مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۸، شماره ۱، بهار ۱۳۹۳، صفحه ۳۰-۲۱

شناسائی سیستم‌های سوئیچ شونده خطی با استفاده از نگاشت معادلات خطی همزمان

هادی کشوری خور[۱]، علی کریم پور[۲]، ناصر پریز[۳]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق- کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، hadi.keshvari@stu.um.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق-کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، karimpor@um.ac.ir

[۳] استاد، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق-کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۳/۱/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۳/۳/۱۰)

چکیده: این مقاله یک روش جدید برای حل مسئله شناسائی سیستم‌های سوئیچ شونده خطی پیشنهاد می‌دهد. روش ارائه‌شده شامل دو مرحله نگاشت و خوشه‌بندی می‌باشد. در مرحله نخست، با حل دستگاه‌های معادلات خطی متعددی که هرکدام شامل تعداد معادلات و مجهولات یکسانی می‌باشند، یک نگاشت از فضای داده‌های ورودی-خروجی سیستم به فضای پارامترها صورت می‌گیرد. در مرحله بعدی با خوشه‌بندی و تفکیک پارامترهای به‌دست‌آمده در مرحله قبل در چندین دسته، پارامترهای زیرسیستم‌ها به دست می‌آیند. ازآنجاکه خوشه‌بندی در فضای پارامترها انجام می‌گیرد، این روش برخورد یکسانی در شناسائی پارامترهای سیستم‌های سوئیچ شونده خطی و سیستم‌های تکه‌ای‌خطی دارد و شناسائی پارامترهای زیرسیستم‌ها مستقل از شناسائی سیگنال سوئیچینگ انجام می‌شود. مثال‌های عددی کارایی روش پیشنهادی را برای شناسائی سیستم‌های سوئیچ شونده خطی نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: شناسائی سیستم‌ها، سیستم‌های سوئیچ شونده خطی، سیستم‌های تکه‌ای‌خطی، دستگاه معادلات خطی.

Identification of Switched Linear Systems Using Simultaneous Linear Equations (SLE) Mapping

Hadi Keshvari-Khor, Ali Karimpour, Naser Pariz

Abstract: This paper proposes a new method for the identification of switched linear systems. The proposed method includes two main steps of mapping and clustering. At the first step, a mapping is developed from the space of input-output data into the parameter space. A lot of linear equation sets, composed of equal number of equations and unknowns, are solved in this part. At the next step, submodel parameters are derived by clustering the parameters obtained in previous step, into several groups. Since the clustering step is carried out in the parameter space, the proposed method makes no distinction between the identification of switched linear systems and piecewise linear systems and the identification of submodel parameters is done independently of the estimation of switching signal. Numerical examples show the effectiveness of the proposed method in the identification of switched linear systems.

Keywords: System identification, Switched linear systems, Piecewise affine systems, System of linear equations.

۱- مقدمه

در این مقاله منظور از مدل یک سیستم، رابطه‌ای ریاضی است که ارتباط ورودی– خروجی آن تا حد قابل قبولی مشابه با سیستم اصلی باشد. در بسیاری از سیستمها، بدلیل پیچیدگی بیش از حد و یا عدم وجود اطلاعات و شناخت کافی در مورد تمامی اجزای سیستم، بدست آوردن مدل فیزیکی امری دشوار یا غیرممکن می‌باشد. بنابراین مسئله بدست آوردن یک مدل از سیستم برمبنای آزمایشهای تجربی انجام گرفته و داده‌های ورودی-خروجی آن امری ضروری است. در این مقاله مسئله شناسائی کلاس خاصی از سیستمهای هایبرید، سیستمهای سوئیچ شونده خطی، مورد بررسی قرار می گیرد. سیستمهای سوئیچ شونده دسته خاصی از سیستمهای هایبرید می‌باشند که از دو یا چند زیرسیستم تشکیل شده‌اند؛ بگونه‌ای که در هر لحظه از زمان، تنها یکی از زیرسیستمها فعال می‌باشد. در سیستمهای سوئیچ شونده مکانیزم سوئیچ مستقل از متغیرهای دامنه پیوسته تعیین می گردد؛ در حالیکه اگر مکانیزم سوئیچ با توجه به مقادیر حالتهای پیوسته و یا ورودیهای سیستم تعیین گردد، به آنها سیستمهای تکه‌ای خطی گفته می‌شود. با توجه به کاربرد روزافزون این سیستمها در سالهای اخیر، تحقیقات بسیاری در زمینه مدلسازی و شناسائی آنها انجام گرفته است [۲،۱]. رول و همکاران [۳] بر مبنای برنامه‌ریزی اعداد صحیح و فراری و همکاران [۴] بر اساس خوشه‌بندی داده‌ها روشهایی را برای شناسائی سیستمهای تکه‌ای خطی ارائه کرده‌اند. اوزی و همکاران [۵] روشی را بر مبنای ماتریس‌های تنک[1] برای شناسائی سیستم‌های سوئیچ شونده آفین[2] ارائه نموده‌اند. ویدال و همکاران [۶] یک روش جبری برای شناسائی سیستمهای سوئیچ شونده خطی پیشنهاد کرده‌اند. جولسکی و همکاران [۷] از روش بیزی[3] برای شناسائی سیستمهای هایبرید خطی استفاده کرده‌اند. در روش بیزی در هر مرحله با استفاده از احتمال پیشین مقادیر پارامترهای سیستم و تئوری بیز، یک احتمال پسین برای تابع چگالی احتمال پارامترهای سیستم بدست می‌آید. بمپوراد و همکاران [۸] یک روش با خطای محدود شده را برای شناسائی سیستمهای تکه‌ای خطی پیشنهاد کرده‌اند. پائولتی و همکاران [۹] خلاصه‌ای از روشهای ارائه شده برای شناسائی سیستمهای هایبرید را جمع‌آوری کرده‌اند. ونگ و همکاران [۱۰] روشی را برای شناسائی سیستمهای سوئیچ شونده که سیگنال سوئیچ آنها پریودیک می‌باشد، ارائه نموده‌اند. در مرجع [۱۱] روشی برای شناسائی سیستمهای هایبرید با سیستمهای اندازه گیری معیوب ارائه گردیده است. روشهای دیگری مانند بهینه سازی پیوسته [۱۲] فضای حالت [۱۳] و بازگشتی [۱۵،۱۴] برای شناسائی سیستمهای هایبرید ارایه شده‌اند.

روش پیشنهادی در این مقاله در دو مرحله انجام می گیرد. در مرحله اول، بصورت تصادفی و به تعداد پارامترهای مجهول هر زیرسیستم، از میان تعداد کل داده‌ها، n داده انتخاب و یک دستگاه n معادله n مجهولی خطی که از این به بعد معادله تخمین نامیده می‌شود، تشکیل می گردد. جواب منحصر به فرد این دستگاه در صورت وجود، بعنوان یکی از کاندیدهای قابل قبول برای پارامترهای مجهول یکی از زیرسیستمها خواهد بود. فرض بر این است که تعداد داده‌ها N خیلی بزرگتر از تعداد پارامترهای مجهول زیرسیستمها n می‌باشد، لذا انتخابهای متفاوتی امکان پذیر است و برای هر انتخاب متفاوت، جواب دیگری بدست خواهد آمد. بنابراین در مرحله نخست، یک نگاشت از فضای داده‌های ورودی- خروجی سیستم به فضای پارامترهای مجهول سیستم انجام می گیرد. در مرحله دوم نقاط بدست آمده در مرحله اول خوشه بندی شده و با ترکیب مناسب پارامترهای هر کدام از خوشه‌ها، پارامترهای یکی از زیرسیستمها تخمین زده می‌شود. در این مقاله نشان داده خواهد شد که اگر همه پارامترهای بدست آمده در مرحله نخست با هم ترکیب شوند، پاسخ بدست آمده با پاسخ حاصل از روش حداقل مربعات خطا[4] که بر روی کل داده‌ها انجام شود، یکسان است؛ ولی در صورتی که با انجام خوشه بندی بر روی پارامترهای بدست آمده، پارامترهای مربوط به هر زیرسیستم به درستی دسته‌بندی و جداگانه ترکیب گردند، این روش منجر به حل مسئله شناسائی سیستمهای سوئیچ شونده خطی خواهد شد.

