

طراحی کنترل همزمان‌سازی وضعیت در یک ساختار آرایش پرواز ماهواره و در حضور خطای اندازه‌گیری حسگرها

سید سعید نصرالهی^۱، فرزانه عبدللهی^۲

^۱ فارغ‌التحصیل دکترای مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ss_nasrolahi@aut.ac.ir

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، f_abdollahi@aut.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۲۷

ویرایش: ۱۳۹۷/۰۴/۲۷

دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۱۰

چکیده: هدف از این مقاله، طراحی کنترل‌کننده‌ی وضعیت با هدف همزمان‌سازی آن در یک ساختار آرایش پرواز ماهواره و با لحاظ خطای اندازه‌گیری حسگرهاست. مهمترین نوآوری مقاله حاضر، استخراج بهره‌های کنترلی با رویکرد غیرمتمرکز در ساختار چندعامله و با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری بردارهای جهت و سرعت زاویه‌ای است. ماهواره‌ها می‌توانند نامشابه باشند ولی گراف ارتباطی بین آنها از نوع پیوسته فرض می‌شود. بعلاوه نیازی به مخابره‌ی بردارهای سرعت زاویه‌ای بین ماهواره‌ها نیست. طبق پایداری لیاپانوف، کنترل‌کننده پیشنهادی ارزیابی و تحلیل شده و تضمین می‌شود که خطای دنباله‌روی هر ماهواره و خطای همزمان‌سازی وضعیت بین ماهواره‌ها، کران‌دار نهایی یکنواخت خواهند بود. شبیه‌سازی الگوریتم ارائه‌شده، عملکرد مطلوب آن را ضمن مقایسه با روش‌های موجود، روشن می‌نماید.

کلمات کلیدی: آرایش پرواز ماهواره، همزمان‌سازی وضعیت، کران‌دار نهایی یکنواخت، خطای اندازه‌گیری حسگر.

Attitude Synchronization Control in Satellite Formation Flying in the Presence of States Measurement Errors

Seiied Saeed Nasrolahi, Farzaneh Abdollahi

Abstract: This paper presents a novel attitude synchronization framework for tracking control of multiple identical/heterogeneous satellites in formation flying with connected communication graph. The main contribution of the paper is considering sensors' measurement error to derive control gains. Moreover, the proposed strategy need no angular velocity communication. Nevertheless, the tracking synchronization among the satellites' attitudes with individual set-points is guaranteed. Accordingly, based on the Lyapunov criterion, uniformly ultimately boundedness of the synchronization/tracking errors are investigated. The simulation results are presented to illustrate the performance of the developed algorithm.

Keywords: Satellite formation flying, Attitude synchronization, Uniformly ultimately boundedness, Sensor measurement error.

مورد توجه جدی قرار گرفت [۱]. این رویکرد می‌تواند بوسیله افزونگی و فراهم نمودن امکان بازپیکربندی، قابلیت اطمینان عملکرد مجموعه سامانه و در نتیجه اجرای ماموریت را به‌طور چشمگیری بهبود بخشد [۲-۳]. ماموریت‌های آرایش پرواز ماهواره (Satellite Formation Flying) یا به اختصار SFF از دهه ۹۰ میلادی تاکنون به عنوان یک فناوری پیشرو

۱- مقدمه

رویکرد آرایش پرواز در حوزه‌ی فضایی از دهه ۱۹۶۰ میلادی و هنگامی که میعاد فضاپیماها با یکدیگر (Rendezvous) ضرورت پیدا کرد،

در حوزه فضایی مورد توجه قرار گرفته است [۴-۵]. بهبود ماموریت های پایش، اکتشاف منابع و مشاهده زمین از مزایای عمده ای این فناوری به شمار می رود. بعلاوه، SFF می تواند زمینه راحت تر استقرار یک محموله بزرگ را با جایگزینی آن با محموله های کوچک تر و در ماهواره های سبک تر در مدار به دور زمین فراهم آورد [۶] که می توان در این راستا به طور مشخص از محموله های راداری دیافراگم مصنوعی (Synthetic Aperture Radar) یا به اختصار SAR نام برد [۷]. البته تفکیک محموله های فضایی برای اجرای یک ماموریت واحد، الزامات فنی خاص خود را به مجموعه آرایش پرواز تحمیل می کند. به طور مثال برای انجام یک ماموریت SAR با محموله های مجزا شده، الزام همزمان سازی پرتو (Beam)، زمان و فرکانس نقش عمده ای دارد که معمولاً همزمان سازی پرتو را با همزمان سازی وضعیت بین ماهواره ها و بر اساس پایداری سه محوره برآورده می نمایند [۸]. بطور کلی، همزمان سازی وضعیت یکی از موضوعات مورد علاقه محققان در بحث کنترل چندعامله بویژه در SFF است که با توجه به وجود ذاتی خطا در اندازه گیری و یا تخمین، رسیدن به همزمان سازی ایده آل در یک ماموریت کاربردی SFF میسر نیست. لذا با توجه به اهمیت ذکر شده، در این مقاله طراحی یک کنترل کننده وضعیت چندعامله با هدف همزمان سازی وضعیت و در حضور خطای اندازه گیری حسگرها مد نظر قرار گرفته است که ضمن ارائه تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته، شرایط لازم برای ضرایب کنترلی در اجرای یک عملیات همزمان سازی وضعیت استخراج شده است.

در برخی از کارهای انجام شده با هدف همزمان سازی وضعیت، همزمان سازی موقعیت نیز مد نظر طراحان قرار گرفته است [۹-۱۳]. در ادامه، با ارائه دینامیک های بهم پیوسته وضعیت و موقعیت، کنترل کننده واحدی ارائه شده است تا بتواند همزمانی در موقعیت و وضعیت را فراهم آورد [۱۴-۱۷].

از مهمترین منابع جدیدی که به آرایش پرواز ماهواره پرداخته است می توان به کتاب [۱۸] اشاره نمود که علاوه بر کنترل وضعیت مشارکتی، به مباحث کنترل موقعیت ماهواره ها در شکل دادن به یک آرایش نیز پرداخته است. مهمترین تمرکز کتاب در بحث کنترل وضعیت بر تاثیر نوع پروتکل ارتباطی بین ماهواره ها در استخراج کنترل کننده است.

