

# طراحی یک کنترل کننده ژنتیکی کوانتومی در ردیابی مسیر سیستم های کوانتومی

آمنه ارجمندزاده<sup>۱</sup>، مجید یاراحمدی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> فارغ‌التحصیل دکتری ریاضی کاربردی، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه لرستان، Arjmandzadeh.am@fs.lu.ac.ir

<sup>۲</sup> استادیار، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه لرستان، Yarahmadi.m@lu.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۱۳

ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۰۴/۱۰

ویرایش اول: ۱۳۹۷/۰۲/۰۵

دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۲۵

**چکیده:** کنترل سیستم‌های کوانتومی مبتنی بر روش‌های کنترل یادگیر و هوش محاسباتی از موضوعات مورد توجه در حوزه مهندسی کنترل می‌باشد. آنچه دارای اهمیت است تضمین همگرایی فرآیند کنترل موردنظر در عین وضوح و سادگی روش می‌باشد. در این مقاله یک فرآیند کنترل یادگیر مبتنی بر یک کنترل کننده ژنتیکی کوانتومی به منظور ردیابی مسیر در سیستم‌های کوانتومی بسته ارائه شده است. کنترل کننده طراحی شده برای ردیابی یک مسیر متناظر یک تابع متغیر با زمان به کار گرفته شده است. برای این منظور یک مساله بهینه‌سازی مقید با تابع هدف حداقل‌سازی انحراف از مسیر و محدودیت ناشی از ساختار تکراری جواب معادله دینامیکی شروینگر طراحی شده است. با توجه به نرخ بالای همگرایی در الگوریتم ژنتیک کوانتومی، از الگوریتم ژنتیک کوانتومی برای حل مساله بهینه‌سازی استفاده شده است. بر اساس یک اندازه‌گیری تصادفی از نسل اول جمعیت حالات کوانتومی، الگوریتم ژنتیک حاصل بهترین کنترل کننده را برای ردیابی مسیر ارائه می‌دهد. ردیابی موثر و بهینه مسیر با حداقل خطای انحراف از مسیر و حداقل نوسانات سیگنال کنترل از مزایای روش ارائه شده است. دو مثال عددی برای نشان دادن عملکرد کنترل کننده طراحی و مزایای آن ارائه شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده نمایانگر صحت عملکرد روش پیشنهادی در کنترل سیستم‌های کوانتومی است.

**کلمات کلیدی:** الگوریتم ژنتیک کوانتومی، ردیابی مسیر، سیستم کوانتومی، کنترل یادگیر

## Designing a Quantum Genetic Controller for Tracking the Path of Quantum Systems

Ameneh Arjmandzadeh, Majid Yarahmadi

**Abstract:** Based on learning control methods and computational intelligence, control of quantum systems is an attractive field of study in control engineering. What is important is to establish control approach ensuring that the control process converges to achieve a given control objective and at the same time it is simple and clear. In this paper, a learning control method based on genetic quantum controller approach is presented. For tracking a time variant function trajectory, in a closed quantum system, the presented controller is used. For this purpose a constrained optimization problem, based on minimization of difference between a given trajectory and system states subject to an iteration relation of the dynamical solution be satisfied, is designed. According to high convergence rate in quantum genetic algorithm, a quantum genetic algorithm for solving the optimization problem is used. A stochastic measure for observation the initial population is used. Efficient an optimal tracking, with at least tracking errors and at least learned chattering are advantages of the presented method. A couple of examples for demonstrating the advantages are simulated. Simulation results reflect the good performance of the proposed method for controlling the quantum systems.

**Keywords:** Quantum Genetic Algorithm, Tracking Algorithm, Quantum Systems, Learning Control

## ۱- مقدمه

طی دو دهه اخیر کنترل سیستم های کوانتومی محققین بسیاری را به خود جذب نموده است چون دارای کاربردهای مهمی در زمینه های اپتیک کوانتومی، شیمی فیزیک، پردازش اطلاعات کوانتومی و غیره است و امروزه کنترل پدیده های کوانتومی به هدفی دست یافتنی برای محققان شیمی و فیزیک کوانتومی تبدیل شده است [۱]. این حوزه مطالعاتی با دینامیک های تحول سیستم بر روی سیستم های مقیاس مولکولی و اتمی سر و کار دارد [۲]. سیستم کوانتومی اسپین- $\frac{1}{2}$  گزینه مناسبی برای مطالعه کیوبیت ها در پردازش اطلاعات و کامپیوتر کوانتومی می باشد. بسیاری از مسائل کنترل کوانتومی به صورت ماکزیمم سازی یک تابع نمایش هدف فرموله می شوند و برای حل این گونه مسائل الگوریتم ژنتیک انتخاب مناسبی است. این الگوریتم های تکاملی کاربردهای بسیاری در مسائل بهینه سازی، یادگیری ماشین و ... دارند. الگوریتم ژنتیک کوانتومی<sup>۱</sup> (QGA) حاصل ترکیب محاسبات کوانتومی و الگوریتم ژنتیک است و اولین بار توسط مور و نارایانان در [۳] معرفی شد.

