

## کنترل مود لغزشی سیستم های پرش مارکوف همراه با تأخیر متغیر با زمان با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم

نسبیه زهرابی<sup>۱</sup>، حمیدرضا مومنی<sup>۲</sup>، امیرحسین ابوالمعصومی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، n\_zohrabii@yahoo.com

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، momeni\_h@modares.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه برق، دانشگاه اراک، a\_abolmasoumi@araku.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۷/۲۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۹/۲۳)

**چکیده:** در این مقاله طراحی کنترل کننده مود لغزشی برای سیستم های پرش مارکوف همراه با تأخیر زمانی با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم در حضور اغتشاش صورت گرفته است. روش ارائه شده کاملاً کلی می باشد و سیستم های پرش مارکوف با احتمال های انتقال کاملاً نامعلوم یا کاملاً معلوم را در بر می گیرد. در ابتدا شرایط کافی برای وجود سطح لغزش خطی و پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی بر پایه ناتساوی های ماتریسی خطی ارائه گردیده است. در ادامه یک کنترل کننده مود لغزشی چنان طراحی شده است که مسیرهای حالت سیستم حلقه بسته در زمان محدود به سطح لغزشی مورد نظر برسند و برای تمام زمان های بعدی در آن باقی بمانند. در نتیجه با اعمال قانون کنترل بدست آمده سیستم حلقه بسته پایدار تصادفی خواهد شد و طراحی کنترل کننده به پایان می رسد. تمام شرایط بدست آمده بر پایه ناتساوی های ماتریسی خطی می باشند که به وسیله نرم افزار روش های عددی به آسانی قابل حل هستند. در آخر یک مثال عددی برای تضمین کارایی و معتبر بودن روش پیشنهاد شده آورده شده است.

**کلمات کلیدی:** سیستم های پرش مارکوف؛ پایداری تصادفی؛ کنترل مود لغزشی؛ تأخیر زمانی؛ احتمال های انتقال نیمه معلوم؛ ناتساوی های ماتریسی خطی.

### Sliding Mode Control of Time-Delay Markovian Jump Systems with Partly Known Transition Probabilities

Nasibeh Zohrabi, Hamid Reza Momeni, Amir Hossein Abolmasoumi

**Abstract:** In this paper, a sliding mode controller for time-delay Markovian jump systems with partly unknown transition probability matrix in presence of disturbance is designed. The proposed method is quite general and includes both systems with completely known and completely unknown transition probability rates. At first, sufficient conditions for existence of linear switching surface are obtained in terms of linear matrix inequalities (LMIs) that guarantee the stochastic stability of sliding mode dynamics. Then, a sliding mode controller is designed such that the closed-loop system's state trajectories reach the desired sliding surface in a finite time and maintain there for all subsequent times. As a result, the stochastic stability of closed-loop system is guaranteed by applying a specifically designed control law. All of the conditions are presented in terms of linear matrix inequalities and can be simply solved by means of numerical software tools. Finally, a numerical example is given to demonstrate the validity and effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** Markovian Jump Systems (MJSs); Stochastic Stability; Sliding Mode Control (SMC); Time-Delay; Partly Unknown Transition Probabilities; Linear Matrix Inequalities (LMIs).

## ۱- مقدمه

در عمل رفتار معادله حالت بعضی از سیستم‌های صنعتی تصادفی می‌باشد به همین دلیل نمی‌توان آن‌ها را به وسیله نمایش فضای حالت LTI مدل کرد. این طبقه از سیستم‌های دینامیکی به دلیل تغییرات ناگهانی در عناصر خود، در طبقه‌ای از سیستم‌های سویچ شده اتفاقی به نام سیستم‌های تکه‌ای معین<sup>۱</sup> یا سیستم‌های پرش مارکوف<sup>۲</sup> قرار می‌گیرند. سیستم‌های سویچ شده اتفاقی پرش مارکوف اولین بار در [۱] معرفی شدند و دارای دو جزء در بردار حالت خود هستند. جزء اول این بردار حالت، مقادیری در " $R$ " می‌گیرد و دارای تغییرات پیوسته در زمان است. جزء دوم مقادیری در یک مجموعه محدود می‌گیرد و به طور تصادفی بین مقادیر محدود حالت سویچ می‌کند. این جزء با یک فرآیند مارکوف زمان پیوسته نمایش داده می‌شود. این طبقه از سیستم‌ها به طور قابل قبولی برای مدل کردن سیستم‌های عملی مختلف استفاده می‌شوند. از جمله این سیستم‌ها می‌توان به سیستم‌های تولید [۲]، سیستم‌های هوافضا [۳] و سیستم‌های مخابراتی [۴، ۵] اشاره کرد. در دهه های اخیر سیستم های پرش مارکوف به دلیل کاربردهای گسترده عملی توجه بسیاری از محققین و مهندسان کنترل را به خود جلب کرده و نتایج بسیاری نیز در این زمینه بدست آمده است. از جمله نتایج بدست آمده می‌توان به مسئله پایداری [۶]، پایداری [۷]، کنترل  $H_{\infty}$  [۸، ۹، ۱۰] و مسئله فیلترینگ [۱۱] اشاره کرد. اطلاعات بیشتر در این زمینه در [۱۲] و مراجع درون آن یافت می‌شود.

یکی از مشخصه‌های سیستم‌های پرش مارکوف، ماتریس نرخ احتمال انتقال می‌باشد. ماتریس نرخ احتمال انتقال به صورت آماری رفتار پرش سیستم از یک مود به مود دیگر را مشخص می‌کند. دسترسی کامل به ماتریس نرخ احتمال انتقال، تجزیه و تحلیل و کنترل سیستم‌های پرش مارکوف را به مقدار زیادی ساده و راحت می‌کند. شایان ذکر است که در بیشتر مطالعات انجام شده، دسترسی کامل به اطلاعات ماتریس نرخ احتمال انتقال یک فرض عمومی برای تجزیه و کنترل سیستم‌های پرش مارکوف است. در حالی که در بیشتر کاربردهای عملی، بدست آوردن کامل احتمال‌های انتقال مورد بحث می‌باشد و یا تخمین تمامی عناصر ماتریس نرخ احتمال پیچیده، زمان‌بر و گران می‌باشد [۱۳، ۱۴]. بنابراین با توجه به مطالب گفته شده، مطالعه و بررسی حالت کلی تر این سیستم‌ها یعنی سیستم‌های پرش مارکوف با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم نسبت به تخمین آن‌ها امر مقرون به صرفه و بهتری می‌باشد. در سال‌های اخیر توجه محققان به این سیستم‌ها جلب شده است و نتایجی نیز در زمینه پایداری و پایداری سازی [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷]، کنترل  $H_{\infty}$  [۱۸، ۱۹] و مسئله فیلترینگ [۲۰] با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم بدست آمده است.

بدیهی است که وجود تأخیر یک دلیل مهم برای ناپایداری در عملکرد سیستم‌هاست. همچنین تجزیه و کنترل چنین سیستم‌هایی از مسائل دشوار کنترل می‌باشد. چگونگی اثر تأخیر بر روی پایداری سیستم‌های تأخیردار، در طول سالیان، علاقه و توجه وسیعی را در میان دانشمندان و محققین برانگیخته است. در دهه‌های اخیر نتایج بسیاری از جمله پایداری و پایداری سازی سیستم‌های پرش مارکوف تأخیردار بدست آمده است، به عنوان مثال می‌توان برای اطلاعات بیشتر به [۹، ۱۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶] مراجع کرد. این نتایج به دو صورت وابسته به تأخیر و مستقل از تأخیر می‌باشند. لازم به ذکر است در این مقاله سیستم مورد مطالعه سیستم پرش مارکوف با تأخیر زمانی است که در آن تأخیر متغیر با زمان و کران‌دار است. همچنین شرایط بدست آمده برای پایداری تصادفی مستقل از تأخیر می‌باشد.

