

## کنترل فیدبک خروجی فازی تطبیقی برای کلاسی از سیستم های چند ورودی چند خروجی غیرخطی و غیرقطعی

رضا شهنازی<sup>۱</sup>، ناصر پرز<sup>۲</sup>، علی وحیدیان کامیاد<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده برق و رباتیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شاهرود، shahnazi@ieee.org

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

<sup>۳</sup> استاده، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد، avkamyad@yahoo.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۹/۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۸/۱۱/۱)

**چکیده:** در این مقاله یک کنترل فیدبک خروجی فازی تطبیقی تعقیب کننده مدل برای کلاسی از سیستم های غیرخطی و غیرقطعی چند ورودی چند خروجی پیشنهاد شده است. توابع برداری غیرخطی نامعلوم، توسط سیستم های فازی براساس خاصیت تقریب گری عمومی تقریب زده می شوند، که در آنها قسمتهای مقدم و تالی قوانین فازی توسط روش های تطبیقی تنظیم می شوند. این امر اطلاعات اولیه و تعداد قوانین فازی برای طراحی سیستم های فازی را به طور موثر کاهش می دهد. در بسیاری از مسائل کاربردی حالت های سیستم تحت کنترل در دسترس نمی باشند، کنترل کننده پیشنهادی نیازی به حالت های سیستم نداشته و آنها را توسط یک رویت گر تخمین می زند. برای مقابله با عدم قطعیت های ناشی از خطای تقریب فازی و اغتشاش های خارجی از یک ساختار مقاوم با بهره تطبیقی استفاده می گردد که به دلیل تطبیقی بودن بهره، نه تنها نیازی به دانستن کران این عدم قطعیت ها نیست بلکه پدیده چترینگ نیز به صورت کارآمد کاهش می یابد. تمامی قوانین تطبیقی از روش طراحی لیپانوف استخراج می شوند، در نتیجه پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته نیز تضمین می گردد. کنترل کننده پیشنهادی به سیستم آشوبی چن همراه با دینامیک غیرقطعی و همچنین اغتشاش های خارجی اعمال می شود. تحلیل شبیه سازیها کارایی کنترل کننده پیشنهادی را در مقابله با عدم قطعیتها با تضمین پایداری مجانبی نشان می دهد.

**کلمات کلیدی:** کنترل غیرخطی، تقریب گر فازی، کنترل تطبیقی، عدم قطعیت، اغتشاش های خارجی.

### Observer-based Adaptive Fuzzy Control Scheme for a Class of MIMO Uncertain Nonlinear Systems

Reza Shahnazi, Naser Pariz, Ali Vahidian Kamyad

**Abstract:** An output feedback adaptive fuzzy model following controller is proposed for a class of MIMO nonlinear uncertain systems. The unknown nonlinear functions are approximated by fuzzy systems based on universal approximation theorem, where both the premise and the consequent parts of the fuzzy rules are tuned with adaptive schemes. Thus prior knowledge and the number of fuzzy rules for designing fuzzy systems are decreased effectively. In practical situations the states of the nonlinear systems are fully or partially not known, the proposed approach does not need the availability of the states and uses an observer to estimate the states. To cope with fuzzy approximation error and external disturbances an adaptive discontinuous structure is used to make the controller more robust, while due to adaptive mechanism attenuates chattering effectively. All the adaptive gains are derived via Lyapunov approach thus asymptotic stability of the closed-loop system is guaranteed. The approach is applied to stabilize the Chen's chaotic system with uncertain dynamics and amid significant disturbances. Analysis of simulations reveals the effectiveness of the proposed method in terms of coping well with the uncertainties while maintaining asymptotic convergence.

**Keywords:** Nonlinear control, Fuzzy approximator, Adaptive control, Uncertainty, External disturbances.

## ۱- مقدمه

کنترل سیستم های غیرخطی و غیرقطعی در طول دهه های گذشته در دو بعد تئوری و کاربردی مورد تحقیق و توسعه قرار گرفته و هنوز از مسائل چالش برانگیز و مهم دنیای کنترل می باشد. زیرا به دلیل حضور عدم قطعیت ها و تغییرات در پارامترها که در سیستم های واقعی و کاربردی اجتناب ناپذیر است روش های مرسوم کنترلی مانند خطی سازی فیدبکی پاسخگو نمی باشند [۱]، [۲].

بنابراین با ترکیب کنترل کننده های مقاوم، تطبیقی و منطق فازی روش هایی جهت طراحی کنترل کننده برای سیستم های غیرخطی با درجه بالای غیرخطیگری و عدم قطعیت ارائه گردید. در کنترل کننده های فازی تطبیقی ارائه شده [۳]-[۷]، بردار مراکز توابع تعلق خروجی قوانین فازی به عنوان پارامتر آزاد در نظر گرفته شده و توسط یک قانون تطبیق، تخمین زده می شوند. در حالی که توابع تعلق ورودی، باید با تشخیص طراح انتخاب شوند. این مسئله معمولاً باعث افزایش تعداد قواعد فازی گردیده و مانع از ایجاد یک کنترل کننده فازی تطبیقی کاملاً سیستماتیک می گردد. در [۸]-[۱۰] بر اساس بسط تیلور توابع پایه ای فازی روش هایی برای تعیین سیستماتیک توابع تعلق ورودی ارائه گردید. برای اولین بار هان و همکاران [۸] یک کنترل فازی تطبیقی مد لغزشی ارائه داده اند که پارامترهای توابع تعلق ورودی و خروجی به وسیله قواعد تطبیقی که از یک تابع لیاپانوف استخراج می گردند، تخمین زده می شوند. ولی در روش آن ها پایداری مجانبی تضمین نشده و منجر به خطای حالت دائمی می گردد. اخیراً، لین و هسو [۹] یک روش نوین طراحی کنترل فازی تطبیقی مد لغزشی برای کنترل یک سرو موتور به گونه ای ارائه داده اند که هم پارامترهای توابع تعلق ورودی و هم خروجی به وسیله قواعد تطبیقی که از یک تابع لیاپانوف استخراج می گردند، تخمین زده می شوند و نیازی به تعیین آن ها توسط طراح نیست و همچنین به بهای داشتن کنترل ناپیوسته دارای پایداری مجانبی است. ولی روش آن ها فقط برای یک سیستم سرو موتور خاص قابل اجرا می باشد. شهنازی و همکاران [۱۰] یک روش کنترل نوین فازی تطبیقی مستقیم مد لغزشی را برای کلاسی از سروموتورهای با جریان مستقیم و القایی ارائه داده اند که هم پارامترهای توابع تعلق ورودی و هم خروجی به وسیله قواعد تطبیقی که از یک تابع لیاپانوف استخراج می گردند، تخمین زده می شوند و در آن از یک کنترل کننده تناسبی-انگترالی تطبیقی برای افزایش قوام که پایداری مجانبی را نیز تضمین می کند استفاده شده است.

کارهای انجام شده فوق برای سیستماتیک کردن کامل قوانین فازی با فرض در دسترس بودن کامل تمامی حالت های سیستم، بیان گردیده اند. همانطور که می دانیم فرض دانستن حالت ها در عمل یک فرض دور از واقعیت می باشد زیرا حالت ها یا قابل اندازه گیری نبوده و یا سنسورها و ترانسدویوسرها بسیار پرهزینه می باشند. بنابراین باید با طراحی یک رؤیت گر حالت ها را تخمین زد. در این صورت چون تمامی مشخصه های خطا در دسترس نمی باشند روش های مرسوم کنترل تطبیقی را نمی توان برای مسائل ردیابی استفاده نمود. در این راستا و با طراحی رؤیت گرهای کنترل کننده های فازی تطبیقی متنوعی ارائه شده اند که از جمله مهمترین آن ها می توان به [۱۱]-[۱۴] اشاره کرد. در [۱۱] لی و تانگ ترکیبی از روش های مستقیم و غیرمستقیم تطبیقی را برای یک کلاس از سیستم های غیرخطی در جهت ردیابی مطلوب بدون نیاز به حالت ها را ارائه داده اند. در [۱۲] تانگ و همکاران یک کنترل کننده فازی تطبیقی بر اساس رؤیت گر برای کلاس مطرح شده در [۱۱] را پیشنهاد دادند که مشکل تکینی کنترل کننده های مرسوم را ندارد. هوا و همکاران در [۱۳] یک کنترل کننده فازی تطبیقی را برای یک کلاس از سیستم های آشوبی بدون عدم قطعیت مدل کردن و با فرض لپ شیتز بودن قسمت غیرخطی ارائه داده اند. شهنازی و خالوزاده در [۱۴] برای کلاس [۱۳] با وجود اغتشاش کراندار یک کنترل کننده تطبیقی پیشنهاد داده اند که نیازی به دانستن کران اغتشاش ندارد اما شرط لپ شیتز برای قسمت غیرخطی باید وجود داشته باشد.