اغلب روشهای ارائه شده برای شناسائی سیستمهای هایبرید خطی، بر مبنای خوشه بندی داده‌ها می‌باشند [۴،۸،۱۰]. در این روش‌ها یک خوشه بندی اولیه برای داده‌ها تعیین شده و سپس برای داده‌های درون هر خوشه یک زیرمدل خطی بدست می‌آید. در ادامه با توجه به خطای پیش بینی هر داده نسبت به زیرمدلها، داده‌های درون خوشه‌ها بروز رسانی می‌گردند. پروسه تکراری تعیین خوشه‌ها (معادل با تعیین سیگنال سوئیچ) و تعیین پارامترهای زیر مدلها، تا هنگامی ادامه می‌یابد که تابع هزینه مربوطه کمینه گردد. در برخی از این روش‌ها، تعداد زیرمدلها نیز در هر مرحله ممکن است تغییر کند. مشکل بزرگی که این روشها داراست، آنست که درگیر تخمین همزمان زیرسیستم‌ها و سیگنال سوئیچ خواهد شد [۹].

مزیت مهمی که روش پیشنهادی در این مقاله نسبت به سایر روشهای ارائه شده برای شناسایی سیستمهای سوئیچ شونده خطی/تکه‌ای خطی داراست، آن است که بجای خوشه بندی بر مبنای خطای پیش بینی مدل، خوشه بندی در فضای پارامترها انجام می‌گیرد، بنابراین شناسائی پارامترها مستقل از شناسائی سیگنال سوئیچ قابل انجام می‌باشد و این روش برخورد یکسانی در شناسائی پارامترهای سیستم‌های سوئیچ شونده و سیستمهای تکه‌ای خطی دارد. تنها روش موجود برای شناسائی سیستم‌های هایبرید که دارای این ویژگی می‌باشد و قادر است پارامترهای زیرسیستم‌ها را مستقل از سیگنال سوئیچ شناسائی نماید، روش جبری ارائه شده در [۶] می‌باشد. در این روش، با تعریف تابع حاصلضرب خطاها، مسئله شناسائی بگونه‌ای ساده شده است که تخمین پارامترهای زیرمدلها بطور مستقل از تخمین حالت گسسته سیستم قابل انجام بوده و سپس با استفاده از روشی

[1] Sparse
[2] Affine
[3] Bayesian

[4] least square error

موسوم به روش جبری، پارامترهای زیرسیستم‌ها بدست می‌آیند. به دلیل این تشابه، در بخش شبیه‌سازیها، نتایج روش پیشنهادی این مقاله، با روش جبری مقایسه شده است. یک مزیت مهم دیگر روش پیشنهادی این مقاله آن است که، در این روش الزامی برای وجود زمان سکون[1] در سیگنال سوئیچ وجود ندارد. با توجه به آن که روش ارائه شده، یک روش چند مرحله‌ای می‌باشد، نشان داده شده است که همگرائی الگوریتم‌های ارائه شده با تعداد محدودی تکرار، تضمین شده می‌باشد.

در ادامه این مقاله، ضمن معرفی سیستمهای سوئیچ شونده خطی در بخش ۲ روش ارائه شده برای شناسائی سیستمهای هایبرید و قضایای مربوط به آن در بخش ۳ ارایه می‌شود. در بخش ۴ نتایج شبیه‌سازی و در بخش ۵ نتیجه‌گیری مقاله ارائه می‌گردد.

۲- سیستم‌های سوئیچ شونده خطی

سیستم سوئیچ شونده خطی با نویز جمع شونده در خروجی توسط معادله زیر بیان می‌شود.

$$y(t)=\varphi^T(t)\theta_{\sigma(t)}+e(t) \qquad (۱)$$

که در آن $y(t)\in\mathbb{R}$ خروجی سیستم در زمان t، $\varphi(t)\in\mathbb{R}^n$ بردار رگرسیون و $\theta_k\in\mathbb{R}^n$ بردار پارامترهای زیرسیستم k ام می‌باشد. $\sigma(t)$ که سیگنال سوئیچ نامیده می‌شود، بیانگر یک تابع تکه‌ای ثابت می‌باشد که برد آن یک مجموعه متناهی از اعداد طبیعی مانند $\Im=\{1,2,\ldots,s\}$ است و s تعداد زیرسیستم‌ها می‌باشد. $e(t)$ بیانگر نویز سفید با میانگین صفر و واریانس λ می‌باشد. اگر بردار رگرسیون فقط شامل ورودیها و خروجیهای قبلی سیستم باشد، $\varphi^T(t)=\left[y(t-1)\ \cdots\ y(t-n_a)\ u(t-1)\ \cdots\ u(t-n_b)\right]$ سیستم SARX[2] نامیده شده و اگر $\varphi^T(t)=\left[y(t-1)\ \cdots\ y(t-n_a)\ u(t-1)\ \cdots\ u(t-n_b)\ 1\right]$ باشد، به آن سیستم SA[3] گویند. در اینجا n_a و n_b به ترتیب درجه خروجی و ورودی بوده و $n=n_a+n_b+1$ بعد بردار رگرسیون می‌باشد. در سیستم‌های SA سیگنال سوئیچ مستقل از ورودی و خروجی سیستم می‌باشد. در صورتی که مقادیر سیگنال سوئیچ با توجه به متغیر حالت یا ورودی سیستم تعیین گردد، به سیستمی که توسط معادله (۱) بیان می‌شود، مدل PWA[4] گفته می‌شود. در مسئله شناسائی سیستم‌های هایبرید، هدف آنست که با دانستن ورودی و خروجیهای سیستم برای یک زمان محدود، تعداد زیرسیستم‌ها، درجه زیرسیستم‌ها، مقادیر پارامترهای همه زیرسیستم‌ها و همچنین سیگنال سوئیچ تخمین زده شود [۶]. برای سادگی در اینجا فرض می‌شود که درجه تمامی زیرسیستم‌ها با هم برابر و از قبل معلوم است. نتیجه این فرض آنست که دانستن ورودی و خروجی سیستم در یک بازه زمانی محدود، معادل داشتن خروجی و بردار رگرسیون سیستم در یک بازه زمانی محدودتر می‌باشد. بنابراین از این پس فرض می‌شود که $\{y(t),\varphi(t)\}_{t=1}^{N}$ داده‌های سیستم برای N زمان در دسترس بوده و هدف تخمین تعداد زیرسیستم‌ها، سیگنال سوئیچ و پارامترهای زیرسیستم‌ها می‌باشد.

۳- روش پیشنهادی

فرض کنید داده‌ها توسط سیستم سوئیچ شونده خطی که با معادله (۱) توصیف می‌شود، تولید می‌گردد و تعداد داده‌های تولید شده توسط زیرسیستم k ام برابر با N_k بوده و $N=\sum_{k=1}^{s}N_k$ تعداد کل داده‌ها باشد. همچنین شرط لازم برای آنکه زیرسیستم k ام شناسائی پذیر باشد، آنست که حداقل n داده از آن زیرسیستم موجود و معادله تخمین مربوطه جواب منحصر بفردی داشته باشد. بنابراین از این به بعد فرض می‌شود که برای تمام زیرسیستم‌ها $N_k\ge n$ است و معادله تخمین دارای جواب منحصر بفردی است، لذا فرض می شود که همه زیرسیستم-ها شناسائی پذیر هستند.