از طرف دیگر، یکی از روش‌های کنترلی مقاوم مناسب برای کنترل سیستم در حضور عدم قطعیت‌ها، اغتشاشات داخلی و خارجی و همچنین سیستم‌های غیرخطی، روش کنترل مود لغزشی می‌باشد. در این روش بر اساس قضیه کنترل مود لغزشی [۲۷] تمامی حالت‌های سیستم حلقه بسته به سوی یک سطح لغزش معین در فضا هدایت می‌شوند. این کار با اعمال یک نیروی کنترلی ناپیوسته به سیستم دینامیکی حلقه بسته صورت می‌گیرد. پس از برخورد با سطح لغزشی، رفتار سیستم توسط معادله سطح مذکور تعیین می‌شود. بدین معنی که بر روی سطح لغزش مورد نظر، مشخصه‌های مطلوب مانند پایداری، قابلیت رد اغتشاش، ردیابی و غیره تضمین می‌شود. اخیراً موضوع طراحی کنترل کننده مود لغزشی سیستم‌های پرش مارکوف توجه محققین رو به خود جلب کرده است، به عنوان مثال برای اطلاعات بیشتر به [۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱] مراجعه شود. شایان ذکر است که در تمام کارهای فوق، بررسی کنترل مود لغزشی سیستم‌های پرش مارکوف با فرض دسترسی کامل به عناصر ماتریس نرخ احتمال انتقال صورت گرفته است. در حقیقت در آن‌ها چگونگی دسترسی به احتمال‌های انتقال و فرض نامعلوم بودن آن‌ها در نظر گرفته نشده و به سادگی طراحی کنترل کننده مود لغزشی انجام شده است. در نتیجه ما در ابتدا مسئله کنترل مود لغزشی سیستم‌های پرش مارکوف با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم را در [۳۲] بررسی کردیم. سیستم مورد مطالعه در [۳۲] بدون تأخیر بوده و در نتیجه بدست آوردن شرایط LMI برای پایداری تصادفی آن به مراتب ساده تر بود. با توجه به تأثیر قابل توجه تأخیر بر عملکرد سیستم‌ها، پایداری و کنترل این سیستم‌ها همراه با تأخیر امری مهم و ضروری است. اگرچه تا به امروز مسئله کنترل مود لغزشی این سیستم‌ها با تأخیر متغیر با زمان مورد بررسی و مطالعه قرار نگرفته است. در نتیجه در این نوشتار هدف حصول پایداری و کنترل مود لغزشی سیستم‌های پرش مارکوف همراه با تأخیر زمانی با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم می‌باشد. روش ارائه شده کاملاً کلی می‌باشد و سیستم‌های پرش مارکوف با احتمال‌های انتقال کاملاً نامعلوم یا کاملاً معلوم را شامل می‌شود. به عبارت دیگر، اصطلاح به کار برده شده

<sup>1</sup> Piecewise deterministic systems<sup>2</sup> Markovian jump systems

$$0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}, \quad |\dot{\tau}(t)| \leq \mu < 1 \quad (2)$$

که در آن  $\bar{\tau}$  حد بالای تأخیر زمانی می باشد. همچنین داریم:

$$x(s) = \varphi(s), \quad \forall s \in [-\bar{\tau}, 0] \quad (3)$$

$$x_s(t) = x(s+t), \quad -\bar{\tau} \leq s \leq 0$$

$\{r_i, t \geq 0\}$  فرآیند مارکوف زمان پیوسته گسسته مقدار همگن و محدود می باشد که مقادیری در فضای حالت محدود  $\ell = \{1, 2, \dots, N\}$  می گیرد. این فرآیند تصادفی دارای نرخ های احتمال انتقال  $\lambda_{ij}$  می باشد و داریم:

$$\Pr(r_{i+h} = j | r_i = i) = \begin{cases} \lambda_{ij}h + o(h), & \text{if } j \neq i \\ 1 + \lambda_{ii}h + o(h), & \text{if } j = i \end{cases} \quad (4)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{o(h)}{h} \right) = 0, \quad h > 0$$

که در آن  $\lambda_{ij} \geq 0 (i, j \in \ell, j \neq i)$  نشان دهنده نرخ انتقال از مود  $i$  در زمان  $t$  به مود  $j$  در زمان  $t+h$  و  $\lambda_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij}$  برای هر  $i \in \ell$  می باشد. ماتریس نرخ احتمال انتقال به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \lambda_{NN} \end{bmatrix} \quad (5)$$

در ادامه برای راحتی فرایند مارکوف  $r_i$  به صورت اندیس  $i$  به کار برده می شود. بنابراین سیستم (۱) می تواند به صورت زیر دوباره نوشته شود:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i [u(t) + F_i w(t)] \quad (6)$$

به طوری که  $A_i, A_{di}, B_i, F_i$  ماتریس های ثابت معلوم با ابعاد مناسب هستند. همچنین فرض شده است که:

$$\|F_i w(t)\| \leq f_i, \quad f_i > 0, \quad i \in \ell \quad (7)$$

در اینجا نرخ های احتمال انتقال به صورت نیمه معلوم در نظر گرفته شده اند؛ بدین معنی که بعضی از عناصر در ماتریس نرخ احتمال انتقال  $\Lambda$  نامعلوم هستند. برای جداسازی علائم، فضای حالت  $\ell$  را به صورت زیر افراز می کنیم:

$$\begin{cases} \ell = \ell_K^i \cup \ell_{uK}^i \\ \ell_K^i \triangleq \{j : \lambda_{ij} \text{ is known}\} \\ \ell_{uK}^i \triangleq \{j : \lambda_{ij} \text{ is unknown}\} \end{cases} \quad (8)$$

اگر داشته باشیم  $\ell_K^i \neq \emptyset$ ، می توان  $\ell_K^i$  را به صورت زیر توصیف کرد:

$$\ell_K^i = (\kappa_1^i, \dots, \kappa_q^i), \quad \forall 1 \leq q \leq N \quad (9)$$

که در آن  $\kappa_q^i \in \mathbb{N}^+$  نماینده  $q$  امین عنصر معلوم در سطر  $i$  ماتریس  $\Lambda$  است. با توجه به مطالب گفته شده، سیستم پرش مارکوف همراه با

"ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم" به این معنی است که می تواند تمام عناصر ماتریس نرخ احتمال انتقال معلوم باشد و یا تعدادی از عناصر ماتریس نامعلوم باشند و یا حتی تمام عناصر ماتریس نامعلوم باشند. یعنی طراحی در این مقاله، سه حالت فوق را پوشش می دهد. تمام نتایج بدست آمده بر پایه ناتساوی های ماتریسی خطی بوده و به وسیله نرم افزار روش های عددی به آسانی قابل حل هستند که این یکی از مزایای روش ارائه شده می باشد. در حقیقت در این مقاله بدست آوردن شرایط پایداری تصادفی برای سیستم پرش مارکوف تأخیردار بر پایه ناتساوی های ماتریسی خطی یکی از مسائل دشوار عددی بوده که در نهایت با استفاده از روش های خاصی که در ادامه آمده است، امکان پذیر شده است.