در برخی دیگر از روش های همزمان ساز وضعیت و با هدف کاستن از بار سخت افزاری، کنترل کننده هایی بدون نیاز به اندازه گیری سرعت زاویه ای ارائه شده اند [۱۹-۲۱]. تمامی روش های مذکور مانند روش ارائه شده در [۲۲]، از رویکردهای مبتنی بر مشاهده گر استفاده می کنند تا سرعت زاویه ای را با استفاده از داده های وضعیتی تخمین زده و به یکدیگر مخابره کنند. [۲۳] یک روش همزمان ساز وضعیت بدون نیاز به آگاهی از سرعت زاویه ای ارائه داده است که مهمترین تاثیر آن، کاهش بار مخابراتی بین ماهواره های خواهد بود ولی با توجه به اینکه مبتنی بر بردارهای جهت می باشد، با وجود خطای اندازه گیری در خروجی حسگرهای جهت، از کاربردی بودن، کیفیت و اطمینان از عملکرد روش به شدت کاسته خواهد

شد. [۲۴] نیز بر استخراج روش کنترلی مستقل از بردار سرعت زاویه ای و با لحاظ اشباع عملگرها متمرکز شده است که در آن نیز با توجه به داده های حسگرهای جهت، متغیر بردار سرعت زاویه ای تخمین زده می شود. اگرچه مشاهده گرهای نظیر فیلتر کالمن به منظور همگرایی بیشتر در استخراج بردارهای وضعیت و کاهش پراکندگی داده های حسگرها قابل استفاده هستند، لیکن خروجی آنها نیز خطاآلود بوده و مقادیر دقیق و واقعی را در اختیار قرار نمی دهند.

توپولوژی گراف ارتباطی بین ماهواره ها نیز یکی از مباحث اساسی در کنترل همزمان سازی وضعیت در آرایش پرواز است. ساختارهای رهبر-پیرو [۲۵، ۲۶، ۲۱، ۲۰، ۹]، رویکردهای مبتنی بر رفتار (Behavior-based scheme) [۲۷-۲۸]، رویکردهای مبتنی بر همسایگی (Neighborhood-based architecture) [۱۲ و ۲۹] و روش های ساختار مجازی (Virtual structure) [۳۱-۳۰] از جمله ملاک های تقسیم بندی روش های ارائه شده اند. برخی از الگوریتم های ارائه شده نیز چندین رویکرد در گراف ارتباطی اتخاذ کرده اند. برای نمونه [۳۲] از دو ساختار رهبر-پیرو و مبتنی بر رفتار در یک گراف ارتباطی حلقه ای استفاده می کند. در ادامه، [۳۳] از سه رویکرد رهبر-پیرو، ساختار مجازی و مبتنی بر رفتار بهره برده است.

به طور کلی، در هر روش کنترلی با هدف همزمان سازی وضعیت در SFF، آگاهی از متغیرهای حالت وضعیت ضروری است. همان طور که قبلاً اشاره شد، این متغیرهای وضعیت شامل جهت و سرعت زاویه ای هستند. آگاهی نیز از دو مسیر تخمین و یا اندازه گیری مستقیم بوسیله حسگرهای وضعیتی حاصل می شود که به دلیل عملکرد غیرایده آل مشاهده گرها و همچنین حسگرها، در هر دو روش، متغیرهای وضعیت به خطای تخمین و یا خطای اندازه گیری دچار خواهند بود. به دلیل تاثیر مستقیم متغیرهای وضعیت در تولید سیگنال کنترلی، میزان دقت آنها نسبت به مقدار صحیح و واقعی متغیر، تاثیر اساسی در عملکرد سیستم کنترل حلقه بسته خواهد داشت. این مساله زمانی نمود بیشتری خواهد یافت که دینامیک سیستم مورد بحث، غیرخطی نیز باشد. بر اساس دانش نویسندگان، تاکنون هیچ گونه روش کنترل همزمان ساز وضعیت بر دقت مذکور با رویکرد تحلیلی متمرکز نشده است. به بیان دیگر، هدف کنترلی در مقالات مرتبط با همزمان ساز وضعیت، رسیدن به خطای نسبی صفر بین عامل ها بوده است. در حالی که عملاً، آگاهی دقیق از متغیرهای وضعیت در دسترس نیست. در این مقاله، ما بر طراحی کنترل کننده و تحلیل پایداری خطای همزمان سازی در بین ماهواره های نامشابه در حضور خطای اندازه گیری حسگرها خواهیم پرداخت. بر اساس پایداری مبتنی بر روش مستقیم لیپانوف، قانون بهره های کنترلی در قالب کنترل فیدبک حالت و با لحاظ غیرخطی بودن دینامیک سیستم و با رویکرد غیرمتمرکز (Decentralized approach) استخراج خواهند شد. مهمترین نوآوری های مقاله حاضر را می توان در موارد زیر خلاصه نمود:

- اساس تحلیل های پایداری ارائه شده در مقالات مبتنی بر دانش دقیق از متغیرهای حالت وضعیت است [۳۴، ۳۵، ۲۰، ۱۲، ۹]. از آنجایی که در

۲- اصول اولیه

در این بخش، برخی از مقدمات لازم در تبیین مساله و ابزارهای استفاده شده در تحلیل روش پیشنهادی ارائه می شوند.

۵-۱ بیان وضعیت MRP

برای بیان وضعیت یک دستگاه مختصات نظیر دستگاه بدنه ماهواره نسبت به یک دستگاه مختصات مرجع نظیر دستگاه مداری از بیان های مختلفی نظیر ماتریس کسینوس هادی (Cosine Matrix)، زوایای اوپلر (Euler angles)، بردار کواترنیون (Quaternion) و بردار رودریگر اصلاح شده (MRP) می توان بهره برد. پارامترهای متعدد در ماتریس کسینوس هادی، وجود تکنیکی (Singularity) در زوایای اوپلر، مسائل ابهام (Ambiguity) و پیچک (Unwinding) در بردار کواترنیون، انتخاب MRP برای بیان وضعیت را قابل توجهی می کند [۳۸]. در صورتی که بردار واحد $\bar{n}$ را به عنوان محور اصلی دوران و θ را زاویه دوران بین دو دستگاه مختصات فرض کنیم، آنگاه بردار دوران $\bar{q}$ در بیان MRP برابر خواهد بود با [۳۹]

$$\bar{q} = \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\bar{n} \quad (1)$$

توجه شود که MRP نیز دارای تکنیکی است ولی با استفاده از بردار سایه (MRP shadow parameters)، این مساله به راحتی قابل مرتفع شدن است [۴۰].

