k_1$ بدست آمده نسبت به $-a$ چگونه است.

$$\begin{aligned} k_{1-max} &= \frac{-a+2ay(0)}{2\left(1-y(0)\right)} \\ &= -a\frac{1-2y(0)}{2-2y(0)} \\ &\xrightarrow{|2-2y(0)|<|1-2y(0)|} \frac{1-2y(0)}{2-2y(0)}>1 \\ &\rightarrow k_{1-max}<-a \end{aligned}$$

مقدار $m_1$ و $m_2$ به ازای $k_1=-a$ برابر $-a$ است، لذا دو نمودار در این نقطه حتماً تلاقی دارند. ولی بررسی می‌کنیم که آیا $k_1=-a$ نقطه‌ی اکسترمم تابع هست یا خیر. به این منظور مشابه پیوست ج از شیب دو نمودار طبق روابط (۱۳) و (۱۴) بهره می‌بریم. همانطور که مشخص است $2(y(0)-1)$ باید با $aT$ مقایسه شود. لذا:

$$\begin{aligned} &if\ 2(y(0)-1)>aT \\ &\rightarrow \begin{cases} k_1=-a-\varepsilon \rightarrow \left|M_{m_1}\right|<\left|M_{m_2}\right| \\ k_1=-a+\varepsilon \rightarrow \left|M_{m_1}\right|>\left|M_{m_2}\right| \end{cases} \\ &\rightarrow\ -a\ is\ not\ an\ extreme \\ &if\ 2(y(0)-1)<aT \\ &\rightarrow \begin{cases} k_1=-a-\varepsilon \rightarrow \left|M_{m_1}\right|>\left|M_{m_2}\right| \\ k_1=-a+\varepsilon \rightarrow \left|M_{m_1}\right|<\left|M_{m_2}\right| \end{cases} \\ &\rightarrow\ -a\ is\ not\ an\ extreme \end{aligned}$$

بنابراین در دو حالت بالا نقطه‌ی $k_1=-a$ اکسترمم نبوده و باید نقطه‌ی دیگری اکسترمم باشد. در حالتی که $2(y(0)-1)=aT$ است تقریب دو جمله‌ای تابع نمایی کارساز نبوده و از تقریب سه جمله‌ای آن استفاده می‌کنیم. به این ترتیب:

$$\begin{aligned} &if\ 2(y(0)-1)=aT \\ &\rightarrow \begin{cases} k_1=-a-\varepsilon \rightarrow \left|M_{m_1}\right|<\left|M_{m_2}\right| \\ k_1=-a+\varepsilon \rightarrow \left|M_{m_1}\right|<\left|M_{m_2}\right| \end{cases} \\ &\rightarrow\ -a\ is\ an\ extreme \end{aligned}$$

پس تنها در این حالت نقطه‌ی ناپیوستگی نمودار با نقطه‌ی اکسترمم یا مینیمم تابع $f$ برابر خواهد بود. با توجه به مقایسه‌ای که در حالت‌های مختلف، بین شیب دو نمودار قبل و بعد از $k_1=-a$ انجام دادیم دو نمودار $m_1$ و $m_2$ مطابق شکل ۲۶ خواهند بود. توجه داریم که در هر سه حالت همانطور که اثبات شد $k_1$ ای که در آن سهموی به حداکثر مقدار خود می‌رسد همواره از $-a$ کوچکتر است و مکان $k_{1-ext}$ بسته به نوع حالت می‌تواند قبل یا بعد از $k_1=-a$ قرار گیرد.

بنابراین خروجی همواره دارای یک اکسترمم و یک نقطه‌ی ناپیوستگی است و تنها در یک حالت این دو نقطه روی هم قرار می‌گیرند.