در این مقاله در ابتدا با ارائه تابع لیاپانوف مناسب و استفاده از ماتریس های وزنی آزاد، ضریب سطح لغزش خطی برای پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی بر پایه ناتساوی های ماتریسی خطی بدست آورده شده است. شرایط بدست آمده مستقل از تأخیر بوده و فقط وابسته به کران بالای مشتق تأخیر هستند. سپس با طراحی کنترل کننده، بر اساس قضیه کنترل مود لغزشی، مسیرهای حالت سیستم حلقه بسته به سطح لغزشی مطلوب رسیده و برای تمام زمان های بعدی در آن جا باقی می ماند، یعنی  $\dot{s}(t) = 0$  و  $s(t) = 0$  در نتیجه با اعمال قانون کنترل  $u(t)$  سیستم حلقه بسته پایدار تصادفی خواهد شد و طراحی کنترل کننده به پایان می رسد.

در ادامه این نوشتار، ابتدا در قسمت ۲، به معرفی سیستم تحت کنترل و ارائه مبانی ریاضی مورد استفاده در این مقاله می پردازیم. در این قسمت تعاریف و لم های مورد نیاز و همچنین فرم رگولار سیستم بدست آورده شده است. قسمت ۳ به طراحی کنترل کننده مود لغزشی برای سیستم پرش مارکوف با تأخیر زمانی می پردازد. در این بخش در ابتدا با انتخاب سطح لغزش خطی، با ارائه قضیه ۱ پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی بر پایه ناتساوی های ماتریسی خطی مورد بررسی قرار می گیرد، سپس در قضیه ۲ طراحی کنترل کننده مود لغزشی برای تضمین پایداری سیستم حلقه بسته صورت می گیرد. ارائه مثال عددی و نتایج شبیه سازی در قسمت ۴ آورده شده است و نتیجه گیری، قسمت نهایی مقاله را تشکیل می دهد.

## ۲- معرفی سیستم تحت کنترل و تعاریف لازم

این بخش به معرفی سیستم تحت کنترل و ارائه تعاریف و لم های مورد استفاده در این مقاله می پردازد. در ابتدا سیستم پرش مارکوف پیوسته در زمان همراه با تأخیر متغیر با زمان  $\tau(t)$  تعریف شده در فضای احتمال  $(\Omega, F, P)$  زیر را در نظر می گیریم:

$$\dot{x}(t) = A(r_i)x(t) + A_d(r_i)x(t - \tau(t)) + B(r_i)[u(t) + F(r_i)w(t)] \quad (1)$$

که در آن  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت،  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ورودی کنترل کننده و  $w(t) \in \mathbb{R}^l$  اغتشاش می باشد.  $\tau(t)$  تأخیر متغیر با زمان است که در شرایط زیر صدق کند:

$$\dot{z}(t) = \bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t - \tau(t)) + \begin{bmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ B_{2i} \end{bmatrix} [u(t) + F_i w(t)] \quad (16)$$

در حالی که  $\bar{A}_{di} = T_i A_{di} T_i^{-1}$  و  $\bar{A}_i = T_i A_i T_i^{-1}$  هستند. با در نظر گرفتن  $z(t) = [z_1^T(t) \ z_2^T(t)]^T$  می توان سیستم (۱۶) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{z}_1(t) = \bar{A}_{11i} z_1(t) + \bar{A}_{12i} z_2(t) + A_{d11i} z_1(t - \tau(t)) + A_{d12i} z_2(t - \tau(t)) \quad (17)$$

$$\dot{z}_2(t) = \bar{A}_{21i} z_1(t) + \bar{A}_{22i} z_2(t) + \bar{A}_{d21i} z_1(t - \tau(t)) + \bar{A}_{d22i} z_2(t - \tau(t)) + B_{2i} [u(t) + F_i w(t)] \quad (18)$$

که در آن  $z_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$ ،  $z_2(t) \in \mathbb{R}^m$  هستند و پارامترهای دیگر به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11i} &= U_{2i}^T A_i U_{2i}, & \bar{A}_{12i} &= U_{2i}^T A_i U_{1i}, \\ \bar{A}_{d11i} &= U_{2i}^T A_{di} U_{2i}, & \bar{A}_{d12i} &= U_{2i}^T A_{di} U_{1i}, \\ \bar{A}_{21i} &= U_{1i}^T A_i U_{2i}, & \bar{A}_{22i} &= U_{1i}^T A_i U_{1i}, \\ \bar{A}_{d21i} &= U_{1i}^T A_{di} U_{2i}, & \bar{A}_{d22i} &= U_{1i}^T A_{di} U_{1i}, \\ B_{2i} &= \Sigma_i V_i^T. \end{aligned}$$

### ۳- کنترل مود لغزشی سیستم تحت کنترل

#### ۳-۱- پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی

در این قسمت پایداری تصادفی مستقل از تأخیر دینامیک مود لغزشی بر پایه ناتساوی های ماتریسی خطی مورد بررسی قرار می گیرد. بر طبق قضیه کنترل مود لغزشی [۳۵] معادله (۱۷) به عنوان دینامیک مود لغزشی شناخته شده است. در ابتدا سطح لغزشی خطی به صورت زیر انتخاب می شود:

$$s(t) = [C_{1i} \ C_{2i}] z(t) \quad (19)$$

در حالی که  $C_{2i}$  برای هر  $i \in \ell$  معکوس پذیر است. با تعریف  $C_i = C_{2i}^{-1} C_{1i} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$  و جایگذاری  $z_2(t) = -C_i z_1(t)$  و  $z_2(t - \tau(t)) = -C_i z_1(t - \tau(t))$  در (۱۷)، دینامیک مود لغزشی به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\dot{z}_1(t) = \tilde{A}_i z_1(t) + \tilde{A}_{di} z_1(t - \tau(t)), \quad (20)$$

$$\tilde{A}_i = \bar{A}_{11i} - \bar{A}_{12i} C_i, \quad \tilde{A}_{di} = \bar{A}_{d11i} - \bar{A}_{d12i} C_i$$

در ادامه، در قضیه ۱، طراحی پارامتر سطح لغزش خطی  $C_i$  برای پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی (۲۰) صورت گرفته است.

**قضیه ۱-** دینامیک مود لغزشی (۲۰) همراه با تأخیر متغیر با زمان  $\tau(t)$  با احتمال های انتقال نیمه معلوم (۸) پایدار تصادفی است اگر دسته ماتریس های  $X_i > 0$ ،  $R > 0$ ،  $W_i = W_i^T$  و  $Y_i$  به نحوی وجود داشته باشند که مجموعه ناتساوی های ماتریسی خطی (LMIs) زیر برای هر  $i \in \ell$  برقرار باشند:

تأخیر متغیر با زمان با ماتریس نرخ احتمال انتقال کاملاً نامعلوم یا کاملاً معلوم مورد بررسی قرار گرفته است و روش ارائه شده کاملاً کلی می باشد. در ادامه تعاریف و لم های مورد نیاز برای استفاده در اثبات قضیه های ارائه شده در این مقاله آمده است.

**تعریف ۱-** سیستم پرش مارکوف  $\dot{x}(t) = A(r_i)x(t)$  پایدار تصادفی<sup>۱</sup> (SS) است اگر یک مقدار ثابت محدود  $T(x_0, r_0)$  وجود داشته باشد به طوری که رابطه زیر

$$E \left\{ \int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt \mid x_0, r_0 \right\} < T(x_0, r_0) \quad (10)$$

برای هر شرایط اولیه  $(x_0, r_0)$  برقرار باشد [۱۲].