۵-۲ دینامیک خطای دنباله روی وضعیت بیان وضعیت

سینماتیک وضعیت یک ماهواره مبتنی بر بیان بردار $\bar{q}$ بر اساس پارامترهای رودریگر اصلاح شده (MRP) طبق رابطه زیر است [۴۱]:

$$\dot{\bar{q}} = G(\bar{q})\bar{\omega} \quad (2)$$

که $\bar{\omega}$ بردار سرعت زاویه ای است و

$$G(\bar{q}) = \frac{1}{4}((1 - \bar{q}^T \bar{q})\mathbf{I}_3 + 2S(\bar{q}) + 2\bar{q}\bar{q}^T) \quad (3)$$

با ویژگی های

$$\bar{q}^T G(\bar{q}) = \frac{1 + \bar{q}^T \bar{q}}{4} \bar{q}^T \quad (4)$$

و

$$\|G(\bar{q})\| \leq \frac{1}{4}(3 + 2\|\bar{q}\| + 3\|\bar{q}\|^2) \quad (5)$$

و اپراتور S نمایانگر عملیات پادمقارن گیری مثلاً از بردار سه مولفه ای $\bar{q}$ طبق رابطه زیر است:

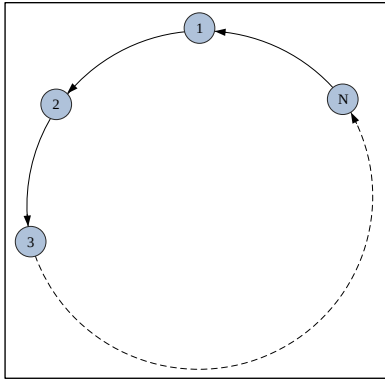
عمل مقادیر دقیق متغیرهای وضعیتی در دسترس نیستند، نتایج بدست آمده نمی توانند همزمان سازی وضعیت را عملاً تضمین نمایند. مهمترین نوآوری مقاله حاضر، بررسی تحلیلی تاثیر خطای اندازه گیری یا تخمین وضعیت در طراحی یک کنترل کننده با هدف همزمان سازی وضعیت برای سیستم کنترل وضعیت SFF با دینامیک غیر خطی است. اساس روش تحلیلی مذکور نیز مبتنی بر معرفی یک تابع لیاپانوف مناسب و استخراج ضرایب کنترلی طبق شرایط لازم برای پایداری سیستم حلقه بسته و با لحاظ باند خطای اندازه گیری وضعیت است.

• به منظور کاهش بار مخابراتی بین ماهواره ها، کنترل کننده هر ماهواره فقط به متغیر جهت ماهواره های همسایه خود نیازمند است. لازم به ذکر است برای همزمان سازی وضعیت در [۱۲، ۱۵، ۲۷، ۲۹] نیاز به اشتراک گذاری بردار سرعت زاویه ای است و حتی در برخی، اشتراک گذاری بردار شتاب زاویه ای نیز ضروری است [۳۰، ۳۶] که طبعاً بار مخابراتی بین ماهواره ها را افزایش خواهد داد. هرچند روش های همزمان ساز بدون نیاز به اندازه گیری سرعت زاویه ای نیز وجود دارند [۱۹، ۲۳، ۳۷] ولی در تحلیل آنها خطای اندازه گیری و یا تخمین لحاظ نشده اند.

به بیان دیگر، مساله اصلی که مقاله بر آن تمرکز کرده است، لحاظ خطای اندازه گیری حسگرهای وضعیت در استخراج یک روش کنترلی غیرمتمرکز با هدف همزمان سازی وضعیت در آرایش پرواز ماهواره ها است. روش کنترلی مبتنی بر فیدبک حالت است که با استفاده از روش لیاپانوف و تضمین پایداری سیستم حلقه بسته، به استخراج قانون بهره های کنترلی منتج می شود. فرضیه های اصلی که برای حل مساله در این مقاله در نظر گرفته شده اند را می توان در موارد زیر خلاصه نمود:

- گراف ارتباطی بین ماهواره ها از نوع متصل (Connected) است.
- کران بالای اندازه خطای اندازه گیری حسگرها معلوم است.
- هر ماهواره فقط داده ای مربوط به حسگر جهت خود را با همسایگانش به اشتراک می گذارد و از داده حسگر سرعت زاویه ای خود در تولید سیگنال کنترلی خودش استفاده می کند.

در ادامه مقاله، پس از توضیح مباحث مقدماتی، مساله اصلی و چگونگی طراحی کنترل کننده بیان خواهند شد. در بخش پایانی نیز با استفاده از نتایج شبیه سازی، عملکرد الگوریتم ارائه شده مورد صحت سنجی قرار می گیرد. در این مقاله، از این نشانه گذاری ها استفاده می شود: بردارها به فرم پررنگ و زیر یک خط ($\bar{\mathbf{I}}$)، ماتریس ها به صورت پررنگ ($\mathbf{M}$) و اسکالرها به طور معمولی نمایش داده می شوند. $\bar{\mathbf{I}}_n$ بیانگر بردار n ستونی یکانی، $\mathbf{I}_n$ بیانگر ماتریس یک $n \times n$ ، $\mathbf{0}_n$ ماتریس صفر $n \times n$ ، $\text{diag}(\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n)$ یک ماتریس بلوکی قطری تشکیل شده از ماتریس های $\mathbf{M}_1$ تا $\mathbf{M}_n$ ، $\otimes$ نمایانگر ضرب کرونکر (Kronecker)، $\lambda_{\min}(\cdot)$ و $\lambda_{\max}(\cdot)$ به ترتیب بیانگر کوچک ترین و بزرگ ترین مقدار ویژه هستند.



شکل ۱: نمونه یک گراف ارتباطی

• از دیدگاه انفرادی هر یک از عامل‌ها؛ هر عاملی بتواند سیگنال مطلوب خود را به خوبی دنبال نماید، یا به عبارت ریاضی خطای دنباله‌روی تک تک عامل‌ها بصورت نمایی به سمت صفر میل نماید.

• از دیدگاه تداخل بین عامل‌ها؛ تمامی عامل‌ها همزمان با یکدیگر به حالت مطلوب خود برسند، یا به عبارت دیگر، خطای نسبی بین خطاهای دنباله‌روی عامل‌ها نیز به سمت صفر میل نمایند ($\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{e}}_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{e}}_2(t) = \dots = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{e}}_N(t) = 0$).