هدف اصلی نظریه کنترل کوانتوم توسعه روش های نظام مند برای کنترل و اجرای سیستم های کوانتومی است و به دلیل ویژگی های خاص سیستم های میکروسکوپی که در سیستم های کلاسیکی اتفاق نمی افتد، دستیابی به این هدف دارای پیچیدگی هایی است. یکی از مهمترین مسائل در کنترل کوانتومی هدایت حالت های کوانتومی است. لازم است مجموعه ای از قوانین کنترلی طراحی گردد تا حالت اولیه سیستم را به یک حالت هدف مطلوب ببریم. در صورتی که حالت هدف ساکن باشد، مساله فوق کنترل انتقال- حالت<sup>۲</sup> نامیده می شود که در سال های اخیر بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است. اگر حالت هدف تابع وابسته به زمان باشد، آنگاه مساله کنترل یک مساله ردیابی خواهد بود. البته مساله کنترل ردیابی مسیر بدلیل پیچیدگی تاکنون کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است. یک ردیابی مسیر سیستم های کوانتومی در [۴] توسط لیو و همکارانش انجام شده است که در آن با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف قانون کنترلی برای ردیابی تطبیقی مسیر<sup>۳</sup> (ATT) بدست آورده اند. در [۵] نیز یک تکنیک ردیابی تطبیقی برای رفع مشکل تکین هایی که در امتداد مسیر با آن مواجه می شوند توسعه داده شده است. در [۶] یک کنترل کننده سوئیچینگ بهینه کوانتومی برای ردیابی تطبیقی مسیر<sup>۴</sup> (SOAQT) معرفی شده است که تعداد نقاط تکینی را مدیریت نموده و خطا و هزینه کنترل که به صورت نرم کنترل است، کاهش داده است.

در واقع معمولاً هنگام مدیریت یک سیستم کوانتومی در همتنیده، تشخیص پارامترهای همیلتونین، کنترل واکنش های شیمیایی و ردیابی حالت های کوانتومی، کنترل بهینه با سایر روش ها مثل کنترل یادگیر حلقه بسته مورد ترکیب واقع می شود [۷]. این کنترل شامل عملیات حلقه بسته

است که در آن هر چرخه با یک نمونه ای جدید اجرا می شود. خروجی هر چرخه وارد یک الگوریتم یادگیر شده و الگوریتم با توجه به فرمول بندی مناسب خود ورودی بعدی سیستم را به نحوی بهتر تعیین می کند. این فرایند تا آنجا ادامه می یابد که بهترین ورودی برای سیستم توسط الگوریتم تعیین شود [۸]. همانطور که در منبع [۵,۴] دیده می شود قوانین کنترلی مورد نظر به صورت عبارات کسری هستند و با توجه به اینکه مخرج کسر وابسته به حالت سیستم است ممکن است مقدار آن عبارتی با مخرج صفر حاصل شود و برای رفع تکین بودن این نقاط اصلاح روش مورد نیاز است. یک کنترل کننده تطبیقی که اثرات نامطلوب ناشی از بروز پدیده تکینی و دامنه بزرگ سیگنال های کنترل را حذف می کند، در [۹] معرفی شده است. در منبع [۱۰] یک آنسامبل کوانتومی که اعضای آن دارای عدم قطعیت در پارامترهای همیلتونی هستند، با استفاده از QGA کنترل شده است. یک آنسامبل کوانتومی شامل تعداد زیادی (حدود  $10^{23}$ ) سیستم کوانتومی تنهاست.

در این مقاله یک کنترل کننده ژنتیکی کوانتومی در ردیابی مسیر<sup>۵</sup> (QGATT) طراحی شده است و قابلیت روش ارائه شده را در سیستم های کوانتومی ساده نشان می دهد. الگوریتم ژنتیک کوانتومی نسبت به الگوریتم ژنتیک معمولی دارای قابلیت و تاثیر گذاری بیشتری در بهینه سازی است. روش مورد نظر بر پایه بهینه سازی و کنترل یادگیر بنا نهاده شده است. از مزیت های روش گفته شده مواجه نشدن با نقاط تکین و عدم نیاز به مشتق-گیری است.

در این مقاله ابتدا توصیفی از مفاهیم مقدماتی محاسبات کوانتومی و اصول الگوریتم ژنتیک کوانتومی در بخش ۲ ارائه می شود، در بخش ۳ توضیح مختصری در مورد QGA داده شده است. بخش ۴ به مدل سازی مساله کنترلی می پردازد و در بخش ۵ دو مثال عددی حل شده و نتایج شبیه سازی آورده شده است. در پایان بحث و نتیجه گیری در بخش ۶ انجام شده است.