**لم ۱-** سیستم پرش مارکوف  $\dot{x}(t) = A(r_i)x(t)$  پایدار تصادفی (SS) است اگر و تنها اگر مجموعه ای از ماتریس های متقارن و مثبت معین  $P_i > 0$  وجود داشته باشند به طوری که ناتساوی ماتریسی خطی (LMI) زیر برای هر  $i \in \ell$  برقرار باشد [۱۲].

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} P_j < 0 \quad (11)$$

**لم ۲-** فرض کنید  $N \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ،  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ،  $N^T N \leq \hat{N}$  و  $\alpha > 0$  باشند. در آن صورت اگر  $\hat{N} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  آنگاه رابطه زیر برقرار است [۳۳].

$$2x^T N y \leq \alpha |x|^2 + \frac{1}{\alpha} y^T \hat{N} y \quad (12)$$

#### ۲-۱- فرم رگولار<sup>۲</sup> سیستم تحت کنترل

در این قسمت، در ابتدا یک ماتریس ناویژه<sup>۳</sup>  $T_i$  برای بدست آوردن فرم رگولار سیستم (۶) به طوری انتخاب می شود که دارای خاصیت زیر باشد [۲۸]:

$$T_i B_i = \begin{bmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ B_{2i} \end{bmatrix} \quad (13)$$

که در آن  $B_{2i} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  یک ماتریس ناویژه است. برای راحتی،  $T_i$  به صورت زیر تفکیک می شود:

$$T_i = \begin{bmatrix} U_{2i}^T \\ U_{1i}^T \end{bmatrix} \quad (14)$$

که در آن  $U_{2i} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$  و  $U_{1i} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ماتریس یکانی<sup>۴</sup> حاصل از تجزیه مقادیر استثنایی<sup>۵</sup>  $B_i$  هستند، یعنی:

$$B_i = \begin{bmatrix} U_{1i} & U_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_i \\ 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} V_i^T \quad (15)$$

$\Sigma_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  یک ماتریس قطری مثبت معین و  $V_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  یک ماتریس یکانی [۳۴] می باشد. در ادامه با اعمال تبدیل حالت  $z(t) = T_i x(t)$  به سیستم (۶)، فرم رگولار زیر بدست می آید:

<sup>1</sup> Stochastically stable  
<sup>2</sup> Regular form  
<sup>3</sup> Nonsingular  
<sup>4</sup> Unitary matrix  
<sup>5</sup> Singular value decomposition

$$\mathfrak{S}V(z_1(t), i) \leq z_1^T(t) \left( P_i \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T P_i + \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} P_j + Q \right) z_1(t) - (1-\mu) z_1^T(t-\tau(t)) Q z_1(t-\tau(t)) \quad (31)$$

برای دو جمله آخر (31) با استفاده از ناتساوی (12) موجود در لم 2 و تعریف  $\tilde{Q} = (1-\mu)Q$  ناتساوی زیر برقرار است:

$$2z_1^T(t) P_i \tilde{A}_{di} z_1(t-\tau(t)) \leq z_1^T(t) P_i \tilde{A}_{di} \tilde{Q}^{-1} \tilde{A}_{di}^T P_i z_1(t) + z_1^T(t-\tau(t)) \tilde{Q} z_1(t-\tau(t)) \quad (32)$$

با استفاده از (32) برای  $\mathfrak{S}V(z_1(t), i)$  داریم:

$$\mathfrak{S}V(z_1(t), i) \leq z_1^T(t) \left( P_i \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T P_i + \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} P_j + Q + P_i \tilde{A}_{di} \tilde{Q}^{-1} \tilde{A}_{di}^T P_i \right) z_1(t) \quad (33)$$

در نتیجه در (33)، برای این که  $\mathfrak{S}V(z_1(t), i) < 0$  باشد، باید ناتساوی زیر برقرار باشد:

$$P_i \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T P_i + \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} P_j + Q + P_i \tilde{A}_{di} \tilde{Q}^{-1} \tilde{A}_{di}^T P_i < 0 \quad (34)$$

با اعمال مکمل شور در (34) ناتساوی زیر بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} P_i \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T P_i + \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} P_j + Q & P_i \tilde{A}_{di} \\ * & -\tilde{Q} \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

با جایگذاری  $\tilde{A}_i$  و  $\tilde{A}_{di}$  از (20) در (35) داریم:

$$\begin{bmatrix} P_i (\bar{A}_{11i} - \bar{A}_{12i} C_i) + (\bar{A}_{11i} - \bar{A}_{12i} C_i)^T P_i + \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} P_j + Q & P_i (\bar{A}_{d11i} - \bar{A}_{d12i} C_i) \\ * & -\tilde{Q} \end{bmatrix} < 0$$

سپس با ضرب  $X_i = P_i^{-1}$  در دو طرف ناتساوی (36) و تعریف  $Y_i = C_i X_i$  ناتساوی زیر بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} J_i + X_i \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} X_j^{-1} X_i + X_i Q X_i & \bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i \\ * & -X_i \tilde{Q} X_i \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

با استفاده از مکمل شور ناتساوی (37) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$-X_i \tilde{Q} X_i - (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i)^T \left( J_i + X_i \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} X_j^{-1} X_i + X_i Q X_i \right)^{-1} (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i) < 0 \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_i + \lambda_{ij} X_i & X_i & \Gamma_i & (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i) \\ X_i & -R & 0 & 0 \\ * & 0 & -\Xi_i & 0 \\ * & 0 & 0 & -2X_i + (1-\mu)^{-1} R \end{bmatrix} < 0, i \in \ell_{\kappa}^i \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_i & X_i & \Gamma_i & (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i) \\ X_i & -R & 0 & 0 \\ * & 0 & -\Xi_i & 0 \\ * & 0 & 0 & -2X_i + (1-\mu)^{-1} R \end{bmatrix} < 0, i \in \ell_{\mu\kappa}^i \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} -W_i & X_i \\ X_i & -X_j \end{bmatrix} \leq 0, \quad j \in \ell_{\mu\kappa}^i, j \neq i \quad (23)$$

$$X_j - W_j \geq 0, \quad j \in \ell_{\mu\kappa}^i, j = i \quad (24)$$

که در آن

$$\Gamma_i = [\sqrt{\lambda_{i\kappa_1^i}} X_i, \dots, \sqrt{\lambda_{i\kappa_{i-1}^i}} X_i, \sqrt{\lambda_{i\kappa_{i+1}^i}} X_i, \dots, \sqrt{\lambda_{i\kappa_q^i}} X_i] \quad (25)$$

$$\Xi_i = \text{diag} \{ X_{\kappa_1^i}, \dots, X_{\kappa_{i-1}^i}, X_{\kappa_{i+1}^i}, \dots, X_{\kappa_q^i} \} \quad (26)$$

$$\zeta_i = \bar{A}_{11i} X_i - \bar{A}_{12i} Y_i + X_i \bar{A}_{11i}^T - Y_i^T \bar{A}_{12i}^T - \sum_{j \in \ell_{\kappa}^i} \lambda_{ij} W_j$$

می باشند و  $\kappa_1^i, \dots, \kappa_q^i$  در (9) تعریف شده اند. علاوه بر این اگر مجموعه LMI های (21) تا (24) دارای یک جواب ممکن بر پایه  $X_i$  و  $Y_i$  باشند، در آن صورت  $C_i$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$C_i = Y_i X_i^{-1} \quad (27)$$

**اثبات قضیه 1-** در ابتدا تابع لیاپانوف را به صورت زیر انتخاب می شود:

$$V(z_1(t), i) = z_1^T(t) P_i z_1(t) + \int_{-\tau(t)}^0 z_1^T(t+\theta) Q z_1(t+\theta) d\theta \quad (28)$$

که در آن  $Q$  یک ماتریس مثبت معین است.