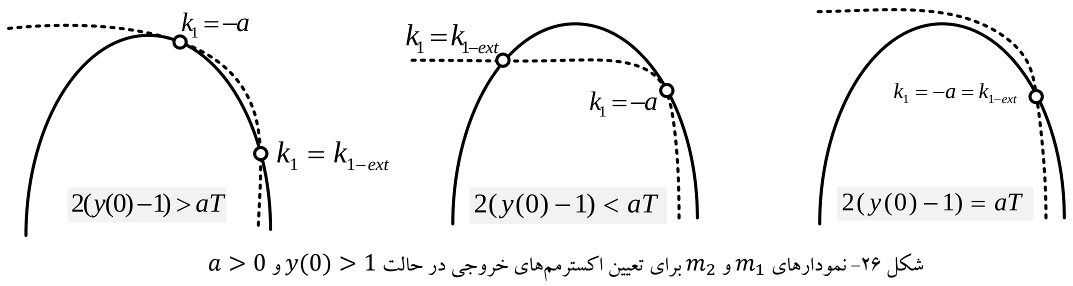
## ۱۱-پیوست ه

در این قسمت اکسترمم‌های تابع $f$ به ازای $1>y(0)>0$ و $a<0$ بدست می‌آیند. مشابه این کار در پیوست ج، البته به ازای $a>0$ انجام شد.

$$f = \frac{k_1}{a+k_1}\left(1-e^{-(a+k_1)T}\right)+e^{-(a+k_1)T}y(0)$$

مشابه پیوست ج با فرض $k_1 \neq -a$ شرط صفر شدن مشتق $f$، تلاقی دو نمودار $m_1$ و $m_2$ موجود در رابطه‌ی (۱۱) است.

ابتدا علامت ضریب $k_1^2$ در $m_1$ را تعیین می‌کنیم.




شکل ۲۶- نمودارهای $m_1$ و $m_2$ برای تعیین اکسترمم‌های خروجی در حالت $y(0)>1$ و $a>0$

$$0<y(0)<1 \rightarrow 0<Ty(0)<T \rightarrow -T<-Ty(0)<0 \rightarrow 0<T-Ty(0)<T$$

بنابراین تقعر سهموی $m_1$ رو به بالا است. مقدار کمینه‌ی این سهموی به ازای $k_1$ای به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{dm_1}{dk_1} = 2k_1\big(T - Ty(0)\big) + aT - 2aTy(0) = 0 \rightarrow k_{1-min} = \frac{-a + 2ay(0)}{2\big(1 - y(0)\big)} \qquad (۱۵)$$

به دلیل اینکه $k_1 = -a$ نقطه‌ی مهمی است، خوب است ببینیم $k_1$ بدست آمده نسبت به $-a$ چگونه است.

$$k_{1-min} = \frac{-a + 2ay(0)}{2\big(1 - y(0)\big)} = -a\frac{1 - 2y(0)}{2 - 2y(0)} \xrightarrow{|2-2y(0)|>|1-2y(0)|} \frac{1 - 2y(0)}{2 - 2y(0)} < 1 \rightarrow k_{1-min} < -a$$

همچنین مقدار $m_1$ در این بهره برابر است با:

$$=> m_{1-min} = -\frac{a^2T}{4\big(1 - y(0)\big)} - a$$

همچنین با توجه به مثبت بودن علامت عبارت $\frac{a^2T}{4(1-y(0))}$ مقدار $m_{1-min} < -a$ است.

هر دو نمودار $m_1$ و $m_2$ به ازای $k_1 = -a$ در مقدار $-a$ قرار دارند. برای رسم این دو نمودار از مقایسه‌ی شیب آن‌ها طبق روابط (۱۳) و (۱۴) قبل و بعد از نقطه‌ی $k_1 = -a$ بهره می‌بریم. همچنین با این مقایسه تعیین می‌شود که آیا $k_1 = -a$ علاوه بر اینکه نقطه‌ی ناپیوستگی تابع است آیا نقطه‌ی اکسترمم آن نیز هست یا خیر.

همانطور که مشخص است $2(y(0) - 1)$ باید با $aT$ مقایسه شود. لذا:

$$if\ 2(y(0) - 1) > aT \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| > |M_{m_2}| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \end{cases} \rightarrow\ -a\ is\ not\ an\ extreme$$

$$if\ 2(y(0) - 1) < aT \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| > |M_{m_2}| \end{cases} \rightarrow\ -a\ is\ not\ an\ extreme$$

بنابراین در دو حالت بالا نقطه‌ی $k_1 = -a$ اکسترمم نبوده و باید نقطه‌ی دیگری اکسترمم باشد. در حالتی که $2(y(0) - 1) = aT$ است تقریب دو جمله‌ای تابع نمایی کارساز نبوده و از تقریب سه جمله‌ای آن استفاده می کنیم.