## ۲- مفاهیم اولیه مکانیک کوانتومی

هر سیستم کوانتومی در فضای هیلبرت  $H$  قرار دارد که این فضا پایه ریاضی برای مفاهیمی که در مکانیک کوانتومی مورد نیاز هستند را فراهم می کند [۱۱].

۱-۲ کیوبیت

بیت پایه ای ترین مفهوم محاسبات کلاسیکی است که می تواند یکی از دو مقدار "درست" یا "غلط" (۱ یا ۰) را به خود اختصاص دهد. کیوبیت معادل کوانتومی بیت است و یک سیستم کوانتومی دارای دو حالت پایه

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ می باشد.}$$

<sup>4</sup> Switching Optimal Adaptive of Quantum Trajectory Tracking  
<sup>5</sup> Quantum Genetic Algorithm Trajectory Tracking

<sup>1</sup> Quantum Genetic Algorithm  
<sup>2</sup> State-Transfer  
<sup>3</sup> Adaptive Trajectory Tracking

ژنتیکی طبیعت هستند. در الگوریتم ژنتیک کوانتومی هر فرد از جمعیت به صورت یک کروموزوم از حالات کوانتومی معرفی می شود. کروموزومها در طول چندین نسل بر اساس عملگرها و تابع برازندگی بهبود می یابند. یک دسته از نقاط فضای جستجو، در هر مرحله از اجرای الگوریتم ژنتیک کوانتومی مورد پردازش های تصادفی قرار می گیرند. به این صورت که به هر نقطه دنباله ای از کاراکترها نسبت داده می شود و براساس این که تابع هدف در هر یک از نقاط چه مقدار باشد، بر روی این دنباله ها، عملگرهای ژنتیکی کوانتومی اعمال می شود به طوری که هر کیوبیت از هر کروموزوم به سمت کیوبیت متناظر بهترین پاسخ دوران می کند. سپس دنباله های بدست آمده رمزگشایی می گردد تا نقاط جدیدی در فضای جستجو بدست آید. این فرایند تا برقراری شرط توقف ادامه می یابد.

۱-۳ کروموزوم کوانتومی:

$j$ -امین کروموزوم از  $P$ -امین نسل از جمعیت به صورت

$$q_j^p = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^p & \alpha_{12}^p & \dots & \alpha_{1k}^p & \alpha_{21}^p & \alpha_{22}^p & \dots & \alpha_{2k}^p & \dots & \alpha_{m1}^p & \alpha_{m2}^p & \dots & \alpha_{mk}^p \\ \beta_{11}^p & \beta_{12}^p & \dots & \beta_{1k}^p & \beta_{21}^p & \beta_{22}^p & \dots & \beta_{2k}^p & \dots & \beta_{m1}^p & \beta_{m2}^p & \dots & \beta_{mk}^p \end{bmatrix} \quad (5)$$

نوشته می شود که در آن  $k$  نمایانگر تعداد کیوبیت های هر ژن و  $m$  معرف تعداد ژن های هر کروموزوم است [۱۳]. معمولاً برای تولید جمعیت اولیه به هر حالت  $(\alpha, \beta)$  مقدار  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  را اختصاص می دهیم که باعث می شود هر حالت با احتمال برابر به حالت های پایه شکسته شود.

۲-۳ گیت های دوران:

گیت های دوران به صورت

$$U(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (6)$$

تعریف می شوند که در آن  $U$  عملگر دوران و  $\theta$  زاویه دوران است. فرایند بروزرسانی یک کیوبیت  $\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$  با گیت دوران  $U$  به صورت (۷) است [۷].

$$\begin{bmatrix} \alpha_i' \\ \beta_i' \end{bmatrix} = U(\Delta\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta_i) & -\sin(\Delta\theta_i) \\ \sin(\Delta\theta_i) & \cos(\Delta\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

$\begin{bmatrix} \alpha_i' \\ \beta_i' \end{bmatrix}$  دوران یافته ی یک کیوبیت  $\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$  به اندازه زاویه  $\Delta\theta_i$  به وسیله گیت دوران  $U$  است. در الگوریتم ژنتیک کوانتومی مقدار و علامت  $\Delta\theta_i$  با استراتژی تنظیم مشخص می شود و چرخش کیوبیتها در جهتی انجام می شود که حالت جواب کنونی را به سمت حالت جواب بهینه حرکت دهد که در جدول ۱ ارائه شده است [۱۴]. در جدول ۱  $x_i$ ،  $i$ -امین بیت کروموزوم جمعیت حاضر است؛  $best_i$ ،  $i$ -امین بیت از کروموزوم بهینه جمعیت حاضر است؛  $f(x)$  تابع برازندگی است؛  $s(\alpha_i, \beta_i)$  جهت چرخش زاویه دوران را نشان می دهد؛  $\Delta\theta_i$  اندازه زاویه چرخش است و معمولاً حدود  $0.01\pi$  انتخاب می شود [۱۳].