سپس با استفاده از مفهوم عملگر مشتق متوسط<sup>1</sup> [36] برای سیستم های تصادفی پرش مارکوف، مشتق تابع لیاپانوف (28) به صورت زیر بدست می آید:

$$\mathfrak{S}V(z_1(t), i) = \frac{d}{dt} [z_1^T(t) P_i z_1(t)] + \frac{d}{dt} \left[ \int_{-\tau(t)}^0 z_1^T(t+\theta) Q z_1(t+\theta) d\theta \right] \quad (29)$$

در نتیجه

$$\mathfrak{S}V(z_1(t), i) = z_1^T(t) \left( P_i \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T P_i + \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} P_j \right) z_1(t) + z_1^T(t-\tau(t)) \tilde{A}_{di}^T P_i z_1(t) + z_1^T(t) P_i \tilde{A}_{di} z_1(t-\tau(t)) + z_1^T(t) Q z_1(t) - (1-\mu) z_1^T(t-\tau(t)) Q z_1(t-\tau(t)) \quad (30)$$

با توجه به این که  $|\dot{\tau}(t)| \leq \mu$  است، بدست می آید:

<sup>1</sup> Weak infinitesimal operator

با توجه به این که  $\lambda_{ij} \geq 0$  ( $i, j \in \ell, j \neq i$ ) و  $\lambda_{ii} < 0$

$(\lambda_{ij} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij})$  می باشند، واضح است که برای هر  $\Psi_i < 0, i \in \ell_k^i$  می شود اگر مجموعه LMI های زیر برقرار باشند:

$$\zeta_i + \lambda_{ii} X_i + \sum_{j \in \ell_k^i, j \neq i} \lambda_{ij} (X_i X_j^{-1} X_i) + X_i Q X_i - (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i) \quad (45)$$

$$(-2X_i + \tilde{Q}^{-1})^{-1} (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i)^T < 0, i \in \ell_k^i$$

$$\sum_{j \in \ell_{uk}^i} \lambda_{ij} (X_i X_j^{-1} X_i - W_i) < 0, i \in \ell_k^i \quad (46)$$

از طرف دیگر، واضح است که برای هر  $\Psi_i < 0, i \in \ell_{uk}^i$  می شود اگر مجموعه LMI های زیر برقرار باشند:

$$\zeta_i + \sum_{j \in \ell_k^i, j \neq i} \lambda_{ij} (X_i X_j^{-1} X_i) + X_i Q X_i - (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i) (-2X_i + \tilde{Q}^{-1})^{-1} \quad (47)$$

$$(\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i)^T < 0, i \in \ell_{uk}^i \quad (48)$$

$$\lambda_{ii} (X_j - W_i) + \sum_{j \in \ell_{uk}^i, j \neq i} \lambda_{ij} (X_i X_j^{-1} X_i - W_i) < 0, i \in \ell_{uk}^i$$

که  $\zeta_i$  در قضیه ۱ تعریف شده است.

بنابراین اگر مجموعه ناتساوی های ماتریسی خطی (۴۵) تا (۴۸) برقرار باشند، پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی (۲۰) تضمین می شود. با تعریف  $R = Q^{-1}$  و در نظر گرفتن (۲۵) و (۲۶) و اعمال مکمل شور، ناتساوی های (۲۱) و (۲۲) به ترتیب برای  $i \in \ell_{uk}^i$  و  $i \in \ell_k^i$  معادل ناتساوی های (۴۵) و (۴۷) هستند. به طور مشابه، ناتساوی های (۲۳) و (۲۴) به ترتیب از ناتساوی های (۴۶) و (۴۸) بدست می آیند. در نتیجه اگر مجموعه LMI های (۲۱) تا (۲۴) برقرار شوند، در آن صورت  $C_i = Y_i X_i^{-1}$  می شود و پایداری تصادفی سیستم (۲۰) تضمین می شود و این اثبات را کامل می کند. ■

### ۲-۳- طراحی کنترل کننده مود لغزشی و بدست آوردن قانون کنترل

در این قسمت به طراحی قانون کنترل  $u(t)$  برای تضمین رسیدن مسیرهای حالت سیستم حلقه بسته به سطح لغزشی  $s(t, i) = 0$  برای سیستم پرش مارکوف همراه با تأخیر زمانی با احتمال های انتقال نیمه معلوم می پردازیم. در حقیقت، بدون دسترسی به عناصر ماتریس نرخ احتمال انتقال  $\Lambda$ ، کنترل کننده مود لغزشی وابسته به مود برای پایداری تصادفی سیستم حلقه بسته طراحی گردیده است.

**قضیه ۲-** سیستم پرش مارکوف (۱۶) همراه با تأخیر متغیر با زمان  $\tau(t)$  و احتمال های انتقال نیمه معلوم (۸) را در نظر بگیرید. فرض کنید سطح لغزش به صورت (۱۹) انتخاب شده باشد و  $C_i$  از قضیه ۱ بدست آمده باشد. اگر ماتریس های  $\theta_i > 0$  و  $V_i = V_i^T$  به نحوی وجود داشته باشند که مجموعه LMI های زیر برای هر  $i \in \ell$  برقرار باشند:

در ادامه برای برخورد با جمله غیرخطی  $-X_i \tilde{Q} X_i$  در (۳۸) از نکته ۱ استفاده کرده ایم.

**نکته ۱:** با توجه به این که رابطه زیر

$$(X_i - \tilde{Q}^{-1}) \tilde{Q} (X_i - \tilde{Q}^{-1}) = X_i \tilde{Q} X_i - 2X_i + \tilde{Q}^{-1} \geq 0$$

همیشه برقرار است، خواهیم داشت:

$$-X_i \tilde{Q} X_i \leq -2X_i + \tilde{Q}^{-1} \quad (39)$$

در نتیجه با در نظر گرفتن ناتساوی (۳۹) در نکته ۱ و به کار بردن آن در (۳۸) خواهیم داشت:

$$-2X_i + \tilde{Q}^{-1} - (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i)^T \quad (40)$$

$$\left[ J_i + X_i \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} X_j^{-1} X_i + X_i Q X_i \right]^{-1} (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i) < 0$$

با اعمال دوباره مکمل شور به (۴۰) ناتساوی ماتریسی زیر بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} J_i + X_i \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} X_j^{-1} X_i + X_i Q X_i & \bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i \\ * & -2X_i + \tilde{Q}^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