در این مقاله، یک کنترل کننده فازی کاملاً تطبیقی برای کلاسی از سیستم های چند ورودی چند خروجی غیرخطی و غیرقطعی در حضور اغتشاش های خارجی ناگهانی و نامعلوم ارائه می گردد. سیستم های غیرخطی مورد بحث در این مقاله کلاس وسیعتری از سیستم های مطرح شده در [۱۴] را در برمی گیرند که شرط لپ شیتز را برای قسمتهای غیرخطی نیاز ندارند. کنترل کننده باید به گونه ای طراحی شود که سیستم تحت کنترل حالت های یک سیستم مطلوب را ردیابی نماید. کنترل پیشنهادی حالت های سیستم تحت کنترل را نیاز ندارد و آنها را توسط یک رؤیت گر تخمین می زند. توابع نامعلوم مدل توسط سیستم های فازی بر اساس قضیه تقریب گری عمومی به گونه ای که هم قسمت مقدم و هم قسمت تالی قوانین فازی تطبیق گردند تقریب زده می شوند. بنابراین نیاز طراح به داشتن دانش نسبت به مدل و همچنین قوانین فازی کاهش می یابند. برای افزایش قوام از یک ساختار ناپیوسته تطبیقی استفاده می گردد، که به دلیل تطبیقی بودن باعث کاهش

فرض کنید  $x_d = [x_{d1}, \dots, x_{dn}]^T$  حالت های کراندار مطلوب (به عبارت دیگر عدد مثبت  $b_d > 0$  وجود دارد به گونه ای که  $\|x_d\| \leq b_d$ ،  $e = x - x_d = [e_1, \dots, e_n]^T$ ، خطای ردیابی و  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  تخمین حالت ها باشند. قرار می دهیم  $\hat{e} = \hat{x} - x_d$ ،  $\hat{y} = [\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_p]^T = C\hat{x}$  و  $\bar{e} = e - \hat{e}$ . هدف کنترلی عبارتست از تمامی سیگنال ها کراندار بوده و

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

باشد.

**۲-۲- شبکه های تابع پایه ای فازی**

یک سیستم فازی در اصل یک نگاشت از  $\mathbb{R}^n \subset U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  به  $V \subset \mathbb{R}$  می باشد [۱۵]- [۱۷]. هر سیستم فازی از یک فازی ساز، پایگاه قواعد فازی، موتور استنتاج فازی و غیر فازی ساز تشکیل شده است. پایگاه قواعد فازی شامل مجموعه ای از قوانین اگر-آنگاه فازی به صورت زیر می باشد:

$$R^{(l)}: IF \ x_1 \ is \ F_1^l \ and \ \dots \ and \ x_n \ is \ F_n^l$$

$$THEN \ y \ is \ G^l, \ l = 1, \dots, M \quad (۵)$$

که  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in U$  و  $y \in V$  به ترتیب ورودی و خروجی سیستم فازی می باشند.  $G^l$  و  $F_i^l$  مجموعه های فازی در  $U_i$  و  $V$  بوده و  $l = 1, \dots, M$  تعداد قواعد اگر-آنگاه فازی است. یک موتور استنتاج فازی بر اساس ترکیب قواعد اگر-آنگاه فازی در مجموعه پایگاه فازی دراصل نگاشتی از مجموعه های فازی در  $U$  به مجموعه های فازی در  $V$  می باشد. همچنین یک فازی ساز در اصل نگاشتی از یک بردار اعداد حقیقی  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in U$  به یک مجموعه فازی  $A_x$  در  $U$  بوده و غیر فازی ساز نگاشتی از یک مجموعه فازی  $B$  در  $V$  به یک عدد حقیقی  $y$  در  $V$  است. سیستم های فازی با پایگاه قوانین فازی (۵)، موتوراستنتاج فازی ضربی (استلزام ممدانی و  $t$ -norm ضربی)، فازی ساز منفرد و غیرفازی ساز میانگین مرکز جرم را در نظر بگیرد. می توان نشان داد خروجی چنین سیستم فازی به صورت زیر می باشد:

$$\xi^T(x)W \ y = \frac{\sum_{l=1}^M W_l \left( \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^M \left( \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right)} = \quad (۶)$$

که در آن  $W = [W_1, W_2, \dots, W_M]^T \in \mathbb{R}^M$  بردار مراکز توابع تعلق خروجی،  $F_i^l$  و  $G^l$  مجموعه های فازی متناظر با توابع تعلق  $\mu_{F_i^l}(x_i)$  و  $\mu_{G^l}(y)$  بوده و  $\xi(x) = [\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_M(x)]^T \in \mathbb{R}^M$  بردار توابع پایه ای فازی به صورت زیر می باشد:

$$\xi_l(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^M \left( \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right)}, \quad l = 1, \dots, M \quad (۷)$$

از آنجایی که در این مقاله هدف استفاده از سیستم های فازی برای تقریب توابع مورد نیاز می باشد، غیر فازی ساز را به صورت مجموع

چترینگ به صورت مؤثر می گردد. در مورد اغتشاش های خارجی کنترل کننده پیشنهادی فقط فرض وجود یک کران برای اغتشاش را لازم دارد در حالی که دانستن مقدار این کران ضرورتی ندارد. این مقاله از این پس به صورت زیر ساختار بندی شده است: در قسمت ۲ به تعریف مسئله، بیان مفروضات و توصیف شبکه های تابع پایه ای فازی و قضیه تقریب گری عمومی می پردازیم. کنترل کننده پیشنهادی در قسمت ۳ ارائه گردیده و تحلیل پایداری مجانبی آن در قسمت ۴ مورد بررسی قرار گرفته است. برای نشان دادن کارایی کنترل کننده پیشنهادی در قسمت ۵ آن را به سیستم آشوبی چن همراه با عدم قطعیت و اغتشاش های نامعلوم و ناگهانی اعمال می کنیم. در نهایت قسمت ۶ به نتیجه گیری و پیشنهادات می پردازد.

**۲- تعریف مسئله، شبکه های تابع پایه ای فازی**

**۲-۱- تعریف مسئله**

کلاس سیستم های غیرخطی و غیر قطعی چند ورودی چند خروجی زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + B(f(x) + u + d(t, x)) \quad (۱)$$

$$y = Cx$$

که  $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]^T$  بردار توابع غیرخطی و نامعلوم،  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  حالت های سیستم،  $u = [u_1, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$  و  $y = [y_1, \dots, y_m]^T \in \mathbb{R}^m$  به ترتیب بردار ورودی و خروجی می باشند.  $A, B, C$  ماتریس هایی با بعد مناسب هستند.  $\Delta A(t)$  عدم قطعیت مربوط به تغییرات پارامتری بوده که شرایط سازگاری را برآورده می سازد. به عبارت دیگر تابع پیوسته کراندار  $E_A(t)$  چنان وجود دارد که  $\Delta A(t) = BE_A(t)$  و  $d(t, x) = [d_1(t, x), \dots, d_m(t, x)]^T$  نامعلوم است. مفروضات زیر را در نظر می گیریم:

**فرض ۱.** ماتریس  $L$  و ماتریس های مثبت معین  $P_1$  و  $Q_1$  چنان وجود دارند که:

$$P_1(A - LC) + (A - LC)^T P_1 = -Q_1 \quad (۲)$$

$$B^T P_1 = C \quad (۳)$$

از معادلات (۲) و (۳) مشخص می شود که ماتریس تبدیل  $(A - LC, B, C)$  یک سیستم اکیداً حقیقی مثبت (SPR) را توصیف می کند.

**فرض ۲.** ماتریس  $K$  و ماتریس های مثبت معین  $P_2$  و  $Q_2$  چنان وجود دارند که:

$$P_2(A - BK) + (A - BK)^T P_2 = -Q_2 \quad (۴)$$

از معادله (۴) می توان نتیجه گرفت که  $(A, B)$  کنترل پذیر است.

### ۳- قانون کنترل پیشنهادی

با توجه به شرط سازگاری برای  $\Delta A(t)$ ، سیستم غیرخطی (۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(x) + BE_A(t)x(t) + Bu + Bd(t, x) \quad (11)$$

$$y = Cx.$$

با نامگذاری  $\bar{d}(t, x) = E_A(t)x(t) + d(t, x)$  داریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(f(x) + u + \bar{d}(t, x)) \quad (12)$$

$$y = Cx.$$

**فرض ۳.** در این اینجا فرض می شود که شبکه های تابع پایه ای فازی مانند معادله (۹) توانایی تقریب گری عمومی را در مجموعه فشرده  $U_x$  دارا می باشند، که  $U_x$  به اندازه کافی بزرگ بوده به گونه ای که حالت های سیستم از آن خارج نشوند.

