مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۴، زمستان ۱۳۸۹، صفحه ۲۳-۱۴

طراحی رؤیت‌گر نمایی برای سیستم‌های غیرخطی بر اساس معادله ریکاتی وابسته به حالت (SDRE)

حسین بیک زاده، حمیدرضا تقی‌راد

گروه رباتیک ارس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، taghirad@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۱۱/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۱۲/۱۷)

چکیده: در این مقاله روشی نوینی برای طراحی رؤیتگر برای سیستمهای غیر خطی بر اساس معادله ریکاتی وابسته به حالت (SDRE) ارائه شده است. علیرغم اینکه استفاده از رؤیت گر SDRE در مسائل کاربردی توسعه قابل توجهی پیدا نموده است، توسعه تئوری این نوع رؤیت گرها کمتر طرف توجه قرار گرفته و مسائلی از قبیل تحلیل پایداری و همگرایی آنان مغفول مانده است. در این مقاله پایداری رؤیت‌گر SDRE بر اساس تئوری لیاپانوف مورد تحلیل قرار گرفته و شرایط لازم برای پایداری نمایی دینامیک خطای رؤیتگر تعیین می شود. همچنین با شبیه سازی یک سیستم غیر خطی مرتبه دو که شرایط تضمین پایداری را ارضاء می نماید، عملکرد مطلوب آن به تصویر کشیده می شود. در پایان با ارائه شبیه سازیهای انجام شده بر روی یک موتور الفایی که دارای دینامیک غیر خطی قابل توجهی می باشد، عملکرد رؤیت گر پیشنهادی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

کلمات کلیدی: رؤیت گر غیر خطی، نمایش SDC، تحلیل پایداری، پایداری نمایی، شرایط لیپ شیتز، موتور القایی.

Exponential Nonlinear Observer Design Based on Differential State-Dependent Riccati Equation

Hossein Beikzadeh, Hamid Reza Taghirad

Abstract: This paper presents a new technique for nonlinear continuous-time observer design based on the differential state-dependent Riccati equation (SDRE) filter, with guaranteed exponential stability. Although impressive results have rapidly emerged from the use of SDRE designs for observers and filters, the underlying theory is yet scant and there remain many unanswered questions such as stability and convergence. In this paper, Lyapunov stability analysis is used to obtain the required conditions for exponential stability of the estimation error dynamics. Furthermore, through a simulation study of a second order nonlinear model, which satisfies the stability conditions, the promising performance of the proposed observer is demonstrated. Finally, in order to examine the effectiveness of the proposed method, it is applied to highly nonlinear flux and angular velocity estimation problem for induction machines. The simulation results verify how effectively the modification proposed in this paper can increase the region of attraction and the observer error decay rate.

Keywords: SDRE technique, SDC representation, nonlinear observer, stability analysis, Lipschits conditions, PM synchronous motor.

۱ - مقدمه

برخلاف تئوری طراحی رؤیت‌گر برای سیستم‌های خطی، تئوری رؤیت حالت‌های یک سیستم غیرخطی از ساختاری یکپارچه برخوردار نیست. در واقع، روش‌های طراحی متعددی برای کلاس‌های مختلف سیستم‌های غیرخطی موجود است، که بیشتر آنها گستره کاربرد ویژه‌ی خود را دارند. برخی از روش‌های شناخته شده طراحی رؤیت‌گر غیرخطی عبارتند از: خطی‌سازی فیدبک [۱]، تکنیک‌های ساختار متغیر [۲]، رؤیت‌گر مد لغزشی [۳]، روش‌های طراحی بر پایه تئوری لیاپانوف [۴]، رؤیت‌گرهای بهره بالا [۵]، فیلتر کالمن توسعه یافته [۶] و تکنیک‌های طراحی براساس معادله ریکاتی وابسته به حالت [۷]. یکی از روش‌های نوین تخمین حالت سیستم‌های غیرخطی، روش‌های فیلتر کردن براساس حل معادله ریکاتی وابسته به حالت (SDRE) می‌باشد. برخلاف روش EKF، فیلتر SDRE محاسبات ژاکوبین را شامل نمی‌شود، بلکه مستلزم پارامتریزه‌کردن مستقیم دینامیک غیرخطی است. به طور خلاصه، این روش غیرخطی‌گری‌های سیستم را به طور کامل در طراحی وارد کرده و سیستم غیرخطی را به کمک پارامتریزه‌کردن در یک ساختار خطی با ضرایب وابسته به حالت قرار می‌دهد.

به‌طورکلی، دو رهیافت متعارف برای تکنیک فیلترکردن SDRE وجود دارد. رهیافت نخست که اولین بار توسط Mracek و همکارانش در [۸] پیشنهاد شده است، در اصل با در نظرگرفتن مساله دوگان روش شناخته شده کنترل غیرخطی SDRE [۹] بنا شده است. فیلتر حاصل دارای ساختاری مشابه فیلتر کالمن خطی حالت ماندگار است که بهره کالمن آن با حل یک معادله ریکاتی جبری وابسته به حالت بدست می‌آید. به همین دلیل در مراجعی همچون [۱۰] از این فیلتر با نام رؤیت‌گر SDARE یاد شده است. رهیافت دوم ساختاری مشابه فیلتر کالمن خطی دارد [۱۱]. ایده اصلی این روش حذف فرض بعد زمان نامحدود و حل یک معادله ریکاتی دیفرانسیلی وابسته به حالت به جای معادله ریکاتی جبری است. در [۱۲]، با در نظر گرفتن شرایط رؤیت‌پذیری و شرط لیپ‌شیتز معینی روی نمایش SDC و با تفکیک هریک از ماتریس‌های وابسته به حالت موجود در این نمایش به یک المان ثابت و یک المان افزایشی وابسته به حالت، همگرایی محلی رؤیت‌گر SDARE زمان-پیوسته تحلیل شده است. اما نتایج بدست آمده در این مرجع ذاتا محلی بوده و مستلزم فرضیات *سادگی و کراندار بودن* خاصی روی المان‌های افزایشی مزبور در یک همسایگی مبدا می‌باشد که برآورده شدن آنها برای بسیاری از سیستم‌های عملی امکان‌پذیر نیست. البته این مجموعه شرایط به طور کامل *وابسته به نتایج شبیه‌سازی* بوده و در ضمن محدود به سیستم‌های *بدون ورودی* می‌باشند. به این ترتیب ملاحظه می‌شود که تاکنون پیشرفت‌های تئوری ناچیزی درباره فیلتر SDRE صورت گرفته و پرسش‌های بدون پاسخ بسیاری همچنان برجای مانده است. این مقاله به بررسی عمیق تر تئوری فیلتر SDRE به منظور دستیابی به پاسخ‌هایی مناسب برای پرسش‌های موجود می پردازد.

در این مقاله، با ایجاد یک تغییر در ساختار رؤیت‌گر SDDRE زمان-پیوسته، یک رؤیت‌گر غیرخطی حاصل می‌شود که خطای تخمین آن به صورت نمایی به سمت صفر میل خواهد کرد. به کمک تحلیل پایداری لیاپانوف، مجموعه‌ای از شرایط کافی که پایداری نمایی رؤیت‌گر پیشنهادی را تضمین می‌کنند، بدست می‌آیند. این شرایط مستلزم هیچ-گونه تفکیک خاص نمایش SDC یا فرض سادگی ماتریس‌های وابسته به حالت، نظیر آنچه در [۱۲] تحمیل شده، نبوده و آسان‌تر از شرایط مبتنی بر شبیه‌سازی بدست‌آمده در [۸] و [۱۴]، تحقق می‌یابند. به علاوه، با استفاده از نتایج جالب توجه‌ای که در [۱۳] ارائه شده است، یک تعریف جدید از پارامتریزه‌کردن SDC آشکارپذیر معرفی شده، و ارتباطی نزدیک میان آشکارپذیری یکنواخت سیستم غیرخطی و وجود پاسخ‌های کراندار و مثبت معین برای معادله ریکاتی دیفرانسیلی وابسته به حالت (SDDRE) برقرار شده است. بدین ترتیب، شکل جدیدی از رؤیت‌گرهای غیرخطی با پایداری نمایی تضمین‌شده عرضه می‌گردد، که ویژگی‌های ممتاز رؤیت‌گرهای SDRE را نیز به ارث برده و افزون بر آن، نشان داده شده است که تحت شرایط خاصی، تغییر ایجاد شده در ساختار رؤیت‌گر SDDRE این امکان را فراهم می‌سازد که درجه پایداری رؤیت‌گر و ثابت زمانی دینامیک خطای تخمین می تواند از قبل تخصیص داده شود. شبیه-سازی‌ها عملکرد برتر و افزایش حوزه جذب رؤیت‌گر پیشنهادی نسبت به رؤیت‌گرهای SDRE مرسوم را آشکار می‌سازند.

این مقاله به صورت زیر مرتب شده است. در ادامه و در بخش دوم مقدمات ریاضی لازم به منظور تعریف رؤیت‌گر ارائه شده است. در بخش سوم با انتخاب یک تابع لیاپانوف مناسب نشان می‌دهیم که رؤیت-گر پیشنهادی تحت شرایط معینی، یک رؤیت‌گر نمایی خواهد بود. همچنین، نقش آشکارپذیری یکنواخت در این زمینه مطرح می‌شود. در ادامه با شبیه‌سازی یک مدل غیرخطی مرتبه دوم، که شرایط پایداری را حفظ می‌کند، عملکرد نویدبخش رؤیت‌گر پیشنهادی به نمایش گذاشته شده است. گذشته از این، به منظور آزمودن سودمندی عملی تکنیک پیشنهادی، از آن برای حل مساله تخمین سرعت زاویه‌ای و شار یک موتور القایی استفاده کرده‌ایم. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که این تکنیک می‌تواند باعث افزایش حوزه جذب و همین‌طور بالا بردن نرخ کاهش خطای تخمین در مقایسه با تکنیک‌های SDRE مرسوم گردد. نتایج بدست آمده در بخش پایانی جمع بندی شده است.

۲- معرفی رؤیت گر پیشنهادی

نمایش کلی سیستم‌های غیرخطی افاین را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B(x)u \\ y &= C(x)x \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن حالت $x \in R^n$ غیرخطی، ورودی کنترل $u \in R^m$ و همچنین $y \in R^p$، $h(x) \in C^1$ و $h(0)=0$ می‌باشد. برای سادگی

فرض شده است که ورودی مستقیما بر روی خروجی اثر نمی‌گذارد. با پارامتریزه‌کردن مستقیم، می‌توان توابع غیرخطی $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ را با استفاده از نمایش SDC به فرم زیر نمایش داد.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B(x)u \\ y &= C(x)x \end{aligned} \tag{۲}$$

توجه کنید که ماتریسهای $B(x)$ و $C(x)$ نیز همچون $A(x)$ در (۲) منحصر به فرد نمی باشند. حال فرض کنید در نظر است رؤیت‌گری با ساختار زیر استخراج کنیم

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = A(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + B(\hat{x}(t))u(t) + \\ K(t)\left[y(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)\right] \end{aligned} \tag{۳}$$

که $\hat{x}(t)$ معرف بردار تخمین حالت بوده و بهره رؤیت‌گر، $K(t)$، یک ماتریس متغیر با زمان $n \times p$-بعدی است. بهره رؤیت‌گر با معادله زیر داده می‌شود

$$K(t) = P(t)C^T(\hat{x}(t))R^{-1} \tag{۴}$$

که $P(t) \in R^{n\times n}$ متقارن بوده و توسط معادله ریکاتی دیفرانسیلی وابسته به حالت (SDDRE) زیر، با یک عدد حقیقی مثبت $\alpha > 0$ و ماتریس-های مثبت معین $Q \in R^{n\times n}$ و $R \in R^{p\times p}$ محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = \left(A(\hat{x}(t)) + \alpha I\right)P(t) + P(t)\left(A^T(\hat{x}(t)) + \alpha I\right) \\ + P(t)C^T(\hat{x}(t))R^{-1}C(\hat{x}(t))P(t) + Q \end{aligned} \tag{۵}$$

شایان توجه است که (۵) به جز در ترم جمع‌شونده αI مشابه معادله ریکاتی مورد استفاده برای رؤیت‌گر SDDRE معمول است.

نکته ۱: اسکالر α یک پارامتر طراحی است که به طور غیرمستقیم نرخ کاهش خطا در رؤیت‌گر پیشنهادی را نمایان می‌سازد. این حقیقت به همراه ناحیه پاسخ α در قسمت بعد توضیح داده خواهد شد.

خطای تخمین رؤیت‌گر را تعریف می‌کنیم

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{۶}$$

کم کردن معادله (۳) از معادله حالت در (۱) دینامیک خطا را نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) - A(\hat{x}(t))\hat{x}(t) - \\ B(\hat{x}(t))u(t) + K(t)\left[y(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)\right] \end{aligned} \tag{۷}$$

با اضافه و کم کردن $A(\hat{x}(t))x(t)$ به کل معادله و اضافه و کم کردن $C(\hat{x}(t))x(t)$ به داخل براکت داریم

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = A(\hat{x}(t))x(t) - A(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + A(x(t))x(t) - \\ A(\hat{x}(t))x(t) + [B(x(t)) - B(\hat{x}(t))]u(t) - \\ K(t)[C(\hat{x}(t))x(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + C(x(t))x(t) \\ -C(\hat{x}(t))x(t)] \end{aligned} \tag{۸}$$

بنابراین، دینامیک خطا عبارت است از

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = \left[A(\hat{x}(t)) - K(t)C(\hat{x}(t))\right]e(t) + \\ \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) - K(t)\chi(x(t), \hat{x}(t)) \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \varphi(x, \hat{x}, u) = \left[A(x(t)) - A(\hat{x}(t))\right]x(t) \\ +[B(x(t)) - B(\hat{x}(t))]u(t) \end{aligned} \tag{۱۰}$$

$$\chi(x(t), \hat{x}(t)) = \left[C(x(t)) - C(\hat{x}(t))\right]x(t) \tag{۱۱}$$

برای تحلیل دینامیک خطا به دو تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۱- نقطه تعادل $e(t) = 0$ برای معادله (۹) پایدار نمایی محلی است، اگر ثابت‌های $\varepsilon, \eta, \theta > 0$ وجود داشته باشند به نحوی که

$$\|e(t)\| \le \eta \|e(0)\| \exp(-t/\theta) \tag{۱۲}$$

برای هر $t \ge 0$ و هر پاسخ $e(\cdot)$ از معادله (۹) که از یک حالت اولیه درون $B_\varepsilon = \{e \in R^n \mid \|e\| < \varepsilon\}$ آغاز شود، برقرار باشد. [۱۴، بخش ۵، صفحه ۱۴۲]

تعریف ۲- رؤیت‌گر پیشنهادی داده شده با معادلات (۳) تا (۵) یک رؤیت‌گر نمایی است، اگر معادله دیفرانسیل (۹) یک نقطه تعادل پایدار نمایی محلی در $e(t) = 0$ داشته باشد [۱۵].

۳- تحلیل پایداری نمایی

در این بخش، یک دسته شرایط کافی که پایداری نمایی رؤیت‌گر پیشنهادی را تضمین می‌کند، بدست می‌آید. توجه کنید که در آنچه در پیش روست نامساوی ماتریسی $\Omega \le \Delta$ و $\Omega - \Delta \le 0$ بدین معنی است که ماتریس $\Omega - \Delta$ منفی نیمه معین است.

قضیه ۱- سیستم زمان-پیوسته غیرخطی (۱) که در نمایش SDC (۲) قرار گرفته را به همراه رؤیت‌گر مبتنی بر SDRE پیشنهادی (۳) تا (۵) مد نظر قرار دهید. اجازه دهید تا فرضیات زیر ارضاء شوند:

۱) ماتریس وابسته به حالت متغیر با زمان $C(x(t))$ از بالا کراندار باشد:

$$\|C(x(t))\| \le \bar{c} \tag{۱۳}$$

که $\bar{c} > 0$ یک عدد حقیقی است.

۲) فرض کنید اعداد $\sigma, \rho > 0$ وجود دارند به گونه‌ای که برای هر $t \ge 0$ داشته باشیم

$$\|x(t)\| \le \sigma, \|u(t)\| \le \rho \tag{۱۴}$$

۳) پاسخ $P(t)$ برای معادله ریکاتی دیفرانسیلی (۶) برای اعداد حقیقی مثبت $\underline{p}, \overline{p} > 0$، به صورت زیر کراندار باشد

$$\underline{p}I \le P(t) \le \overline{p}I \qquad (۱۵)$$

۴) نمایش SDC به گونه‌ای انتخاب شود که ماتریس‌های $A(x)$، $B(x)$ و $C(x)$ لیپ‌شیتز محلی باشند. به عبارت دیگر اعداد ثابت $k_A, k_B, k_C > 0$ موجود باشند به نحوی که نامساوی‌های:

$$\|A(x_1) - A(x_2)\| \le k_A \|x_1 - x_2\| \qquad (۱۶)$$

$$\|B(x_1) - B(x_2)\| \le k_B \|x_1 - x_2\| \qquad (۱۷)$$

$$\|C(x_1) - C(x_2)\| \le k_C \|x_1 - x_2\| \qquad (۱۸)$$

برای $x_1, x_2 \in R^n$ و به ترتیب با $\|x_1 - x_2\| \le \varepsilon_A$، $\|x_1 - x_2\| \le \varepsilon_B$ و $\|x_1 - x_2\| \le \varepsilon_C$ صادق باشند. آنگاه رؤیت‌گر پیشنهادی یک رؤیت‌گر نمایی است، به شرطی که پارامتر طراحی α نامساوی زیر را برآورده کند

$$\alpha > \frac{\overline{c}k_C\sigma\,\underline{p}}{\underline{r}} + k_A\sigma + k_B\rho - \frac{\underline{q}\,\underline{p}}{2\overline{p}^2} \qquad (۱۹)$$

که در آن $\underline{r} = \lambda_{\min}(R)$ و $\underline{q} = \lambda_{\min}(Q)$ می‌باشد.

اجازه دهید قبل از اثبات قضیه نکات زیر را در خصوص شرایط پایداری فوق بیان نماییم.

نکته ۱: نامساوی‌های (۱۳) و (۱۴) شرایط سخت‌گیرانه‌ای نیستند. به طور مشخص، در بسیاری از کاربردها متغیرهای حالت، که اغلب نماینده کمیت‌های فیزیکی هستند، کراندارند. کراندار بودن ورودی کنترل نیز یک فرض بدیهی به نظر می‌رسد. بنابراین، نامساوی‌های (۱۴) به آسانی برآورده می‌شوند. وانگهی، اگر $C(x)$ (۱۳) را برای هر مقدار معقول از بردار حالت ارضاء کند، بدون از دست دادن کلیت مساله، می‌توانیم فرض کنیم که (۱۳) نیز در حالت کلی صادق است.

نکته ۲: نامساوی (۱۵) که به نظر شرط کلیدی در تحلیل پایداری است، به طور نزدیکی به خصوصیات رؤیت‌پذیری و آشکاری‌پذیری سیستم تحت مشاهده ارتباط پیدا می‌کند. این موضوع در بخش بعد بحث شده است.

نکته ۳: فرض شرایط لیپ‌شیتز (۱۶) تا (۱۸) بسیار مرسوم است و در [12] و بسیاری دیگر از مقالات نیز در نظر گرفته شده‌اند. در نتیجه، در مقایسه با مطالعات قبلی بر روی رؤیت‌گرهای SDRE، هیچ شرط محدود کننده جدیدی برای نمایش SDC انتخابی تحمیل نشده است. در ضمن، درجات آزادی اضافی که در هر تکنیک مبتنی بر SDRE فراهم می‌گردد، علاوه بر به کارگیری در بهبود عملکرد، پرهیز از تکینگی یا جلوگیری از رؤیت‌ناپذیری، می‌تواند در برآوردن نامساوی‌های (۱۶) تا (۱۸) نیز مفید واقع شود.

نکته ۴: روشن است که ثابت‌های لیپ‌شیتز k_A، k_B و k_C به صورت تحلیلی از دینامیک سیستم استخراج می‌شوند. کران‌های $\underline{r}$ و $\underline{q}$ را نیز پس از طراحی ماتریس‌های R و Q می‌توان بدست آورد. همچنین، ρ با توجه به حد اشباع عملگرها، هرچند به صورت محافظه‌کارانه، و σ و $\overline{c}$ به طور تحلیلی تعیین می‌شوند. کران‌های $\underline{p}$ و $\overline{p}$ برای ماتریس کوواریانس $P(t)$ نیز بر اساس شرایط رؤیت‌پذیری و کنترل‌پذیری سیستم قابل محاسبه هستند (بخش بعد را ببینید). به این ترتیب، مشاهده می‌شود که برقراری نامساوی (۱۹) را می‌توان از قبل تصدیق نمود.

نکته ۵: صرف نظر از جزئیات، نامساوی (۱۹) به این معنی است که α باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب گردد. به طور شگفت‌آوری، این موضوع موافق با هدف بهبود عملکرد است که یک ثابت زمانی کوچک‌تر را ایجاب می‌کند.

نکته ۶: می‌توان نشان داد مادامی که خطای تخمین همچنان پایدار نمایی باقی بماند، شرط نامساوی (۱۹) مرتفع می‌شود مشروط بر آن‌که نامساوی‌های (۱۶) تا (۱۸) با شرایط لیپ‌شیتز محدودتری با توان دو، مثلا $\|A(x_1) - A(x_2)\| \le k_A \|x_1 - x_2\|^2$، جایگزین شوند. به آسانی می‌توان اثبات قضیه ۱- را برای این حالت اصلاح کرد

برای اثبات قضیه، لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱- ماتریس مثبت معین و $p \times p$ -بعدی R را با فرض $R \ge \underline{r}I$ در نظر بگیرید. فرض کنید که ماتریس $K(t)$ و غیرخطی‌گری‌های $\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))$ و $\chi(x(t), \hat{x}(t))$ به ترتیب با معادلات (۴)، (۱۰) و (۱۱) داده می‌شوند. آنگاه تحت فرضیات قضیه ۱، اعداد حقیقی $\varepsilon, \kappa > 0$ وجود دارند به نحوی که ماتریس $\Pi(t) = P^{-1}(t)$ برای هر $\|x - \hat{x}\| \le \varepsilon$، نامساوی زیر را برآورده سازد:

$$(x-\hat{x})^T \Pi \varphi(x,\hat{x},u) - (x-\hat{x})^T \Pi K \chi(x,\hat{x}) \le \kappa \|x-\hat{x}\|^2 \qquad (۲۰)$$

اثبات- به کارگیری نامساوی مثلثی، $K = PC^TR^{-1}$ و $\Pi P = I$ منجر می‌شود به

$$\begin{aligned} &\|(x-\hat{x})^T \Pi \varphi(x,\hat{x},u) - (x-\hat{x})^T \Pi K\, \chi(x,\hat{x})\| \le \\ &\|(x-\hat{x})^T \Pi \varphi(x,\hat{x},u)\| + \|(x-\hat{x})^T C(\hat{x})^T R^{-1} \chi(x,\hat{x})\| \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با توجه به فرض لیپ‌شیتز بودن ماتریس‌های $A(x)$، $B(x)$ و $C(x)$ و با استفاده از نامساوی (۱۴) داریم

$$\begin{aligned} \|\varphi(x,\hat{x},u)\| &\le \|[A(x) - A(\hat{x})]x\| + \|[B(x) - B(\hat{x})]u\| \\ &\le (k_A\sigma + k_B\rho)\|x-\hat{x}\| \\ \|\chi(x,\hat{x})\| &= \|[C(x) - C(\hat{x})]x\| \le k_C\sigma\|x-\hat{x}\| \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

با در نظر گرفتن نامساوی‌های (۲۲)، $\|\Pi\| \le 1/\underline{p}$، $\|C\| \le \bar{c}$ و $\|R^{-1}\| \le 1/\underline{r}$ برای $\|x-\hat{x}\| \le \varepsilon$ با $\varepsilon = \min(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C)$ خواهیم داشت:

$$\left\|(x-\hat{x})^T \Pi \varphi(x,\hat{x},u) - (x-\hat{x})^T \Pi K \chi(x,\hat{x})\right\| \le \|x-\hat{x}\| \frac{(k_A \sigma + k_B \rho)}{\underline{p}} \|x-\hat{x}\| + \|x-\hat{x}\| \frac{\bar{c} k_C \sigma}{\underline{r}} \|x-\hat{x}\| \qquad (۲۳)$$

به این ترتیب، نامساوی (۱۹) بلافاصله با

$$\kappa = \frac{(k_A \sigma + k_B \rho)}{\underline{p}} + \frac{\bar{c} k_C \sigma}{\underline{r}} \qquad (۲۴)$$

نتیجه می‌شود.

اثبات قضیه ۱- معادله دیفرانسیل (۹) برای خطای تخمین را در نظر می‌گیریم و با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف زیر، پایداری نمایی آن را ثابت می‌کنیم

$$V(e(t),t) = e^T(t)\Pi(t)e(t) \qquad (۲۵)$$

که در آن $\Pi(t) = P^{-1}(t)$ می‌باشد. به دلیل برقراری نامساوی (۱۵)، کران‌های زیر را برای تابع لیاپانوف داریم

$$\frac{1}{\bar{p}}\|e(t)\|^2 \le V(e(t),t) \le \frac{1}{\underline{p}}\|e(t)\|^2 \qquad (۲۶)$$

این معادله بیان می‌دارد که $V(e(\cdot),\cdot)$ مثبت معین و کاهنده بوده و لذا، یک تابع کاندید لیاپانوف مناسب است. مشتق زمانی تابع لیاپانوف به صورت زیر است:

$$\dot{V}(e(t),t) = \dot{e}^T(t)\Pi(t)e(t) + e^T(t)\dot{\Pi}(t)e(t) + e^T(t)\Pi(t)\dot{e}(t) \qquad (۲۷)$$

با جاگذاری $\dot{e}(t)$ از معادله دیفرانسیل (۹) و بعد از اندکی مرتب‌سازی جملات، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t),t) &= e^T(t)\dot{\Pi}(t)e(t) + \\ & e^T(t)\left[A(\hat{x}(t)) - K(t)C(\hat{x}(t))\right]^T e(t) \\ & + e^T(t)\Pi(t)\left[A(\hat{x}(t)) - K(t)C(\hat{x}(t))\right]e(t) \\ & + 2e^T(t)\Pi(t)\left[\varphi(x(t),\hat{x}(t),u(t)) - K(t)\chi(x(t),\hat{x}(t))\right] \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

با استناد به لم ۱ به همراه مد نظر قراردادن معادله (۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t),t) \le\; & e^T(t)\left[\dot{\Pi}(t) + \Pi(t)A(\hat{x}(t)) + A^T(\hat{x}(t))\Pi(t) \right. \\ & \left. - 2C^T(\hat{x}(t))R^{-1}C(\hat{x}(t))\right]e(t) + 2\kappa\|e(t)\|^2 \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

که در آن $\|e(t)\| \le \varepsilon$، و κ با معادله (۲۴) داده می‌شود و $\varepsilon = \min(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C)$ است. در نظر گرفتن رابطه زیر

$$\dot{\Pi}(t) = -\Pi(t)\dot{P}(t)\Pi(t) \qquad (۳۰)$$

به همراه معادله ریکاتی دیفرانسیلی (۵) نتیجه می‌دهند

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t),t) \le\; & -2\alpha e^T(t)\Pi(t)e(t) + 2\kappa\|e(t)\|^2 - \\ & e^T(t)\left[\Pi(t)Q\Pi(t) + C^T(\hat{x}(t))R^{-1}C(\hat{x}(t))\right]e(t) \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

کوچکترین مقدار ویژه ماتریس مثبت معین Q را با $\underline{q}$ نشان داده‌ایم. پس داریم $\underline{q}I < Q$. این نامساوی به همراه کران‌های (۱۵) برای $P(t)$، نامساوی زیر را به دنبال دارد

$$\dot{V}(e(t),t) \le -2\alpha V(e(t),t) - \left(\frac{\underline{q}}{\bar{p}^2} - 2\kappa\right)\|e(t)\|^2 \qquad (۳۲)$$

با توجه به نامساوی (۲۶) می‌توان نوشت

$$-\|e(t)\|^2 \le -\underline{p}V(e(t),t) \le -\frac{\underline{p}}{\bar{p}}\|e(t)\|^2 \qquad (۳۳)$$

لذا، با جایگذاری (۳۳) در (۳۲) برای $\|e(t)\| \le \varepsilon$ خواهیم داشت:

$$\dot{V}(e(t),t) \le -\left(2\alpha + \frac{\underline{q}\,\underline{p}}{\bar{p}^2} - 2\kappa\underline{p}\right)V(e(t),t) \qquad (۳۴)$$

بنابراین اگر $2\alpha + \frac{\underline{q}\,\underline{p}}{\bar{p}^2} - 2\kappa\underline{p} > 0$ باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که $\dot{V}(e(t),t)$ به صورت محلی منفی معین است. به این ترتیب، با بهره بردن از نتایج متداول در مورد روش مستقیم لیاپانوف (به عنوان مثال [۱۴، بخش ۵-۳] را ببینید)، استنباط می‌شود که معادله دیفرانسیل (۹) یک نقطه تعادل پایدار مجانبی یکنواخت در مبدا دارد. افزون بر این، با جداسازی متغیرها و انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$V(e(t),t) \le V(e(0),0)\exp\left(-\left[2\alpha + \frac{\underline{q}\,\underline{p}}{\bar{p}^2} - 2\kappa\underline{p}\right]t\right) \qquad (۳۵)$$

که به انضمام نامساوی(۲۶) منجر می‌شود به

$$\|e(t)\| \le \sqrt{\bar{p}/\underline{p}}\,\|e(0)\|\exp\left(-\left[\alpha + \frac{\underline{q}\,\underline{p}}{2\bar{p}^2} - \kappa\underline{p}\right]t\right) \qquad (۳۶)$$

به عبارت دیگر، نامساوی (۱۳) با $\eta = \sqrt{\bar{p}/\underline{p}}$ و $\theta^{-1} = \alpha + \underline{q}\,\underline{p}/2\bar{p}^2 - \kappa\underline{p}$ معتبر خواهد بود. این نکته اثبات قضیه ۱ را به پایان می‌رساند. ■

نکته ۷: به ازای $\alpha = 0$ رؤیت‌گر SDRE دیفرانسیلی استاندارد (همان SDDRE) حاصل می‌شود که، با توجه به قضیه فوق، یک رؤیت‌گر نمایی است اگر نامساوی زیر بر قرار باشد.

$$\frac{\underline{q}\,\underline{p}}{2\bar{p}^2} - \kappa\underline{p} > 0 \qquad (۳۷)$$

نکته ۸: بدیهی است که برآوردن (۱۹) بسیار آسان‌تر از (۳۷) است که بسیاری از پارامترهای آن در اختیار ما نیست. به این ترتیب، نه تنها یک رؤیت‌گر غیرخطی با پایداری نمایی تضمین شده پیشنهاد شده، بلکه پایداری رؤیت‌گر SDDRE زمان-پیوسته در یک قالب جدید تحلیل شده است.

نکته ۹: اگر $\frac{q\underline{p}}{2\overline{p}^2}-\kappa\underline{p}>0$، در واقع اگر رؤیت‌گر SDDRE اصلی پایدار نمایی باشد، آنگاه ثابت زمانی θ برای کاهش نمایی خطا در نامساوی (۱۲)، $\theta<\alpha^{-1}$ را برآورده می‌کند. در این وضعیت، با انتخاب یک مقدار مناسب $\alpha>0$ و با استفاده از $\theta<\alpha^{-1}$، مشاهده می‌شود که ثابت θ در (۱۲) می‌تواند از پیش اختصاص یابد. به عبارت دیگر یک رؤیت‌گر با درجه پایداری تعیین‌شده خواهیم داشت.

۴- آشکارپذیری نمایش SDC

با توجه به معادله (۱۵)، برای اثبات همگرایی خطای تخمین نیازمند اعمال کران‌هایی بر روی پاسخ $P(t)$ در معادله ریکاتی دیفرانسیلی (۵) هستیم. نتایج جالب توجه‌ای درباره رابطه بین رؤیت‌پذیری سیستم غیرخطی و وجود پاسخ‌های مثبت معین و کراندار برای معادلات ریکاتی دیفرانسیلی، در [۱۳] ارائه گردیده است. همچنین به کمک حل مسائل کنترل بهینه دوگان، کران‌های بالا و پائین برای کوواریانس خطا، $P(t)$، بدست آمده‌اند.

در [۱۶]، یک رؤیت‌گر زمان-گسسته مبتنی بر SDRE در نظر گرفته شده و کران‌هایی برای معادله ریکاتی حاصل شده‌اند. این کران‌ها از یک شرط رؤیت‌پذیری یکنواخت استنتاج می‌شوند. اما در آن تحقیق، سیستم غیرخطی مشابه یک سیستم خطی غیر متغیر با زمان تلقی شده و واقعیت وابستگی به حالت نادیده گرفته شده است. در این قسمت، بر اساس نتایج نشان شده در [۱۳]، بحث می‌کنیم که چگونه مفهوم آشکاری‌پذیری یکنواخت زیر به کراندار بودن پاسخ $P(t)$ در معادله SDDRE زمان-پیوسته (۵) مرتبط می‌گردد.

تعریف ۳- زوج $\{C(x),A(x)\}$ یک پارامتریزه‌کردن SDC آشکارپذیر یکنواخت برای سیستم (۱) نامیده می‌شود، اگر یک تابع ماتریسی کراندار همچون $\Lambda(x)$ و عدد حقیقی $\gamma>0$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که برای هر $w,x\in R^n$ رابطه زیر تحقق یابد

$$w^T\left[A(x)+\Lambda(x)C(x)\right]w\le-\gamma\|w\|^2 \qquad (۳۸)$$

علت معرفی تعریف ۳- به اثبات لم ۲- برمی‌گردد.

نکته ۱۰: شرط کنترل‌پذیری نقطه‌ای لزوما معادل کنترل‌پذیری غیرخطی نیست. همین مطلب در مورد شرط آشکارپذیری یکنواخت ارائه شده در تعریف ۳ و رؤیت‌پذیری غیرخطی سیستم نیز صادق است.

لم ۲- سیستم غیرخطی پایدارپذیر توصیف شده با معادله (۱) را به همراه پاسخ $P(t)$ از معادله ریکاتی دیفرانسیلی (۵) را نظر بگیرید. فرض کنید که شرایط زیر برقرار باشند.

۱) ماتریس طراحی Q مثبت معین و ماتریس سیستم $A(x)$ نُرم محدود داشته باشد، یعنی $\|A\|\le\infty$،

۲) نمایش SDC به گونه‌ای انتخاب شود که زوج $\{C(x),A(x)+\alpha I\}$ بر طبق تعریف ۳ آشکارپذیر یکنواخت باشد،

۳) شرط اولیه $P(0)$ در معادله ریکاتی دیفرانسیلی (۵) مثبت معین باشد.

آنگاه $P(t)$ نامساوی (۱۵) را برآورده می‌کند.

اثبات- این لم که مستقیما از [۱۳، قضایای ۴ و ۷] نتیجه می‌شود، در پیوست آمده است. ■

به طور خلاصه، لم فوق نشان می‌دهد که نامساوی (۱۵) می‌تواند با شرطی با معنی فیزیکی در مورد آشکارپذیری یکنواخت سیستم جایگزین گردد. این موضوع یک نکته بسیار مهم را یادآوری می‌کند.

نکته ۱۱: در صورتی که سیستم غیرخطی داده شده با (۱) با تعبیر (۳۸) آشکارپذیر یکنواخت باشد، آنگاه، زوج $\{C(x),A(x)+\alpha I\}$ نیز برای همان تابع ماتریسی کراندار آشکارپذیر یکنواخت خواهد بود، به شرطی که $\alpha<\gamma$ باشد. می توان نشان داد که عکس این مطلب نیز همواره صحیح است.

۵- نتایج شبیه‌سازی

۵-۱ مدل غیرخطی درجه دوم

سیستم غیرخطی بدون ورودی و زمان-پیوسته زیر را با بردار حالت $x=\left[x_1(t)\quad x_2(t)\right]^T$ در نظر بگیرید

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=0.01x_1(t)-x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)-0.003x_2^2(t)\end{cases} \qquad (۳۹)$$

$$y(t)=x_1(t) \qquad (۴۰)$$

این مدل را می‌توان به صورت زیر پارامتریزه نمود

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A(x)x\\ y(t)&=C(x)x\end{aligned} \qquad (۴۱)$$

که در آن،

$$A(x)=\begin{bmatrix}0.01 & -1\\ 1 & -0.003x_2\end{bmatrix} \qquad (۴۲)$$

و $C(x)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$ یک ماتریس ثابت است. ماتریس رؤیت‌پذیری وابسته به حالت عبارت است از

$$O(x)=\begin{bmatrix} C(x) \\ C(x)A(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.01 & -1 \end{bmatrix} \qquad (۴۳)$$

چون $O(x)$ در سرتاسر R^2 رتبه کامل است، سیستم رؤیت‌پذیر نقطه‌ای است. همچنین، می‌توان تصدیق کرد که این ماتریس‌ها شرط آشکاری‌پذیری یکنواخت در تعریف ۳ را با تابع ماتریسی کراندار زیر

$$\Lambda(x)=\begin{bmatrix} -(0.01+a)+0.003x_2 \\ (b-1)+0.003(-a+0.003x_2) \end{bmatrix} \qquad (۴۴)$$

و برای اعداد حقیقی مثبت a و b برآورده می‌کنند. زوج $\{C(x), A(x)+\alpha I\}$ نیز با تابع ماتریسی داده شده در (۴۴) آشکارپذیر یکنواخت است، اگر نامساوی زیر برقرار باشد

$$2\alpha < a < \frac{\alpha^2+b}{\alpha} \qquad (۴۵)$$

توجه کنید که لازم است $\alpha < \sqrt{b}$ باشد. برای یک پارامتر طراحی معین $\alpha > 0$، همواره می‌توان مقادیر $a,b>0$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که نامساوی فوق تامین شود. بنابراین، با توجه به لم ۲ معادله ریکاتی دیفرانسیلی (۵) یک پاسخ کراندار و مثبت معین خواهد داشت.

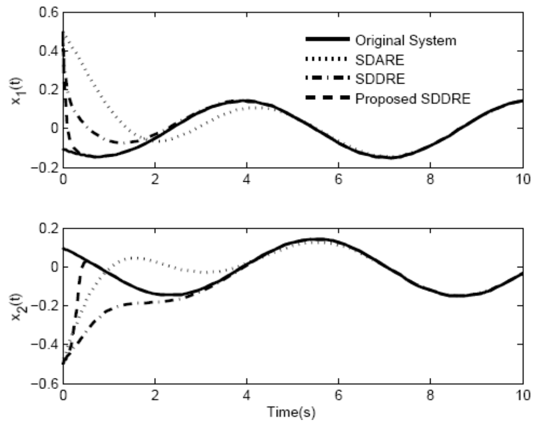
آشکارا، ماتریس خروجی C یک ماتریس لیپ‌شیتز بوده و نامساوی (۱۸) را با هر عدد حقیقی مثبت k_c برآورده می‌سازد. از (۴۲) نتیجه می‌شود که برای هر $x, \tilde{x} \in R^2$

$$\|A(x)-A(\tilde{x})\| \le k_A \|x-\tilde{x}\| \qquad (۴۶)$$

که در آن $k_A = 0.003$. حال سیستم را از حالت اولیه $x_0 = [-0.1 \quad 0.1]^T$ شبیه‌سازی می کنیم. رؤیت‌گر SDRE پیشنهادی نیز با استفاده از (۳) تا (۵) و با حالت اولیه $\hat{x}_0 = [0.5 \quad -0.5]$ پیاده سازی شده است. پارامترهای طراحی را به صورت $\alpha = 10$، $P(0)=10I_2$، $Q=10I_2$ و $R=1$ انتخاب کرده‌ایم. مقادیر $\bar{c}$، $\underline{p}$، $\bar{p}$، $\underline{r}$، $\underline{q}$ و σ نیز محاسبه شده و در جدول ۱ آورده شده‌اند. همان‌گونه که در این جدول مشاهده می‌شود نامساوی (۱۹) برآورده شده است. بنابراین، در این مثال مادامی که $t \to \infty$، $e(t)$ به صورت نمایی به صفر میل خواهد کرد. توجه کنید که در این مثال $k_B \rho = 0$ است. اگرچه، به راحتی می‌توان نشان داد که در این مثال شرایط مذکور در نکته ۱۰ تامین می‌شود و لذا، نامساوی (۱۹) به طور خودکار صادق خواهد بود.

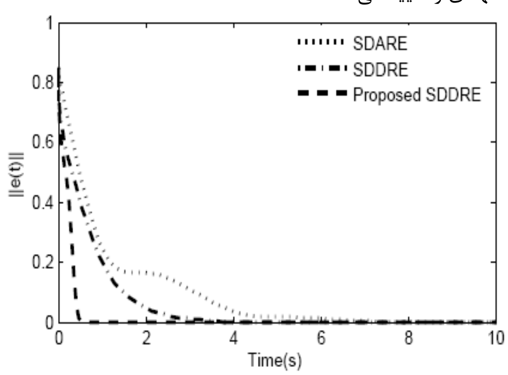
جدول ۱: مقادیر کران‌های مختلف در قضیه ۱ و برای مدل غیرخطی درجه دوم

Bound	$\bar{c}$	$\underline{p}$	$\bar{p}$	$\underline{r}$	$\underline{q}$
Value	1	10	84.6	1	10
Bound	σ	k_A	k_C	α	$\alpha-\frac{\bar{c}k_C\sigma\underline{p}}{\underline{r}}-k_A\sigma+\frac{\underline{q}\,\underline{p}}{2\bar{p}^2}$
Value	0.149	0.003	0.1	10	9.86

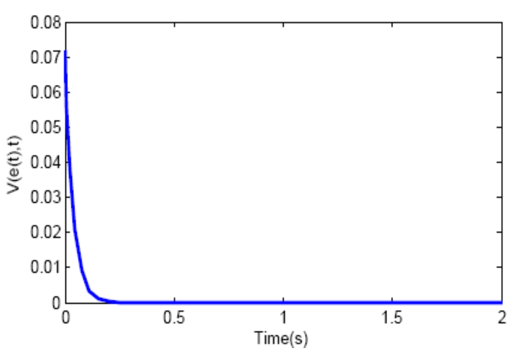


شکل ۱: حالت واقعی $x(t)$ و حالت تخمینی $\hat{x}(t)$ حاصل از رؤیت‌گرهای SDARE، SDDRE و رؤیت‌گر پیشنهادی

به منظور انجام مقایسه، رؤیت‌گرهای SDARE و SDDRE استاندارد را نیز از شرایط اولیه یکسان و با مقادیر مشابه برای ماتریس‌های وزنی R و Q شبیه‌سازی شده اند. شکل ۱ حالت‌های واقعی و تخمینی بدست آمده از این سه رؤیت‌گر را نشان می‌دهد و شکل ۲ نُرم خطا در تخمین‌ها را به تصویر می‌کشد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، رؤیت‌گر پیشنهادی در مقایسه با دو رؤیت‌گر دیگر، به مراتب بهتر عمل می‌کند. شکل ۳ تابع لیاپانوف (۲۵) را برای رؤیت‌گر پیشنهادی نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود که برای همه زمانهای $t>0$، تابع $V(e(t),t)$ مثبت معین و کاهشی است. این موضوع همگرایی و پایداری رؤیت‌گر پیشنهادی را تأیید می‌کند.



شکل ۲: نُرم خطای تخمین برای سه رؤیت‌گر مبتنی بر SDRE متفاوت



شکل ۳: مقادیر زمانی تابع لیاپانوف $V(e(t),t)$ برای رؤیت‌گر پیشنهادی

۲-۵ موتور القایی

برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، از آن برای تخمین شار و سرعت زاویه‌ای ماشین‌های القایی استفاده می‌کنیم (به عنوان مثال [۱۷، ۱۸] را ببینید). معادلات حالت نُرمالیزه شده یک ماشین القایی سه فاز متقارن به صورت زیر ارائه شده اند:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= k_1 x_1(t) + u_1(t) x_2(t) + k_2 x_3(t) + u_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -u_1(t) x_1(t) + k_1 x_2(t) + k_2 x_4(t) \\
\dot{x}_3(t) &= k_3 x_1(t) + k_4 x_3(t) + \left(u_1(t) - x_5(t)\right) x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) &= k_3 x_2(t) - \left(u_1(t) - x_5(t)\right) x_3(t) + k_4 x_4(t) \\
\dot{x}_5(t) &= k_5 \left(x_1(t) x_4(t) - x_2(t) x_3(t)\right) + k_6 u_3(t)
\end{aligned} \qquad (۴۷)$$

که x_1, x_2 و x_3, x_4 به ترتیب مولفه‌های شار استاتور و روتور در صفحه عمود بر محود چرخش هستند و x_5 معرف سرعت زاویه‌ای است. ورودی‌ها توسط u_1 به عنوان فرکانس ولتاژ استاتور، u_2 به عنوان دامنه ولتاژ استاتور و u_3 به عنوان گشتاور بار معرفی می‌شوند. $k_1, \ldots, k_6$ پارامترهای ثابتی هستند که به ساختمان ماشین و سیستم درایو در نظر گرفته شده بستگی دارند. معادله مشاهده سیستم با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= k_7 x_1(t) + k_8 x_3(t) \\
y_2(t) &= k_7 x_2(t) + k_8 x_4(t)
\end{aligned} \qquad (۴۸)$$

که در آن، k_7 و k_8 پارامترهای تعریف شده توسط کاربر بوده، و لذا $y_1(t)$ و $y_2(t)$ جریان‌های استاتور نُرمالیزه شده می‌باشند.

نمایش SDC زیر برای (۴۷) و (۴۸) را در نظر بگیرید که در آن پارامتر t حذف شده است.

$$A(x) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & k_4 & -x_5 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & k_4 & x_3 \\ k_5 x_4 & -k_5 x_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۴۹)$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} x_2 & 1 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix} \qquad (۵۰)$$

$$C(x) = \begin{bmatrix} k_7 & 0 & k_8 & 0 & 0 \\ 0 & k_7 & 0 & k_8 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۵۱)$$

دلیل اصلی به کارگیری نمایش فوق از میان انتخاب‌های ممکن متعدد، در ساده‌تر برآورده کردن شرایط لیپ‌شیتز (۱۶) تا (۱۸) نهفته است. بدیهی است که، نامساوی (۱۸) با ماتریس خروجی (۵۱) بلافاصله برآورده می‌گردد. اما، بررسی لیپ‌شیتز بودن ماتریس‌های (۴۹) و (۵۰) راحت نبوده و مستلزم اندکی محاسبه است. برای هر $x, \hat{x} \in R^5$، در مورد $B(x)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\left\| B(x) - B(\hat{x}) \right\| = \\
&\sqrt{(x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2 + (x_3 - \hat{x}_3)^2 + (x_4 - \hat{x}_4)^2} \\
&\le k_B \left\| x - \hat{x} \right\|
\end{aligned} \qquad (۵۲)$$

که k_B می‌تواند هر عدد حقیقی مثبتی باشد. بنابراین (۱۷) نیز صادق است. همچنین، در مورد $A(x)$ داریم

$$\left\| A(x) - A(\hat{x}) \right\| = \max \begin{pmatrix} |x_3 - \hat{x}_3|, |x_5 - \hat{x}_5|, \\ k_5 \sqrt{(x_3 - \hat{x}_3)^2 + (x_4 - \hat{x}_4)^2} \end{pmatrix} \qquad (۵۳)$$

بنابراین، کمیت $\left\| A(x) - A(\hat{x}) \right\|$ بسته به موقعیت نسبی بردارهای x و $\hat{x}$ و همین‌طور مقدار پارامتر k_5 متفاوت بوده، و یکی از مقادیر داخل پرانتز را اختیار می‌کند. با این وجود، می‌توان گفت که نامساوی (۱۶) نیز به ازای $k_A = \max\left(1, k_5\right)$ برقرار خواهد بود. بعلاوه، کراندار بودن ماتریس $C(x)$ در (۵۱) نیز امری آشکار است. به همین ترتیب، به موجب محدود بودن کمیت‌های فیزیکی همچون دامنه و فرکانس ولتاژ استاتور و گشتاور بار، و با توجه به پایدارسازی سیستم توسط ورودی-های کنترل می‌توان صحت نامساوی‌های (۱۵) را تأیید نمود. همچنین، می‌توان نشان داد که نمایش SDC داده شده با ماتریس‌های (۴۹) تا (۵۱)، شرط آشکارپذیری نقطه‌ای و در نتیجه شرط آشکارپذیری یکنواخت در لم ۲ را تامین می‌کند. بنابراین، کراندار و مثبت معین بودن پاسخ معادله ریکاتی (۵) نیز نتیجه می‌شود.

برای انجام شبیه‌سازی‌ها، مقدار پارامترهای موتور را به صورت $k_1 = -0.186$، $k_2 = 0.178$، $k_3 = 0.225$، $k_4 = -0.234$، $k_5 = -0.081$، $k_6 = -0.018$، $k_7 = 4.643$ و $k_8 = -4.448$ قرار می‌دهیم، و بردار ورودی را $u(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ فرض می‌کنیم.

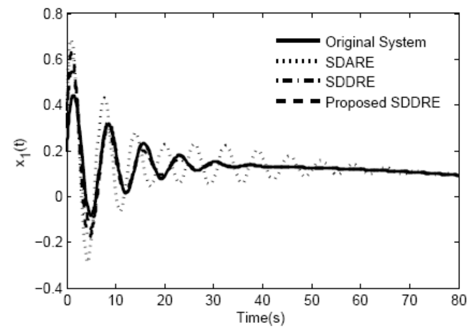
ابتدا وضعیتی متناظر با یک خطای اولیه کوچک را در نظر می-گیریم. برای این منظور، حالت اولیه سیستم و رؤیت‌گر را به ترتیب برابر $x(0) = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.6 & -0.4 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$ و $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.3 & 0.2 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$ قرار می‌دهیم. به منظور انجام مقایسه، رؤیت‌گرهای SDARE و SDDRE را نیز برای حالت‌های اولیه یکسان شبیه‌سازی کرده‌ایم. جدول ۲ پارامترهای طراحی را برای هر یک از این دو رؤیت‌گر و همین‌طور برای رؤیت‌گر پیشنهادی نشان می‌دهد.

جدول۲: پارامترهای طراحی رؤیت‌گرهای SDARE، SDDRE و رؤیت‌گر SDRE نمایی در مثال موتور القایی

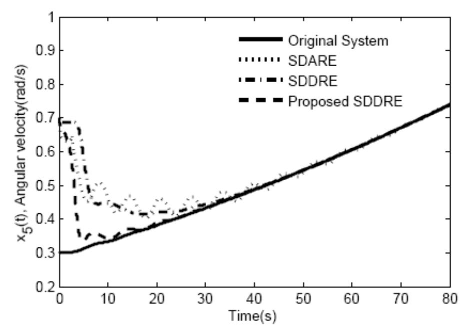
Design Parameter / Observer Type	Q	R	P_o	α
SDARE	I_5	$10I_2$	-	-
SDDRE	I_5	I_2	I_2	-
Proposed SDRE	I_5	I_2	$10I_2$	2

مقادیر واقعی و تخمینی بدست آمده از این سه رؤیت‌گر برای اولین متغیر حالت (یکی از مولفه‌های شار استاتور)، $x_1(t)$، و پنجمین متغیر حالت (سرعت زاویه‌ای)، $x_5(t)$، به ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵

نمایش داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که با برآورده شده شرایط قضیه ۱، تخمین‌های حالت حاصل از رؤیت‌گر پیشنهادی به سمت مقادیر واقعی متناظرشان همگرا می‌شوند. بعلاوه، همچون مثال مدل درجه دوم، رؤیت‌گر SDRE نمایی عملکرد بهتری را به دنبال دارد.

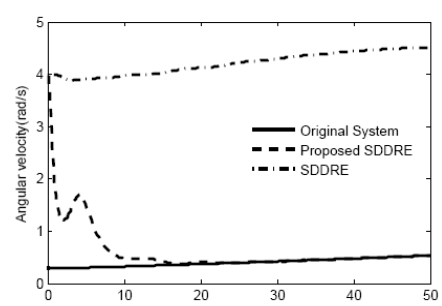


شکل ۴: حالت واقعی $x_1(t)$ و مقادیر تخمینی بدست آمده از رؤیت‌گرهای SDARE، SDDRE و رؤیت‌گر پیشنهادی به ازای خطای تخمین اولیه کوچک

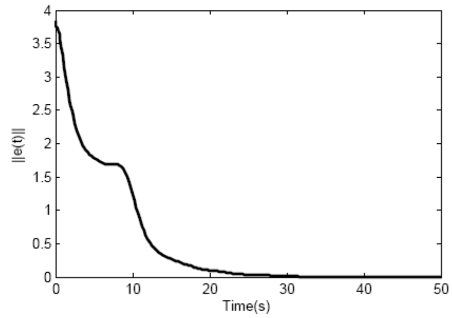


شکل ۵: سرعت زاویه‌ای واقعی و مقادیر تخمینی بدست آمده از سه رؤیت‌گر مبتنی بر SDRE متفاوت به ازای خطای تخمین اولیه کوچک

اکنون، با همان حالت اولیه قبلی برای سیستم و حالت اولیه $\hat{x}(0)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.3 & -0.2 & 4\end{bmatrix}$ برای رؤیت‌گر، وضعیتی متناظر با یک خطای اولیه بزرگ را متصور می‌شویم. رؤیت‌گر پیشنهادی با مقادیر $\alpha=1$، $Q=I_5$، $R=I_2$ و $P(0)=100I_2$ شبیه‌سازی شده است. رؤیت‌گر SDDRE معمول نیز با فرض $Q=10I_5$، $R=I_2$ و $P(0)=10I_2$ و به ازای حالت اولیه یکسان شبیه‌سازی می‌شود و شکل‌های ۶ تا ۸ نتایج شبیه‌سازی را نشان می‌دهند.

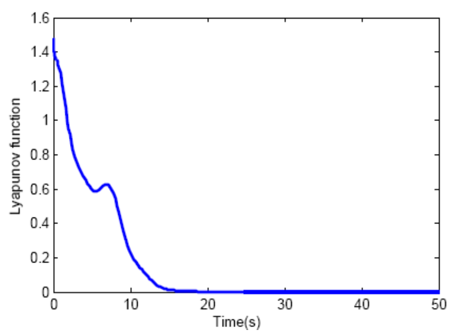


شکل ۶: سرعت زاویه‌ای $x_5(t)$ برای سیستم اصلی، رؤیت‌گر SDDRE مرسوم و رؤیت‌گر پیشنهادی به ازای خطای تخمین اولیه بزرگ



شکل ۷: نُرم خطای تخمین برای رؤیت‌گر SDRE پیشنهادی به ازای خطای اولیه بزرگ

همان‌گونه که در شکل ۶ ملاحظه می‌گردد، خطای تخمین برای رؤیت‌گر پیشنهادی به صفر میل می‌کند، در حالی که برای رؤیت‌گر SDDRE واگرا می‌شود. به طور کلی، شبیه‌سازی‌های بیشتر نشان می‌دهند که رؤیت‌گر پیشنهادی معمولا حوزه جذب بزرگ‌تری از رؤیت‌گر SDDRE استاندارد دارد. به عبارت دیگر، خطای تخمین اولیه می‌توان بزرگ‌تر باشد. البته، انتخاب بی‌دقت پارامتر آزاد α و $P(0)$ می‌تواند موجب ایجاد نوسانات نامطلوبی شود. شکل ۷ نُرم خطای بین حالت واقعی و حالت تخمینی را برای رؤیت‌گر مبتنی بر SDRE پیشنهادی به تصویر می‌کشد. مقدار تابع لیاپانوف (۲۵) نیز در شکل ۸ آورده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، در طول بازه زمانی کوتاهی تابع لیاپانوف $V(e(t),t)$ افزایش پیدا می‌کند. این نکته تاییدی بر کافی بودن شرایط بدست آمده در قضیه ۱ دارد.



شکل ۸: تابع لیاپانوف $V(e(t),t)$ برای رؤیت‌گر SDRE پیشنهادی به ازای خطای اولیه بزرگ

قابل ذکر است که نتایج این قسمت تنها شرایط کافی برای تضمین همگرایی نمایی خطای تخمین به سمت صفر را فراهم می‌کند و شرط لازم و کافی نمی باشند. همان‌گونه که در مثال مربوط به ماشین القایی مشاهده شده است، از آنجایی که کران‌های بدست آمده با استفاده از عملگرهای نُرم محافظه‌کارانه می‌باشند، تأمین این شرایط کافی در برخی از کاربردها آسان نخواهد بود. تنظیم پارامتر آزاد α و حالت اولیه $P(0)$ در معادله ریکاتی دیفرانسیلی (۵) تأثیر بسزایی بر عملکرد رؤیت‌گر پیشنهادی دارد. مخصوصا زمانی که شرایط کافی مذکور در قضیه ۱ برآورده نشوند یا تأیید صحت آن‌ها به سادگی امکان‌پذیر نباشد، این موضوع حساس‌تر می‌شود. در چنین مواردی، برای جلوگیری از ایجاد نوسانات نامطلوب در خروجی رؤیت‌گر

پیشنهادی، لازم است تا این پارمترها با صرف وقت بیشتری انتخاب شوند.

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای مشکل رویت‌ناپذیری فاصله دو هواپیما از تصاویر دوربین در موارد ناشناخته‌بودن ابعاد هواپیمای پیشرو، الگوریتمی ارائه شده است که با اعمال مانور در قالب شتاب مشخص به هواپیمای تعقیب‌کننده، ابعاد هواپیمای پیشرو را تخمین می‌زند. با در اختیار داشتن ابعاد هواپیمای پیشرو، محاسبه فاصله دو هواپیما از تصاویر دوربین، به سادگی امکان‌پذیر خواهد بود. این روش برای اهداف شتابدار نیز تخمین مناسبی از فاصله به دست داده است. در ادامه الگوریتم تخمین کالمن به عنوان یک الگوریتم بر مبنای رویتگر با فرضیات ساده، فاصله دو هواپیما را به خوبی تخمین زد. این الگوریتم با فرض شتاب برای هواپیمای پیشرو با مشکل همگرایی مواجه می‌شود. مشکل ناشناخته‌بودن شتاب هواپیمای پیشرو از تصاویر دوربین و همچنین تاثیرات نامطلوب باد به کمک کنترل‌کننده مدلغزشی طراحی شده در این مقاله برطرف شده است. این کنترل‌کننده برخلاف سایر کنترل‌کننده‌های مورد استفاده در بررسی‌های مشابه، در عین سادگی در طراحی، عملکردی مقاوم در برابر شتاب ناشناخته هواپیمای پیشرو و اثرات نامطلوب باد، از خود نشان داده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که کنترل‌کننده مدلغزشی طراحی شده در این مقاله، توانسته‌است اهداف ردیابی را با سیگنال کنترل هموار با انرژی کم، برآورده کند.

مراجع

[1] A. J. Krener and W. Respondek, “Nonlinear observer with linearizable error dynamics,” SIAM J. Control & Optim., vol. 23, pp. 197-216, 1985.

[2] B. L. Walcott, M. J. Corless, and S. H Zak, “Comparative study of nonlinear state-observation technique,” International Journal of Control, vol. 45, no. 6, pp. 2109-2132, June 1987.

[3] E. Yaz and A. Azemi, “Sliding mode observer for nonlinear models with unbounded noise and measurement uncertainties,” Dynamics and Control, vol. 3, pp. 217-235, 1993.

[4] E. Yaz and A. Azemi, “Observers design for discrete and continuous nonlinear stochastic systems,” International Journal of Systems Science, vol. 24, no. 12, pp. 2289-2302, 1993.

[5] G. Bornard and H. Hammouri, “A high gain observer for a class of uniformly observable systems,” Proc. of 30th IEEE CDC, pp. 1494-1496, 1991.

[6] A. Gelb, Applied Optimal Estimation, The M.I.T Press, Cambridge, 2001.

[7] C. P. Mracek, J. R. Cloutier, and C. A. D’Souza, “A new technique for nonlinear estimation,” Proc. of the 1996 IEEE Int. Conf. on Control Applications, Dearborn, MI, pp. 338-343, 1996.

[8] C. M. Ewing, “An analysis of the state-dependent Riccati equation nonlinear estimation technique,” In Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Denver, CO, 2000

[9] J. R. Cloutier, “State dependent Riccati equation techniques: An overview,” In Proc. of the American Control Conference, Albuquerque, New Mexico, pp. 932-936, 1997.

[10] D. Haessig and B. Friedland, “State dependent differential Riccati equation for nonlinear estimation and control,” IFAC 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain, 2002.

[11] R. R. Harman and I. Y. Bar-Itzhack, “Pseudolinear and state-dependent Riccati equation filters for angular rate estimation,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 22, no. 5, pp. 723-725, 1999.

[12] H. T. Banks, B. M. Lewis, and H. T. Tran, “Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equation approach”, Computational Optimization and Applications, vol. 39, no. 2, pp. 177-218, March 2009.

[13] J. S. Baras, A. Bensoussan, and M. R. James, “Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters: Special cases,” SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 48, no. 5, pp. 1147-1158, Oct. 1988.

[14] M. Vidyasagar, Nonlinear Systems Analysis, 2nd ed., Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.

[15] S. R. Kou, D. L. Elliot, and T. J. Tarn, “Exponential observers for nonlinear dynamic systems,” Information and Control, vol. 29, pp. 204-216, 1975.

[16] C. Jaganath, A. Ridley, and D. S. Bernstein, “A SDRE-based asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems,” Proc. of American Control Conference, Portland, pp. 3630-3635, 2007.

[17] L. Salvatore, S. Stasi, and L. Tarchioni, “A new EKF-based algorithm for flux estimation in induction machines,” IEEE Trans. on Industrial Electronics, vol. 40, no. 5, pp. 496-504, Oct. 1993.

[18] M. Karabacak, H. Ibrahim Eskikurt, “Speed and current regulation of permanent magnet synchronous motor via nonlinear and adaptive backstepping control”, Mathematical and Computer Modelling, Available online 31 January 2011.