در این مرحله برای بررسی احتمال های انتقال نیمه معلوم ناتساوی ماتریسی (۴۱) با استفاده از مکمل شور به صورت زیر نوشته می شود:

$$J_i + X_i \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} X_j^{-1} X_i + X_i Q X_i - (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i) (-2X_i + \tilde{Q}^{-1})^{-1} \quad (42)$$

$$(\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i)^T < 0$$

با توجه به این نکته که  $\sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} = 0$  است، رابطه زیر همیشه برقرار است:

$$\sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} W_i = 0 \quad (43)$$

که در آن  $W_i = W_i^T$  ماتریس های وزنی آزاد<sup>۱</sup> هستند. در حقیقت ماتریس های  $W_i$ ، ماتریس های انتخابی هستند. برای حل مسئله عدم دسترسی کامل به عناصر ماتریس نرخ احتمال انتقال، عناصر معلوم و نامعلوم ماتریس احتمال انتقال را به وسیله (۸) به صورت زیر تفکیک می کنیم:

$$\Psi_i = J_i + \sum_{j \in \ell_k^i} \lambda_{ij} (X_i X_j^{-1} X_i - W_i) + \sum_{j \in \ell_{uk}^i} \lambda_{ij} (X_i X_j^{-1} X_i - W_i) + X_i Q X_i - (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i) (-2X_i + \tilde{Q}^{-1})^{-1} (\bar{A}_{d11i} X_i - \bar{A}_{d12i} Y_i)^T < 0 \quad (44)$$

<sup>۱</sup> Free weighting matrices

با جایگذاری قانون کنترل  $u(t)$  در (51) در (56) بدست می آید:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}V(z, t, i) = & s^T(t) \theta_i C_{2i} B_{2i} (-\varepsilon_i + f_i) \text{sign}(B_{2i}^T C_{2i}^T \theta_i s(t)) \\ & + F_i w(t) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \ell_{uk}^i} \lambda_{ij} (s^T(t) (\theta_j - V_i) s(t)) \end{aligned} \quad (57)$$

توجه داشته باشید که ناتساوی های (49) و (50) به ترتیب برای  $i \in \ell_k^i$  و  $i \in \ell_{uk}^i$  معادل ناتساوی زیر هستند:

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in \ell_{uk}^i} \lambda_{ij} (s^T(t) (\theta_j - V_i) s(t)) < 0 \quad (58)$$

بنابراین با توجه به ناتساوی های (49)، (50) و همچنین رابطه (7) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}V(z, t, i) \leq & -(\varepsilon_i + f_i) \|B_{2i}^T C_{2i}^T \theta_i s(t)\| \\ & + f_i \|B_{2i}^T C_{2i}^T \theta_i s(t)\| \quad (59) \\ \leq & -\varepsilon_i \|B_{2i}^T C_{2i}^T \theta_i s(t)\| < 0 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned} \|\theta_i s(t)\|^2 = & \left( \theta_i^2 s^T(t) \right)^T \theta_i \left( \theta_i^2 s^T(t) \right) \quad (60) \\ \geq & \lambda_{\min}(\theta_i) \left\| \theta_i^2 s^T(t) \right\|^2 \end{aligned}$$

و

$$V(z, t, i) = \frac{1}{2} s^T(t) \theta_i s(t) = \frac{1}{2} \left\| \theta_i^{\frac{1}{2}} s^T(t) \right\|^2 \quad (61)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathfrak{S}V(z, t, i) \leq -\phi_i V^{\frac{1}{2}}(z, t, i) \quad (62)$$

$$\phi_i = \sqrt{2} \varepsilon_i \min_{i \in \ell} \left( \lambda_{\min}(\theta_i) \right)^{\frac{1}{2}} \min_{i \in \ell} \left\{ \left( \lambda_{\min}(C_{2i} B_{2i} B_{2i}^T C_{2i}^T) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

که در آن  $\phi_i > 0$  است. با استفاده از رابطه دینکین<sup>1</sup> [36] در ناتساوی (62)، داریم:

$$2E \left[ V(z(t), r(t)) \right]^{\frac{1}{2}} \leq -\phi_i t + 2V^{\frac{1}{2}}(z(0), r(0)) \quad (63)$$

در نتیجه می توان گفت یک زمان رسیدن  $t^*$  به صورت زیر

$$t^* = \frac{2V^{\frac{1}{2}}(z_0, r_0)}{\phi_i} \quad (64)$$

وجود دارد به طوری که  $V(z, t, i) = 0$  و به دنبال آن  $s(t, i) = 0$  برای  $t \geq t^*$  برقرار است. بنابراین با اعمال قانون کنترل مطلوب، مسیرهای حالت سیستم حلقه بسته در زمان محدود به سطح لغزشی تعیین شده (19) می رسند و این اثبات را کامل می کند. ■

$$\theta_j - V_i \leq 0, \quad j \in \ell_{uk}^i, j \neq i \quad (49)$$

$$\theta_j - V_i \geq 0, \quad j \in \ell_{uk}^i, j = i \quad (50)$$

در آن صورت مسیرهای حالت سیستم (16) با استفاده از قانون کنترل زیر می توانند در زمان محدود به سطح لغزشی  $s(t, i) = 0$  وارد شوند:

$$\begin{aligned} u(t) = & -(C_{2i} B_{2i})^{-1} \left( [C_{li} \quad C_{2i}] (\bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t - \tau(t))) \right. \\ & \left. - (\varepsilon_i + f_i) \text{sign}(B_{2i}^T C_{2i}^T \theta_i s(t)) \right) \quad (51) \\ & - \frac{1}{2} (\theta_i C_{2i} B_{2i})^{-1} \sum_{j \in \ell_k^i} \lambda_{ij} (\theta_j - V_i) s(t) \end{aligned}$$

که در آن  $\varepsilon_i > 0$  یک مقدار ثابت کوچک معلوم است.

**اثبات قضیه 2-** در ابتدا تابع لیاپانوف را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$V(z, t, i) = \frac{1}{2} s^T(t) \theta_i s(t) \quad (52)$$

برطبق معادله های (16) و (19)،  $\dot{s}(t)$  به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) = & [C_{li} \quad C_{2i}] \dot{z}(t) \quad (53) \\ = & [C_{li} \quad C_{2i}] \left( \bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t - \tau(t)) \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ B_{2i} \end{bmatrix} [u(t) + F_i w(t)] \right) \end{aligned}$$

با استفاده از عملگر مشتق متوسط و در نظر گرفتن (53)، مشتق تابع لیاپانوف (52) به صورت زیر می باشد:

$$(54)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}V(z, t, i) = & s^T(t) \theta_i \left( [C_{li} \quad C_{2i}] (\bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t - \tau(t))) \right. \\ & \left. + s^T(t) \theta_i C_{2i} B_{2i} [u(t) + F_i w(t)] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} s^T(t) \theta_j s(t) \right) \end{aligned}$$

با توجه به این که  $\sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} = 0$  معادله زیر برای ماتریس های اختیاری  $V_i = V_i^T$  برقرار است:

$$-\frac{1}{2} \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} s^T(t) \mathcal{V}_j s(t) = 0, \quad i \in \ell \quad (55)$$

$V_i = V_i^T$  ماتریس های وزنی آزاد می باشند. با اضافه کردن سمت چپ معادله (55) به (54) و تفکیک عناصر معلوم و نامعلوم ماتریس نرخ احتمال انتقال به وسیله (8) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}V(z, t, i) = & s^T(t) \theta_i [C_{li} \quad C_{2i}] (\bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t - \tau(t))) \\ & + s^T(t) \theta_i C_{2i} B_{2i} [u(t) + F_i w(t)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} s^T(t) \theta_j s(t) - \frac{1}{2} \sum_{j \in \ell} \lambda_{ij} s^T(t) \mathcal{V}_j s(t) \\ = & s^T(t) \theta_i [C_{li} \quad C_{2i}] (\bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t - \tau(t))) \quad (56) \\ & + s^T(t) \theta_i C_{2i} B_{2i} [u(t) + F_i w(t)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j \in \ell_k^i} \lambda_{ij} (s^T(t) (\theta_j - V_i) s(t)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j \in \ell_{uk}^i} \lambda_{ij} (s^T(t) (\theta_j - V_i) s(t)) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Dynkin's formula