اگر از میان N داده موجود، n داده بصورت اتفاقی انتخاب شود، بگونه‌ای که معادله تخمین حاصل از آنها جواب منحصر بفردی داشته باشد، که از این به بعد این مجموعه داده با $\hat{n}$ نشان داده خواهد شد، یکی از حالتهای زیر ممکن است اتفاق بیافتد:

حالت۱: $\hat{n}$ توسط یک زیرسیستم تولید شده باشد.

حالت۲: $\hat{n}$ توسط یک زیرسیستم تولید نشده باشد.

همانگونه که در ادامه نشان داده خواهد شد، اگر $\hat{n}$ توسط یک زیرسیستم تولید شده باشد، آنگاه می‌توان تخمینی برای بردار پارامترهای آن زیرسیستم بدست آورد، اما در حالتی که تمام داده‌ها مربوط به یک زیرسیستم نباشد، یک بردار پارامتر پراکنده بدست خواهد آمد.

فرض کنید اعضای $\hat{n}$ به ترتیب از داده‌های زمانهای t_1، t_2، ... و t_n که توسط زیرسیستم k ام تولید شده‌اند، تشکیل شده باشد، بطوری که بردارهای $\varphi(t_1)$ و ... و $\varphi(t_n)$ مستقل خطی بوده و بدون از دست دادن کلیت، $1\le t_1<t_2<\ldots<t_n\le N$ باشد. در این صورت برای داده‌های $\{y(t),\varphi(t)\}_{t=t_1}^{t_n}$ دستگاه معادلات خطی زیر برقرار است .

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ \vdots \\ y(t_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varphi^T(t_1) \\ \vdots \\ \varphi^T(t_n) \end{bmatrix}\theta_k+\begin{bmatrix} e(t_1) \\ \vdots \\ e(t_n) \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

با توجه به استقلال خطی $\varphi(t_1)$ و ... و $\varphi(t_n)$ می‌توان θ_k را از معادله زیر که معادله تخمین نامیده می شود محاسبه نمود.

$$\hat{\theta}_{t_1:t_n}=\Phi_{t_1:t_n}^{-1}Y_{t_1:t_n} \qquad (۳)$$

که در رابطه اخیر ماتریسهای $\Phi_{t_1:t_n}$ و $Y_{t_1:t_n}$ بترتیب $n\times n$ و $n\times 1$ بوده و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

[1] dwell time
[2] Switched Auto Regressive with eXogenous input
[3] Switched Affine
[4] Piecewise Affine

$$\Phi_{t_1:t_n} = \left[\varphi(t_1) \ \cdots \ \varphi(t_n)\right]^T \qquad (۴)$$

$$Y_{t_1:t_n} = \left[y(t_1) \ \cdots \ y(t_n)\right]^T \qquad (۵)$$

لم ۱- اگر همه داده‌های درون n توسط زیرسیستم k-ام تولید شده باشند، آنگاه پارامتر بدست آمده از طریق معادله (۳) یک تخمین بدون بایاس از θ_k بوده و دارای واریانس $\lambda \ \Phi_{t_1:t_n}^{-1}\Phi_{t_1:t_n}^{-T}$ می‌باشد.

اثبات- با جایگذاری $Y_{t_1:t_n}$ از معادله سیستم (۲) درون معادله (۳) داریم:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{t_1:t_n} &= \Phi_{t_1:t_n}^{-1}Y_{t_1:t_n} \\ &= \Phi_{t_1:t_n}^{-1}\left(\Phi_{t_1:t_n}\theta_k + e_{t_1:t_n}\right) \\ &= \theta_k + \Phi_{t_1:t_n}^{-1}e_{t_1:t_n}\end{aligned} \qquad (۶)$$

که در این رابطه:

$$e_{t_1:t_n} = \left[e(t_1) \ \cdots \ e(t_1)\right]^T \qquad (۷)$$

با گرفتن امید ریاضی از طرفین معادله (۶) و با توجه به اینکه $e_{t_1:t_n}$ و $\Phi_{t_1:t_n}^{-1}$ مستقل از هم بوده و امید ریاضی $e_{t_1:t_n}$ برابر با صفر است، داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left\{\hat{\theta}_{t_1:t_n}\right\} &= \mathrm{E}\left\{\theta_k + \Phi_{t_1:t_n}^{-1}e_{t_1:t_n}\right\} \\ &= \theta_k + \mathrm{E}\left\{\Phi_{t_1:t_n}^{-1}\right\}\mathrm{E}\left\{e_{t_1:t_n}\right\} \\ &= \theta_k\end{aligned} \qquad (۸)$$

همچنین ماتریس کواریانس تخمین با توجه به اینکه $\mathrm{cov}\left\{e_{t_1:t_n}\right\} = \lambda I_{n\times n}$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}\left\{\hat{\theta}_{t_1:t_n}\right\} &= \mathrm{E}\left\{\left[\theta_{t_1:t_n} - \mathrm{E}\left\{\theta_{t_1:t_n}\right\}\right]\left[\theta_{t_1:t_n} - \mathrm{E}\left\{\theta_{t_1:t_n}\right\}\right]^T\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{\left[\Phi_{t_1:t_n}^{-1}e_{t_1:t_n}\right]\left[\Phi_{t_1:t_n}^{-1}e_{t_1:t_n}\right]^T\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{\Phi_{t_1:t_n}^{-1}e_{t_1:t_n}e_{t_1:t_n}^T\Phi_{t_1:t_n}^{-T}\right\} \\ &= \lambda \ \Phi_{t_1:t_n}^{-1}\Phi_{t_1:t_n}^{-T}\end{aligned} \qquad (۹)$$

■

از آنجا که سیگنال سوئیچ از قبل معلوم نیست، اگر برای تمامی انتخابهای ممکن بردار پارامتر تخمین زده شود تعداد $\binom{N_k}{n}$ بردار پارامتر از $\binom{N}{n}$ بردار پارامتر تخمین زده شده، متعلق به زیرسیستم k-ام خواهد بود و اگر برای هر $k \in \Im$ شرط $N_k >> n$ برقرار باشد، بردار پارامتر هر زیرسیستم به دفعات زیادی تخمین زده خواهد شد. در اینصورت، تعداد $\binom{N}{n} - \sum_{k=1}^{s}\binom{N_k}{n}$ بردار پارامتر پراکنده نیز در میان بردارهای تخمین زده شده وجود خواهد داشت. لذا با توجه به تجمع بردارهای تخمینی یک زیرسیستم در اطراف یک نقطه در فضای پارامتر، بردار پارامتر هر زیرسیستم قابل تشخیص خواهد بود.

لم ۲- فرض کنید که $\hat{\theta}_i$ ، $i = 1,2,\cdots m_k = \binom{N_k}{n}$ همه تخمین‌های ممکن از بردار پارامتر زیرسیستم k ام سیستم (۱) با واریانس W_i باشند ، آنگاه:

$$\hat{\theta}_{com,k} = \left[\sum_{i=1}^{m_k} W_i^{-1}\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m_k} W_i^{-1}\hat{\theta}_i\right] \qquad (۱۰)$$

با تخمین حاصل از روش حداقل مربعات خطا که فقط از داده‌های زیرسیستم k-ام استفاده می‌کند، برابر خواهد بود.