۲-۲ حالت سیستم کوانتومی

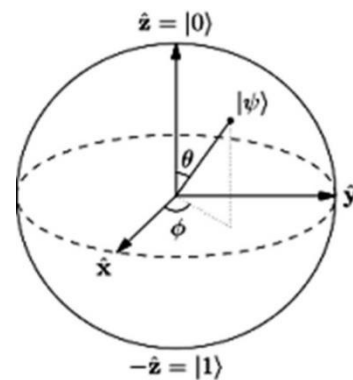
حالت سیستم کوانتومی اطلاعاتی است که وضعیت سیستم را به طور کامل بیان می کند. هر حالت  $|\Psi\rangle$  از یک سیستم کوانتومی دوسطی به صورت برهمنشی از دو حالت پایه فوق به صورت (۱) نوشته می شود.

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1)$$

که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مختلط هستند و در رابطه  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  صدق می کنند [۱۲]. حالت فیزیکی هر سیستم کوانتومی با یک بردار نشان داده می شود که از مبدا شروع می شود و انتهای آن روی کره بلاخ واقع است. بنابراین نمایش دیگر یک حالت کوانتومی به صورت فرمول

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (2)$$

است که اعداد  $\theta$  و  $\varphi$  مختصات کروی آن هستند. شکل ۱ حالت کوانتومی بر روی کره بلاخ را نشان می دهد.



شکل ۱: نمایش حالت خالص یک سیستم کوانتومی روی کره بلاخ

فضای هیلبرت سیستم های مرکب از ضرب تانسوری فضاهای سیستم های کوچکتر به دست می آید. در واقع اگر  $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$  و  $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$  پایه های فضاهای هیلبرت  $H_A$  و  $H_B$  معادل دو کیوبیت  $A$  و  $B$  باشند، فضای هیلبرت متناظر با سیستم ترکیبی این دو کیوبیت برابر است با:

$$H_{AB} = H_A \otimes H_B \quad (3)$$

که با پایه متعامد یکه ی ذیل مشخص می شود.

$$\begin{aligned} & \{|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\} \\ & = \{|00\rangle_{AB}, |01\rangle_{AB}, |10\rangle_{AB}, |11\rangle_{AB}\} \end{aligned} \quad (4)$$

### ۳- الگوریتم ژنتیک کوانتومی

کیوبیتها و حالت برهمنشی کوانتومی، پایه ای ترین مفاهیم الگوریتم ژنتیک کوانتومی هستند. الگوریتم های ژنتیک (GAs) روش های عددی هستند که بر پایه تکرار و جستجو بنا نهاده شده اند و الهام گرفته از قوانین

جدول ۱: استراتژی تنظیم زاویه چرخش کیوبیت ها

$s(\alpha_i, \beta_i)$				$\Delta\theta_i$	$f(x) > f(best)$	$best_i$	$x_i$
$\beta_i = 0$	$\alpha_i = 0$	$\alpha_i \beta_i < 0$	$\alpha_i \beta_i > 0$				
0	0	0	0	0	غلط	0	0
0	0	0	0	0	درست	0	0
$\pm 1$	0	-1	+1	$\Delta\theta_i$	غلط	1	0
0	$\pm 1$	+1	-1	$\Delta\theta_i$	درست	1	0
0	$\pm 1$	+1	-1	$\Delta\theta_i$	غلط	0	1
$\pm 1$	0	-1	+1	$\Delta\theta_i$	درست	0	1
0	0	0	0	0	غلط	1	1
0	0	0	0	0	درست	1	1

قرار دارد، مقدار چشمداشتی عملگر اندازه پذیر  $P(t)$  به صورت زیر نشان داده می شود [۴]:

$$Y(t) = \sum_j \gamma_j \langle \psi(t) | P_j | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | P(t) | \psi(t) \rangle \quad (11)$$

معادله (۱۱) متغیر کنترل شده است که خروجی سیستم کنترل شده (۸) نیز می باشد. فرض کنید  $|\lambda_j\rangle$  نمایانگر  $j$ -امین ویژه حالت همیتونین آزاد  $H_0$  باشد. عملگر تصویر ویژه حالت اول  $|\lambda_1\rangle$  بعنوان عملگر مشاهده پذیر  $P(t)$  در نظر گرفته می شود یعنی  $P = |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1|$ . مساله مورد نظر، کنترل مقدار چشمداشتی عملگر مشاهده پذیر توسط میدان خارجی  $u_x$  و  $u_y$  است:

$$\text{Min} \|s(t) - \langle \psi(t) | P(t) | \psi(t) \rangle\| \quad (12)$$

$$s.t. \quad i \hbar \dot{\psi}(t) = H \psi(t)$$

اگر  $u_m(t) = u_m, m = x, y$  که یک ثابت است، از معادله شرودینگر و عملگر تحول زمانی، فرمول

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(H_0 + \sum_{m=x,y} u_m H_m)\Delta t} |\psi(0)\rangle \quad (13)$$