تعریف خطای همزمان سازی در آرایش پرواز معطوف به هدف دوم کنترل کننده چندعامله است که با توجه به نوع گراف ارتباطی بین عامل‌ها، می توان بیان ریاضی آن را ارائه نمود. بطور مثال در صورتی که فرض شود، گراف ارتباطی شبیه گراف ارائه شده در شکل ۱ باشد آنگاه خطای همزمان سازی هر عامل طبق رابطه زیر قابل تعریف خواهد بود؛

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{e}}_1(t) &= \bar{\mathbf{e}}_1(t) - \bar{\mathbf{e}}_2(t) \\ \bar{\mathbf{e}}_2(t) &= \bar{\mathbf{e}}_2(t) - \bar{\mathbf{e}}_3(t) \\ &\vdots \\ \bar{\mathbf{e}}_N(t) &= \bar{\mathbf{e}}_N(t) - \bar{\mathbf{e}}_1(t)\end{aligned}\quad (13)$$

در این صورت بدیهی است که هدف از همزمان سازی آن است که

$$\bar{\mathbf{e}}_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{e}}_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \dots \bar{\mathbf{e}}_N(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (14)$$

با این تعریف، می توان خطای همزمان سازی $\bar{\mathbf{E}}(t) = [\bar{\mathbf{e}}_1^T(t) \ \bar{\mathbf{e}}_2^T(t) \ \dots \ \bar{\mathbf{e}}_N^T(t)]^T$ را با استفاده از ماتریس لاپلاسن به خطای دنباله‌روی $\bar{\mathbf{E}}(t) = [\bar{\mathbf{e}}_1^T(t) \ \bar{\mathbf{e}}_2^T(t) \ \dots \ \bar{\mathbf{e}}_N^T(t)]^T$ مرتبط کرد:

$$\bar{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{L} \bar{\mathbf{E}}(t) \quad (15)$$

۵-۴ دینامیک خطای همزمان سازی وضعیت در آرایش پرواز

طبق تعریف کلی همزمان سازی در بخش قبل، هدف از همزمان سازی وضعیت در آرایش پرواز، نشانه‌روی ماهواره‌ها به نقاط هدف منحصرنبرد خود به‌طور همزمان با سایر ماهواره‌های شرکت کننده در آرایش پرواز است. بنابراین، خطای دنباله‌روی هر ماهواره تاثیر بسزایی در ساخت

$$\mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

دینامیک وضعیت ماهواره نمایانگر رابطه بین حرکت وضعی ماهواره و گشتاورهای اعمالی بر آن است:

$$\mathbf{J} \ddot{\bar{\omega}} = \mathbf{S}(\bar{\omega}) \mathbf{J} \dot{\bar{\omega}} + \bar{\mathbf{u}}_c + \bar{\mathbf{u}}_d \quad (7)$$

که $\mathbf{J}$ ماتریس لختی دورانی (Moment of Inertia Matrix) ماهواره و منظور از $\bar{\mathbf{u}}_c$ گشتاور کنترلی و $\bar{\mathbf{u}}_d$ گشتاور اغتشاشی محیط است. با فرض پارامترهای $\bar{\mathbf{q}}_d$ و $\bar{\omega}_d$ به عنوان مقادیر مطلوب جهت و سرعت زاویه‌ای، خطای دنباله‌روی را می توان بدست آورد:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{e}}_q = \bar{\mathbf{q}} \odot \bar{\mathbf{q}}_d \\ \bar{\mathbf{e}}_\omega = \bar{\omega} - \bar{\omega}_d \end{cases} \quad (8)$$

که منظور از $\odot$ ضرب تعریف شده در فضای MRP است:

$$\bar{\mathbf{q}} \odot \bar{\mathbf{q}}_d = \frac{\bar{\mathbf{q}}_d (\bar{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{q}} - 1) - \bar{\mathbf{q}} (\bar{\mathbf{q}}_d^T \bar{\mathbf{q}}_d - 1) - 2(\bar{\mathbf{q}} \times \bar{\mathbf{q}}_d)}{1 + \|\bar{\mathbf{q}}_d\|^2 \|\bar{\mathbf{q}}\|^2 + 2\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{q}}_d} \quad (9)$$

در صورتی که ماهواره به نقطه مشخصی نشانه‌روی کند (مثلاً برای انجام ماموریت مشاهده زمین)، آنگاه می توان فرض کرد $\bar{\omega}_d \approx 0$ و $\bar{\mathbf{q}}_d \approx 0$. در این صورت، دینامیک خطای دنباله‌روی ماهواره را می توان بر اساس سینماتیک (۲) و دینامیک (۷) بدست آورد:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{e}}}_q = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_q) \bar{\mathbf{e}}_\omega \\ \mathbf{J} \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\omega = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_\omega) \mathbf{J} \bar{\mathbf{e}}_\omega + \bar{\mathbf{u}}_c + \bar{\mathbf{u}}_d \end{cases} \quad (10)$$

۵-۳ بیان همزمان سازی در گراف

توضیحات مقدماتی مربوط به معرفی گراف و پارامترهای مربوط به آن در ضمیمه ۳ آورده شده است. در صورتی که فرض کنیم در یک سیستم N-عامله، هر عامل یک دینامیک غیرخطی به فرم زیر داشته باشد

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \bar{\mathbf{u}}_i \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_i = \mathbf{h}_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \end{cases} \quad \text{for } i = 1, \dots, N. \quad (11)$$

و همچنین اگر هر یک از عامل‌ها، حالت مطلوب متناظر خود را داشته باشد $(\bar{\mathbf{x}}_i^d(t))$ ، آنگاه هر یک نیز، خطای دنباله‌روی خود را طبق رابطه زیر خواهند داشت [۴۲]:

$$\bar{\mathbf{e}}_i(t) = \bar{\mathbf{x}}_i^d(t) - \bar{\mathbf{x}}_i(t) \quad (12)$$

در یک طراحی کنترل همزمان در یک ساختار چندعامله، برآورده سازی توأمان دو هدف از دید انفرادی و تداخل (Coupling) مد نظر طراح است که در ادامه توضیح داده می شوند [۴۴]:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{track} = -k_{\omega_i} \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{q_i} \bar{\mathbf{e}}_{q_i} \quad (20)$$

که منظور از k_{q_i} و k_{ω_i} ضرایب کنترلی است و $\bar{\mathbf{u}}_i^{synch}$ طبق رابطه زیر با هدف برقراری همزمان سازی وضعیت بین ماهواره‌هاست:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{synch} = -k_{q_i} \sum_{j=1}^{N_i} (\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) \quad (21)$$