اثبات- با توجه به آنکه می‌توان برای داده‌های مربوط به زیرسیستم k-ام، W_i در رابطه (۹) را بصورت زیر نوشت:

$$W_i = \lambda\left[\sum_{t\in\{t_1:t_n|\sigma(t_i)=k\}} \varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1} \qquad (۱۱)$$

و معادله (۳) را نیز می‌توان برای داده‌های مربوط به زیرسیستم k-ام بصورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_i &= \Phi_{t_1:t_n}^{-1}\left(\Phi_{t_1:t_n}^{-T}\Phi_{t_1:t_n}^{T}\right)Y_{t_1:t_n} \\ &= \left(\Phi_{t_1:t_n}^{T}\Phi_{t_1:t_n}\right)^{-1}\Phi_{t_1:t_n}^{T}Y_{t_1:t_n} \\ &= \left(\sum_{t\in\{t_1:t_n|\sigma(t_i)=k\}} \varphi(t)\varphi^T(t)\right)^{-1}\sum_{t\in\{t_1:t_n|\sigma(t_i)=k\}} \varphi(t)y(t)\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

با جایگذاری W_i از رابطه (۱۱) و $\hat{\theta}_i$ از رابطه (۱۲) در رابطه (۱۰) و انجام ساده سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{com,k} &= \left[\sum_{i=1}^{m_k}\frac{1}{\lambda}\sum_{t\in\{t_1:t_n|\sigma(t_i)=k\}} \varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1} \\ &\times\left[\sum_{i=1}^{m_k}\frac{1}{\lambda}\sum_{t\in\{t_1:t_n|\sigma(t_i)=k\}} \varphi(t)y(t)\right]\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

با توجه به انتخاب همه جایگشتهای ممکن، جملات $\varphi(t)\varphi^T(t)$ و $\varphi(t)y(t)$ دقیقا به تعداد $\frac{(N_k-1)!}{(n-1)!(N_k-n)!}$ بار تکرار شده‌اند، بنابراین:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{com,k} &= \left[\frac{(N_k-1)!}{(n-1)!(N_k-n)!}\sum_{\{t\in\{1:N\}|\sigma(t)=k\}} \varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1} \\ &\times\left[\frac{(N_k-1)!}{(n-1)!(N_k-n)!}\sum_{\{t\in\{1:N\}|\sigma(t)=k\}} \varphi(t)y(t)\right]\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

که با پاسخ روش حداقل مربعات خطا که فقط از داده‌های زیرسیستم k-ام استفاده می‌نماید، معادل می‌باشد.

■

بدیهی است که اگر بخواهیم از روش کمترین مربعات خطا بردار پارامتر یک زیرسیستم را تخمین بزنیم لازم است از قبل داده‌های متعلق به آن زیرسیستم را تشخیص دهیم، و در صورتی که سیگنال سوئیچ معلوم نباشد امکان پذیر نخواهد بود. در صورتی که در روش پیشنهادی این

مقاله با ترکیب بردارهای تخمینی مجتمع در اطراف یک نقطه در فضای پارامتر، می‌توان تخمینی برای بردار پارامتر زیرسیستم مربوطه بدست آورد. مثال زیر این مسئله را بخوبی نشان می‌دهد.

مثال ۱: فرض کنید داده‌های یک سیستم سوئیچ شونده بصورت زیر در دسترس باشند:

$$y(t)=\begin{cases}0.9y(t-1)+4u(t-1)\,, & t=1,2,3,4\\ -0.6y(t-1)+u(t-1)\,, & t=5,6,7\end{cases} \qquad (۱۵)$$

که $y(t)$ در این رابطه خروجی سیستم بوده و ورودی $u(t)$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی با میانگین صفر و واریانس واحد می‌باشد. اگر توسط هر ۲ داده موجود یک پارامتر برای سیستم فوق شناسائی گردد، -که ۴۲ حالت ممکن وجود دارد- و پارامترهای بدست آمده را درون یک ماتریس بصورت زیر قرار دهیم:

$$\hat{\theta}^1_{t_1,t_2}=\begin{bmatrix}0 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & -0.6074 & -0.6689 & -2.6821\\ 0.9 & 0 & 0.9 & 0.9 & -0.7453 & -6.3666 & 1.0579\\ 0.9 & 0.9 & 0 & 0.9 & -0.6514 & -1.2358 & 1.4105\\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0 & -0.5562 & -0.2808 & 0.5722\\ -0.6074 & -0.7453 & -0.6514 & -0.5562 & 0 & -0.6 & -0.6\\ -0.6689 & -6.3666 & -1.2358 & -0.2808 & -0.6 & 0 & -0.6\\ -2.6821 & 1.0579 & 1.4105 & 0.5722 & -0.6 & -0.6 & 0\end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

که درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس فوق، درایه اول پارامتری را نشان می‌دهد که با استفاده از داده‌های i و j بدست آمده‌اند. درایه‌های دوم پارامترهای بدست آمده، در ماتریس زیر نشان داده شده‌اند.

$$\hat{\theta}^2_{t_1,t_2}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 4 & 4 & 2.1626 & 2.0876 & -0.3663\\ 4 & 0 & 4 & 4 & 23.9196 & 91.9772 & 2.0879\\ 4 & 4 & 0 & 4 & 9.1071 & 11.0309 & 2.3193\\ 4 & 4 & 4 & 0 & -5.9098 & -4.357 & 1.7692\\ 2.1626 & 23.9196 & 9.1071 & -5.9098 & 0 & 1 & 1\\ 2.0876 & 91.9772 & 11.0309 & -4.357 & 1 & 0 & 1\\ -0.3663 & 2.0879 & 2.3193 & 1.7692 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

همانگونه که در لم ۲ نشان داده شد، مقادیر بدست آمده در ماتریس‌های فوق، اجزای پاسخ حداقل مربعات خطا می‌باشند. در این مثال، با توجه به عدم وجود نویز، مقادیر پارامترهای زیرسیستم‌های ۱ و ۲ بترتیب ۱۲ و ۶ بار تکرار شده‌اند و سایر پارامترها نیز ترکیبی از پارامترهای دو زیرسیستم می‌باشند. نکته دیگری که وجود دارد، آنست که عوض کردن سیگنال سوئیچ در این سیستم، به منزله جابجا کردن همزمان سطرها و ستونهای ماتریسهای (۱۶) و (۱۷) بوده و تغییری در تکرار شدن پارامترهای هر یک از زیرسیستم‌ها ایجاد نخواهد کرد. بنابراین روش پیشنهادی در این مقاله، برخورد یکسانی در شناسائی پارامترهای سیستمهای فاقد / دارای زمان سکون داراست. مثال ۲ چنین حالتی را در صورت وجود داده‌های نویزی نشان می‌دهد.