حاصل می شود. لذا چون در عمل یافتن کنترل به صورت یک تابع پیوسته وابسته به زمان مشکل است [۱۵] با فرض ثابت بودن  $u_x$  و  $u_y$  مساله (۱۲) را می توان به صورت (۱۴) نوشت:

$$\text{Min} \|s(t) - \langle \psi(0) | e^{-i(H_0 + \sum_{m=x,y} u_m H_m)\Delta t} P(t) e^{-i(H_0 + \sum_{m=x,y} u_m H_m)\Delta t} | \psi(0) \rangle\| \quad (14)$$

اما در تابع هدف پارامتر  $t$  هم وجود دارد برای حذف پارامتر  $t$  بایستی طول زیربازه های  $[t(k-1), t(k)]$ ,  $k = 1, 2, \dots, Q$  به قدری کوچک انتخاب شود که بتوان یک  $t \in [t(k-1), t(k)]$ ,  $k = 1, 2, \dots, Q$  به عنوان نماینده کل زیربازه در نظر گرفت. بنابراین بازه  $[0, T]$  را به  $Q$  زیربازه به طول

#### ۴- مدلسازی و روش حل

هدف اصلی این مقاله ردیابی مسیر حالت خالص سیستم های کوانتومی بسته است. یک سیستم کوانتومی با تابع موج  $\psi(t)$  با معادله شرودینگر (۸) تعریف می شود:

$$i \hbar \dot{\psi}(t) = H \psi(t) \quad (8)$$

که در آن  $i$  عدد واحد موهومی و  $\hbar = 6.626068 * 10^{-34} \text{ js}$  ثابت پلانک است و معمولاً در محاسبات زیر اتمی  $\hbar = 1$  فرض می شود [۱۲].  $H = H_0 + \sum_{m=x,y} u_m(t) H_m$  همیتونین کنترل سیستم است،  $H_0$  (همیتونین آزاد سیستم) و  $H_m, m = x, y$  (همیتونین کنترل خارجی سیستم) مستقل از زمان فرض شده اند. هدف کنترلی در این مقاله هدایت مسیر دینامیکی سیستم است به طوریکه مسیر مطلوب  $S(t)$  را دنبال کند. یعنی

$$\langle \psi(t) | P(t) | \psi(t) \rangle = s(t) \quad (9)$$

در واقع برای یک سیستم کوانتومی بسته، کمیت ها یا مشاهده پذیرها در فضای هیلبرت با عملگر خطی خودالحاق  $P(t)$  نشان داده می شوند. اگر  $P(t)$  اندازه گیری شود، خروجی آن یک بردار ویژه از  $P(t)$  خواهد بود. فرض کنید  $S(t)$  مجموعه ای از طیف  $P(t)$  است اگر حالت در لحظه اندازه گیری  $|\psi\rangle$  باشد، احتمال بدست آوردن یک مقدار  $\gamma \in S$  بعنوان نتیجه اندازه گیری به صورت زیر است:

$$P_\gamma(\gamma \in S) = \langle \psi | P_j | \psi \rangle \quad (10)$$

که در آن  $P_j$  تصویر کننده  $P_j = \sum_j \gamma_j P_j$  روی بردار ویژه  $j$  ام در حالت طیف گسسته است. لذا زمانی که سیستم در حالت  $|\psi\rangle$

الگوریتم های ژنتیک روش های مبتنی بر تکرار هستند و این تکرار تا برقراری شرط توقف انجام می شود. در این مقاله شرط توقف این است که مقدار تابع هدف که همان خطای ردیابی می باشد از  $\epsilon$  کمتر باشد، یعنی

$$\|e(t)\| = \|s(t) - Y(t)\| < \epsilon \quad (16)$$

### ۵- نتایج شبیه سازی

در این بخش دو مثال عددی به روش مذکور حل می شود تا تاثیر گذاری آن را تحقیق کنیم. یکی از توابعی که اغلب برای آزمایش اجرای سیستم های کنترلی مورد استفاده قرار می گیرد تابع نمایی

$$s(t) = 1 - e^{-t/2\tau^2}, t \geq 0 \quad (17)$$

است که در آن  $\tau$  نمایانگر نرخ تغییر خروجی هدف است. هدف کنترلی ردیابی خروجی سیستم هدف (17) در هر لحظه است. برای این مثال یک سیستم کوانتومی چهار سطحی در نظر بگیرید با همیلتونین کنترلی آزاد  $E_1 = 0.4948$  که در آن  $H_0 = \sum_{j=1}^4 E_j |j\rangle\langle j|$ ،  $E_2 = 1.4529$  و  $E_3 = 2.3691$  و  $E_4 = 3.2434$ ؛ لذا:

$$H_0 = \text{diag}(0.4948, 1.4529, 2.3691, 3.2434) \quad (18)$$

برای این سیستم، برای راحتی یک همیلتونین کنترلی کاملاً متصل در نظر گرفته شده است که نشان می دهد برهمکنش (تعامل) میان هر دو سطح مجاز است. بنابراین همیلتونین کنترلی به صورت

$$H_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

است و دو همیلتونین کنترلی به صورت زیر انتخاب می شوند:

$$H_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

همیلتونین کلی سیستم عبارت است از

$$H = H_0 + u_x(t)H_x + u_y(t)H_y \quad (21)$$

مقادیر ویژه ماتریس  $H_0$  با  $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$  که  $\lambda_1 = 0.4948$ ،  $\lambda_2 = 1.4529$ ،  $\lambda_3 = 2.3691$ ،  $\lambda_4 = 3.2434$