همان‌طور که قابل مشاهده است، در سیگنال کنترلی، نیازی به دانستن سرعت زاویه‌ای نسبی یا به عبارت دیگر، مخابره بردارهای سرعت زاویه‌ای بین ماهواره‌ها نیست. ولی در سیگنال کنترلی (۲۰)، از یک نکته غفلت شده است و آن وابستگی سیگنال کنترل به مقادیر دقیق $\bar{\mathbf{e}}_q$ و $\bar{\mathbf{e}}_\omega$ است. به عبارت دیگر، در عمل مقادیر واقعی، نامعلوم‌اند ولی بر اساس (۱۸) در یک بازه‌ی معلوم مبتنی بر مقادیر اندازه‌گیری ($\bar{\mathbf{e}}_q^{meas}$ و $\bar{\mathbf{e}}_\omega^{meas}$) قرار دارند:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_q^{meas} - 3\sigma_q \bar{\mathbf{I}}_n \leq \bar{\mathbf{e}}_q \leq \bar{\mathbf{e}}_q^{meas} + 3\sigma_q \bar{\mathbf{I}}_n \\ \bar{\mathbf{e}}_\omega^{meas} - 3\sigma_\omega \bar{\mathbf{I}}_n \leq \bar{\mathbf{e}}_\omega \leq \bar{\mathbf{e}}_\omega^{meas} + 3\sigma_\omega \bar{\mathbf{I}}_n \end{aligned} \quad (22)$$

که منظور از σ_q و σ_ω انحراف استاندارد (Standard deviation) اندازه‌گیری به ترتیب مربوط به جهت و سرعت زاویه‌ای است. بنابراین، سیگنال کنترلی که در عمل و با لحاظ کران بالای خطای اندازه‌گیری $m = \max\{\sigma_q, \sigma_\omega\}$ تولید می‌شود عبارت است از:

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{u}}_i^{track} + \bar{\mathbf{u}}_i^{synch} + \bar{\mathbf{d}}_i \quad (23)$$

که جمله ناخواسته‌ی $\bar{\mathbf{d}}_i$ نمایانگر مجموع جمله‌های وابسته به خطای اندازه‌گیری بردارهای وضعیت ماهواره i و همسایه‌های آن بوده و می‌توان کران آن را طبق رابطه زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{d}}_i\| \leq mk_{\omega_i} + mk_{q_i} + k_{q_i} \sum_{j=1}^{N_i} 2m \\ \|\bar{\mathbf{d}}_i\| \leq m(k_{\omega_i} + (2N_i + 1)k_{q_i}) \end{aligned} \quad (24)$$

در نامساوی فوق و در زیر علامت Σ ، لازم به توضیح است که $2m$ نشانگر بیشترین انحراف ممکن در تفاضل بین متغیرهای وضعیت عامل i و همسایه‌های آن است. حال با توجه به روابط قبلی و در صورتی که ماتریس لاپلاسن را با L نمایش دهیم (ضمیمه ۳)، می‌توان سیگنال کنترلی سیستم چندعامله را طبق رابطه زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}} = -(\underbrace{\mathbf{K}_\omega \otimes \mathbf{I}_3}_{\mathbf{K}_{\omega I}}) \bar{\mathbf{E}}_\omega - (\underbrace{\mathbf{K}_q \otimes \mathbf{I}_3}_{\mathbf{K}_{q I}}) \bar{\mathbf{E}}_q - (\mathbf{K}_q \otimes \mathbf{I}_3)(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_3) \bar{\mathbf{E}}_q + \bar{\mathbf{D}} \\ = -\mathbf{K}_{\omega I} \bar{\mathbf{E}}_\omega - \mathbf{K}_{q I} \bar{\mathbf{L}}_I \bar{\mathbf{E}}_q + \bar{\mathbf{D}} = -\mathbf{K}_{\omega I} \bar{\mathbf{E}}_\omega - \mathbf{K}_{q I} \bar{\mathbf{L}}_I \bar{\mathbf{E}}_q + \bar{\mathbf{D}} \end{aligned} \quad (25)$$

که $\bar{\mathbf{L}}_I = (\mathbf{I}_N + \mathbf{L}) \otimes \mathbf{I}_3$ و

$$\mathbf{K}_\omega = \begin{bmatrix} k_{\omega_1} & & \\ & \ddots & \\ \emptyset & & k_{\omega_{N \times N}} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_q = \begin{bmatrix} k_{q_1} & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & k_{q_{N \times N}} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{d}}_{N \times 1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

سیگنال کنترل اعمالی به سایر ماهواره‌ها دارد. لذا برای یک ساختار آرایش پرواز با هدف اجرای ماموریت SAR می‌توان دینامیک خطای دنباله‌روی در مجموعه سیستم را این‌گونه تعریف کرد:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{E}}_q = \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) \bar{\mathbf{E}}_\omega \\ \mathbf{J}_M \bar{\mathbf{E}}_\omega = \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}) \mathbf{J}_M \bar{\mathbf{E}}_\omega + \bar{\mathbf{U}} \end{cases} \quad (16)$$

که

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_q = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_{q_1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{e}}_{q_N} \end{bmatrix}_{3N \times 1}, \bar{\mathbf{E}}_\omega = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_{\omega_1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{e}}_{\omega_N} \end{bmatrix}_{3N \times 1}, \bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}}_N \end{bmatrix}_{3N \times 1}, \\ \mathbf{J}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \mathbf{J}_N \end{bmatrix}_{3N \times 3N}, \\ \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}_\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_1}) & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_N}) \end{bmatrix}_{3N \times 3N}, \\ \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_1}) & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_N}) \end{bmatrix}_{3N \times 3N} \end{aligned} \quad (17)$$

۵-۵ مدل سازی خطای اندازه‌گیری حسگرها

از حسگرهای مختلفی برای بدست آوردن وضعیت ماهواره استفاده می‌شود نظیر حسگر خورشید، ژيروسکوپ، حسگر مغناطیسی و حسگر ستاره. به‌طور کلی خطاهای اندازه‌گیری حسگرها از جنس متغیرهای تصادفی است که منطبق بر تابع توزیع‌های احتمال هستند. معمولاً توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_2 برای مدل کردن خطای اندازه‌گیری حسگرها بکار می‌روند مگر اینکه اطلاعاتی خلاف این موضوع راجع به حسگر خاصی در دسترس باشد [۴۴]. بنابراین، با احتمال 99.7% می‌توان بازه‌ی قابل تصور برای مقدار واقعی یک پارامتر z را این‌گونه لحاظ کرد:

$$z^m - 3\sigma \leq z \leq z^m + 3\sigma \quad (18)$$

که منظور از z و z^m به ترتیب مقادیر واقعی و اندازه‌گیری شده است.