از تعریف مسئله، به دلیل کراندار بودن توابع برداری  $E_A(t)$  و  $d(t, x)$  و بر اساس فرض ۳، می توان نتیجه گرفت که تابع برداری  $\bar{d}(t, x)$  کراندار می باشد، به عبارت دیگر عدد مثبت نامعلوم  $\bar{D}$  وجود دارد به طوری که  $\|\bar{d}(t, x)\| \leq \bar{D}$ . از آنجایی که تابع برداری  $f(x)$  نامعلوم است برای تخمین آن از  $m$  شبکه تابع پایه ای فازی با پارامترهای آزاد  $\hat{W}$ ،  $\hat{\omega}$  و  $\hat{c}$  به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\hat{f}(x, \hat{W}, \hat{\omega}, \hat{c}) = [\hat{f}_1(x, \hat{W}_1, \hat{\omega}_1, \hat{c}_1), \dots, \hat{f}_m(x, \hat{W}_m, \hat{\omega}_m, \hat{c}_m)] \quad (13)$$

$$= \Phi(x, \hat{\omega}, \hat{c})\hat{W}$$

که در آن

$$\hat{W} = [\hat{W}_1^T, \dots, \hat{W}_m^T]^T \quad (14)$$

$$\Phi(x, \hat{\omega}, \hat{c}) = \text{diag}[\xi_1^T(x, \hat{\omega}_1, \hat{c}_1), \dots, \xi_m^T(x, \hat{\omega}_m, \hat{c}_m)]$$

و  $\hat{\omega}_i^T = [\hat{\omega}_{i1}^T, \dots, \hat{\omega}_{im}^T]$ ،  $\hat{\omega} = [\hat{\omega}_1^T, \dots, \hat{\omega}_m^T]^T$ ،  $\hat{W}_i^T = [\hat{W}_{i1}, \dots, \hat{W}_{im}]$ ،  $\hat{c}_i^T = [\hat{c}_{i1}^T, \dots, \hat{c}_{im}^T]$ ،  $\hat{c} = [\hat{c}_1^T, \dots, \hat{c}_m^T]^T$ ،  $\hat{\omega}_{il} = [\hat{\omega}_{il}^1, \dots, \hat{\omega}_{il}^n]^T$ ،  $\hat{c}_{il}^T = [\hat{c}_{il}^1, \dots, \hat{c}_{il}^n]^T$ ،  $\xi_{il}^T = [\xi_{il1}, \dots, \xi_{ilm}]$ ،  $\hat{c}_{il} = [\hat{c}_{il1}, \dots, \hat{c}_{iln}]^T$  به صورت (۸) با توابع گوسی بوده و  $M$  تعداد قوانین فازی بر اساس (۵) برای هر مولفه  $f(x)$  می باشند. فرض می کنیم که حالت های مطلوب از مدل مرجع زیر حاصل گردند:

$$\dot{x}_d = A_m x_d + B_m r \quad (15)$$

که در آن،  $x_d$  حالت های مطلوب،  $r \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  سیگنال فرمان و کراندار و  $A_m$ ،  $B_m$  ماتریس های معلوم با بعد مناسب می باشند. ماتریس های  $B_m$ ،  $A_m$ ،  $G$  و  $R$  باید به گونه ای انتخاب شوند که

$$A_m - A = B(G - K) \quad (16)$$

$$B_m = BR$$

به عبارت دیگر باید ستون های ماتریس های  $(A - BK)$  و  $A_m - A$  و  $B_m$  ترکیب خطی از ستون های ماتریس  $B$  باشند. از طرفی اگر

وزنی خروجی هر قانون در نظر می گیریم. بنابراین (۶) را به صورت زیر می توان نوشت [۱۵]-[۱۷]:

$$\xi_l(X) = \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i), \quad l = 1, \dots, M \quad (8)$$

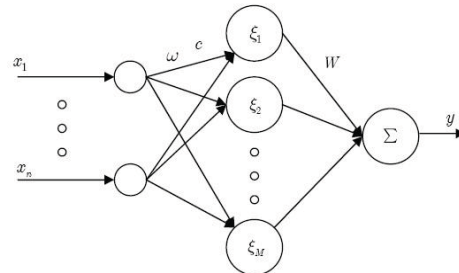
در این حالت شکل توابع تعلق ورودی را به صورت توابع گوسی به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$\mu_{F_i^l}(x_i) = e^{-\omega_i^l(x_i - c_i^l)^2}$$

که در آن  $c_i^l$  و  $\omega_i^l$  به ترتیب مرکز و معکوس پراکنندگی توابع تعلق گوسی هستند. بنابراین ساختار این سیستم فازی (با غیر فازی ساز در بالا) را می توان به صورت ساختار یک شبکه با سه لایه به فرم شکل ۱ نمایش داد. به این ساختار شبکه تابع پایه ای فازی می گویند. بنابراین خروجی شبکه تابع پایه ای فازی نشان داده شده در شکل ۱ به صورت زیر می باشد:

$$y(X, c, \omega, W) = \xi^T(X, c, \omega)W \quad (9)$$

که  $c = [c_1^T, c_2^T, \dots, c_M^T]^T \in \mathbb{R}^{nM}$ ،  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ،  $\omega = [\omega_1^T, \omega_2^T, \dots, \omega_M^T]^T \in \mathbb{R}^{nM}$ ،  $c_l = [c_l^1, c_l^2, \dots, c_l^n]^T \in \mathbb{R}^n$  و  $W = [W_1, W_2, \dots, W_M]^T$ ،  $\omega_l = [\omega_l^1, \omega_l^2, \dots, \omega_l^n]^T \in \mathbb{R}^n$  و  $\xi_l = e^{-\sum_{i=1}^n \omega_i^l(x_i - c_i^l)^2}$  که  $\xi(X, c, \omega) = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$



شکل ۱: شبکه تابع پایه ای فازی

قضیه اثبات شده زیر را در نظر می گیریم [۱۵]-[۱۷]:

**قضیه ۱. (تقریب گری عمومی شبکه های تابع پایه ای فازی).** برای هر تابع حقیقی پیوسته داده شده  $g(X)$  تعریف شده بر  $U \subset \mathbb{R}^n$  با  $U$  یک مجموعه فشرده و برای هر  $\varepsilon > 0$  دلخواه یک شبکه تابع پایه ای فازی  $f^*(X) = \xi^T(X, c^*, \omega^*)W^*$  به صورت (۹) وجود دارد به نحوی که

$$\sup_{X \in U} |f^*(X) - g(X)| < \varepsilon \quad (10)$$

بدین معنی که شبکه های تابع پایه ای فازی به صورت (۹) خاصیت تقریب گری عمومی دارند و می توانند هر تابع غیرخطی پیوسته را با هر میزان دقت تقریب بزنند.

بنابراین با استفاده از (۱۹) و با تعریف  

$$\varepsilon_i = (\omega_i^T \Lambda_i^T + c_i^* \Omega_i^T) \tilde{W}_i + (\tilde{e}^T \Gamma_i^T + h_i^T) W_i^* + \Delta_i$$
 را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f_i(x) - \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{W}_i, \hat{\omega}_i, \hat{c}_i) = (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^* \Omega_i^T) \tilde{W}_i + (\hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T + \hat{c}_i^* \Omega_i^T) \hat{W}_i + \varepsilon_i \quad (۲۳)$$

از آنجایی که در (۲۳) هر جمله اسکالر است می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$f_i(x) - \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{W}_i, \hat{\omega}_i, \hat{c}_i) = \hat{\xi}_i^T \tilde{W}_i - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T \tilde{W}_i - \hat{c}_i^* \Omega_i^T \tilde{W}_i + \hat{W}_i^T \Lambda_i \hat{\omega}_i + \hat{W}_i^T \Omega_i \hat{c}_i + \varepsilon_i \quad (۲۴)$$

بنابراین

$$f(x) - \hat{f}(\hat{x}, \hat{W}, \hat{\omega}, \hat{c}) = (\Phi(\hat{x}, \hat{\omega}, \hat{c}) - \Theta_1) \tilde{W} + \Theta_2 \tilde{\omega} + \Theta_3 \tilde{c} + \varepsilon \quad (۲۵)$$