نشان داده می شوند و بردار ویژه های متناظر عبارتند از:

$$\begin{aligned} |\lambda_1\rangle &= [1, 0, 0, 0]^T, & |\lambda_2\rangle &= [0, 1, 0, 0]^T, \\ |\lambda_3\rangle &= [0, 0, 1, 0]^T, & |\lambda_4\rangle &= [0, 0, 0, 1]^T \end{aligned} \quad (22)$$

در این آزمایش عملگر مشاهده پذیر به صورت زیر است:

$t = \frac{T}{Q}$  تقسیم می کنیم و در هر زیربازه  $u_x$  و  $u_y$  را ثابت فرض

می-کنیم. همچنین  $t_k = t(k) \in [t(k-1), t(k)]$  را به عنوان نماینده هر زیربازه  $k = 1, 2, \dots, Q$ ،  $[t(k-1), t(k)]$  در نظر می گیریم. در زیربازه  $k$ -ام  $|\psi(0)\rangle = |\psi(t(k-1))\rangle$  حالت اولیه سیستم خواهد بود. مساله مورد نظر به صورت:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \|s(t_k) - \langle \psi(t_k) | P(t_k) | \psi(t_k) \rangle\| \\ \text{s.t.} \quad & |\psi(t_k)\rangle = e^{-i(H_0 + \sum_{m=x,y} u_m(t_k)H_m)\Delta t} |\psi(t_{k-1})\rangle \end{aligned} \quad (15)$$

است که در آن  $|\psi(t_k)\rangle$  انتقال یافته  $|\psi(t_{k-1})\rangle$  توسط کنترل بهینه است. در مساله (15) هدف یافتن کنترل  $u_x$  و  $u_y$  است به طوری که مقدار تابع هدف از  $\epsilon$  کمتر باشد. با جایگزینی قید مساله در تابع هدف و به کارگیری QGA جواب های بهینه  $u_x^*(t_k)$  و  $u_y^*(t_k)$  برای هر زیربازه یافت می شود. الگوریتم فرایند مورد نظر در زیر آورده شده است. الگوریتم QGA برای ردیابی مسیر

۱. قرار دهید:  $j = 1$  (شمارنده زیربازه ها)

۲. قرار دهید:  $|\psi^{j-1}(0)\rangle = |\psi(0)\rangle$

۳. تا زمانی که  $j < Q$ ، مراحل ذیل را تکرار کنید:

- کنترل های آغازین دلخواه  $u_x^{0j}$  و  $u_y^{0j}$  را انتخاب کنید

- مساله

$$\text{Min} \quad \|s(t) - \langle \psi^{j-1}(0) | e^{-i(H_0 + \sum_{m=x,y} u_m^{0j} H_m)\Delta t} P(t) e^{-i(H_0 + \sum_{m=x,y} u_m^{0j} H_m)\Delta t} | \psi^{j-1}(0) \rangle\|$$
 را با QGA حل نموده و جواب بهینه  $u_x^{*j}$  و  $u_y^{*j}$  را به دست آورید

- قرار دهید:

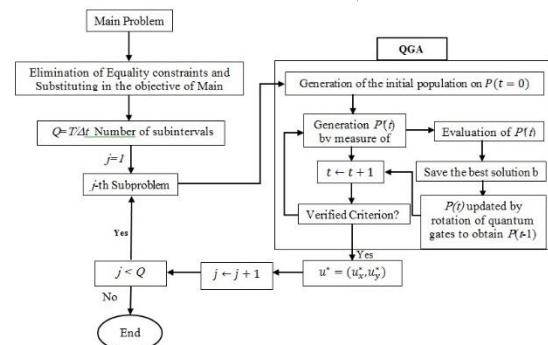
$$|\psi^j(0)\rangle = e^{-i(H_0 + \sum_{m=x,y} u_m^{*j} H_m)\Delta t} |\psi^{j-1}(0)\rangle$$

$j \leftarrow j + 1$

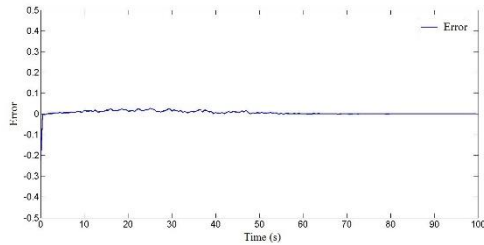
۴. جواب بهینه عبارت است از:

$$u_m^* = \{u_m^{*j}, j = 1, 2, \dots, Q, m = x, y\}$$

همچنین در شکل ۲ دیاگرام فرایند روش مذکور نشان داده شده است.