مثال ۲: فرض کنید داده‌های یک سیستم سوئیچ شونده بصورت زیر در دسترس باشند:

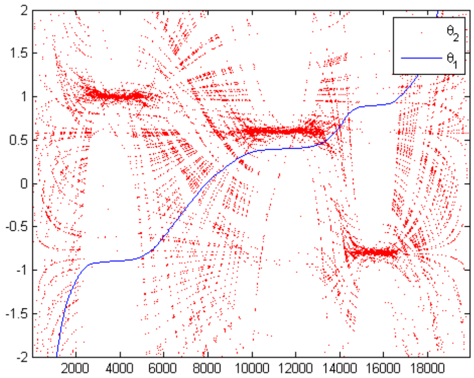
$$y(t)=\begin{cases}-0.9y(t-1)+u(t-1)+e(t), & \sigma(t)=1\\ 0.4y(t-1)+0.6u(t-1)+e(t), & \sigma(t)=2\\ 0.9y(t-1)-0.8u(t-1)+e(t), & \sigma(t)=3\end{cases} \qquad (۱۸)$$

ورودی $u(t)$ در این سیستم توسط یک دنباله از متغیرهای تصادفی با میانگین صفر و واریانس واحد تولید می‌شود و سیگنال سوئیچینگ بصورت زیر تعیین می‌گردد:

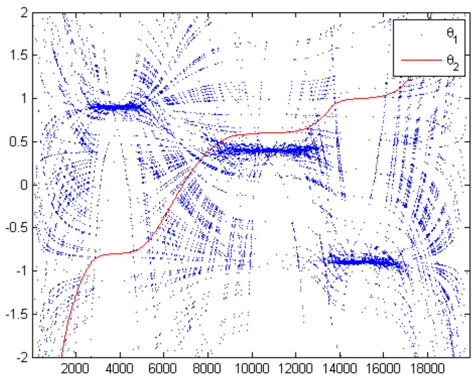
$$\sigma(t)=\begin{cases}1 & w.p.=0.3\\ 2 & w.p.=0.4\\ 3 & w.p.=0.3\end{cases} \qquad (۱۹)$$

و $e(t)$ نویز سفید با میانگین صفر و انحراف معیار λ می‌باشد. بوسیله این سیستم تعداد ۲۰۰ داده تولید شده و هدف تخمین تعداد زیرسیستم‌ها، پارامترهای زیرسیستم‌ها و سیگنال سوئیچینگ می‌باشد. انحراف معیار نویز در این حالت برابر 0.01 می‌باشد که نسبت سیگنال به نویز حدود ۱۰۰ را شبیه سازی می‌کند.

با انتخاب همه جایگشتهای ممکن، $m=19900$ پارامتر برای سیستم بدست آمده است. شکلهای ۱ و ۲ پارامترهای بدست آمده را درحالیکه برحسب درایه اول پارامترها (θ_1) و درایه دوم آنها (θ_2) بترتیب شده‌اند، نشان می‌دهد.

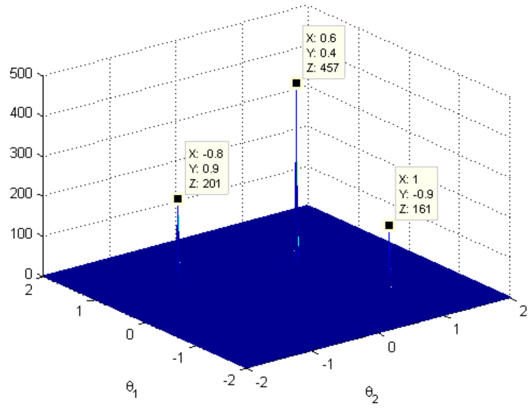


شکل ۱: پارامترهای نگاشت شده، درحالیکه بترتیب بزرگ بودن درایه اول آنها، (θ_1) مرتب شده‌اند.



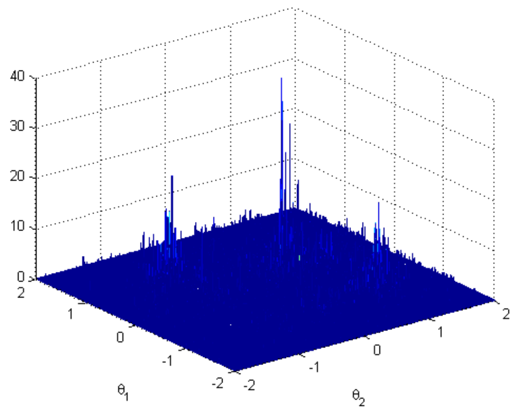
شکل ۲: پارامترهای نگاشت شده، درحالیکه بترتیب بزرگ بودن درایه دوم آنها، (θ_2) مرتب شده‌اند.

همچنین اگر ناحیه $\theta_1 - \theta_2$ ، بصورت مربعهای با طول ضلع برابر با 0.01 تقسیم شده و فراوانی پارامترها را در هر مش بدست آوریم، شکل ۳ نشان می‌دهد که پارامترهای بدست آمده در نقاطی که متناظر با مقادیر واقعی پارامترهای سیستم می‌باشند، دارای تمرکز هستند.



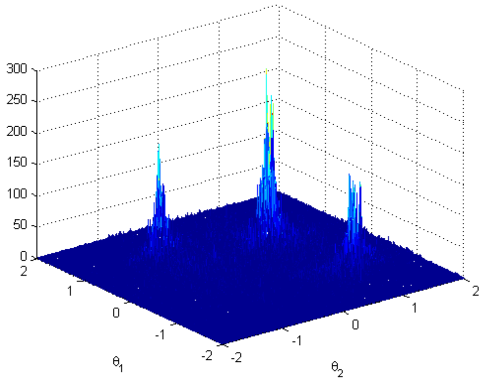
شکل ۳: فراوانی پارامترهای بدست آمده با $\lambda = 0.01$ و $N = 200$

همچنین نمودار فراوانی پارامترهای بدست آمده، در حالتی که انحراف معیار نویز خروجی برابر $\lambda = 0.1$ باشد، در شکل ۴ رسم شده است.



شکل ۴: فراوانی پارامترهای بدست آمده با $\lambda = 0.1$ و $N = 200$

همانگونه که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، در این حالت که نسبت سیگنال به نویز حدود ۱۰ می‌باشد، تراکم پارامترها در نزدیکی مقادیر متناظر با پارامترهای زیرسیستم‌ها وجود دارد، اما به خوبی حالت قبل قابل مشاهده نمی‌باشد. در این حالت، با افزایش تعداد داده‌ها نمودار بدست آمده دوباره به شکل گوسی نزدیک خواهد شد. شکل ۵ فراوانی را برای $N = 1000$ نشان می‌دهد.



شکل ۵: فراوانی پارامترهای بدست آمده با $\lambda = 0.1$ و $N = 1000$

مسئله باقیمانده آنست که چگونه پارامترهای زیرسیستم‌ها را از میان پارامترهای نگاشت شده بدست آوریم؟ برای این کار ممکن است روشهای متفاوتی وجود داشته باشد. به عنوان مثال، یک راه بدست آوردن پارامترهای زیرسیستم‌ها از میان پارامترهای نگاشت شده، حل مسئله بهینه سازی غیرخطی زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}&\left(\hat{s},\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_{\hat{s}},\hat{\zeta}_1,\ldots,\hat{\zeta}_{\hat{s}}\right)=\\&\underset{s,\theta_1,\ldots,\theta_s,\zeta_1,\ldots,\zeta_s}{\arg\min}\left\{\sum_{k=1}^{s}\left[\sum_{(t_1,\ldots,t_n)\in\zeta_k}\left\|\theta_{t_1:t_n}-\theta_k\right\|_2^2\right]+\beta s^2\right\}\\&\text{s.t.}\quad \bigcap_{k\neq j}\left(\zeta_k,\zeta_j\right)=\phi\\&\qquad \bigcup_{k=1}^{s}\zeta_k=\{1,2,\ldots,N\}\end{aligned} \tag{۲۰}$$

که ζ_k ها در این رابطه، زیر مجموعه‌هائی از اعداد طبیعی می‌باشند که بیانگر مجموعه داده‌های دارای شماره زیرسیستم یکسان می‌باشند. همچنین $\hat{s}$ تخمینی برای تعداد زیرسیستم‌ها می‌باشد و β یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد که برای جلوگیری از افزایش تعداد زیرسیستم‌ها در تابع هزینه قرار داده شده است. یک راه حل ساده دیگر، جستجو برای نقاط پرتکرار در میان پارامترهای نگاشت شده می‌باشد. الگوریتم ۱ به ما کمک می‌کند که پارامترهای زیرسیستم‌ها را از میان پارامترهای نگاشت شده، با شناسائی نقاط پرتراکم بدست آوریم:

الگوریتم ۱ برای شناسائی پارامترهای پرتکرار:

۱- یک عدد افزار $\Delta \in \mathbb{N}$ و $\Delta \geq 2$ انتخاب کن.