که در آن  $\Theta_1 = \text{diag}[\hat{\omega}_1^T \Lambda_1^T + \hat{c}_1^* \Omega_1^T, \dots, \hat{\omega}_m^T \Lambda_m^T + \hat{c}_m^* \Omega_m^T]$ ،  $\Theta_2 = \text{diag}[\hat{W}_1^T \Lambda_1, \dots, \hat{W}_m^T \Lambda_m]$ ،  $\Theta_3 = \text{diag}[\hat{W}_1^T \Omega_1, \dots, \hat{W}_m^T \Omega_m]$ ،  $\tilde{W} = W^* - \hat{W}$  و  $\tilde{c} = c^* - \hat{c}$ ،  $\tilde{\omega} = \omega^* - \hat{\omega}$ ،  $\tilde{W} = W^* - \hat{W}$  برای تخمین حالت ها از رویت گر زیر استفاده می کنیم:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - BK)\hat{x}(t) + BGx_d + BRr + LC\tilde{e}, \quad (۲۶)$$

که در آن  $\hat{x} \in U_{\hat{x}}$  تخمین  $x$  که  $U_x \subset U_{\hat{x}}$  و  $L$  ماتریسی است که فرض ۱ را ارضا می نماید. با کم کردن (۲۶) از (۱۵) و استفاده از (۱۶):

$$\dot{\hat{e}} = \dot{\hat{x}} - \dot{x}_d = (A - BK)\hat{x} + BGx_d - A_m x_d + LC\tilde{e}.$$

با اضافه و کم کردن جمله  $(A - BK)x_d$  به معادله بالا و استفاده از (۱۶) داریم:

$$\dot{\hat{e}} = (A - BK)\hat{e} + \{(A - A_m) + B(G - K)\}x_d + LC\tilde{e} \quad (۲۷)$$

$$= (A - BK)\hat{e} + LC\tilde{e}.$$

قانون کنترلی زیر را پیشنهاد می کنیم:

$$u = -K\hat{x} - \hat{f}(\hat{x}, \hat{W}, \hat{\omega}, \hat{c}) + Gx_d + Rr - u_c - u_a, \quad (۲۸)$$

که در آن  $u_c$  ساختار کنترل ریاست به فرم زیر می باشد:

$$u_c = [u_{c1}, \dots, u_{cm}]^T \quad (۲۹)$$

ستون های ماتریس های  $B$  و  $B_m$  مستقل خطی باشند که در عمل به علت عدم وجود ورودی تکراری بدیهی است، می توان ماتریس های  $G$  و  $R$  را به صورت زیر بدست آورد:

$$G = (B^T B)^{-1} B^T (A_m - (A - BK)) = (B_m^T B)^{-1} B_m^T (A_m - (A - BK)) \quad (۱۷)$$

$$R = (B^T B)^{-1} B^T B_m = (B_m^T B)^{-1} B_m^T B_m,$$

از طرفی حالت های سیستم (۱) در دسترس نبوده و ما فقط قادر به اندازه گیری خروجی هستیم. بنابراین به جای  $\hat{f}(x, \hat{W}, \hat{\omega}, \hat{c})$  از  $\hat{f}(\hat{x}, \hat{W}, \hat{\omega}, \hat{c})$  استفاده می کنیم که همان سیستم فازی (۱۳) با تبدیل  $x$  به  $\hat{x}$  می باشد. برای تخمین حالت ها از یک رویت گر که در (۲۶) معرفی می شود استفاده می گردد. برای هر مولفه  $f(x)$  می توان نوشت:

$$f_i(x) - \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{W}_i, \hat{\omega}_i, \hat{c}_i) = f_i(x, W_i^*, \omega_i^*, c_i^*) - \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{W}_i, \hat{\omega}_i, \hat{c}_i) + \Delta_i = \xi_i^T(x, \omega_i^*, c_i^*) W_i^* - \xi_i^T(\hat{x}, \hat{\omega}_i, \hat{c}_i) \hat{W}_i + \Delta_i$$

که  $\Delta_i$  خطای تخمین سیستم فازی می باشد. برای سادگی فرض می کنیم  $\xi_i(x, \omega_i^*, c_i^*) = \hat{\xi}_i$  و  $\xi_i(\hat{x}, \hat{\omega}_i, \hat{c}_i) = \hat{\xi}_i$ . حال با تعریف  $\tilde{W}_i = W_i^* - \hat{W}_i$  و  $\tilde{\xi}_i = \hat{\xi}_i^* - \hat{\xi}_i$  داریم:

$$f_i(x) - \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{W}_i, \hat{\omega}_i, \hat{c}_i) = (\tilde{\xi}_i + \hat{\xi}_i)^T (\tilde{W}_i + \hat{W}_i) - \hat{\xi}_i^T \tilde{W}_i + \Delta_i = \tilde{\xi}_i^T \tilde{W}_i + \hat{\xi}_i^T \tilde{W}_i + \tilde{\xi}_i^T \hat{W}_i + \Delta_i \quad (۱۸)$$

اگر بردار توابع تعلق گوسی بر اساس سری تیلور خطی شوند، آنگاه  $\tilde{\xi}_i$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{\xi}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{i1} \\ \tilde{\xi}_{i2} \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_{iM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_{i1}^*}{\partial \omega_i^*} \\ \frac{\partial \xi_{i2}^*}{\partial \omega_i^*} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi_{iM}^*}{\partial \omega_i^*} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{\omega_i^* = \hat{\omega}_i \\ c_i^* = \hat{c}_i \\ x = \hat{x}}} \tilde{\omega}_i + \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_{i1}^*}{\partial c_i^*} \\ \frac{\partial \xi_{i2}^*}{\partial c_i^*} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi_{iM}^*}{\partial c_i^*} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{\omega_i^* = \hat{\omega}_i \\ c_i^* = \hat{c}_i \\ x = \hat{x}}} \tilde{c}_i + \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_{i1}^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi_{i2}^*}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi_{iM}^*}{\partial x} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{\omega_i^* = \hat{\omega}_i \\ c_i^* = \hat{c}_i \\ x = \hat{x}}} \tilde{e} + h_i \quad (۱۹)$$

که در آن  $\tilde{\omega}_i = \omega_i^* - \hat{\omega}_i$ ،  $\tilde{c}_i = c_i^* - \hat{c}_i$  و  $h_i$  جملات مرتبه بالا را نشان می دهند. همچنین:

$$\frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial \omega_i^*} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial \omega_{i1}^*} & \frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial \omega_{i2}^*} & \dots & \frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial \omega_{in}^*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

$$\frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial c_i^*} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial c_{i1}^*} & \frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial c_{i2}^*} & \dots & \frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial c_{in}^*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

$$\frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \xi_{il}^*}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (۲۲)$$

به طوریکه  $\|\hat{W}_i\| \leq m_{W_i}$ ،  $\|\hat{\omega}_i\| \leq m_{\omega_i}$ ،  $\|\hat{c}_i\| \leq m_{c_i}$  و  
 $|\hat{\mathfrak{R}}_i| \leq m_{\mathfrak{R}_i}$  همچنین  $\|\tilde{W}_i\| \leq 2m_{W_i}$ ،  $\|\tilde{\omega}_i\| \leq 2m_{\omega_i}$ ،  
 $\|\tilde{c}_i\| \leq 2m_{c_i}$  و  $|\tilde{\mathfrak{R}}_i| \leq 2m_{\mathfrak{R}_i}$ .  
**اثبات.** ضمیمه الف را ملاحظه کنید.

حال از (۱۹) و لم ۱ داریم:

$$\begin{aligned} \|h_i^T + \tilde{e}^T \Gamma_i^T\| &= \|\tilde{\xi}_i^T - \tilde{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \tilde{c}_i^T \Omega_i^T\| \\ &\leq \|\tilde{\xi}_i^T\| + \|\tilde{\omega}_i^T\| \|\Lambda_i^T\| + \|\tilde{c}_i^T\| \|\Omega_i^T\| \\ &\leq \ell_1 + \ell_2 \|\tilde{\omega}_i\| + \ell_3 \|\tilde{c}_i\| \quad (۳۸) \\ &\leq \ell_1 + 2\ell_2 m_{\omega_i} + 2\ell_3 m_{c_i} \\ &= \ell_4, \end{aligned}$$

که در بالا  $\ell_1$ ،  $\ell_2$  و  $\ell_3$  ثوابت مثبت بوده و وجود آن ها به علت  
 کراندار بودن توابع پایه ای فازی یعنی کراندار بودن توابع گوسی و  
 فرض ۴ تضمین می شود. همچنین  $\ell_4$  نیز یک عدد مثبت بوده و  
 نامساوی آخر با استفاده از لم ۱ نوشته شده است. با استفاده از (۲۳)،  
 (۳۸)، لم ۱ و قضیه ۱ داریم:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i| &= |(\omega_i^{*T} \Lambda_i^T + c_i^{*T} \Omega_i^T) \tilde{W}_i + (\tilde{e}^T \Gamma_i^T + h_i^T) W_i^* + \Delta_i| \\ &\leq \|\omega_i^*\| \|\Lambda_i\| \|\tilde{W}_i\| + \|c_i^*\| \|\Omega_i\| \|\tilde{W}_i\| + \|W_i^*\| \ell_4 + |\Delta_i| \\ &\leq \ell_2 \|\omega_i^*\| \|\tilde{W}_i\| + \ell_3 \|c_i^*\| \|\tilde{W}_i\| + \|W_i^*\| \ell_4 + b_{\Delta_i} \quad (۳۹) \\ &\leq 2\ell_2 m_{\omega_i} m_{W_i} + 2\ell_3 m_{c_i} m_{W_i} + \ell_4 m_{W_i} + b_{\Delta_i} \\ &\triangleq b_{\varepsilon_i}, \end{aligned}$$

که در آن  $b_{\varepsilon_i}$  و  $b_{\Delta_i}$  اعداد مثبت نامشخص می باشند.