۳- بیان مساله و طراحی کنترل کننده

با فرض اینکه هر ماهواره بایستی بتواند سیگنال مطلوب وضعیت منحصربفرد خود را هم در جهت ($\bar{\mathbf{q}}_i^d$) و هم در سرعت زاویه‌ای ($\bar{\omega}_i^d = 0$) دنبال کند و در عین حال بتواند خطای دنباله‌روی خود را با سایر ماهواره‌های آرایش پرواز همزمان کند، سیگنال کنترلی زیر برای هر عامل i قابل پیشنهاد است:

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{u}}_i^{track} + \bar{\mathbf{u}}_i^{synch} \quad (19)$$

که $\bar{\mathbf{u}}_i^{track}$ طبق رابطه زیر با هدف دنباله‌روی هر ماهواره i نسبت به مطلوب خود است:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) = & \sum_{i=1}^N \left[\bar{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{J}_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \frac{4k_{q_i}}{1 + \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i}} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i} + 4\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i} + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T \mathbf{J}_i \bar{\mathbf{e}}_{q_i} \right. \\ & + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{J}_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{J}_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \frac{4k_{\omega_i} \varepsilon_i}{1 + \|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i} \\ & \left. + 2(\dot{k}_{q_i} + \varepsilon_i \dot{k}_{\omega_i}) \ln(1 + \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \right] \\ = & \sum_{i=1}^N \left[\bar{\mathbf{e}}_i^T \left(\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}) \mathbf{J}_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{\omega_i} \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{q_i} \bar{\mathbf{e}}_{q_i} - k_{q_i} \sum_{j=1}^{N_i} (\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \bar{\mathbf{d}}_i \right) \right. \\ & + \frac{4k_{q_i}}{1 + \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i}} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + 4\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T \mathbf{J}_i \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} \\ & + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \left(\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}) \mathbf{J}_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{\omega_i} \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{q_i} \bar{\mathbf{e}}_{q_i} - k_{q_i} \sum_{j=1}^{N_i} (\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \bar{\mathbf{d}}_i \right) \\ & \left. + \frac{4k_{\omega_i} \varepsilon_i}{1 + \|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + 2(\dot{k}_{q_i} + \varepsilon_i \dot{k}_{\omega_i}) \ln(1 + \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

که با توجه به اینکه $\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}) = 0$ و حذف جملات قرینه با یکدیگر داریم؛

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) = & \sum_{i=1}^N \left[-k_{\omega_i} \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{q_i} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \sum_{j=1}^{N_i} (\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T \mathbf{d}_i \right. \\ & + 4\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T \mathbf{J}_i \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}) \bar{\mathbf{e}}_{q_i} \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - \varepsilon_i k_{q_i} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i} \\ & \left. - \varepsilon_i k_{q_i} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \sum_{j=1}^{N_i} (\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{d}_i + 2(\dot{k}_{q_i} + \varepsilon_i \dot{k}_{\omega_i}) \ln(1 + \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

با توجه به این نکته که

$$\forall x > 0; \ln(1+x) < x \quad (32)$$

لذا

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) \leq & \sum_{i=1}^N \left[-k_{\omega_i} \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{q_i} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \sum_{j=1}^{N_i} (\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T \bar{\mathbf{d}}_i + 4\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} \right. \\ & + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T \mathbf{J}_i \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}) \mathbf{J}_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - \varepsilon_i k_{q_i} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i} \\ & \left. - \varepsilon_i k_{q_i} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \sum_{j=1}^{N_i} (\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{d}}_i + 2(\dot{k}_{q_i} + \varepsilon_i \dot{k}_{\omega_i}) \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

حال با استفاده از تعاریف قبلی در (۱۷) و (۲۶) و $\mathbf{L}_I = \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_3$ می توان نوشت

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) \leq & -\bar{\mathbf{E}}_{\omega}^T \mathbf{K}_{\omega} \bar{\mathbf{E}}_{\omega} - \bar{\mathbf{E}}_{\omega}^T \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_I \bar{\mathbf{E}}_{q_i} + \bar{\mathbf{E}}_{\omega}^T \bar{\mathbf{D}} + 4\bar{\mathbf{E}}_{q_i}^T \mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_{q_i}) \bar{\mathbf{E}}_{\omega} \\ & + \bar{\mathbf{E}}_{\omega}^T \Xi_I \mathbf{J}_M \mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_{q_i}) \bar{\mathbf{E}}_{\omega} + \bar{\mathbf{E}}_{q_i}^T \Xi_I \mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_{\omega}) \mathbf{J}_M \bar{\mathbf{E}}_{\omega} \\ & - \bar{\mathbf{E}}_{q_i}^T \Xi_I \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_I \bar{\mathbf{E}}_{q_i} + \bar{\mathbf{E}}_{q_i}^T \Xi_I \bar{\mathbf{D}} + 2\bar{\mathbf{E}}_{q_i}^T (\dot{\mathbf{K}}_{q_i} + \Xi_I \dot{\mathbf{K}}_{\omega_i}) \bar{\mathbf{E}}_{q_i} \end{aligned} \quad (34)$$

که می توان آن را به فرم خلاصه زیر نوشت:

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) \leq -\bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{T}_e \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{T}_d \bar{\mathbf{D}} \quad (35)$$

که ماتریس های $\mathbf{T}_d$ و $\mathbf{T}_e$ برابرند با:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_e(1,1) &= \mathbf{K}_{\omega} - \Xi_I \mathbf{J}_M \mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_{q_i}) \\ \mathbf{T}_e(1,2) &= \mathbf{T}_e^T(1,2) = \frac{1}{2} (\mathbf{J}_M \mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_{\omega}) \Xi_I - 4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}) + \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_I) \\ \mathbf{T}_e(2,2) &= \Xi_I \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_I - 2(\dot{\mathbf{K}}_{q_i} + \Xi_I \dot{\mathbf{K}}_{\omega_i}) \\ \mathbf{T}_d &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3N} & \mathbf{0}_{3N} \\ \mathbf{0}_{3N} & \Xi_I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

با استفاده از قضیه ای که در ادامه بیان خواهد شد، تاثیر خطای اندازه گیری در استخراج بهره های کنترلی لحاظ شده و در مسیر تحلیل اثبات آن، پایداری سیستم حلقه بسته تضمین می شود.