شکل ۲: نمایش حالت خالص یک سیستم کوانتومی روی کره بلاخ



شکل ۶ خطای ردیابی در هر لحظه

مثال فوق در منبع [۴] با استفاده از روش لیپانوف در ردیابی تطبیقی مسیر حل شده و دقت کنترل 0.99 حاصل شده است یعنی ردیابی با خطای 0.01 انجام شده است. مقایسه نتایج روش ارائه شده در این مقاله با روش ATT و SOAQT در جدول ۲ آورده شده است [۶]. در همه این روش ها بعد از ۴۰ ثانیه خطا به صفر میل می کند. خروجی سیستم در ATT مسیر موردنظر را نسبتاً خوب ردیابی می کند اما در QGATT با تنظیم پارامترهای مساله می توان با هر دقت مورد نظر ردیابی مسیر را انجام داد.

جدول ۲: مقایسه نتایج ردیابی مسیر در روش های ATT و QGATT

شاخص عملکرد/روش	ATT	SOAQT	QGATT
IAE	0.0182	0.0175	0.02
تعداد نقاط تکینگی	702	372	0
$\ u_x\ $	39.7493	33.3815	5.2813
$\ u_y\ $	18.9577	18.7795	5.2245

شاخص خطای کنترل به صورت  $IAE = \int_0^{100} |e(t)|^2 dt$  در نظر گرفته شده است. تعداد ۷۰۲ نقطه تکینگی در روش ATT و تعداد ۳۷۲ نقطه تکینگی در SOAQT وجود دارد در حالی که در روش ارائه شده نقطه تکینگی وجود ندارد. شاخص انرژی کنترل به صورت  $\|u_m\| = \int_0^{100} |u_m(t)|^2 dt$ ,  $m = x, y$  و مقایسه نرم کنترل کننده نیز نشان می دهد که روش AGATT دارای هزینه کنترل کمتری نسبت به بقیه روش هاست.

## ۶- نتیجه گیری

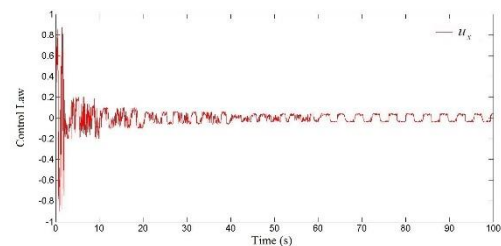
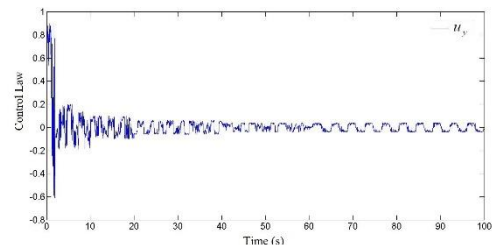
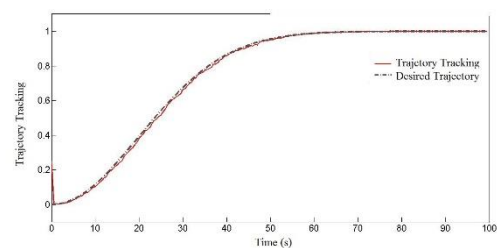
در این مقاله مبتنی بر رویکرد کنترل یادگیر و بهینه سازی یک کنترل کننده کوانتومی در ردیابی مسیر برای سیستم های کوانتومی بسته ارائه شده است. در روش مزبور یک مساله بهینه سازی مدل سازی شده و سپس مبتنی بر الگوریتم ژنتیک کوانتومی با هدف حداقل سازی خطای ردیابی مسیر به کار گرفته شده با توجه به دقت و سرعت همگرایی در الگوریتم ژنتیک کوانتومی و سازگاری این ساختار با مدل سیستم کوانتومی تحت بررسی نتایج خوبی در مثال های شبیه سازی مشاهده شد. مقدار خطای مطلوب در روش ارائه شده، قابل تنظیم است و می توان با تغییر پارامترهای الگوریتم ژنتیک و سایر پارامترهای مساله، با هر دقت دلخواهی مسیر را ردیابی نمود. از مزیت های روش ارائه شده، عدم مواجهه با تکینگی است. در مقایسه با روش های بکار برده شده در سایر منابع که قوانین کنترلی توابع کسری هستند، در این روش عبارات کنترلی به صورت توابع غیر کسری بوده و مشکل تکینگی در این روش به وجود نمی آید. همچنین اندازه کوچکتر

$$p = |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

حالت اولیه برای سیستم کنترل شده (۸) برهمنش بردار ویژه های  $|\lambda_i\rangle$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  به صورت زیر است:

$$|\Psi_0\rangle = 0.5|\lambda_1\rangle + 0.5|\lambda_2\rangle + 0.5|\lambda_3\rangle + 0.5|\lambda_4\rangle \quad (24)$$