### ۴- مثال عددی و شبیه سازی

در این قسمت به بیان یک مثال عددی برای نشان دادن اعتبار و درستی روش ارائه شده در این مقاله می پردازیم. سیستم پرش مارکوف تأخیردار (۶) با احتمال های انتقال نیمه معلوم (۸) با سه مود عملیاتی  $N = 3$  و ماتریس ها و پارامترهای زیر را در نظر می گیریم:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} -2 & 0.1 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.15 & -0.49 \\ 1.5 & -2.1 \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.15 \\ 1.5 & -1.8 \end{bmatrix}, \quad A_{d3} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = 1, \quad w(t) = 0.1 \sin(t), \quad \mu = 0.92$$

ماتریس نرخ احتمال انتقال به صورت زیر داده شده است:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} ? & ? & 1.1 \\ 0.2 & ? & ? \\ 0.9 & 0.2 & -1.1 \end{bmatrix}$$

در ابتدا با حل مجموعه ناتساوی های ماتریسی خطی (۲۱) - (۲۴) در قضیه ۱ توسط جعبه ابزار LMI در نرم افزار MATLAB، داریم:

$$X_1 = 0.1840, \quad X_2 = 0.2116, \quad X_3 = 0.3003,$$

$$Y_1 = 1.1626, \quad Y_2 = 1.2732, \quad Y_3 = 2.4042,$$

$$W_1 = 0.1754, \quad W_2 = 0.1828, \quad R = 0.0139.$$

در نتیجه پارامتر سطح لغزشی خطی  $C_i$  با استفاده از (۲۷) به صورت زیر بدست می آید:

$$C_1 = 6.3181, \quad C_2 = 6.0184, \quad C_3 = 8.0050$$

که در نتیجه منجر به پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی (۲۰) می شود. در مرحله بعد برای طراحی کنترل کننده مود لغزشی به شکل (۵۱) حل ناتساوی های ماتریسی خطی (۴۹) و (۵۰) در قضیه ۲ صورت می گیرد و نتایج زیر را به همراه دارد:

$$\theta_1 = 2.7392, \quad \theta_2 = 1.4755, \quad \theta_3 = 0.4918,$$

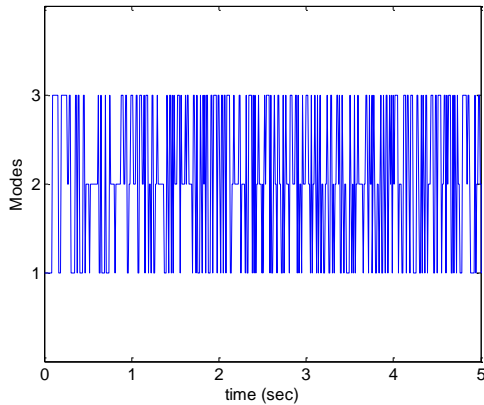
$$V_1 = 2.1074, \quad V_2 = 0.9837, \quad V_3 = 1$$

با انتخاب  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.2$  و  $f_1 = f_2 = f_3 = 0.1$  در نظر

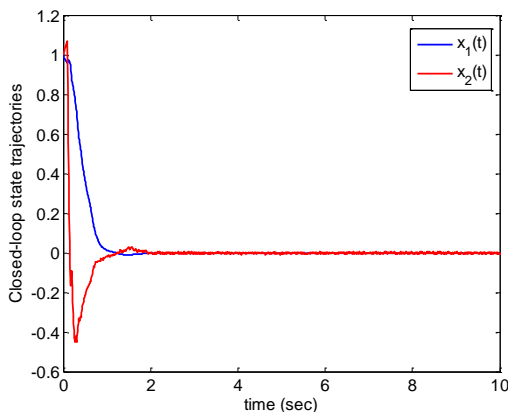
گرفتن  $\tau(t) = 0.45 + 0.25 \sin(5t)$  و  $\dot{\tau}(t) < 0.92$ ، نتایج شبیه سازی به صورت زیر بدست می آید. شکل ۱ فرآیند مارکوف  $\{r_t, t \geq 0\}$  را نشان می دهد. شکل ۲ مسیرهای حالت سیستم حلقه بسته

$x_1(t)$  و  $x_2(t)$  را برای مقادیر اولیه  $x(0) = [1 \quad 1]^T$  نشان می دهد. همچنین قانون کنترل  $u(t)$  اعمال شده به سیستم حلقه بسته در شکل ۳ آورده شده است. ناپیوستگی های موجود در ابتدای شکل سیگنال کنترلی به دلیل پرش سیستم پرش مارکوف از یک مود عملیاتی به مود

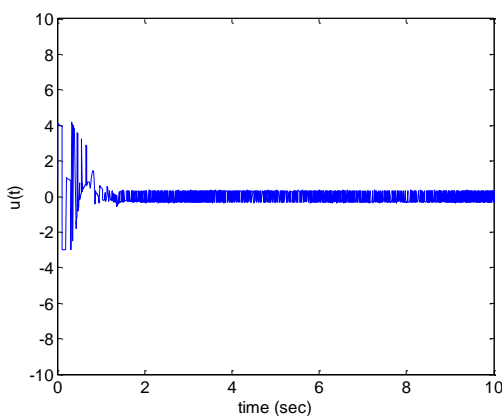
دیگر می باشد. لازم به ذکر است که می توان با قرار دادن  $\frac{s}{|s|+0.01}$  به جای  $sign(s)$  در رابطه قانون کنترل  $u(t)$ ، سیگنال کنترلی با وزوز<sup>۱</sup> کمتر را بدست آورد که در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۱: تغییرات زمانی مود سیستم  $r(t)$



شکل ۲: مسیرهای حالت  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  سیستم حلقه بسته