قضیه ۱: یک آرایش پرواز ماهواره ای به تعداد N با ساختار گراف ارتباطی متصل در نظر بگیرد. همچنین بیشینه مقدار ویژه بین ماتریس های لختی دورانی ماهواره ها را برابر $\Delta = \max_{i=1}^N \{\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)\}$ فرض کنید. آنگاه بردار خطای دنباله روی $\bar{\mathbf{E}} = [\bar{\mathbf{E}}_q^T \quad \bar{\mathbf{E}}_{\omega}^T]^T$ در سیستم حلقه بسته ناشی از دینامیک (۱۶) و سیگنال ورودی (۲۵)

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{E}}}_q = \mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q) \bar{\mathbf{E}}_{\omega} \\ \mathbf{J}_M \dot{\bar{\mathbf{E}}}_{\omega} = \mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_{\omega}) \mathbf{J}_M \bar{\mathbf{E}}_{\omega} + \bar{\mathbf{U}} \end{cases}, \bar{\mathbf{U}} = -\mathbf{K}_{\omega} \bar{\mathbf{E}}_{\omega} - \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_I \bar{\mathbf{E}}_{q_i} + \bar{\mathbf{D}} \quad (27)$$

در حضور خطای اندازه گیری حسگرهای وضعیت، کران دار یکنواخت نهایی یا به عبارتی UUB (Uniformly Ultimately Boundedness) است اگر ضرایب کنترلی طبق روابط زیر انتخاب شوند:

$$\begin{aligned} k_{q_i} &> \frac{2 + \varepsilon_i^2}{2\varepsilon_i} \\ k_{\omega_i} &= \begin{cases} -\frac{1}{16\varepsilon_i} \left(\frac{r(\bar{\mathbf{E}}_{q_i}) + k_{q_i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{2(k_{\omega_i} - h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}))} + r(\bar{\mathbf{E}}_{q_i}) + \frac{k_{q_i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{4(k_{\omega_i} - h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}))^2} \right), & k_{\omega_i} > h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &< \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)}} \quad \text{و} \\ r(\bar{\mathbf{E}}_{q_i}) &= r(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}, \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}) = \left(\varepsilon \lambda_{\max}(\mathbf{J}_i) \|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\| + (3 + 2\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\| + 3\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2) \right)^2 \\ h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) &= 1.5 + \frac{\varepsilon_i \lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)}{4} (3 + 4\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\| + 3\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2) \end{aligned}$$

اثبات: فرایند اثبات با معرفی یک تابع لیاپانوف آغاز می شود که برای برقراری پایداری آن، شروط لازم برای بهره های کنترلی استخراج می شوند. تابع زیر به عنوان تابع کاندید لیاپانوف در نظر گرفته می شود؛

$$\begin{aligned} V(\bar{\mathbf{E}}) &= V(\bar{\mathbf{E}}_q, \bar{\mathbf{E}}_{\omega}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{J}_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + 2k_{q_i} \ln(1 + \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i}) + 2\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i} + \varepsilon_i \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \mathbf{J}_i \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} \right. \\ & \quad \left. + 2\varepsilon_i k_{\omega_i} \ln(1 + \bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T \bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

که با توجه به متمم شور (ضمیمه ۴) بایستی $\varepsilon_i < \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)}}$ همچنین تعریف می کنیم $\Xi_I = \Xi \otimes \mathbf{I}_3$ که $\Xi = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ حال با مشتق گیری از تابع لیاپانوف خواهیم داشت:

$$\mathbf{T}(1,1) - \mathbf{I}_{3N} > 0$$

$$2\mathbf{K}_{ol} - (\Xi_I \mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M \Xi_I) - 3\mathbf{I}_{3N} > 0$$

$$k_{\omega_i} > \frac{\varepsilon_i}{2} \left\| \mathbf{J}_i \mathbf{G} (\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) + \mathbf{G}^T (\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \mathbf{J}_i \right\| + 1.5 \quad (45)$$

$$k_{\omega_i} > \frac{\varepsilon_i \lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)}{2} \left(\left\| \mathbf{G} (\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \right\| + \left\| \mathbf{G}^T (\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \right\| \right) + 1.5$$

که با توجه به تعریف تابع $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}})$ در (۳)، تابع $\mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{q}})$ برابر است با:

$$\mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{e}}_q) = \frac{1}{4} \left((1 - \bar{\mathbf{e}}_q^T \bar{\mathbf{e}}_q) \mathbf{I}_3 - 2\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_q) + 2\bar{\mathbf{e}}_q \bar{\mathbf{e}}_q^T \right) = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_q) - \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_q) \quad (46)$$

و بنابراین کران اندازه‌ی آن قابل محاسبه خواهد بود:

$$\left\| \mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{e}}_q) \right\| = \left\| \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_q) - \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_q) \right\| < \left\| \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_q) \right\| + \left\| \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_q) \right\| \quad (47)$$

پس می‌توان آخرین نامساوی در (۴۵) را طبق رابطه زیر به‌روز کرد:

$$k_{\omega_i} > \frac{\varepsilon_i \lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)}{2} \left(2 \left\| \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \right\| + \left\| \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \right\| \right) + 1.5 \quad (48)$$

که با توجه به ویژگی (۵) مربوط به تابع $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}})$ ، می‌توان نوشت:

$$k_{\omega_i} > h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \quad (49)$$

که تابع $h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) > 0$ برابر است با

$$h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) = 1.5 + \frac{\varepsilon_i \lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)}{4} \left(3 + 4 \left\| \bar{\mathbf{e}}_{q_i} \right\| + 3 \left\| \bar{\mathbf{e}}_{q_i} \right\|^2 \right) \quad (50)$$

ثانیاً

$$(\Xi_I \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_I + \mathbf{L}_I^T \mathbf{K}_{q_i} \Xi_I) - \Xi_I^2 - 4(\dot{\mathbf{K}}_{q_i} + \Xi_I \dot{\mathbf{K}}_{ol}) \quad (51)$$

$$-2\mathbf{I}_{3N} - \mathbf{T}_I(2,1)\mathbf{T}_I^{-1}(1,1)\mathbf{T}_I(1,2) > 0$$

حال اگر هر دو قانون به‌روزرسانی ضرایب کنترلی در رابطه زیر برقرار باشد، نامساوی فوق برقرار خواهد بود.

$$i) \quad 4\dot{\mathbf{K}}_{q_i} < (\Xi_I \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_I + \mathbf{L}_I^T \mathbf{K}_{q_i} \Xi_I) - \Xi_I^2 - 2\mathbf{I}_{3N} \quad (52)$$

$$ii) \quad 4\Xi_I \dot{\mathbf{K}}_{ol} \leq -\mathbf{T}_I(2,1)\mathbf{T}_I^{-1}(1,1)\mathbf{T}_I(1,2)$$

بدون آنکه به جامعیت مساله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که

$$\dot{\mathbf{K}}_{q_i} = 0$$

همچنین با توجه به فرض متصل بودن گراف می‌توان گفت که

$$\lambda_{\min}(\mathbf{L}_I) > 1 \quad (i) \text{ را می‌توان این گونه نوشت:}$$

$$\Xi_I \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_I + \mathbf{L}_I^T \mathbf{K}_{q_i} \Xi_I > \Xi_I^2 \mathbf{I}_{3N} + 2\mathbf{I}_{3N} \quad (53)$$

با فرض $\forall i \in N; \varepsilon_i = \varepsilon < \frac{2}{\sqrt{\Delta}}$ و $\forall i \in N; k_{q_i} = k_q$

$$\varepsilon k_q (\mathbf{L}_I + \mathbf{L}_I^T) > (\varepsilon^2 + 2) \mathbf{I}_{3N} \quad (54)$$

$$\Rightarrow k_q > \frac{2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

حال طبق شرط (ii) در رابطه (۵۲) سراغ بدست آوردن شروط لازم برای

k_{ω} می‌رویم.