به این ترتیب:

$$if\ 2(y(0) - 1) = aT \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \end{cases} \rightarrow\ -a\ is\ an\ extreme$$

پس تنها در این حالت نقطه‌ی ناپیوستگی نمودار با نقطه‌ی اکسترمم یا ماکزیمم تابع اصلی برابر خواهد بود. به این ترتیب دو نمودار $m_1$ و $m_2$ به صورت شکل ۲۷ خواهند بود.

لذا خروجی همواره دارای یک اکسترمم و یک نقطه‌ی ناپیوستگی است و اگر $2(y(0) - 1) = aT$ باشد این دو نقطه یکی خواهند شد.

## ۱۲-پیوست ی

در این قسمت اکسترمم‌های تابع $f$ به ازای $y(0) > 1$ و $a < 0$ بدست می‌آیند. به این منظوراز تلاقی دو تابعی که در رابطه‌ی (۱۱) تحت عنوان $m_1$ و $m_2$ معرفی شدند، استفاده می‌شود. با توجه به منفی بودن $T - Ty(0)$ تقعر سهموی $m_1$ رو به پایین است. البته $k_{1-max} > -a$ است و مقدار $m_1$ در این بهره حتماً مقدار مثبتی دارد:

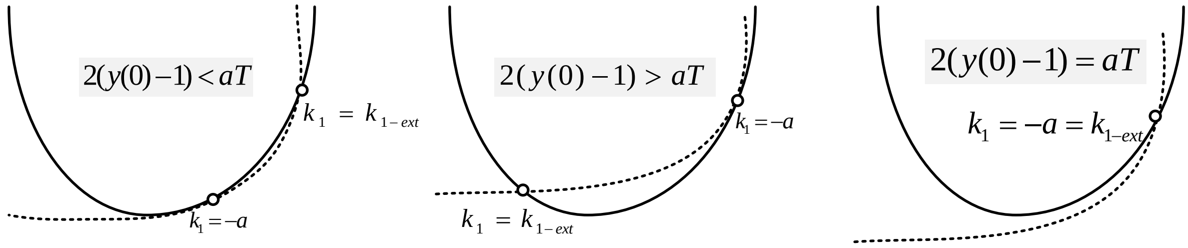
$$=> m_{1-max} = -\frac{a^2T}{4\big(1 - y(0)\big)} - a \rightarrow m_{1-max} > 0$$

همچنین:

$$if\ k_1 = -a \rightarrow \begin{cases} m_1 = -a \\ m_2 = -a \end{cases}$$

$$if\ k_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1 = -a(1 + Tay(0)) \\ m_2 = -ae^{aT} \end{cases}$$

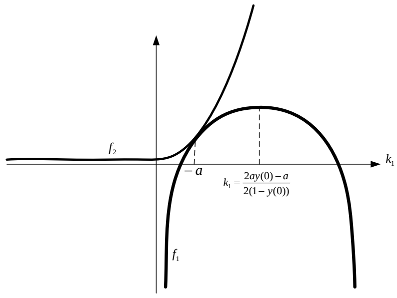
$$if\ k_1 \rightarrow -\infty \rightarrow \begin{cases} m_1 \rightarrow -\infty \\ m_2 \rightarrow 0 \end{cases}$$




شکل ۲۷- نحوه‌ی تلاقی دو نمودار $m_1$ و $m_2$ به ازای $a < 0$ و $0 < y(0) < 1$

برای رسم نمودار $m_1$ و $m_2$ از شیب دو نمودار قبل و بعد از $k_1 = -a$ مطابق روابط (۱۳) و (۱۴) بهره می‌بریم. مشابه قبل $2(y(0) - 1)$ باید با $aT$ مقایسه شود. با توجه به اینکه $2(y(0) - 1)$ مقدار مثبتی است و $aT$ مقداری است منفی، پس همواره $2(y(0) - 1) > aT$ است. به این ترتیب:

$$
\begin{aligned}
&if\ 2(y(0)-1) > aT \\
&\rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow \left|M_{m_1}\right| > \left|M_{m_2}\right| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow \left|M_{m_1}\right| < \left|M_{m_2}\right| \end{cases} \\
&\rightarrow\ -a\ is\ not\ an\ extreme
\end{aligned}
$$