#### ۴- تحلیل پایداری

در اینجا برای تحلیل پایداری مجانبی قضیه زیر را بیان و اثبات می  
 کنیم:

**قضیه ۲.** سیستم غیرخطی (۱) با مفروضات ۱ تا ۴ قانون کنترلی  
 (۲۸) را در نظر بگیرید. تمامی سیگنال ها در سیستم حلقه بسته کراندار  
 بوده و خطای ردیابی به صورت مجانبی صفر می گردد اگر قوانین  
 تطبیق (۳۳)-(۳۶) برآورده شوند.

**اثبات.** ضمیمه ب را ملاحظه کنید.

**ملاحظه ۱.** لازم به ذکر است که در کنترل کننده فازی پیشنهادی  
 پایداری از نوع نیمه-فراگیر است. زیرا همانطور که در قضیه ۱ بیان شد،  
 سیستم های فازی توانایی تقریب گری عمومی توابع پیوسته با دامنه  
 مجموعه فشرده معلوم  $U_x$  را دارا می باشند. بنابراین نتایج پایداری بیان  
 شده تا زمانی که حالت های سیستم در  $U_x$  باشند معتبر است. در  
 مقالات برای تضمین باقی ماندن حالت های سیستم در  $U_x$  برای تمام  
 $t \geq 0$ ، معمولاً مجموعه  $U_x$  به حد کافی بزرگ اختیار می شود. اما

به طوریکه  $u_{ci} = \text{sgn}(y_i - \hat{y}_i) \hat{\mathfrak{R}}_i$  (۳۰)

که  $\hat{\mathfrak{R}}_i \in \mathbb{R}$  یک عدد ثابت مثبت نامشخص می باشد و باید به  
 صورت مناسب تنظیم شود، و

$$u_a = L^T P_2 \hat{e}. \quad (۳۱)$$

دینامیک خطای رویت گر با استفاده از (۱۲)، (۲۵) و (۲۶) به صورت  
 زیر می تواند نوشته شود:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}} &= \dot{e} - \dot{\hat{e}} \\ &= (A - LC)\hat{e} + B(\Phi(\hat{x}, \hat{\omega}, \hat{c}) - \Theta_1)\tilde{W} + B\Theta_2\tilde{\omega} \quad (۳۲) \\ &\quad + B\Theta_3\tilde{c} + B\bar{d}(t, x) - Bu_c - Bu_a + B\varepsilon \end{aligned}$$

**فرض ۴.** مجموعه های فشرده وجود دارند به طوریکه بردارهای  
 پارامتر ایده ال  $W_i^*$ ،  $\omega_i^*$  و  $c_i^*$  متعلق به آنها هستند، یعنی:

$$\begin{aligned} U_{W_i} &= \{W_i \in \mathbb{R}^M \mid \|W_i\| \leq m_{W_i}\}, \quad U_{\omega_i} = \{\omega_i \in \mathbb{R}^{NM} \mid \|\omega_i\| \leq m_{\omega_i}\} \\ U_{c_i} &= \{c_i \in \mathbb{R}^{Nm} \mid \|c_i\| \leq m_{c_i}\}, \quad U_{\mathfrak{R}_i} = \{\mathfrak{R}_i \in \mathbb{R} \mid |\mathfrak{R}_i| \leq m_{\mathfrak{R}_i}\}, \end{aligned}$$

که شعاع های  $m_{W_i}$ ،  $m_{\omega_i}$ ،  $m_{c_i}$  و  $m_{\mathfrak{R}_i}$  اعداد حقیقی مثبت می  
 باشند که توسط طراح مشخص می شوند. همچنین

$$\begin{aligned} (W_i^*, \omega_i^*, c_i^*) &= \arg \min_{W_i \in U_{W_i}, \omega_i \in U_{\omega_i}, c_i \in U_{c_i}} \left[ \sup_{x \in U_x, \hat{x} \in U_{\hat{x}}} |f(x) - \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{W}_i, \hat{\omega}_i, \hat{c}_i)| \right], \\ \mathfrak{R}_i^* &= \mathfrak{R}_i \end{aligned}$$

و  $\mathfrak{R}_i$  یک عدد مثبت نامشخص می باشد که در (۳۹) تعریف می  
 گردد. لم زیر قوانین تطبیق را بیان می کند:

**لم ۱.** قوانین تطبیق زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\hat{W}}_i = \begin{cases} \gamma_{1i}(\tilde{\xi}_i^T - \tilde{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \tilde{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i), \|\hat{W}_i\| < m_{W_i} \text{ or } \|\hat{W}_i\| = m_{W_i} \\ \text{and } (\tilde{\xi}_i^T - \tilde{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \tilde{c}_i^T \Omega_i^T) \hat{W}_i (y_i - \hat{y}_i) \leq 0 \\ \Pr(\gamma_{1i}(\tilde{\xi}_i^T - \tilde{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \tilde{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i)), \|\hat{W}_i\| = m_{W_i} \\ \text{and } (\tilde{\xi}_i^T - \tilde{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \tilde{c}_i^T \Omega_i^T) \hat{W}_i (y_i - \hat{y}_i) > 0, \end{cases} \quad (۳۳)$$

$$\dot{\hat{\omega}}_i = \begin{cases} \gamma_{2i}(\hat{W}_i^T \Lambda_i)^T (y_i - \hat{y}_i), \|\hat{\omega}_i\| < m_{\omega_i} \text{ or } \|\hat{\omega}_i\| = m_{\omega_i} \\ \text{and } (\hat{W}_i^T \Lambda_i) \hat{\omega}_i (y_i - \hat{y}_i) \leq 0 \\ \Pr(\gamma_{2i}(\hat{W}_i^T \Lambda_i)^T (y_i - \hat{y}_i)), \|\hat{\omega}_i\| = m_{\omega_i} \\ \text{and } (\hat{W}_i^T \Lambda_i) \hat{\omega}_i (y_i - \hat{y}_i) > 0, \end{cases} \quad (۳۴)$$

$$\dot{\hat{c}}_i = \begin{cases} \gamma_{3i}(\hat{W}_i^T \Omega_i)^T (y_i - \hat{y}_i), \|\hat{c}_i\| < m_{c_i} \text{ or } \|\hat{c}_i\| = m_{c_i} \\ \text{and } (\hat{W}_i^T \Omega_i) \hat{c}_i (y_i - \hat{y}_i) \leq 0 \\ \Pr(\gamma_{3i}(\hat{W}_i^T \Omega_i)^T (y_i - \hat{y}_i)), \|\hat{c}_i\| = m_{c_i} \\ \text{and } (\hat{W}_i^T \Omega_i) \hat{c}_i (y_i - \hat{y}_i) > 0, \end{cases} \quad (۳۵)$$

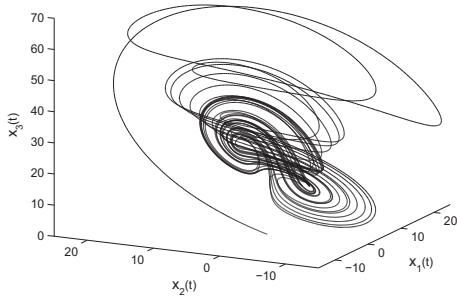
$$\dot{\hat{\mathfrak{R}}}_i = \begin{cases} \gamma_{4i} |y_i - \hat{y}_i|, |\hat{\mathfrak{R}}_i| < m_{\mathfrak{R}_i} \text{ or } |\hat{\mathfrak{R}}_i| = m_{\mathfrak{R}_i} \text{ and } \hat{\mathfrak{R}}_i \leq 0 \\ \Pr(\gamma_{4i} |y_i - \hat{y}_i|), |\hat{\mathfrak{R}}_i| = m_{\mathfrak{R}_i} \text{ and } \hat{\mathfrak{R}}_i > 0, \end{cases} \quad (۳۶)$$

که  $\gamma_{ji}$  اعداد ثابت مثبت بوده و اپراتور  $\Pr(\cdot)$  به  
 صورت زیر تعریف می شود:

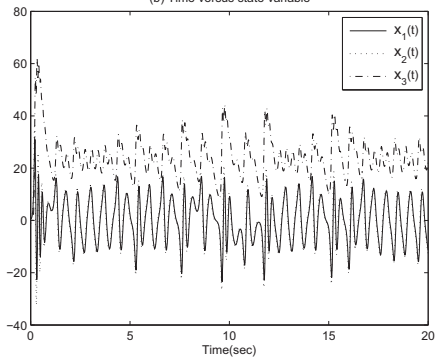
$$\dot{\lambda} = \Pr(\Gamma\Theta\varpi) = \Gamma\Theta\varpi - \Gamma \frac{\lambda\lambda^T}{\lambda^T\Gamma\lambda} \Gamma\Theta\varpi \quad (۳۷)$$

پارامترهای  $\gamma_{1i} = \gamma_{2i} = \gamma_{3i} = 100$  و  $\gamma_{4i} = 300$ ،  $i = 1, 2$  و  $M = 5$  تعداد قوانین فازی برای هر مولفه  $f(x)$ ، انتخاب می شوند. شرایط اولیه سیستم  $x(0) = [0.5, 0.5, -1]^T$  و رویت گر  $\hat{x}(0) = [1, 1, 1]^T$  در نظر گرفته می شوند. شرایط اولیه میانگین و معکوس پراکندگی توابع تعلق ورودی به صورت  $c_i(0) = [-1.2, -1, -0.8, \dots, 1.4]_{15 \times 1}$ ،  $i = 1, 2$  با  $c(0) = [c_1(0), c_2(0)]^T$  و  $\omega_i(0) = [0.1, \dots, 0.1]_{15 \times 1}$   $i = 1, 2$  با  $\omega(0) = [\omega_1(0), \omega_2(0)]^T$  انتخاب می شوند. همچنین شرایط اولیه وزن های شبکه تابع پایه ای فازی به صورت تصادفی در بازه  $[0, 1]$  اختیار می گردند و  $\hat{R}_i(0) = 0$ ،  $i = 1, 2$  در نظر گرفته می شود.

(a) Chaotic attractors generated by the Chen system



(b) Time versus state variable



شکل ۲: جاذب های آشوبی برای سیستم چن (a) در فضای فاز  $x_3 - x_2 - x_1$  (b) حالت ها بر حسب زمان

بدون از دست دادن عمومیت فرض می کنیم  $d_1(t, x) = 5 + 2e^{-t} \cos 2t$  که در لحظه  $t = 10$  ثانیه و  $d_2(t, x) = 20 + 3e^{-2t} \sin t$  در لحظه  $t = 15$  ثانیه اعمال می گردند. باید به این نکته توجه کرد که هم اغتشاش و هم زمانی که به وقوع می پیوندد نامعلوم است. کنترل کننده پیشنهادی مورد استفاده قرار گرفته می شود. شکل ۳ حالت های سیستم در برابر حالت های سیستم مطلوب

باید توجه داشت که انتخاب  $U_x$  به اندازه ناکافی بزرگ باعث افزایش تعداد قوانین فازی می گردد و آن نیز پیچیدگی پیاده سازی را باعث می گردد. اما در کنترل کننده پیشنهادی به دلیل تطبیق کامل، تعداد قوانین فازی به مجموعه فشرده  $U_x$  وابسته نیست، بنابراین می توان یک مجموعه  $U_x$  بسیار بزرگ را برای تضمین پایداری نیمه-فراگیر استفاده نمود.

**ملاحظه ۲.** در جهت حذف چترینگ کنترل ناپویسته  $\text{sgn}(y_i - \hat{y}_i / r)$  را می توان با توابع پیوسته:  $\text{sat}(y_i - \hat{y}_i / r)$ ،  $\tan^{-1}(y_i - \hat{y}_i / r)$ ،  $\tanh(y_i - \hat{y}_i / r)$  و  $y_i - \hat{y}_i / (|y_i - \hat{y}_i| + r)$ ،  $\tan^{-1}(y_i - \hat{y}_i / r)$ ،  $\tanh(y_i - \hat{y}_i / r)$  و  $y_i - \hat{y}_i / (|y_i - \hat{y}_i| + re^{-qt})$  جایگزین نمود. چهار تابع اول چترینگ را به بهای داشتن خطای حالت دائمی کاملاً حذف می کنند که متناسب با  $r$  می باشد. اما از آنجایی که تابع نهایی یک لایه مرزی کاهشی  $re^{-qt}$  را شامل می گردد توانایی آن در حذف چترینگ و تضمین پایداری مجانبی اثبات گردیده است [۱۸].

### ۵- مثال شبیه سازی

در اینجا کنترل کننده پیشنهادی به سیستم آشوبی چن (Chen) به عنوان یک سیستم غیرخطی و غیرقطعی MIMO اعمال می گردد. سیستم آشوبی چن یک سیستم غیرخطی و غیرقطعی به فرم زیر می باشد:

$$A = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.8 \sin 2t & 1 + 0.3 \sin 2t & 0 \\ -1 + 0.5 \cos t & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

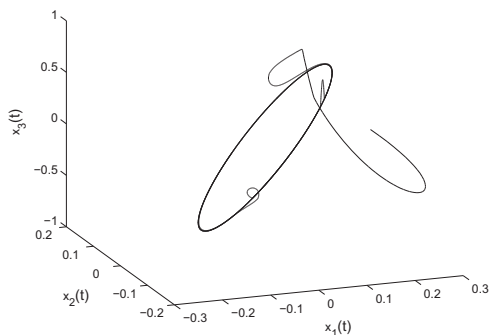
که در آن  $u(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T$  سیگنال کنترلی بوده و  $d(t) = [d_1(t), d_2(t)]^T$  اغتشاش کراندار که کران آن نیز نامعلوم می باشد. مسیر سیستم آشوبی چن با شرایط اولیه  $u(t) = d(t) = 0$  و  $x(0) = [0.5, 0.5, -1]^T$  در شکل ۲ نشان داده شده است.

پارامترهای  $L, P_1, P_2, R, K, G$  به صورت زیر انتخاب می شوند:

$$K = \begin{bmatrix} -5.6656 & 47.7588 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4641 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1.3344 & 16.7588 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4641 \end{bmatrix}, R = \text{diag}\{1, 1\}, \quad (41)$$

$$P_1 = I_{3 \times 3}, P_2 = \begin{bmatrix} 0.0145 & 0.0085 & 0 \\ 0.0085 & 0.0412 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1632 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 28.3599 & 47.6967 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1632 \end{bmatrix}$$





شکل ۶: حالت های سیستم در فضای فاز

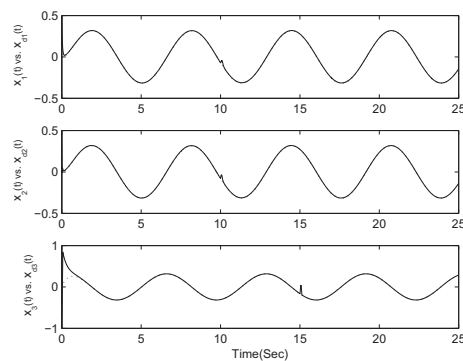
### ۶- نتیجه گیری

در این مقاله با ترکیب سیستم های فازی به عنوان تقریب گرهای عمومی و روش های کنترل تطبیقی یک کنترل کننده مقاوم برای سیستم های غیرخطی و غیرقطعی با تغییرات پارامتری و اغتشاش های خارجی نامعلوم و ناگهانی ارائه گردید. معمولاً فقط پارامترهای تالی قوانین فازی تطبیق می شوند در حالی که در این مقاله هم پارامترهای مقدم و هم تالی قوانین فازی تطبیق شده که یک کنترل کننده کاملاً سیستماتیک را ارائه داده و قوانین فازی مورد نیاز را کاهش می دهد. برای افزایش قوام از یک کنترل کننده ناپیوسته با بهره تطبیقی استفاده گردید که به دلیل تطبیقی بودن، پدیده چترینگ را به صورت مؤثر کاهش می دهد. روش پیشنهادی نیازی به کران اغتشاش نداشته و وجود یک کران برای اثبات پایداری کفایت می کند. تمامی قوانین تطبیقی از روش طراحی لیپانوف استخراج شدند، بنابراین پایداری مجانبی حلقه بسته تضمین گردید.