۲- برای هریک از پارامترهای مجهول سیستم (θ_i) یک کران بالا ($\theta_i^{\max}$) و کران پایین ($\theta_i^{\min}$) انتخاب کن.

۳- فضای پارامترهای بدست آمده را به Δ^n ناحیه تقسیم کرده و فراوانی پارامترها را در هر ناحیه بدست آورید. در این مرحله فقط پارامترهایی که در ناحیه پارتیشن بندی شده قرار دارند را ملاک قرار بده.

۴- ناحیه با بیشترین فراوانی را بدست آورده و با انتخاب مرزهای ناحیه دارای بیشترین فراوانی، بعنوان $\theta_i^{\max}$ و $\theta_i^{\min}$ جدید، مراحل ۳-۴ را تکرار کن.

۵- شرط توقف الگوریتم آنست که تعداد تکرارها از یک حد معین بیشتر شود و یا فراوانی در ناحیه دارای بیشترین فراوانی، از یک حد معین کمتر گردد.

دقت کنید که مقادیر اولیه $\theta_i^{\max}$ و $\theta_i^{\min}$ را می‌توان از روی اطلاعات قبلی در مورد پارامترها بدست آورد و یا از روی نمودارهایی مانند شکلهای ۱ و ۲ یک کران بالا و پایین برای هریک از پارامترها بدست آورد. روش پیشنهادی این مقاله برای شناسائی سیستمهای هایبرید خطی در الگوریتم ۲ آمده است.

الگوریتم ۲ برای شناسائی سیستمهای سوئیچ شونده:

۱- مقدار دهی اولیه: $\varepsilon > 0$ ، Δ ، $\theta^{\max}$ و $\theta^{\min}$ را انتخاب کن و قرار بده $k = 1$.

۲- با انتخاب همه جایگشتهای ممکن n داده از میان N تا، $m = \binom{N}{n}$ پارامتر شناسائی نمائید.

۳- در بین پارامترهای نگاشت شده، پارامتر با بیشترین تکرار را با استفاده از الگوریتم ۱ پیدا کن ($\hat{\theta}^k$).

۴- برای تمامی داده‌های مدل نشده، خطای $\tilde{e}(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}^k$ را پیدا کرده و داده‌هایی که اندازه خطای آنها کمتر از ε می‌باشد را از میان داده‌ها کنار گذاشته و پارامترهای متناظر با این داده‌ها را از میان پارامترهای نگاشت شده حذف کن.

۵- قرار بده $k = k + 1$ و مراحل ۳ تا ۵ را آنقدر تکرار کن تا تعداد داده‌های مدل نشده کمتر از n گردد.

توجه کنید که $\theta^{\max}$ و $\theta^{\min}$ در اینجا بردارهای $n \times 1$ می‌باشند که کران بالا و کران پایین پارامترها را شامل می‌شوند.

نکته‌ای که در مورد الگوریتم ۲ وجود دارد،آنست که این الگوریتم حداکثر در تعداد $\left[N/n \right]$ تکرار همگرا خواهد شد و [.] بیانگر تابع جزء صحیح می‌باشد. دلیل این امر آنست که در هر تکرار الگوریتم ۲ که یکی از پارامترهای نگاشت شده، بعنوان پارامتر با بیشترین تکرار انتخاب گردید، از آنجا که این پارامتر توسط n داده تولید شده است، لذا n داده را بطور دقیق شناسائی می‌نماید. بنابراین بازای هر $\varepsilon > 0$ در هر تکرار الگوریتم ۲ ، حداقل n تا از داده‌های مدل نشده کاسته شده و الگوریتم با حداکثر $\left[N/n \right]$ تکرار خاتمه می‌یابد. بدیهی است که با افزایش پارامتر ε تعداد تکرار کاهش خواهد یافت.

مشکلی که در هنگام اجرای الگوریتم ۲ وجود دارد، حجم محاسبات زیاد این الگوریتم در حالتی می‌باشد که تعداد داده‌ها زیاد باشد و یا بعد بردار رگرسیون (n) بزرگ باشد، در این حالت تعداد حالتهای ممکن برای انتخاب n داده از میان N تا زیاد شده و حجم محاسبات برای انجام نگاشت افزایش خواهد یافت. با این حال، می‌توان برای کاهش حجم محاسبات، همه جایگشتهای ممکن را بررسی نکرده و فقط تعداد محدودی از آنها را بررسی نمود. الگوریتم ۳ به ما کمک می‌کند که عمل شناسائی را با حجم کمتری از محاسبات انجام دهیم.

الگوریتم ۳ برای شناسائی سیستمهای سوئیچ شونده:

۱- مقدار دهی اولیه: $\varepsilon > 0$ ، Δ ، $\theta^{\max}$ ، $\theta^{\min}$ و m' را انتخاب کن و قرار بده $k = 1$.

۲- از میان N داده مدل نشده، با انتخاب m' جایگشت دلخواه از بین m جایگشت ممکن ($m' \le m$) تعداد m' پارامتر شناسائی نمائید.

۳- در بین m' پارامتر شناسائی شده، پارامتر با بیشترین تکرار را با استفاده از الگوریتم ۱ پیدا کن $\hat{\theta}^k$

۴- برای تمامی N داده مدل نشده، خطای $\tilde{e}(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}^k$ را پیدا کرده و داده‌هایی که خطای آنها کمتر از ε می‌باشد را کنار بگذار.

۵- برای N' داده‌ای که توسط این زیرمدل توصیف نمی‌شوند، قرار بده $N = N'$ و مراحل ۲ تا ۵ را آنقدر تکرار کن تا $N < n$ گردد.

آنچه در مورد همگرائی الگوریتم ۲ گفته شد، در مورد الگوریتم ۳ نیز برقرار خواهد بود و بنابراین همگرائی آن تضمین شده می‌باشد.

نکته ۱. توجه کنید در صورتی که هیچ اطلاعاتی در مورد سیگنال سوئیچینگ در دسترس نبوده و m' جایگشت انتخابی بصورت کاملا اتفاقی انتخاب گردند، آنگاه این نکته دارای اهمیت می‌باشد که چه درصدی از پارامترهای بدست آمده فاقد معنی می‌باشند. بدین منظور، ضریب جدیدی بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\lambda = \frac{m_{pure}}{m'} \qquad (۲۱)$$

که در این رابطه، m_{pure} بیانگر تعداد پارامترهای دارای معنی و m' تعداد کل پارامترهای انتخابی می‌باشد و $0 \le \lambda \le 1$ می‌باشد. در صورتی که انتخاب جایگشت ها بصورت کاملا اتفاقی باشد، آنگاه $\lambda = \sum_{k=1}^{s} \binom{N_k}{n} \Big/ \binom{N}{n}$ خواهد بود. دقت کنید که با افزایش تعداد زیرسیستمها s و افزایش بعد بردار رگرسیون n ضریب λ کاهش می‌یابد. همچنین در حالتی که تعداد داده‌های تولید شده توسط همه زیرسیستمها باهم برابر باشد، λ کمترین مقدار ممکن را خواهد داشت. در این صورت، هنگامی که تعداد داده‌های سیستم، N به سمت بینهایت میل کند، مقدار λ بسوی $\left(\frac{1}{s}\right)^n$ میل خواهد نمود. نکته جالبی که در اینجا مشاهده می‌شود آنست که ضریب λ ارتباطی با نحوه سوئیچینگ میان زیرسیستمها نداشته و بنابراین روش ارائه شده در این مقاله برخورد کاملا یکسانی در حل مسئله شناسائی سیستمهای فاقد/دارای زمان سکون و همچنین سیستمهای سوئیچ شونده/تکه‌ای خطی داراست؛ لیکن در صورتی که اطلاعات اضافه‌تری در مورد نحوه سوئیچینگ میان زیرسیستمها وجود داشته باشد، با انتخاب هدفمند حالتهای ممکن در انتخاب داده‌ها، ضریب λ افزایش خواهد یافت.