شکل ۲۸- نمودارهای $m_1$ و $m_2$ تنها با یک تلاقی برای حالتی که $y(0) > 1$ و $a < 0$

بنابراین در حالت بالا نقطه‌ی $k_1 = -a$ اکسترمم نبوده و باید نقطه‌ی دیگری اکسترمم باشد با توجه به شیب نمودارها مطابق شکل ۲۸ امکان ندارد اکسترممی وجود داشته باشد.

## ۱۳-مراجع

[1] Åström, K.J. and Hägglund, T. “The future of PID control”, Control Engineering Practice, Vol. 9, pp. 1163–1175, 2001.

[2] Wenge, Lv., Deyuan, Li., Cheng, Luo, S., Zhang, X. and Zhang, L., “Research on PID control parameters tuning based on election-survey optimization algorithm”, in Proceedings International Conference on Computing, Control and Industrial Engineering (CCIE), pp. 323–326, 2010.

[۳] خانم آرمیتا فاطمی مقدم، آرش شریفی، محمد تشنه لب. " شناسایی و پیش بینی سیستم غیرخطی کوره دوار سیمان با استفاده از شبکه عصبی – فازی و انتخاب ورودی ها به کمک الگوریتم ژنتیک". مجله کنترل، جلد ۵، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۰، صفحه ۲۲–۳۳.

[4] Yolanda Bolea, Vicenç Puig, Joaquim Blesa,"Gain-Scheduled Smith PID Controllers for LPV First Order plus Time Varying Delay Systems". Automatic Control Department, Technical University of Catalonia (UPC), Pau Gargallo 5, 08028 Barcelona, Spain.

[۵] علی فیاضی، حسین احمدی نوبری، حسن فاتحی مرج." همزمان سازی سیستم های مرتبه کسری آشوبی جنسیو تسی و کولت با استفاده از کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری". مجله کنترل، جلد ۵، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۰، صفحه ۱–۱۱.

[6] Cominos, P. and Munro, N., “PID controllers: recent tuning methods and design to specification”, IEE Proceedings– Control Theory and Applications, Vol. 149, pp. 46–53, 2002.

[7] Åström, K.J. and Hägglund, T., PID Controllers: Theory, Design and Tuning, 2nd edn. Research Instrument Society of America, Triangle Park, North Carolina, USA, 1995.

[8] Shabnam Armaghan, Arefeh Moridi and Ali Khaki Sedigh," Design of a Switching PID Controller for a Magnetically Actuated Mass Spring Damper". Proceedings of the World Congress on Engineering 2011 Vol III WCE 2011, July 6 - 8, 2011, London, U.K.

[۹] ایمان غفاری ، عبدالمجید خوشنود، جعفر روشنی یان. " کنترل تطبیقی مدل - مرجع یک ماهواره بر انعطاف پذیر با جرم محموله سنگین". مجله کنترل، جلد ۴، شماره ۴، زمستان ۱۳۸۹، صفحه ۳۲–۳۸.

[10] Saranya, M. and Pamela, D., “A real time IMC tuned PID controller for DC motor”, International Journal of Recent Technology and Engineering, Vol. 1, pp. 65–70, April 2012.

[11] Isin Erenoglu, Ibrahim Eksin, Engin Yesil, Mujde Guzelkaya," AN INTELLIGENT HYBRID FUZZY PID CONTROLLER". Proceedings 20th European Conference on Modelling and Simulation Wolfgang Borutzky, Alessandra Orsoni, Richard Zobel © ECMS, 2006.ISBN 0-9553018-0-7 / ISBN 0-9553018-1-5 (CD).