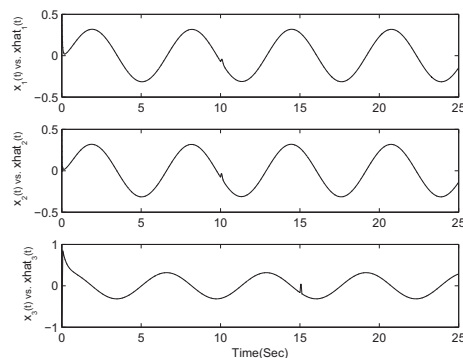
### مراجع

- [1] J. J. Slotine and W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall, Inc., 1991.
- [2] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall Inc., second edition, 1996.
- [3] L. X. Wang "Stable adaptive fuzzy controllers with application to inverted pendulum tracking," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 26, No. 5, 1996.
- [4] R. Shahnazi and M. R. Akbarzadeh T., "PI adaptive fuzzy control with large and fast disturbance rejection for a class of uncertain nonlinear systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 16, no. 1, February 2008.
- [5] M. R. Akbarzadeh T. and R. Shahnazi, "Direct adaptive fuzzy PI sliding mode control of systems with unknown but bounded disturbances," *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 2, pp. 33-51, 2006.

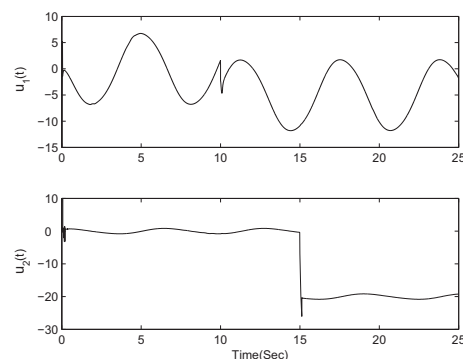
را نشان می دهد. حالت های تخمینی در برابر حالت های سیستم واقعی در شکل ۴ نشان داده شده اند. شکل ۵ سیگنال کنترلی و در نهایت شکل ۶ حالت های سیستم در فضای فاز را نمایش می دهند. نتایج شبیه سازی نشان می دهند که ردیابی مطلوب با عملکرد موثر در مقابله با عدم قطعیت در مدل و حالت ها و اغتشاش های خارجی ناگهانی و بزرگ بدست آمده است.



شکل ۳: حالت های سیستم (-) در برابر حالت های سیستم مطلوب (- -)



شکل ۴: حالت های سیستم (-) در برابر حالت های تخمینی (- -)



شکل ۵: سیگنال های کنترلی



- systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 156, pp. 285-299, July 2005.
- [13] C. Hua, X. Guan, X. Li, and P. Shi, "Adaptive observer-based control for a class of chaotic systems," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 22, Issue: 1, October 2004.
- [14] R. Shahnazi and H. Khaloozadeh, "Output feedback control with disturbance rejection of a class of nonlinear MIMO systems," *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 52, no. 3, pp. 138-144, 2008.
- [15] L. X. Wang, "Fuzzy system are universal approximates," in *Proc. IEEE Int. Conf. Fuzzy System*, San Diego, pp. 1163-1170, 1992.
- [16] L. X. Wang, *Adaptive fuzzy systems and control: design and stability analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1994.
- [17] L. X. Wang and J. M. Mendel, "Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning," *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, Sep. 1992.
- [18] M. S. Chen, Y. R. Hwang, and M. Tomizuka "A state-dependent boundary layer design for sliding mode control," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 47, no. 10, pp. 1677-1681, 2002.
- [6] K. C. Chiou and S. J. Huang, "An adaptive fuzzy controller for robot manipulators," *Mechatronics*, vol. 15, no. 2, pp. 151-177, 2005.
- [7] R. J. Wai, C. M. Lin, and C. F. Hsu. "Adaptive fuzzy sliding-mode control for electrical servo drive," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 143, pp. 295-310, 2004.
- [8] H. Han, C. Y. Su, and Y. Stepanenko, "Adaptive control of a class of nonlinear systems with nonlinearly parameterized fuzzy approximators," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 2, April 2001.
- [9] C. M. Lin and C. F. Hsu. "Adaptive fuzzy sliding mode control for induction servomotor systems," *IEEE Trans. Energy Conversion*, no. 2, vol. 19, June 2004.
- [10] R. Shahnazi, H. Shanechi, and N. Pariz, "Position control of induction and DC servomotors: A novel adaptive fuzzy PI sliding mode control," *IEEE Trans. Energy Conversion*, vol. 21, no. 1, March 2008.
- [11] H. X. Li and S. Tong, "A hybrid adaptive fuzzy control for a class of nonlinear MIMO systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 11, no. 1, February 2003.
- [12] S. Tong, B. Chen, and Y. Wang, "Fuzzy adaptive output feedback control for MIMO nonlinear

## ضمایم

### ضمیمه الف. اثبات لم ۱

بر اساس (۳۳)-(۳۶) به راحتی می توان طبق بحثی که در [۱۴] انجام شد  $\|\hat{W}_i\| \leq m_{W_i}$ ،  $\|\hat{\omega}_i\| \leq m_{\omega_i}$ ،  $\|\hat{c}_i\| \leq m_{c_i}$  و  $\|\hat{\mathfrak{R}}_i\| \leq m_{\mathfrak{R}_i}$  را ثابت کرد. همچنین با استفاده از نامساوی مثلث داریم  $\|\tilde{W}_i\| \leq 2m_{W_i}$ ،  $\|\tilde{\omega}_i\| \leq 2m_{\omega_i}$ ،  $\|\tilde{c}_i\| \leq 2m_{c_i}$  و  $\|\tilde{\mathfrak{R}}_i\| \leq 2m_{\mathfrak{R}_i}$ ، زیرا بر اساس فرض ۴،  $\|\mathfrak{R}_i^*\| \leq m_{\mathfrak{R}_i}$  و  $\|c_i^*\| \leq m_{c_i}$ ،  $\|W_i^*\| \leq m_{W_i}$  و  $\|\omega_i^*\| \leq m_{\omega_i}$  در اینجا اثبات تکمیل می شود.

### ضمیمه ب. اثبات قضیه ۲

تابع زیر را به عنوان کاندید تابع لیاپانوف در نظر می گیریم:

$$V = \frac{1}{2} \tilde{e}^T P_1 \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{e}^T P_2 \tilde{e} + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{2\gamma_{1i}} \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i + \frac{1}{2\gamma_{2i}} \tilde{\omega}_i^T \tilde{\omega}_i + \frac{1}{2\gamma_{3i}} \tilde{c}_i^T \tilde{c}_i + \frac{1}{2\gamma_{4i}} \tilde{\mathfrak{R}}_i^2 \right\} \quad (1-b)$$

با استفاده از مفروضات ۱ و ۲، مشتق (ب-۱) را در راستای سیستم (۲۷) و (۳۲) می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{e}}^T P_1 \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{e}^T P_1 \dot{\tilde{e}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{e}}^T P_2 \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{e}^T P_2 \dot{\tilde{e}} - \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{\gamma_{1i}} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i + \frac{1}{\gamma_{2i}} \tilde{\omega}_i^T \dot{\tilde{\omega}}_i + \frac{1}{\gamma_{3i}} \tilde{c}_i^T \dot{\tilde{c}}_i + \frac{1}{\gamma_{4i}} \tilde{\mathfrak{R}}_i \dot{\tilde{\mathfrak{R}}}_i \right\} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{e}^T [(A-LC)^T P_1 + P_1(A-LC)] \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{e}^T [(A-BK)^T P_2 + P_2(A-BK)] \tilde{e} + \tilde{e}^T P_1 B (\Phi(\hat{x}, \hat{\omega}, \hat{c}) - \Theta_1) \tilde{W} \\ &\quad + \tilde{e}^T P_1 B \Theta_2 \tilde{\omega} + \tilde{e}^T P_1 B \Theta_3 \tilde{c} - \tilde{e}^T P_1 B u_c - \tilde{e}^T P_1 B u_a + \tilde{e}^T P_1 B (\varepsilon + \bar{d}(t, x)) + \tilde{e}^T P_2 L C \tilde{e} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{\gamma_{1i}} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i + \frac{1}{\gamma_{2i}} \tilde{\omega}_i^T \dot{\tilde{\omega}}_i + \frac{1}{\gamma_{3i}} \tilde{c}_i^T \dot{\tilde{c}}_i + \frac{1}{\gamma_{4i}} \tilde{\mathfrak{R}}_i \dot{\tilde{\mathfrak{R}}}_i \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \tilde{e}^T Q_1 \tilde{e} - \frac{1}{2} \hat{e}^T Q_2 \hat{e} + \tilde{W}^T (\Phi(\hat{x}, \hat{\omega}, \hat{c}) - \Theta_1)^T B^T P_1 \tilde{e} + \tilde{\omega}^T \Theta_2^T B^T P_1 \tilde{e} + \tilde{c}^T \Theta_3^T B^T P_1 \tilde{e} - \tilde{e}^T P_1 B u_a$$

$$- \tilde{e}^T P_1 B u_c + \tilde{e}^T P_1 B (\varepsilon + \bar{d}(t, x)) + \hat{e}^T P_2 L C \tilde{e} - \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{\gamma_{1i}} \tilde{W}_i^T \dot{W}_i + \frac{1}{\gamma_{2i}} \tilde{\omega}_i^T \dot{\omega}_i + \frac{1}{\gamma_{3i}} \tilde{c}_i^T \dot{c}_i + \frac{1}{\gamma_{4i}} \tilde{\mathfrak{R}}_i \dot{\mathfrak{R}}_i \right\}$$