مقدار  $\mathcal{E}$  برابر 0.01 انتخاب شده است و  $\tau = 20$  است. مسیر در بازه زمانی  $[0, 100]$  ردیابی می شود که به ۲۰۰۰ زیر بازه با طول مساوی  $\Delta t = \frac{T}{Q} = 0.05$  ثانیه تقسیم شده است همچنین فرض می شود که در هر قطعه زمانی مقادیر کنترل ثابت است. تعداد جمعیت ۵۰ و طول هر کروموزوم کوانتومی ۱۶ کیوبیت در نظر گرفته شده است. مقادیر کنترل محدود به حدود پایین و بالای 0.9- و 0.9+ فرض شده است. بعد از ۱۰ ثانیه مقادیر سیگنال کنترل به بازه  $[-0.1, 0.1]$  و بعد از ۲۰ ثانیه به بازه  $[-0.06, 0.06]$  محدود شده است. زاویه چرخش کیوبیت ها برابر با  $0.01\pi$  در نظر گرفته شده است. همانطور که از تصاویر پیداست روش پیشنهادی نتایج خوبی به دست می دهد. شکل ۳ و شکل ۴ قوانین کنترلی را نشان می دهند که با استفاده از QGA به دست آمده اند و شکل های ۵ و ۶ ردیابی مسیر تابع و خطای ردیابی به روش مذکور را نشان می دهند.

شکل ۳ کنترل  $u_x$  برای ردیابی تابعشکل ۴ کنترل  $u_y$  برای ردیابی تابع

شکل ۵ ردیابی مسیر با استفاده از QGA

[13] H. Wang, J. Liu, J. Zhi, and C. Fu, 2013, "The Improvement of Quantum Genetic Algorithm and Its Application on Function Optimization", Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering.

[14] Z. Laboudi and S. Chikhi, 2011, "Comparison of Genetic Algorithm and Quantum Genetic Algorithm", *The International Arab Journal of Information Technology*, Vol. 9, No. 3, pp. 243-249.

[15] D. Dong, M. A. Mabrok, I. R. Petersen, B. Qi, C. Chen and H. Rabitz, 2015, "Sampling-Based Learning Control for Quantum Systems With Uncertainties", *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, Vol. 23, NO. 6, 2155-2166.

سیگنال کنترلی معرف هزینه کمتر کنترل است. راهبرد گفته شده را می توان در کاربردهای مختلفی به کار بست. جداسازی کوانتومی و متعاقباً طبقه بندی آنسامبل های کوانتومی یکی از این کاربردهاست.

## مراجع

[1] A. Daeichian and F. Sheikholeslam, 2012, "Survey and Comparison of Quantum Systems: Modeling, Stability and Controllability", *Journal of Control*, Vol. 5, No. 4, pp. 20-31.

[2] C. Chen, L. C. Wang and Y. Wang, 2013, "Closed-Loop and Robust Control of Quantum Systems", *The Scientific World Journal*, Vol. 2013, 869285-1-869285-11.

[3] A. Narayanan and M. Moore, 1996, "Quantum-inspired genetic algorithms", in *Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, pp.61-66, Nagoya, Japan.

[4] J. Liu, S. Cong, and Y. Zhu, 2012, "Adaptive Trajectory Tracking of Quantum Systems", *12th International Conference on Control, Automation and Systems*, Jeju Island, Korea, Oct. 17-21.

[5] W. Zhu and H. Rabitz, 2003, "Quantum control design via adaptive tracking", *Journal of Chemical Physics*, Vol. 119, No 7, pp. 3619-3625.

[6] Z. Sahebi and M. Yarahmadi, 2018, "Switching optimal adaptive trajectory tracking control of quantum systems", *Optim Control Appl Meth*. DOI: 10.1002/oca.2412.

[7] D. Dong and I. R. Petersen, 2011, "Quantum control theory and applications: A survey", *IET Control Theory & Applications*, Vol. 4, No. 12, pp. 2651-2671.

[8] H. Sedghee Rostami and B. Rezaie, 2016, "Controlling state of quantum system using fuzzy controller", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 124-134, (in Persian)

[9] Z. Sahebi and M. Yarahmadi, 2018, "Hybrid adaptive intelligent controller design using quantum wavelet neural networks for trajectory tracking control in finite dimensional closed quantum systems", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 179-188. (in Persian)

[10] A. Arjmandzadeh and M. Yarahmadi, 2017, "Quantum genetic learning control of quantum ensembles with Hamiltonian uncertainties", *Entropy*, Vol. 19, No. 8, pp. 1-12.

[11] D. D'Alessandro, *Introduction to Quantum Control and Dynamics*, Taylor & Francis Group, LLC, 2008.

[12] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, New York, 2010.