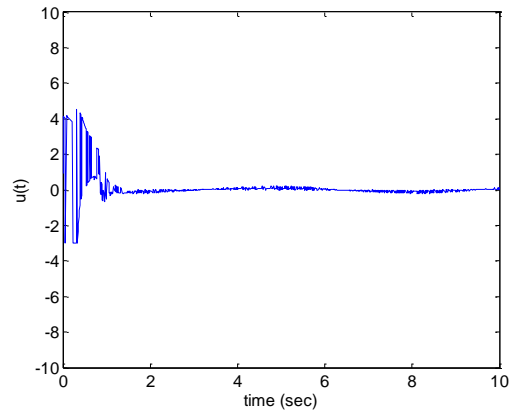


شکل ۳: قانون کنترل  $u(t)$

<sup>۱</sup> Chattering



- [3] K. S. Narendra and S. S. Tripathi, "Identification and optimization of aircraft dynamics," J. Aircraft, vol. 10, no. 4, pp. 193-199, 1973.
- [4] Z. Mao, B. Jiang, and P. Shi, " $H_\infty$  fault detection filter design for networked control systems modelled by discrete Markovian jump systems," IET Control Theory & Applications, 1(5), 1336-1343, 2007.
- [5] A. H. Abolmasoumi and H. R. Momeni, "TCP Congestion Control for the Networks with Markovian Jump Parameters," Advances in Electrical and Computer Engineering, 2011.
- [6] X. Feng, K.A. Loparo, Y. Ji and H. J. Chizeck, "Stochastic Stability properties of jump linear systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, no. 1, pp. 38-53, 1992.
- [7] Y. Ji and H. J. Chizeck, "Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control," IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 35, no. 7, pp 777-788, 1990.
- [8] C. E. de Souza and M. D. Fragoso, " $H_\infty$  control for linear systems with Markovian jumping parameters," Control Theory and advanced Technology, vol. 9, no. 2, pp. 457-466, 1993.
- [9] M. Mohammadian, A. H. Abolmasoumi, and H. R. Momeni, " $H_\infty$  mode-independent filter design for Markovian jump genetic regulatory networks with time-varying delays," Neurocomputing, p 10-18, 2012.
- [10] A. H. Abolmasoumi and H. R. Momeni, "Robust Observer-based  $H_\infty$  Control of a Markovian Jump System with Different Delay and System Modes," International Journal of Control, Automation, and Systems 9(4):768-776, 2011.
- [11] P. Shi, E. K. Boukas and R. K. Agarwal, "Kalman filtering for continuous time uncertain systems with Markovian jumping parameters," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, no. 8, pp. 1592-1597, 1999.
- [12] E. K. Boukas, Stochastic Switching Systems: Analysis and Design . Birkhauser, New York, NY, 2006.
- [13] L.X. Zhang, and E.K. Boukas, "Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities," Automatica, 45(2), 436-468, 2009.
- [14] L. Zhang and J. Lam, "Necessary and sufficient conditions for analysis and synthesis of Markov jump linear systems with incomplete transition



شکل ۴: قانون کنترل  $u(t)$  با وزوز کمتر

با توجه به نتایج شبیه سازی، مسیرهای حالت سیستم حلقه بسته در زمان محدود به سطح لغزشی مطلوب می رسند و صحت روش پیشنهاد شده را تأیید می کنند.

## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله مسئله طراحی کنترل کننده مود لغزشی برای سیستم های پرش مارکوف با تأخیر زمانی با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم در حضور اغتشاش مورد مطالعه قرار گرفت. در حقیقت برای حل مسئله نیمه معلوم بودن عناصر ماتریس نرخ احتمال انتقال، فضای احتمال محدود را به دو فضا با عناصر معلوم و نامعلوم افراز کردیم. همچنین سطح لغزش مورد نظر را خطی در نظر گرفته ایم. در این طراحی، در ابتدا با استفاده از ماتریس های وزنی آزاد و تفکیک عناصر معلوم و نامعلوم ماتریس نرخ احتمال انتقال، شرایط مستقل از تأخیر برای تضمین پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی بر پایه ناتساوی های ماتریسی خطی ارائه شد و بر اساس آن ضریب سطح لغزش مورد نظر بدست آمد. سپس با انتخاب تابع لیاپانوف وابسته به مود و استفاده از ماتریس وزنی آزاد، طراحی قانون کنترل مود لغزشی  $u(t)$  برای تضمین رسیدن مسیرهای حالت سیستم حلقه بسته به سطح لغزشی مطلوب صورت گرفته و در نتیجه پایداری تصادفی سیستم حلقه بسته حاصل شد. در آخر با ارائه یک مثال عددی، کارایی و درستی روش پیشنهاد شده نشان داده شد.

## مراجع

- [1] N. Krasovskii and E. A. Lidskii, "Analytical design of controllers in systems with random attributes. I. Statement of the problem, method of solving," Autom. Remote Control, vol. 22, pt. Part 1-3, pp. 1021-1294, 1961.
- [2] G. L. Olsder and R. Suri, "Time optimal control of parts-routing in a manufacturing system with failure prone machines," in Proceedings of 19th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 722-727, 1980.

- [26] G. Wang, Q. Zhang, and V. Sreeram, "Robust delay-range-dependent stabilization of Markovian jump systems with mode-dependent time-delays and nonlinearities." *Optimal Control Applications and Methods*, 31 (3), 249–264, 2010.
- [27] Y. Xia, and Y. Jia, "Robust sliding-mode control for uncertain time-delay systems: An LMI approach," *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48,1086\_1092, 2003.
- [28] P. Shi, Y. Xia, G. P. Liu, and D. Rees, "On designing of sliding-mode control for stochastic jump systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.51, no. 1, pp. 97–103, Jan. 2006.
- [29] Y. Niu, D. W. C. Ho, and X. Wang, "Sliding mode control for Itô stochastic systems with Markovian switching," *Automatica*, vol. 43, pp.1784–1790, 2007.
- [30] L. Wu, P. Shi, and H. Gao, "State estimation and sliding-mode control of Markovian jump singular systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 5, 2010.
- [31] Y. Zhang, S. Xu, and Y. Chu, "Sliding mode observer-controller design for uncertain Markovian jump systems with time delays," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012.
- [32] N. Zohrabi, H. R. Momeni, and A. H. Abolmasoumi, "Sliding Mode Control of Markovian Jump Systems with Partly Unknown Transition Probabilities," *IFAC Joint conference, Grenoble, France, February 2013*.
- [33] X. Mao, and C. Yuan. *Stochastic differential equations with Markovian switching*. Imperial College Press, 2006.
- [34] K. S. Kim, Y. Park, and S. H. Oh, "Designing of robust sliding surfaces for parametric uncertain systems: A Riccati approach," *Automatica*, vol. 36, pp. 1041-1048, 2000.
- [35] J. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "variable structure control: A survey." *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, 40(1), 2-22, 1993.
- [36] H. J. Kushner, *Stochastic Stability and Control*. New York: Academic, 1967.
- descriptions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL. 55, NO. 7, 2010.
- [15] Y. Zhang, Y. He, M. Wu and J. Zhang, "Stabilization for Markovian jump systems with partial information on transition probability based on free-connection weighting matrices," *Automatica* 47, 79–84, 2011.
- [16] Y. Wang, Z. Zuo, and Y. Cui, "Stochastic stabilization of Markovian jump systems with partial unknown transition probabilities and actuator saturation," *Circuits System Signal Process*, 31:371–383, 2012.
- [17] J. Feng, J. Lam, and Z. Shu, "Stabilization of Markovian systems via probability rate synthesis and output feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 3, 2010.
- [18] L.X. Zhang, and E. K. Boukas, "H<sub>∞</sub> control for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(8), 868–883, 2009.
- [19] L.X. Zhang, and E. K. Boukas, "Mode-dependent H<sub>∞</sub> filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities," *Automatica*, 45(6), 1462–1467, 2009.
- [20] X. Luan, F. Liu and P. Shi, "Finite-time filtering for non-linear stochastic systems with partially known transition jump rates," *IET Control Theory and Applications*, 2010.
- [21] K. Benjelloun, E. K. Boukas and H. Yang, "Robust stabilizability of uncertain linear time-delay systems with Markovian jumping parameters," *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, vol.118, pp. 776-783, 1996.
- [22] E. K. Boukas, Z. K. Liu and P. Shi, "Delay-dependent stability and output feedback stabilization of Markovian jump systems with time delay," *International Journal of Control*, vol. 74, no. 4, pp. 329-331, 2001.
- [23] Y. Cao and J. Lam, "Robust H<sub>∞</sub> control of uncertain Markovian jump systems with time delay," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 77–82, 2000.
- [24] E.K. Boukas and Z.K. Liu *Deterministic and Stochastic Time Delay Systems*. Birkhauser, Boston, 2002.
- [25] M. Wu, Y. He, J. She, and G. Liu. *Delay-dependent Criteria for Robust Stability of Time-Varying Delay systems*. *Automatica*, 40:1435-1439, 2004.