نکته ۲. اگر سیگنال سوئیچینگ سیستم دارای یک زمان وقفه برابر با κ باشد، یعنی، بازای هر $t \in \{1, 2, \ldots, N - \kappa - 1\}$ اگر $\sigma(t+1) \ne \sigma(t)$ باشد، آنگاه رابطه

$\sigma(t+\kappa+1)=\sigma(t+\kappa)=\cdots=\sigma(t+1)$ برقرار می‌باشد. در این صورت، پیشنهاد می‌شود که t_1 ، t_2 و ... و t_n بصورتی انتخاب گردند که $t_1<t_2<\cdots<t_n\le t_1+\kappa$ باشد.

نکته ۳. اگر سیستم (۱) یک سیستم PWA بوده و فرکانس نمونه برداری به اندازه کافی زیاد باشد، آنگاه پیشنهاد می‌شود که برای انتخاب m' جایگشت از میان m جایگشت ممکن، t_1 ، t_2 و ... و t_n بصورتی انتخاب گردند که $t_1<t_2<\cdots<t_n\le t_1+\gamma$ باشد و می توان برای انتخاب γ از رابطه زیر استفاده نمود:

$$\gamma=\min\left\{m\in\mathbb{N}^{>0}\,\middle|\,\left(N-(n-1)m\right)m^{n-1}\ge m'\right\} \qquad (۲۲)$$

نکته ٤. اگر سیگنال سوئیچینگ سیستم پریودیک با دوره تناوب τ باشد، یعنی، بازای هر $t\in\{1,2,\dots,N-\tau\}$ رابطه $\sigma(t+\tau)=\sigma(t)$ برقرار باشد [۱۰]، آنگاه پیشنهاد می‌شود که t_1 ، t_2 و ... و t_n بصورتی انتخاب گردند که برای هر یک از جایگشت‌های انتخابی، $t_{k+1}=t_k+\tau$ برای $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$ باشد.

٤- شبیه‌سازی

مثال ۳: برای مقایسه بهتر عملکرد روش ارائه شده در این مقاله، نتایج آن با روش جبری ارائه شده در مقاله [۶] مقایسه می‌گردد. علت انتخاب روش جبری برای مقایسه نتایج، آنست که در روش جبری نیز، مانند روش ارائه شده در این مقاله، شناسائی زیر مدلها مستقل از شناسائی سیگنال سوئیچینگ انجام می‌گیرد. در روش فوق، با استفاده از تکنیکی به نام قید مجزاسازی هایبرید[1] این امر میسر شده است که شناسائی پارامترهای زیرسیستم‌ها بدون اطلاع از سیگنال سوئیچینگ امکانپذیر باشد. نتایج شبیه سازی بر روی ۱۰۰۰ مدل سوئیچ شونده خطی که هر یک دارای ۳ زیرسیستم می‌باشند، انجام می‌گردد. هر یک از زیرسیستم‌ها، با مدل ARX زیر توصیف می‌گردد.

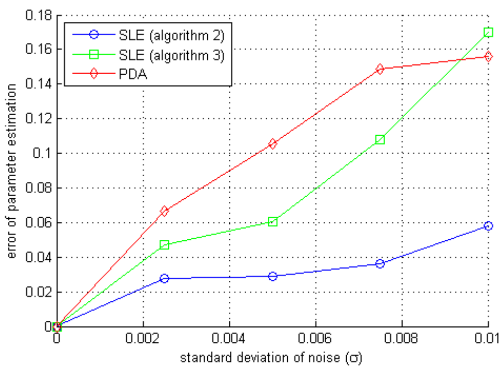
$$y(t)=a_1^{\sigma(t)}y(t-1)+a_2^{\sigma(t)}y(t-2)+c_1^{\sigma(t)}u(t-1)+e(t) \qquad (۲۳)$$

برای هر یک از زیرمدلها، $n_a=2$ و $n_b=1$ و بعد بردار رگرسیون برابر با ۳ می‌باشد. در هر یک از ۱۰۰۰ تکرار و برای هریک از ۳ زیرسیستم، مقادیر (a_1,a_2) بصورت تصادفی بگونه‌ای انتخاب می‌شوند که قطبهای هر یک از زیرسیستم‌ها با یک توزیع یکنواخت درون ناحیه $0.8\le\|z\|\le 1\subset\mathbb{C}$ قرار گیرد. پارامتر c_1 در هر تکرار و برای هر زیرسیستم، با استفاده از یک توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس واحد تعیین می‌گردد. سیگنال سوئیچینگ در هر تکرار توسط رابطه زیر تعیین می‌گردد.

$$\sigma(t)=\begin{cases}1 & 1\le t\le 30\\ 2 & 31\le t\le 60\\ 3 & 61\le t\le 100\end{cases} \qquad (۲۴)$$

در هر تکرار، دنباله ورودی با استفاده از یک توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس واحد بدست می‌آید و مقادیر اولیه خروجی، با استفاده از یک توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس $\Sigma=I_2$ بدست می‌آیند. $e(t)$ بیانگر نویز سفید با میانگین صفر و انحراف معیار λ می‌باشد و مقدار λ در بازه $[0,0.01]$ انتخاب می‌گردد تا خطای اندازه‌گیری حدود یک درصد را شبیه‌سازی کند.

همچنین برای مقایسه بهتر، روش الگوریتم ۲ (حالتی که تمامی جایگشتهای ممکن انتخاب می‌شوند) و روش الگوریتم ۳ با انتخاب تصادفی تنها ۱۰۰۰ نمونه از میان جایگشتهای ممکن با روش جبری PDA[2] مقاله [۶] مقایسه شده‌اند. در شبیه‌سازیها، برای ۳ روش مقایسه شده، تعداد زیرسیستمها از قبل معلوم فرض می‌شود. شکل ۶ خطای شناسائی پارامترها را برحسب تابعی از انحراف معیار نویز برای ۳ الگوریتم اشاره شده نشان می‌دهد. خطای پارامتر در اینجا بصورت $\left\|\theta_k-\hat{\theta}_k\right\|_2$ محاسبه شده است که بر روی ۳ زیرسیستم و ۱۰۰۰ تکرار میانگین گرفته شده است. همانگونه که در این شکل دیده می‌شود، روش الگوریتم ۲ (حالتی که همه ۱۶۱۷۰۰ جایگشت ممکن انتخاب شده‌اند) بهترین عملکرد را داراست، و الگوریتم ۳ نیز (فقط با انتخاب ۱۰۰۰ جایگشت ممکن) دارای خطای قابل قبولی می‌باشد. از آنجا که روش [۶] وابسته به انتخاب پارامترهای (z_0,v) می‌باشد، در هر تکرار، ۳ مقدار بصورت اتفاقی بوسیله توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $I_{2\times2}$ برای آن انتخاب شده و مقادیری که منجر به کمترین خطای تخمین خروجی می‌شوند، انتخاب می‌گردند. همچنین مقدار دهی اولیه $\Delta=2$ ، $\theta^{\max}=[100,100,100]$ ، $\theta^{\min}=[-100,-100,-100]$ و $\varepsilon=0.001$ برای الگوریتم‌های ۲ و ۳ انتخاب شده است.