با توجه به تساوی  $y - \hat{y} = C\tilde{e} = B^T P_1 \tilde{e}$  و استفاده از (۲۵) و (۳۱) داریم:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \tilde{e}^T Q_1 \tilde{e} - \frac{1}{2} \hat{e}^T Q_2 \hat{e} + \sum_{i=1}^m \tilde{W}_i^T \left[ (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{1}{\gamma_{1i}} \dot{W}_i \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^m \tilde{\omega}_i^T \left[ (\hat{W}_i^T \Lambda_i)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{1}{\gamma_{2i}} \dot{\omega}_i \right] + \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i^T \left[ (\hat{W}_i^T \Omega_i)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{1}{\gamma_{3i}} \dot{c}_i \right]$$

$$- \tilde{e}^T P_1 B u_c + \tilde{e}^T P_1 B (\varepsilon + \bar{d}(t, x)) - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_{4i}} \tilde{\mathfrak{R}}_i \dot{\mathfrak{R}}_i.$$

با توجه به  $\tilde{e}^T P_1 B u_c = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i) u_{ci} = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i) \text{sgn}(y_i - \hat{y}_i) \mathfrak{R}_i = \sum_{i=1}^m |y_i - \hat{y}_i| \mathfrak{R}_i$  داریم:

$$\leq \sum_{i=1}^m |y_i - \hat{y}_i| \varepsilon_i + \bar{d}_i(t, x) \leq \sum_{i=1}^m |y_i - \hat{y}_i| \mathfrak{R}_i = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i) (\varepsilon_i + \bar{d}_i(t, x)) \tilde{e}^T P_1 B (\varepsilon + \bar{d}(t, x))$$

در آن که  $\mathfrak{R}_i = b_{\varepsilon_i} + \bar{D}$  می باشد، بنابراین:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \tilde{e}^T Q_1 \tilde{e} - \frac{1}{2} \hat{e}^T Q_2 \hat{e} + \sum_{i=1}^m \tilde{W}_i^T \left[ (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{1}{\gamma_{1i}} \dot{W}_i \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^m \tilde{\omega}_i^T \left[ (\hat{W}_i^T \Lambda_i)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{1}{\gamma_{2i}} \dot{\omega}_i \right] + \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i^T \left[ (\hat{W}_i^T \Omega_i)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{1}{\gamma_{3i}} \dot{c}_i \right]$$

$$- \sum_{i=1}^m |y_i - \hat{y}_i| \mathfrak{R}_i + \sum_{i=1}^m |y_i - \hat{y}_i| \mathfrak{R}_i - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma_{4i}} \tilde{\mathfrak{R}}_i \dot{\mathfrak{R}}_i$$

$$= -\frac{1}{2} \tilde{e}^T Q_1 \tilde{e} - \frac{1}{2} \hat{e}^T Q_2 \hat{e} + \sum_{i=1}^m \tilde{W}_i^T \left[ (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{1}{\gamma_{1i}} \dot{W}_i \right] \quad (۲-ب)$$

$$+ \sum_{i=1}^m \tilde{\omega}_i^T \left[ (\hat{W}_i^T \Lambda_i)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{1}{\gamma_{2i}} \dot{\omega}_i \right] + \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i^T \left[ (\hat{W}_i^T \Omega_i)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{1}{\gamma_{3i}} \dot{c}_i \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^m \tilde{\mathfrak{R}}_i (|y_i - \hat{y}_i| - \frac{1}{\gamma_{4i}} \dot{\mathfrak{R}}_i).$$

اگر  $\|\hat{W}_i\| < m_{W_i}$  یا  $\{ (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T) \hat{W}_i (y_i - \hat{y}_i) \leq 0 \}$  و  $\|\hat{W}_i\| = m_{W_i}$ ، آنگاه از اولین سطر قانون تطبیق (۳۳) داریم:

$$\sum_{i=1}^m \tilde{W}_i^T \left[ (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{1}{\gamma_{1i}} \dot{W}_i \right] = 0 \quad \text{بنابراین} \quad \dot{W}_i = \gamma_{1i} (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i)$$

حال اگر  $\|\hat{W}_i\| = m_{W_i}$  و  $(\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T) \hat{W}_i (y_i - \hat{y}_i) > 0$  آنگاه از دومین سطر قانون تطبیق (۳۳) داریم:

$$\gamma_{1i} (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i) - \gamma_{1i} \frac{\hat{W}_i \hat{W}_i^T}{\|\hat{W}_i\|^2} (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i) \dot{W}_i = \text{Pr}(\gamma_{1i} (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i)) =$$

بنابراین:

$$\tilde{W}_i^T \left[ (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{\dot{W}_i}{\gamma_{1i}} \right] = \tilde{W}_i^T \frac{\hat{W}_i \hat{W}_i^T}{\|\hat{W}_i\|^2} (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i)$$

$$= \frac{\tilde{W}_i^T \hat{W}_i}{\|\hat{W}_i\|^2} \hat{W}_i^T (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i) \quad (۳-ب)$$

$$\tilde{W}_i^T \left[ (\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T)^T (y_i - \hat{y}_i) - \frac{\|\hat{W}_i\|^2}{\|\hat{W}_i\|^2} \right] \leq m_{W_i} \quad \text{زیرا} \quad \tilde{W}_i^T \hat{W}_i \leq 0 \quad \text{که} \quad \|\hat{W}_i\| = m_{W_i} \quad \text{و} \quad \|\hat{W}_i\| = m_{W_i}$$

داریم:  $(\hat{\xi}_i^T - \hat{\omega}_i^T \Lambda_i^T - \hat{c}_i^T \Omega_i^T) \hat{W}_i (y_i - \hat{y}_i) > 0$

$$\int_0^t \Theta(\tau) d\tau \leq V(\tilde{W}_i(0), \tilde{\omega}_i(0), \tilde{c}_i(0), \tilde{\mathfrak{R}}_i(0)) - V(\tilde{W}_i(t), \tilde{\omega}_i(t), \tilde{c}_i(t), \tilde{\mathfrak{R}}_i(t))$$

از آنجایی  $V(\tilde{W}(0), \tilde{\omega}(0), \tilde{c}(0), \tilde{\mathfrak{R}}_i(0))$  کراندار می باشد و  $V(\tilde{W}(t), \tilde{\omega}(t), \tilde{c}(t), \tilde{\mathfrak{R}}_i(t))$  نیز غیرافزایشی و کراندار است می توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Theta(\tau) d\tau < \infty.$$

همچنین از (۲۷) و (۳۲) می توان نتیجه گرفت که  $\dot{\Theta}(t)$  کراندار می باشد بنابراین با استفاده از لم باربالات، به راحتی می توان نشان داد که  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(t) = 0$ . بنابراین داریم  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ . پس  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e} = 0$  و  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e} = 0$  از طرف دیگر  $e = \hat{e} + \tilde{e}$  پس  $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ .

به صورت مشابه می توان مراحل فوق را برای قوانین تطبیق دیگر انجام داد، پس از آن (ب-۲) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \tilde{e}^T Q_1 \tilde{e} - \frac{1}{2} \hat{e}^T Q_2 \hat{e}$$

با در نظر گرفتن  $E^T = [\tilde{e}^T, \hat{e}^T]$  و  $Q = \text{diag}[Q_1, Q_2]$  (ب-۵) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} E^T Q E \leq 0$$

از آنجایی که  $Q_1$  و  $Q_2$  ماتریس های مثبت معین هستند آنگاه ماتریس  $Q = \text{diag}[Q_1, Q_2]$  نیز مثبت معین است، پس  $\dot{V}$  یک ماتریس مثبت نیمه معین می باشد، به عبارت دیگر  $V(\tilde{W}_i(t), \tilde{\omega}_i(t), \tilde{c}_i(t), \tilde{\mathfrak{R}}_i(t)) \leq V(\tilde{W}_i(0), \tilde{\omega}_i(0), \tilde{c}_i(0), \tilde{\mathfrak{R}}_i(0))$  با تعریف  $\Theta(t) = \frac{1}{2} E^T Q E \leq -\dot{V}$  و انتگرال گیری از آن نسبت به زمان: