

طراحی یک کنترلگر بازخورد خروجی پویای غیرمتمرکز مقاوم از مرتبه‌ی ثابت برای سامانه‌های مقیاس وسیع با عدم قطعیت غیر خطی

مهدی سجودی^۱، وحید جوهری مجد^۲

^۱ دانشجوی دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه مهندسی کنترل.

^۲ دانشیار، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه مهندسی کنترل، پیام‌نگار: majd@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۸/۱۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۹/۲۰)

چکیده: هدف این نوشتار ارائه یک روش کنترلی مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی برای پایدارسازی مقاوم غیرمتمرکز غیرشکننده با مرتبه دلخواه ثابت برای سامانه‌های متشکل از زیرسامانه‌هایی با پویایی خطی و دارای عدم قطعیت و با اتصالات غیر خطی با قيود مربعی می‌باشد. این روش از ساختار بازخورد خروجی پویای خطی عمومی به همراه عدم قطعیت در پارامترها بهره می‌گیرد. در این طراحی درجه قوام بیشینه‌ی سامانه حلقه بسته با حل مسئله‌ی بهینه سازی تحت شرایط پایداری که به صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی بیان شده است بدست می‌آید و سپس پارامترهای کنترلگر مرتبه ثابت از روی نتایج محاسبه می‌شود. در نهایت، یک مثال عددی قابل مقایسه با کارهای اخیر، برای نشان دادن قابلیت اجرا و اعمال روش و همچنین نشان دادن اثربخشی و بهبود صورت پذیرفته، آورده می‌شود.

کلمات کلیدی: بازخورد خروجی پویا، سامانه‌های مقیاس وسیع، کنترلگر غیر شکننده، کنترلگر مرتبه ثابت، نابرابری‌های ماتریسی خطی.

A Fixed-Order Robust Decentralized Dynamic Output Feedback Controller Design for Large Scale Systems with Nonlinear Uncertainty

Mahdi Sojoodi, Vahid Johari Majd

Abstract: The objective of this paper is to propose a fixed-order non-fragile dynamic output control scheme within the LMI framework for robust decentralized stabilization of systems composed of linear dynamic subsystems coupled by static nonlinear interconnections satisfying quadratic constraints. The procedure utilizes the general linear dynamic feedback structure in presence of parameter uncertainty. In this design, the maximum robustness degree of the closed loop system is obtained through solving the optimization problem under stabilizing conditions given in the form of LMIs, and then the fixed order controller parameters are calculated based on the obtained results. A numerical example illustrates the applicability and effectiveness of the method.

Keywords: Output dynamic feedback, large scale systems, non-fragile controller, fixed-order controller, linear matrix inequality (LMI).

شرط لازم و کافی در طراحی بازخورد خروجی با استفاده از روشهای بهینه سازی محدب به مسئله‌ای غیرمحدب منجر می‌شود [۲-۳]، پژوهشگران بدنبال ارائه روش‌های ابتکاری برای امکان ساده سازی این مسائل با روشهای مختلف برای حل توسط ابزار نابرابری‌های ماتریسی خطی هستند. مشکل غیر محدب بودن مسائل، با بکارگیری قيود

۱- مقدمه

با ظهور ابزار قدرتمند بهینه سازی محدب با استفاده از نابرابری‌های ماتریسی خطی [۱]، حل مسائل طراحی کنترلگر در قالب نابرابری‌های ماتریسی خطی بسیار جذابیت پیدا کرد. با توجه به اینکه بدست آوردن

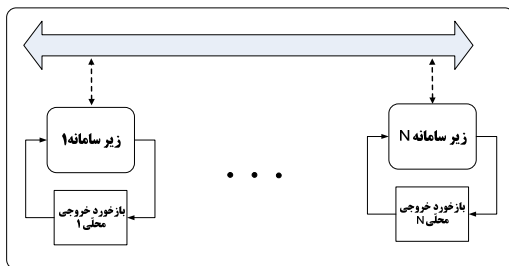
با توجه به بررسی‌های انجام شده و مطالعات صورت گرفته، در زمینه کنترل مرتبه ثابت ساختار مدل [8] و همچنین در نظر گرفتن عدم قطعیت در پارامترهای کنترلگر به منظور طراحی کنترلگر غیرشکننده تحقیق و پژوهشی مشاهده نگردید. اهمیت بسیار زیاد طراحی کنترلگر مرتبه ثابت و غیرشکننده انگیزه انجام این تحقیق بود.

هدف این مقاله ارائه یک روش مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی برای طراحی بازخورد خروجی پویای غیرشکننده با مرتبه ثابت دلخواه برای هر زیرسامانه برای پایدارسازی مقاوم غیرمترکز سامانه‌های بهم پیوسته است. برای این منظور بازخورد خروجی خطی پویای غیرمترکز غیرشکننده با ساختاری بسیار عمومی و با مرتبه دلخواه ثابت به ساختار مدل پایه ارائه شده در [8] اعمال گردیده است. در این طراحی درجه قوام بیشینه‌ی سامانه حلقه بسته با حل مسئله‌ی بهینه سازی تحت شرایط پایداری که به صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی بیان شده است بدست می‌آید و سپس پارامترهای کنترلگر مرتبه ثابت از روی نتایج محاسبه می‌شود.

ساختار این مقاله به صورت زیر است: در بخش دوم به بیان مسئله و مقدمات لازم برای طراحی پرداخته شده است. نتایج اصلی کار تحت دو قضیه در بخش سوم بیان شده است و بخش چهارم به ارائه یک مثال عددی برای تشریح قابلیت اعمال روش طراحی اختصاص یافته است. در نهایت در بخش پنجم نتیجه گیری مقاله ارائه شده است.

۲- تعریف مساله

سامانه غیرخطی به هم پیوسته متشکل از تعداد محدود N زیرسامانه مطابق شکل ۱ مفروض است که در آن زیرسامانه‌ها دارای ارتباطات داخلی (که در شکل زیر با خط چین‌های دوطرفه نمایش داده شده است) با یکدیگر بوده و برای پایداری کل سامانه از بازخورد‌های محلی حول هر زیرسامانه بهره گرفته شده است.



شکل ۱: سامانه غیرخطی به هم پیوسته متشکل از تعداد N زیرسامانه با بازخورد خروجی پویای غیرمترکز

معادلات هر یک از زیرسامانه‌های سامانه غیرخطی به هم پیوسته به صورت زیر می‌باشد:

ساختاری اطلاعات غیرمترکز در طراحی کنترلگر بسیار بیشتر نیز می‌گردد [۴-۵]. در سالهای اخیر پیشرفت‌های زیادی در راستای ارائه روش‌های کنترل پیشرفته در جهت طراحی غیرمترکز برای سامانه‌های بهم پیوسته (Interconnected) حاصل شده است و ایده‌ها و نتایج جدید بسیاری در این حوزه ارائه شده است. در این میان طراحی کنترلگرهای H_2 و H_∞ با استفاده از نابرابری‌های ماتریسی خطی برای سامانه‌هایی با ابعاد وسیع مورد توجه تعداد زیادی از پژوهشگران قرار گرفته است [۶]. پس از ارائه نتایج اولیه در [۷]، مقالات بسیاری [۸-۱۰] برای نشان دادن بهبود حاصل شده و تبدیل مسئله غیرمحدب به محدب با استفاده از روشهای ابتکاری متفاوت برای سامانه‌های مختلف ارائه شده است. ساختار مقیاس وسیع در کاربردهای مهم و پیچیده‌ی مانند سامانه‌های قدرت، ساختارهای وسیع و شبکه‌های رایانه‌ای قابل مشاهده است [۱۱-۱۳]. برخی از کارهای مهم صورت گرفته در این حوزه، به طراحی کنترلگر غیرمترکز بطور صریح یا ضمنی، برای پایدارسازی کل سامانه در حضور بازخورد‌های محلی زیرسامانه‌ها و تغییرات پیکره‌بندی در اتصالات زیرسامانه‌ها پرداخته‌اند [۱۴-۱۶].

در [۸]، سامانه‌های خطی به صورت توأمان با ساختار بهم پیوسته غیرخطی مد نظر قرار گرفته است. از آنجا که در اغلب کاربردهای عملی می‌توان زیرسامانه‌ها را حول نقاط کار با یکسری عدم قطعیت حول این نقاط، خطی در نظر گرفت، این مدل از اهمیت بالایی برخوردار است. همچنین با توجه به اینکه در بسیاری از مسائل عملی، اتصالات بین زیر سامانه‌ها دارای ساختارهای ناشناخته و غیرخطی هستند و تنها کران‌هایی از آنها معلوم است، جذابیت این مدل دوچندان می‌شود. همچنین این ساختار امکان بیشینه‌سازی کران روی اتصالات و عدم قطعیت‌ها را فراهم می‌نماید. با توجه به مزایای ساختار مدل ارائه شده در [۸]، بسیاری از مقالات، آن را به عنوان مدل پایه مورد استفاده قرار داده‌اند.

پایدارسازی ساختار مدل ارائه شده، در [۸] بوسیله بازخورد حالت صورت گرفته است. این ساختار مدل در [۱۷] توسط یک بازخورد حالت تخمین زده شده غیرمترکز بر پایه‌ی رویکرد طراحی شده برای هر زیرسامانه کنترل گردیده است. همچنین ساختار مدل در [۹، ۱۸-۱۹] توسط بازخورد خروجی با رویکرد لون برگر کنترل شده است. روش ارائه شده در [۱۹] با حذف یک سری از شروط ارائه شده در [۹] به ارائه یک روش جدید برای دسته وسیع‌تری از سامانه‌ها پرداخته است. همچنین در [۲۰]، ساختار مدل ارائه شده در [۸] با بازخورد خروجی پویای هم مرتبه با سامانه (مرتبه کامل) کنترل شده است. در [۲۱] کنترل مقاوم غیرمترکز با رویکرد بازخورد خروجی مرتبه کامل برای دسته‌ای از سامانه‌های با اتصالات داخلی غیرخطی نمودار خطی ارائه شده و نتایج حاصل از آن بر روی یک فرآیند تانک چهارتایی تحت آزمون قرار گرفته است.

برای $\alpha_i = \gamma_i^{-1/2}$ هستند. همانطور که در [9] اثبات گردیده است، برای برقراری رابطه (۴)، کفایت رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lambda_{\max}(\bar{H}^T \bar{H}) \min_i \bar{\gamma}_i \leq \max_i \gamma_i \min_i \lambda_{\min}(H_i^T H_i) \quad (5)$$

در این مقاله، بدنبال طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویای شکننده و غیر شکننده با مرتبه ثابت دلخواه داده شده‌ی n_c برای کنترلگر کلی برای سامانه داده شده در (۳) هستیم تا به صورت غیرمترکز و تنها با استفاده از اطلاعات خروجی زیرسامانه‌ها، کل سامانه را کنترل نماییم. در این طراحی مرتبه کنترلگر زیر سیستم i -ام مقدار دلخواه n_{ci} می باشد به طوری که $\sum_{i=1}^N n_{ci} = n_c$.

ساختار مدل کنترلگر بازخورد خروجی پویای معمولی و نیز غیرشکننده را به ترتیب به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y, \quad x_c(0) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = (A_c + \Delta A_c) x_c + (B_c + \Delta B_c) y \\ u = (C_c + \Delta C_c) x_c + (D_c + \Delta D_c) y, \quad x_c(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

که در آن $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ حالات کنترلگر کلی است، و $x_{ci} \in \mathbb{R}^{n_{ci}}$ ، $x_c = [x_{c1} \dots x_{cn}]^T$ و همچنین $B_c = \text{diag}(B_{c1} \dots B_{cN})$ ، $A_c = \text{diag}(A_{c1} \dots A_{cN})$ ، $D_c = \text{diag}(D_{c1} \dots D_{cN})$ و $C_c = \text{diag}(C_{c1} \dots C_{cN})$ بوده که B_{ci} ، A_{ci} ، C_{ci} و D_{ci} پارامترهای کنترلگر هر یک از زیرسامانه‌ها می باشند و:

$$\| \Delta A_c \| \leq \delta_{A_c}, \quad \| \Delta B_c \| \leq \delta_{B_c}, \quad \| \Delta C_c \| \leq \delta_{C_c} \quad \text{و} \quad \| \Delta D_c \| \leq \delta_{D_c} \quad (8)$$

عدم قطعیت‌هایی با کران نرم معلوم هستند.

با در نظر گرفتن کنترلگر (۶) و سامانه (۳) به صورت توأم، سامانه حلقه بسته را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + \begin{bmatrix} h(t, x_p) \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = \bar{C}x \end{cases} \quad (9)$$

که در آن $x = [x_{p1}^T \quad x_{c1}^T \quad \dots \quad x_{pN}^T \quad x_{cN}^T]^T$ ، $\bar{A} = \text{diag}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_N)$ ، $\bar{C} = \text{diag}(\bar{C}_1 \dots \bar{C}_N)$ و $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{ci} C_i & B_i C_{ci} \\ B_{ci} C_i & A_{ci} \end{bmatrix}$ و $\bar{C}_i = [C_i; 0]$ می باشد.

تعریف ۱: دسته H_α : برای هر $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^T$ و Ξ معلوم، دسته‌ای از توابع تکه‌ای- پیوسته است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$H_\alpha = \left\{ \begin{array}{l} h(t, x_p) \mid h \in \mathbb{R}^n, h^T h \leq x_p^T \Xi^T \alpha^T \Xi x_p \\ \text{in the domains of continuity} \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pi} &= A_{ij} x_{pi} + B_i u_i + h_i(t, x_p) \\ h_i(t, x_p) &= \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_{pj} + \bar{h}_i(t, x_p) \end{aligned} \quad (1)$$

$$y_i = C_i x_{pi}, \quad i = 1, \dots, N$$

که در آن $x_{pi} \in \mathbb{R}^{n_i}$ ، $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ و $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی زیر سامانه i ام جایی که $\sum_{i=1}^N n_i = n$ ، $\sum_{i=1}^N m_i = m$ و $\sum_{i=1}^N p_i = p$ ، $x_p = [x_{p1}^T \quad x_{p2}^T \quad \dots \quad x_{pN}^T]^T$ بردار حالت کل سامانه بهم پیوسته، A_{ij} ، B_i ، C_i ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب، و $\bar{h}_i(t, x_p)$ حاوی تمام ترم‌های غیرخطی و عدم قطعیت موجود در هر زیرسامانه فرض گردیده است و فرض شده است که $\mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i+1} : h_i(t, x_p)$ یک تابع برداری تکه‌ای خطی نسبت به هر دو آرگومان t, x_p است و در حوزه پیوستگی خود نابرابری مربعی زیر را برآورده می‌سازد:

$$h_i(t, x_p)^T h_i(t, x_p) \leq \bar{\alpha}_i^2 x_p^T \bar{H}_i^T \bar{H}_i x_p, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

در رابطه بالا \bar{H}_i ماتریس‌های با ابعاد $v_i \times n$ و معلوم هستند و $\bar{\alpha}_i > 0$ کران‌هایی هستند که می توانند بسته به مسئله معلوم فرض شوند و یا اینکه هدف مسئله پیدا کردن مقدار بیشینه‌ی آنها ضمن حفظ پایداری سامانه حلقه بسته‌ی کل باشد [8 و 9].

می توان سامانه کلی بهم پیوسته را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A x_p + B u + h(t, x_p) \\ y = C x_p \end{cases} \quad (3)$$

که در آن $u = [u_1^T \quad \dots \quad u_N^T]^T$ ، $\sum_{i=1}^N m_i = m$ و $y = [y_1^T \quad \dots \quad y_N^T]^T$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی سامانه بهم پیوسته هستند. $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N)$ ، $A = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{NN})$ و $C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_N)$ بوده و $h(t, x_p) = [h_1(t, x_p)^T \quad \dots \quad h_N(t, x_p)^T]^T$ تابع ارتباطات داخلی (غیرخطی) کل سامانه بهم پیوسته است.

حال $\bar{H}^T = [\bar{H}_1^T \quad \dots \quad \bar{H}_N^T]$ و $\bar{\Gamma} = \text{diag}(\bar{\gamma}_1 I_{v_1}, \dots, \bar{\gamma}_N I_{v_N})$ را در نظر بگیرید که \bar{H}_i ها برای $i = 1, \dots, N$ در (۲) تعریف شده‌اند. با تعریف $\bar{\gamma}_i = \bar{\alpha}_i^{-2} (I_{v_i} \times v_i)$ همواره می توان ماتریس‌های H و Γ را چنان یافت که [9]:

$$h(t, x_p)^T h(t, x_p) \leq x_p^T \bar{H}^T \bar{\Gamma}^{-1} \bar{H} x_p \leq x_p^T H^T \Gamma^{-1} H x_p \quad (4)$$

که در آن $H = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_N)$ ، ماتریس‌های H_i با ابعاد $v_i \times n_i$ و $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1 I_{v_1}, \dots, \gamma_N I_{v_N})$ با $\gamma_i > 0$

و ماتریس‌های Y_i, Q_i, W_i و U_i به ازای $i=1, \dots, N$ و اسکالر مثبت τ_1 وجود داشته باشند به طوری که مسئله کمینه سازی زیر دارای جواب باشد:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i \\ & \text{subject to} \quad \begin{bmatrix} \text{diag}(L_1, \dots, L_N) & P & \tau_1 \begin{bmatrix} H^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & \\ * & * & -\hat{\Gamma} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (14) \end{aligned}$$

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T Y_i^T + P_{pi} A_i + Y_i C_i & C_i^T W_i^T + Q_i \\ Q_i^T + W_i C_i & U_i^T + U_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

$i=1, \dots, N,$

$$\hat{\Gamma} = \text{diag}(\hat{\gamma}_1 I_{V_1}, \dots, \hat{\gamma}_N I_{V_N})$$

آنگاه سامانه حلقه بسته (۹) به صورت مقاوم با درجه $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^T = [1/\sqrt{\gamma_1} \dots 1/\sqrt{\gamma_N}]^T$ پایدار است که در آن $\gamma_i = \tau_1^{-1} \hat{\gamma}_i$ یا $\Gamma = \tau_1^{-1} \hat{\Gamma}$. در این صورت پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی A_c, B_c, C_c, D_c از روابط زیر بدست می آیند که در آن عملگر \uparrow بیانگر شبه معکوس می باشد:

$$\begin{aligned} A_{ci} &= P_{ci}^{-1} U_i \\ B_{ci} &= P_{ci}^{-1} W_i \\ C_{ci} &= B_i \uparrow P_{pi}^{-1} Q_i \\ D_{ci} &= B_i \uparrow P_{pi}^{-1} Y_i \end{aligned} \quad (16)$$

اثبات: با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف به صورت زیر:

$$V = x^T P x \quad (17)$$

با مشتق گیری از (۱۷) و با فرض $z_1 = \begin{bmatrix} h(t, x_p) \\ 0 \end{bmatrix}$ جای گذاری معادلات سامانه (۹) در (۱۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (\bar{A}x + z_1)^T P x + x^T P (\bar{A}x + z_1) \\ &= \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P \bar{A} & P \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

برای منفی بودن (۱۸) باید نابرابری زیر برقرار باشد:

$$-\begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P \bar{A} & P \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (19)$$

با توجه به (۴)، روشن است که:

$$z_1^T z_1 \leq x_p^T H^T \Gamma^{-1} H x_p \quad (20)$$

همچنین می توان رابطه (۲۰) را به صورت معادل زیر بیان کرد:

تعریف فوق ایجاب می کند که $h(t, 0) = 0$ باشد و این شرط الزام می کند که $x = 0$ بعنوان نقطه تعادل سامانه (۹) باشد.

تعریف ۲: پایداری مقاوم از درجه $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^T$:

سامانه (۹) با عدم قطعیت غیرخطی کراندار ارائه شده در (۴)، پایدار مقاوم از درجه برداری α گفته می شود، اگر نقطه تعادل $x = 0$ برای تمام $h(t, x_p) \in H_\alpha$ پایدار مجانبی سراسری باشد.

تعریف های ۱ و ۲ توسعه یافته تعریف های ارائه شده در [8] به صورت برداری می باشند.

مطابق [۸ و ۲۰] سامانه حلقه بسته (۹) را به صورت مقاوم با درجه $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^T = [1/\sqrt{\gamma_1} \dots 1/\sqrt{\gamma_N}]^T$ پایدار گویند اگر این سامانه برای تمام $h(t, x_p)$ هائی که در رابطه (۴) صدق می کند به صورت مجانبی سراسری پایدار باشد. با پیشینه کردن α همزمان با پایداری سازی بخش خطی (۳)، خطای مجاز برای اتصالات داخلی غیرخطی و عدم قطعیت های مجاز نیز پیشینه می شود.

لم ۱ [4]: روند S (S-procedure) ماتریس های متقارن $T_0, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ مفروض هستند. شرایط زیر روی T_0, \dots, T_p در نظر گرفته می شوند:

$$\zeta^T T_0 \zeta > 0 \quad \forall \zeta \neq 0, \quad \zeta^T T_i \zeta \geq 0, \quad i=1, \dots, p \quad (11)$$

حال در صورتیکه $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ هائی وجود داشته باشند، که رابطه:

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0 \quad (12)$$

برقرار باشد، آنگاه رابطه (۱۱) برقرار خواهد بود [4].

۳- نتایج اصلی کار

در این بخش دو قضیه برای طراحی کنترلگر بازخورد خروجی مرتبه ثابت معمولی و غیرشکننده برای سامانه غیرخطی به هم پیوسته (۳) ارائه شده است. با توجه به اینکه، هدف مسئله پیدا کردن مقدار بیشینه ی کران ترم غیرخطی $h(t, x_p)$ بیان گردیده است. می توان با یافتن مقدار کمینه ماتریس قطری Γ که سامانه حلقه بسته (۹) به ازای آن پایدار است، نسبت به بیشینه کردن درجه قوام α اقدام کرد.

قضیه ۱: سامانه حلقه باز (۳) و کنترلگری به صورت (۶) مفروض است.

اگر ماتریس های مثبت معین $P = P^T$ به صورت:

$$P = \text{diag}(P_1, \dots, P_N), \quad P_i = \text{diag}(P_{pi}, P_{ci}), \quad i=1, \dots, N \quad (13)$$

(۲۶)

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T Y_i^T + P_{pi} A_i + Y_i C_i & C_i^T W_i^T + Q_i \\ Q_i^T + W_i C_i & U_i^T + U_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_2 \|C\| \delta_{D_c}^2 I + \tau_3 \|C\| \delta_{B_c}^T I & 0 \\ * & \tau_1 \delta_{C_c}^2 I + \tau_4 \delta_{A_c}^2 I \end{bmatrix}, i=1, \dots, N. \quad (27)$$

آنگاه سامانه حلقه‌بسته (۹) به‌صورت مقاوم با درجه $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^T = [1/\sqrt{\gamma_1} \dots 1/\sqrt{\gamma_N}]^T$ پایدار است. که در آن $\gamma_i = \tau_3^{-1} \hat{\gamma}_i$ و یا $\Gamma = \tau_3^{-1} \hat{\Gamma}$. در این صورت پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی A_c, B_c, C_c و D_c از رابطه (۱۶) بدست می‌آیند.

اثبات: مشابه نحوه‌ی اثبات قضیه ۱ و با فرض:

$$\begin{aligned} z_1 &= \Delta C_c x_c, & z_2 &= \Delta D_c C x_p, & z_3 &= h(t, x_p), \\ z_4 &= \Delta A_c x_c, & z_5 &= \Delta B_c C x_p, \end{aligned} \quad (28)$$

می‌توان نوشت:

$$\dot{V} = (\bar{A}x + \begin{bmatrix} Bz_1 + Bz_2 + z_3 \\ z_4 + z_5 \end{bmatrix})^T P x + x^T P (\bar{A}x + \begin{bmatrix} Bz_1 + Bz_2 + z_3 \\ z_4 + z_5 \end{bmatrix})$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P \bar{A} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad (29)$$

برای منفی بودن (۲۹) نابرابری زیر باید برقرار باشد:

$$- \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P \bar{A} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (30)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۲۸)، (۴) و (۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} z_1^T z_1 &\leq \delta_{C_c}^2 x_c^T x_c, & z_2^T z_2 &\leq \|C\| \delta_{D_c}^2 x_p^T x_p, \\ z_3^T z_3 &\leq x_p^T H^T \Gamma^{-1} H x_p, & z_4^T z_4 &\leq \delta_{A_c}^2 x_c^T x_c, \\ z_5^T z_5 &\leq \|C\| \delta_{B_c}^2 x_p^T x_p, \end{aligned} \quad (31)$$

حال مشابه روند اثبات در قضیه ۱، با استفاده از لم ۱ در روابط (۲۹)، (۳۰) و (۳۱)، همچنین با بکارگیری مکمل شور می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H^T \Gamma^{-1} H & 0 \\ * & 0 \\ * & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (21)$$

با فرض (۱۳) و با به‌کارگیری روابط (۱۹) و (۲۱) در لم ۱ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(L_1, \dots, L_N) + \tau_1 \begin{bmatrix} H^T \Gamma^{-1} H & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} & P \\ * & -\tau_1 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (22)$$

حال با بکارگیری مکمل شور در رابطه (۲۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(L_1, \dots, L_N) & P & \tau_1 \begin{bmatrix} H^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 \\ * & * & -\tau_1 \Gamma \end{bmatrix} \leq 0 \quad (23)$$

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T D_{ci}^T B_{ci}^T P_{pi} + P_{pi} A_i + P_{pi} B_i D_{ci} C_i & C_i^T B_{ci}^T P_{ci} + P_{pi} B_i C_{ci} \\ C_{ci}^T B_{ci}^T P_{pi} + P_{ci} B_{ci} C_i & A_{ci}^T P_{ci} + P_{ci} A_{ci} \end{bmatrix}, i=1, \dots, N. \quad (24)$$

با تغییر متغیرهایی به‌صورت $\hat{\Gamma} = \tau_1 \Gamma$ و به‌صورت زیر:

$$\begin{aligned} Y_i &= P_{pi} B_i D_{ci} \\ Q_i &= P_{pi} B_i C_{ci} \\ W_i &= P_{ci} B_{ci} \\ U_i &= P_{ci} A_{ci} \end{aligned} \quad (25)$$

رابطه نابرابری ماتریسی خطی ارائه شده در (۱۴) حاصل می‌گردد. پایان اثبات □.

در قضیه بعدی به طراحی کنترلگر مرتبه ثابت غیرشکننده با مرتبه ثابت دلخواه در حضور عدم قطعیت در پارامترهای کنترلگر برای سامانه غیرخطی به هم پیوسته (۳) می‌پردازیم:

قضیه ۲: سامانه حلقه‌باز (۳) و کنترلگری غیرشکننده به‌صورت (۷) با کران (۸) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های مثبت معین $P = P^T$ به‌صورت (۱۳) و ماتریس‌های Y_i, Q_i, W_i و U_i به ازای $i=1, \dots, N$ و اسکالرهای مثبت τ_j برای $j=1, \dots, 5$ وجود داشته باشند به‌طوری که مسئله کمینه سازی زیر دارای جواب باشد:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i \\ &\text{subject to} \\ &\begin{bmatrix} \text{diag}(L_1, \dots, L_N) & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & \tau_3 \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_5 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\hat{\Gamma} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

در روابط بالا $e(t, x_p): \mathbb{R}^5 \rightarrow [0, 1]$ پارامترهای نرمالیزه شده اتصالات را نشان می‌دهند. می‌توان فرم کلی سامانه را به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) + h(t, x_p) \quad (۳۵)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t)$$

که در آن:

$$h(t, x_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} e(t, x_p) x_p \quad (۳۶)$$

می‌خواهیم یک قانون کنترل غیرمترکز بدست آوریم که سامانه را برای همه مقادیر $e(t, x_p) \in [0, 1]$ در حضور عدم قطعیت در پارامترهای کنترلگر پایدار کند.

بازخورد حالت خطی غیرمترکز مقاوم ایستا بر اساس روش ارائه شده در [8]، درجه قوام $\alpha^* = \alpha_1 = \alpha_2 = 4.4950$ و ماتریس ضرایب $K = [-725.9085 \quad -40.4346]$ را بدست می‌دهد، و قطب‌های حلقه بسته حاصل $\{-20 \pm 17.8093i\}$ می‌باشد. اما به سادگی می‌توان دید که به علت وجود مد ناپایدار در سامانه حلقه باز خطی خروجی ایستا قابل پایداری نمی‌باشد. اما این کار با بازخورد خطی خروجی پویا امکان‌پذیر می‌باشد، پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی پویا مرتبه کامل که از قضیه ۱ [۲۰] با فرض $H = I$ بدست آمده است به صورت $A_c = 10^4 \times [-0.4670 \quad -1.4182; -1.0131 \quad -3.1931]$ ، $B_c = 10^4 \times [-3.3926; 1.5118]$ ، $C_c = [243.5166 \quad 767.0817]$ و $D_c = -333.7029$ می‌باشد، که این کنترلگر قطب‌های سامانه حلقه بسته را در مقادیر زیر قرار می‌دهد:

$$\{-3.6543 \times 10^4; -0.0390 \times 10^4; -0.7455 \pm 0.5605i\}$$

از یک سیگنال نویز گوسی با میانگین ۰/۵ و واریانس ۰/۵ که در شکل ۲ نشان داده شده است برای شبیه سازی سیگنال $e(t, x_p)$ استفاده شده است. شکل ۳ و شکل ۴ به ترتیب حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته حاصل از کنترلگر مرتبه کامل قضیه ۱ [۲۰] را نشان می‌دهند. چنانچه در شکل ۳ نیز مشاهده می‌شود بزرگ بودن پارامترهای کنترلگر، بازه تغییرات وسیعی را برای حالت‌های سامانه حلقه بسته موجب شده است.

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(L_1, \dots, L_N) & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & \tau_3 \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_5 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_3 \Gamma \end{bmatrix} \leq 0 \quad (۳۲)$$

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T D_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{pi} A_i + P_{pi} B_i D_{ci} C_i & C_i^T B_{ci}^T P_{ci} + P_{pi} B_i C_{ci} \\ C_{ci}^T B_{ci}^T P_{pi} + P_{ci} B_{ci} C_{ci} & A_{ci}^T P_{ci} + P_{ci} A_{ci} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_2 \|C\| \delta_{D_c}^2 I + \tau_5 \|C\| \delta_{B_c}^2 I & 0 \\ * & \tau_1 \delta_{C_c}^2 I + \tau_4 \delta_{A_c}^2 I \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, N. \quad (۳۳)$$

با اعمال تغییر متغیرهای رابطه (۲۵) در (۳۳) و تغییر متغیر به صورت $\hat{\Gamma} = \tau_3 \Gamma$ ، با رابطه (۲۶) خواهیم رسید. پایان اثبات. □

تکته ۱: در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر می‌توان به طراحی کنترلگر بازخورد خروجی ایستا پرداخت، همچنین قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر و با فرض $C = I$ از طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویا به طراحی کنترلگر بازخورد حالت تغییر می‌یابد.

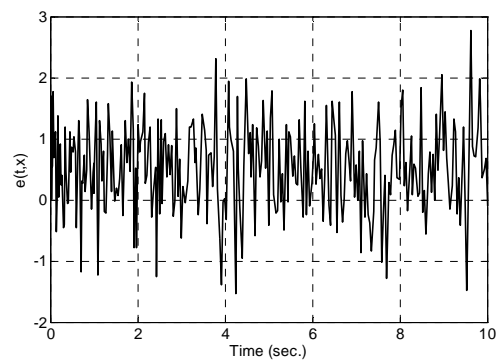
توجه ۱: در این مقاله برای شناسایی نابرابری‌های ماتریسی خطی ارائه شده در قضیه ۱ و ۲ به محیط نرم‌افزار، از جعبه ابزار یالمپ [۲۲] (Yalmip) و برای حل آن‌ها از جعبه ابزار LMILab در محیط نرم‌افزار متلب (Matlab) استفاده گردیده است.

۴- مثال عددی

به منظور شبیه‌سازی و به منظور قابلیت مقایسه، حرکت دو پاندول معکوس که توسط فنر به یکدیگر متصل شده‌اند در نظر گرفته شده است که می‌تواند در پرش‌های ناگهانی با اندازه و جهت غیر قابل پیش‌بینی، میله‌ی پاندول را بالا و پایین بلغزند. یک مدل خطی و نرمالیزه شده از هر یک از زیرسامانه‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۸]:

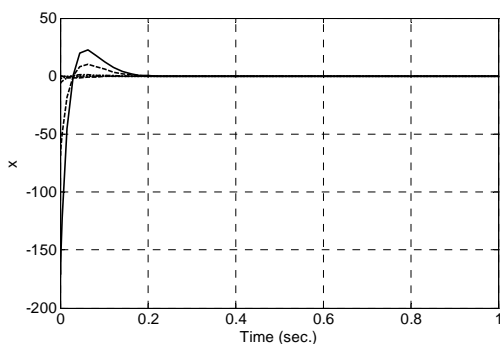
$$\begin{aligned} \dot{x}_{p1}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_{p1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + h_1(t, x_p) \\ y_1(t) &= [1 \quad 0] x_{p1}(t), \\ h_1(t, x_p) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} e(t, x_p) x_p \\ \dot{x}_{p2}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_{p2}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + h_2(t, x_p) \\ y_2(t) &= [1 \quad 0] x_{p2}(t), \\ h_2(t, x_p) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} e(t, x_p) x_p \end{aligned} \quad (۳۴)$$

| | | |
|---|--|------------------------------|
| $D_c = -11.0025$ | 0 ± 3.1626 | 0 |
| $A_c = -334.0098$ $B_c = -115.8581$ $C_c = -761909.8291$ $D_c = -428932.9973$ | $(-98.5963 \pm 626.2838i)$ -136.8172 | 1 |
| $A_c = [-2728.1704 \ -4701.1121 \ -1602.6708 \ -2815.1797]$ $B_c = [-2777.8063 \ -1631.8701]^T$ $C_c = [-737860.0973 \ -1341458.1817]$ $D_c = -1019733.2438$ | -5375.1735 $(-69.9510 \pm 502.8512i)$ -28.2745 | 2 |
| $K = D_c = [-10.5076 \ -8.0126]$ | -1.4483 -6.5642 | بازخورد حالت ($C=I$) |



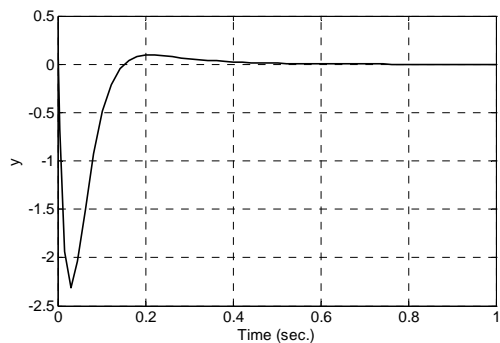
شکل ۲: سیگنال نویز گوسی با میانگین ۰/۵ و واریانس ۰/۵

شکل ۵ و شکل ۶ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته کل را برای کنترلگر مرتبه اول برای هر زیر سامانه، و شکل ۷ و شکل ۸ به ترتیب حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته را با کنترلگر مرتبه دوم برای هر زیر سامانه نشان می‌دهد.



شکل ۵: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه

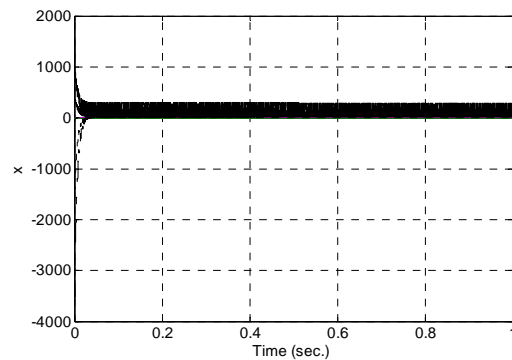
حاصل از قضیه ۱



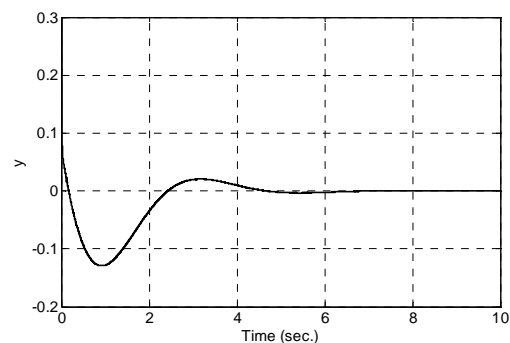
شکل ۶: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه

حاصل از قضیه ۱

نتایج حاصل از قضیه ۱ با فرض $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$ در جدول ۱ برای مرتبه‌های مختلف کنترلگر برای هر زیر سامانه به همراه محل قرارگیری قطب‌های حلقه بسته نشان داده شده است.



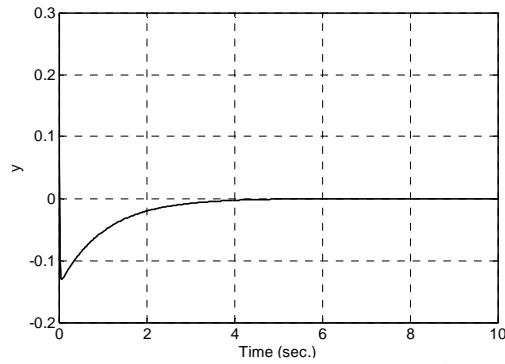
شکل ۳: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [۲۰]



شکل ۴: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [۲۰]

جدول ۱: پارامترهای کنترلگر و قطب‌های حلقه بسته با اعمال قضیه ۱ به سامانه نمونه

| | | |
|--------------------|-------------------|----------|
| پارامترهای کنترلگر | قطب‌های حلقه بسته | الگوریتم |
|--------------------|-------------------|----------|



شکل ۱۰: خروجی سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۱

در این قسمت برای نشان دادن کارآئی روش ارائه شده، شبیه سازی در حضور عدم قطعیت در پارامترهای کنترلگر و با استفاده از قضیه ۲ انجام شده است. نتایج حاصل از قضیه ۲ با فرض $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$ و $\delta_{A_c} = 0.01$ ، $\delta_{B_c} = 0.01$ ، $\delta_{C_c} = 0.01$ و $\delta_{D_c} = 0.01$ ، در جدول ۲ برای مرتبه‌های مختلف کنترلگر به همراه محل قرار گیری قطب‌های حلقه بسته آورده شده است.

در این شبیه سازی پارامترهای عدم قطعیت برای کنترلگر مرتبه اول برای هر زیر سامانه به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

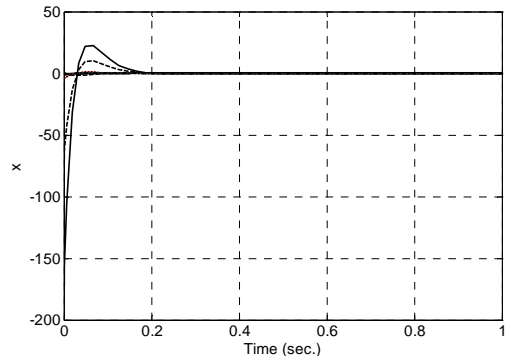
$$\begin{aligned} \Delta A_c &= 0.01 \sin(3t) & \Delta B_c &= 0.01 \sin(5t) \\ \Delta C_c &= 0.01 \cos(t) & \Delta D_c &= 0.01 \sin(t) \end{aligned} \quad (37)$$

جدول ۲: پارامترهای کنترلگر و قطب‌های حلقه بسته با اعمال قضیه ۲ به سامانه نمونه

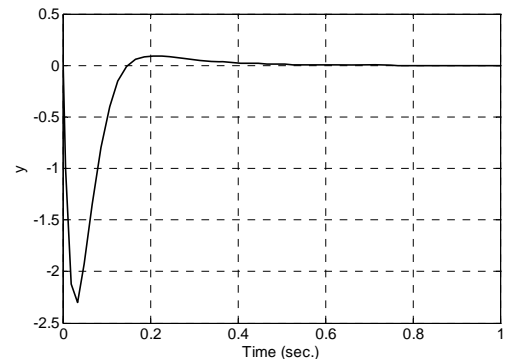
| پارامترهای کنترلگر | قطب‌های حلقه بسته | مرتبه کنترلگر |
|---|--|-----------------------|
| $D_c = -3.0781$ | $0 \pm 1.44i$ | 0 |
| $A_c = -103.0782$ $B_c = -44.8305$ $C_c = -7568.5345$ $D_c = -5115.0377$ | -68.4570 $(-17.3106 \pm 49.44i)$ | 1 |
| $A_c = [-32.3502 \ -47.8556 \ -46.5729 \ -97.8487]$ $B_c = [-41.5950 \ -67.5857]^T$ $C_c = [-4569.1215 \ -8714.0399]$ $D_c = -7978.2686$ | $(-39.2785 \pm 54.6544i)$ -44.2478 -7.3939 | 2 |
| $K=D_c = [-8.2358 \ -7.19]$ | -1.21 -5.98 | بازخورد حالت (C=I) |

همچنین برای کنترلگر مرتبه دوم برای هر زیر سامانه پارامترهای عدم قطعیت به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} \Delta A_c &= 0.01 \begin{bmatrix} 0.5 \sin(3t) & 0.5 \sin(5t) \\ 0.5 \sin(2t) & 0.5 \cos(t) \end{bmatrix}, \\ \Delta B_c &= 0.01 \begin{bmatrix} 0.7 \sin(3t) \\ 0.7 \cos(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (38)$$

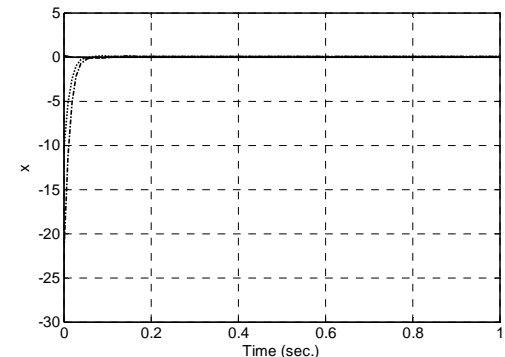


شکل ۷: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

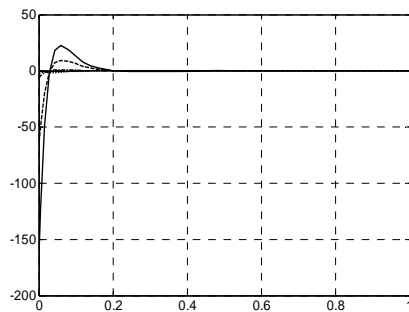


شکل ۸: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

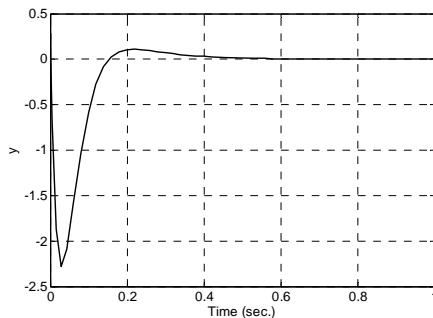
علاوه بر قابلیت طراحی کنترلگر از مرتبه‌های دلخواه، شکل‌ها نشان می‌دهند که هم بازه تغییرات حالت‌ها بسیار کمتر از [۲۰] است و هم زمان نشست به مراتب کمتری در این طراحی حاصل شده است. همچنین در شکل ۹ و شکل ۱۰ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته حاصل از کنترلگر بازخورد حالت بر اساس قضیه ۱ نمایش داده شده است. با توجه به در اختیار داشتن اطلاعات بیشتری از سامانه در طراحی کنترلگر بازخورد حالت، بدیهیست پاسخ‌های این طراحی به مراتب بهتر از کنترلگر بازخورد خروجی باشد که می‌توان این بهبود را در شکل ۹ و شکل ۱۰ با مقایسه بازه تغییرات حالت‌ها و زمان نشست آن‌ها با مقادیر قبلی مشاهده کرد.



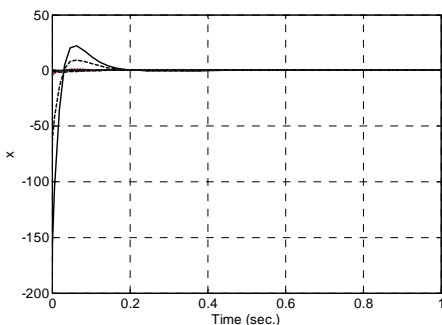
شکل ۹- حالت‌های سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۱



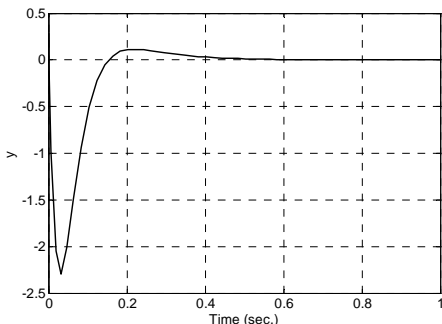
شکل ۱۳: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۴: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۵: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



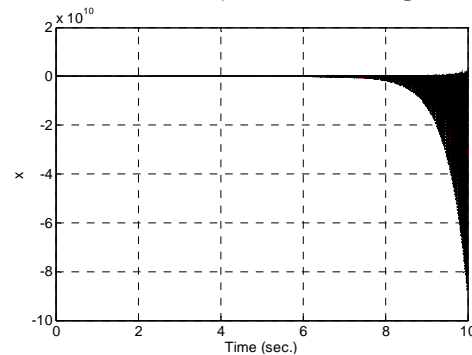
شکل ۱۶: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲

$$\Delta C_c = 0.01[0.7 \cos(t) \quad 0.7 \sin(4t)],$$

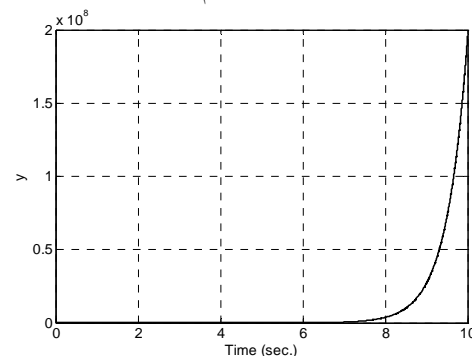
$$\Delta D_c = 0.01 \sin(t)$$

در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ نتایج حاصل از شبیه سازی نتایج [20] با عدم قطعیت (۳۸) مشاهده می‌گردد. شکل ۱۱ و شکل ۱۲ بیانگر ناپایداری سامانه حلقه بسته با در نظر گرفتن عدم قطعیت در ساختار کنترلگر است. بدیهیست طراحی ارائه شده در [20] شکننده بوده و برای کاربردهای عملی مناسب نمی‌باشد.

همچنین شکل ۱۳ تا شکل ۱۸ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته کل را برای مرتبه های مختلف کنترلگر بازخورد خروجی پویا برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲ و در حضور عدم قطعیت (۳۷) و (۳۸) نشان می‌دهد. علاوه بر قابلیت‌های مختلف روش ارائه شده که در شکل‌های ارائه شده برای نتایج قضیه ۱ بیان گردید، مشاهده می‌شود که با وجود عدم قطعیت در پارامترهای کنترلگر، پاسخ‌های بدست آمده همچنان کارآئی بالای کنترلگر طراحی شده را نشان می‌دهد. غیرشکننده بودن کنترلگر طراحی شده این امکان را به ما می‌دهد تا در کاربردهای عملی به راحتی از نتایج این روش بهره‌مند شویم.



شکل ۱۱: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [20] در حضور عدم قطعیت

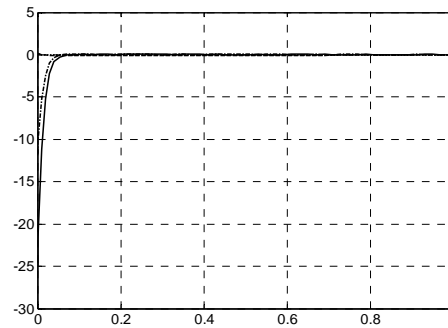


شکل ۱۲: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [20] در حضور عدم قطعیت

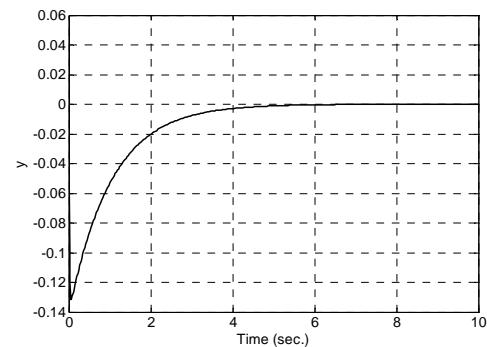
است. در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر می‌توان به طراحی کنترلگر بازخورد خروجی ایستا پرداخت، همچنین در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر و با فرض اینکه تمامی حالت‌ها به صورت مستقیم در خروجی در دسترس باشند، طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویا به طراحی کنترلگر بازخورد حالت تغییر خواهد یافت. روند طراحی با تعیین مرتبه کنترلگر، درجه‌های قوام و پارامترهای کنترلگر مورد نظر را بدست می‌دهد. همچنین کنترلگرهای غیرمترکز حاصل از این طراحی، پایداری سامانه کل را نیز تضمین می‌نماید. در این مقاله، یک مثال برای نشان دادن چگونگی پایداری‌سازی یک سامانه متشکل از زیر سامانه‌های بهم پیوسته با کنترل غیرمترکز ارائه گردیده و با نتایج حاصل از کارهای قبلی مقایسه شده است. این روش برای کاربردهای عمومی در طراحی کنترلگر برای سامانه‌های مقیاس وسیع و سامانه‌های غیر مقیاس وسیع بسیار مناسب است.

مراجع

- [1] Gahinet, Pascal, Nemirovski, Arkadi, Laub, Alan J., Chilali, Mahmoud, *LMI control toolbox*, The Math Works, Natick, MA, 1995.
- [2] Gahinet, P., Apkarian, P., 1994, "A linear matrix inequality approach to H_∞ control", *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, 4, 421-448.
- [3] Iwasaki, T., Skelton, R.E., 1994, "All controllers for the general H_∞ control Problem: LMI existence conditions and state space formulas", *Automatica*, 30, 1307-1317.
- [4] Boyd, Stephen, El Ghaoui, Laurent, Feron, Eric, Balakrishnan, Venkataramanan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [5] Dullerud, Geir E., Paganini, Fernando, *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*, Springer, N.Y., 2000.
- [6] Geromel, J.C., Bernussou, J.C., de Oliveira, M.C., 1999, "H2-norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: Decentralized and reliable control", *IEEE Trans. Automat. Control*, 44, 1449-1454.
- [7] Geromel, J.C., Bernussou, J., Peres, P.L.D., 1994, "Decentralized control through parameter space optimization", *Automatica*, 30, 1565-1578.
- [8] Siljak, D.D., Stipanovic, D., 2000, "Robust stabilization of nonlinear systems", *Math. Probl. Eng.*, 6, 461-493.
- [9] Siljak, D.D., Stipanovic, D., 2001, "Autonomous decentralized control", *Proc. ASME Intern. Mech. Eng. Congress*, 761-765.
- [10] Zhai, G., Ikeda, M., Fujisaki, Y., 2001, "Decentralized controller design: A matrix inequality design using a homotopy method", *Automatica*, 37, 565-572.
- [11] D'Andrea, R., Dullerud, G.E., 2003, "Distributed control design for spatially interconnected systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, 48, 1478-1495.
- [12] Zecevic, A.I., Neskovic, G., Siljak, D.D., 2004, "Robust decentralized exciter control with linear feedback", *IEEE Trans. Power Syst.*, 19, 1096-1103.
- [13] Stipanovic, D.M., Teo, Inhalan R., Tomlin, C., 2004, "Decentralized overlapping control of a formation of unmanned aerial vehicles", *Automatica*, 40, 1285-1296.
- [14] Siljak, D.D., Zecevic, A.I., 2004, "Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback", in: *Proc. 10th*



شکل ۱۷: حالت‌های سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۸: خروجی سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۲

چنانچه ملاحظه می‌شود، نتایج بدست آمده از دو جهت قابل بررسی می‌باشد: اول اینکه قطب‌های حلقه‌بسته بدست آمده در مقایسه با کارهای مرتبه کامل قبلی دورتر از محور موهومی است که در نتیجه پایداری بسیار بهتری را به دست می‌دهد و پاسخ سامانه نیز بسیار سریع‌تر و پایدارتر است، دومین مسئله وجود کنترلگر از مرتبه‌های مختلف است که می‌توان مرتبه کنترلگر را برای زیرسامانه‌های متفاوت با توجه به نیاز در کاربردهای مختلف تنظیم نمود. چنانچه ملاحظه می‌شود پاسخ حاصل از کنترلگر بازخورد خروجی پویا بسیار سریعتر از کنترلگر بازخورد حالت است ولی پاسخ حاصل از کنترلگر بازخورد حالت به مراتب بالاتر و پایبند زدیگی کمتری را دارا می‌باشد. همچنین با توجه به غیرشکننده بودن کنترلگر حاصل از قضیه ۲، مشکلات ناشی از اجرا در عمل به حداقل خواهد رسید. چنانچه در نتایج حاصل مشاهده گردید نتایج حاصل از [20] در حضور عدم قطعیت بسیار شکننده بوده و پاسخ سامانه ناپایدار گردیده است.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش کنترلی برای طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویای غیرمترکز غیرشکننده با مرتبه دلخواه ثابت برای سامانه‌های مرکب از زیرسامانه‌های خطی با اتصالات داخلی غیرخطی دارای عدم قطعیت که قیود مربعی را برآورده می‌سازند، طراحی شده است. این طرح از ساختار عمومی بازخورد خروجی پویا بهره گرفته

- [19] Zhu, Y., Pagilla, P.R., 2007, "Decentralized output feedback control of a class of large scale interconnected systems", *IMA J. Math. Control Inform.*, 24, 57-69.
- [20] Stankovic, S. S., Siljak, D. D., 2009, "Robust stabilization of nonlinear interconnected systems by decentralized dynamic output feedback", *Systems & Control Letters*, 58, 271-275.
- [21] Labibi, B., Marquez, H. J., Chen, T., 2009, "Decentralized robust output feedback control for control affine nonlinear interconnected systems", *Journal of Process Control*, 19, 865-878.
- [22] Lofberg, John, *What is YALMIP?*, Linkopings univeritet, <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php?n=Main>. What, 2001.
- [15] Zecevic, A.I., Siljak, D.D., 2004, "Design of robust static output feedback for large-scale systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, 49, 2040-2044.
- [16] Siljak, Dragoslav D., *Decentralized Control of Complex Systems*, Academic Press, New York, 1991.
- [17] Pagilla, P.R., Zhu, Y., 2005, "A decentralized output feedback controller for a class of large-scale interconnected nonlinear systems", *Trans. ASME, J. Dynam. Syst. Meas. Control*, 127, 167-172.
- [18] Stankovic, S.S., Stipanovic, D.M., Siljak, D.D., 2007, "Decentralized Dynamic Output Feedback for Robust Stabilization of a Class of Nonlinear Interconnected Systems", *Automatica*, 43, 861-867.