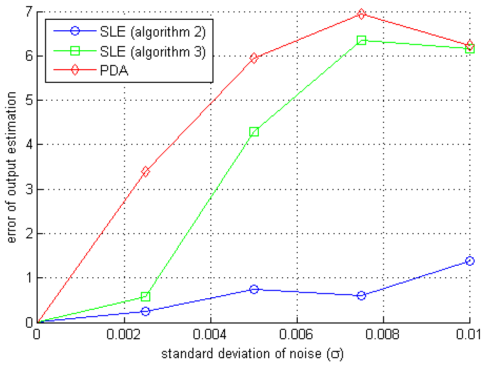


شکل ۶: خطای شناسائی پارامترهای زیرسیستم‌ها.

شکل ۷ خطای تخمین خروجی را بصورت تابعی از انحراف معیار نویز نشان می‌دهد. خطای تخمین خروجی بصورت $|y(t)-\hat{y}(t)|$ محاسبه می‌گردد که بر روی تعداد داده‌ها و تعداد تکرارها میانگین گیری شده است.

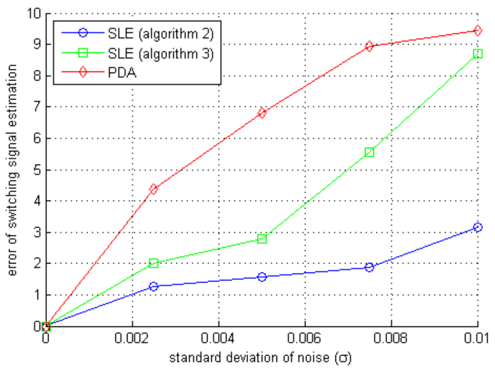
[1] Hybrid Decoupling Constraint

[2] Polynomial Differentiation Algorithm



شکل ۷: خطای تخمین خروجی.

شکل ۸ خطای تخمین سیگنال سوئیچینگ را نشان می‌دهد. خطای تخمین سیگنال سوئیچینگ بصورت درصد زمانهایی که سوئیچ بدرستی تخمین زده نمی‌شود، محاسبه شده و بر روی ۱۰۰۰ تکرار، میانگین گیری شده است.



شکل ۸: خطای شناسائی سیگنال سوئیچینگ.

همانگونه که شکل‌های (۸-۶) نشان می‌دهد، روش الگوریتم ۲ دارای کمترین خطا در تخمین پارامترها، خروجی و سیگنال سوئیچینگ (حدود یک سوم) نسبت به دو روش دیگر می‌باشد. همچنین روش الگوریتم ۳ برای مقادیر کم نویز دارای عملکرد بهتری نسبت به روش PDA بوده و برای مقادیر زیاد نویز نیز دارای عملکردی قابل قیاس با روش PDA می‌باشد. در این حالت، با افزایش مقدار m'. عملکرد این روش بهبود یافته و به روش الگوریتم ۲ نزدیک خواهد شد.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش جدید برای شناسائی سیستمهای سوئیچ شونده خطی ارائه شده است. ویژگی مهم روش پیشنهادی آنست که شناسائی پارامترهای زیرسیستم‌ها را مستقل از شناسائی سیگنال سوئیچینگ انجام می‌دهد و به اطلاعات قبلی در مورد تعداد زیرسیستم‌ها وابسته نمی‌باشد. بنابراین مانند بسیاری از روشهای شناسائی سیستمهای هایبرید، درگیر تخمین همزمان پارامترهای زیرسیستم‌ها و دسته‌بندی بردار رگرسیون نخواهد شد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی علیرغم سادگی، از دقت بسیار خوبی در شناسائی پارامترهای زیرسیستم-ها، سیگنال سوئیچینگ و همچنین تخمین خروجی برخوردار است. مشکل روش ارائه شده آنست که، در هنگامی که تعداد داده‌های سیستم و بعد بردار رگرسیون زیاد باشد، تعداد حالتهای ممکن برای انتخاب جایگشتها زیاد شده و حجم محاسبات افزایش خواهد یافت. در این مقاله نشان داده شده است که در این حالت، می‌توان فقط با انتخاب تعدادی محدود از جایگشتهای ممکن، شناسائی زیرسیستم‌ها را با دقت خوبی انجام داد. از آنجا که روش ارائه شده در این مقاله یک روش تکراری می‌باشد، با اعمال آنالیز همگرائی نشان داده شده است که الگوریتم‌های ارائه شده حداکثر با تعداد محدودی تکرار همگرا خواهند شد. بعنوان پیشنهاداتی برای ادامه کار، این روش را می‌توان برای حالتی که درجه زیرسیستم‌ها از قبل معلوم نبوده و یا زیرسیستم‌ها دارای درجات متفاوتی می‌باشند نیز، تعمیم داد.

مراجع

[1] R. Vidal, “A tutorial on subspace clustering,” IEEE Signal Processing Magazine, 28(2):52–68, 2011.

[2] S. Almer, S. Mariethoz, and M. Morari, “Piecewise affine modeling and control of a step-up DC–DC converter,’ Proc. American Control Conf., Baltimore, MD, USA, 3299–3344, 2010.

[3] J. Roll, A. Bemporad, and L. Ljung, “Identification of piecewise affine systems via mixed-integer programming,” Automatica, 40(1):37–50, 2004.

[4] G. Ferrari-Trecate, M. Muselli, D. Liberati, and M. Morari, “A clustering technique for the identification of piecewise affine systems,” Automatica, 39(2):205–217, 2003.

[5] N. Ozay, M. Sznaier, C. Lagoa, and O. Camps, “A sparsification approach to set membership identification of switched affine systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, 57(3):634–648, 2012.

[6] R. Vidal, S. Soatto, Y. Ma, and S. Sastry, “An algebraic geometric approach to the identification of a class of linear hybrid systems,” In Proc. of the 42nd IEEE Conf. on Decision and Control, Maui, Hawai, USA, pages 167–172, 2003.

[7] A. L. Juloski, S.Weiland, and W. P. M. H. Heemels, “A baysian approach to Identification of hybrid systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, 50 (10):1520–1533, 2005.

[8] A. Bemporad, A. Garulli, S. Paoletti, and A. Vicino' "A bounded-error approach to piecewise affine system identification," IEEE Transactions on Automatic Control, 50 (10):1567–1580, 2005.

[9] S. Paoletti, A. L. Juloski, G. Ferrari-Trecate, and R. Vidal, "Identification of hybrid systems: a tutorial," European Journal of Control, 13(2-3):242–262, 2007.

[10] J. Wang, and T. Chen, "Parameter estimation of periodically switched linear systems," IET Control Theory Applications, 6(6): 768-775, 2012.

[11] N. Ozay, and M. Sznaier, "Hybrid System Identification with Faulty Measurements and its Application to Activity Analysis" IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC) Orlando, FL, USA, 2011.

[12] F. Lauer, G. Bloch, and R. Vidal, "A continuous optimization framework for hybrid system identification," Automatica, 47: 608–613, 2011.

[13] L. Bako, V. L. Le, F. Lauer, and G. Bloch. Identification of MIMO switched state-space models. In Proc. of the American Control Conference (ACC), Washington, DC, USA, 2013.

[14] R. Vidal, "Recursive identification of switched ARX systems," Automatica, 44(9): 2274–2287, 2008.

[15] L. Bako, K. Boukharouba, E. Duviella, and S. Lecoeuche, "A recursive identification algorithm for switched linear/affine models," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 5(2): 242–253, 2011.