برای جمله $\bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{T}_d \bar{\mathbf{D}}$ در سمت راست نامساوی (۳۵)، طبق ویژگی ماتریسی

(ض ۱-۳) و با لحاظ $\bar{\mathbf{X}}_2 = \bar{\mathbf{D}}$ و $\bar{\mathbf{X}}_1 = \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{T}_d$ می‌توان گفت

$$\bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{T}_d \bar{\mathbf{D}} \leq \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{T}_d^2 \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}} \quad (37)$$

در نتیجه نامساوی (۳۵) را می‌توان این گونه نوشت:

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) \leq -\bar{\mathbf{E}}^T \left(\mathbf{T}_e - \frac{1}{2} \mathbf{T}_d^2 \right) \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}} \quad (38)$$

که با تعریف $\mathbf{T}_{ed} = \mathbf{T}_e - \frac{1}{2} \mathbf{T}_d^2$ خواهیم داشت:

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) \leq -\bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{T}_{ed} \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}} \quad (39)$$

با توجه به اینکه $\mathbf{T}_{ed}$ مانند هر ماتریس دیگری از دو بخش متقارن و

پادمتقارن (Skew-symmetric) تشکیل شده است:

$$\mathbf{T}_{ed} = \left(\frac{\mathbf{T}_{ed} + \mathbf{T}_{ed}^T}{2} \right) + \left(\frac{\mathbf{T}_{ed} - \mathbf{T}_{ed}^T}{2} \right) \quad (40)$$

لذا نامساوی (۳۹) با توجه به ویژگی ماتریسی (ض ۱-۲) به فرم زیر در می‌آید:

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) \leq -\bar{\mathbf{E}}^T \left(\frac{\mathbf{T}_{ed} + \mathbf{T}_{ed}^T}{2} \right) \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}} \quad (41)$$

که با تعریف $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{T}_{ed} + \mathbf{T}_{ed}^T}{2}$ به نتیجه زیر می‌انجامد؛

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) \leq -\left\| \bar{\mathbf{E}} \right\|^2 \lambda_{\min}(\mathbf{T}) + \frac{1}{2} \left\| \bar{\mathbf{D}} \right\|^2 \quad (42)$$

که مولفه‌های ماتریس $\mathbf{T}$ برابرند با

$$\mathbf{T}(1,1) = \frac{1}{2} \left(2\mathbf{K}_{ol} - (\Xi_I \mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M \Xi_I) - \mathbf{I}_{3N} \right)$$

$$\mathbf{T}(1,2) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{J}_M \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) \Xi_I - 4\mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_I \right) = \mathbf{T}(2,1)^T \quad (43)$$

$$\mathbf{T}(2,2) = \frac{1}{2} \left((\Xi_I \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_I + \mathbf{L}_I^T \mathbf{K}_{q_i} \Xi_I) - \Xi_I^2 \mathbf{I}_{3N} - 4(\dot{\mathbf{K}}_{q_i} + \Xi_I \dot{\mathbf{K}}_{ol}) \right)$$

اکنون بایستی ضرایب k_{q_i} و k_{ω_i} را طوری بدست آورد که شرط $0 < \mathbf{T}$

برآورده گردد. همچنین می‌توان ضرایب کنترلی را طوری طراحی کرد که

$\mathbf{I}_{6N} < \mathbf{T}$ یا به عبارت دیگر

$$\mathbf{T} - \mathbf{I}_{6N} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(1,1) - \mathbf{I}_{3N} & \mathbf{T}(1,2) \\ \mathbf{T}(2,1) & \mathbf{T}(2,2) - \mathbf{I}_{3N} \end{bmatrix} > 0 \quad (44)$$

تا بتوان به نتیجه $\lambda_{\min}(\mathbf{T}) > 1$ دست یافت. این نتیجه در بخش پایانی اثبات

و هنگامی که باند همگرایی $\bar{\mathbf{E}}$ تعیین می‌شود، اثر مفید خود را نشان خواهد

داد. حال برای استخراج ضرایب کنترل و با استفاده از قضیه شور (ضمیمه

۴) بایستی اولاً

نکته ۲: کنترل کننده پیشنهادی تضمین می نماید که خطاهای دنباله روی تمامی ماهواره ها ($\bar{\mathbf{E}}(t)$) در آرایش پرواز در یک باند همگرایی طبق رابطه (۶۱) قرار می گیرد و در نتیجه طبق رابطه (۱۵)، خطای همزمان سازی ($\bar{\mathbf{E}}(t)$) نیز در یک باند کران دار قرار خواهد گرفت:

$$\|\bar{\mathbf{E}}(t)\| \leq \|\mathbf{L}\| \|\bar{\mathbf{E}}(t)\| \quad (62)$$

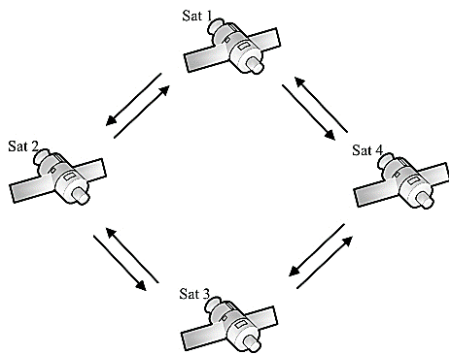
که با توجه به (۶۱) و مقارن بودن ماتریس لاپلاسن $\mathbf{L}$ ، می توان باند همگرایی خطای همزمان سازی را نیز بدست آورد:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{E}}(t)\| \leq m \lambda_{\max}(\mathbf{L}) \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_{a_i} + (2N_i + 1)k_{q_i})^2} \quad (63)$$

لذا می توان گفت که کنترل کننده پیشنهادی، تضمین می کند که بردار خطای همزمان سازی وضعیت بین ماهواره ها نیز UUB باشد.

۴- شبیه سازی

در این بخش عملکرد روش کنترلی ارائه شده با استفاده از شبیه سازی برای یک SFF متشکل از چهار ماهواره در یک مدار دایروی با ارتفاع 400 km ارتفاع پایین یا LEO (Low Earth Orbit) ارزیابی می شود.



شکل ۱: ساختار آرایش پرواز شبیه سازی

شکل ۲: ساختار آرایش پرواز شبیه سازی

ماتریس های لختی دورانی ماهواره ها عبارتند

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 60 & 0 & -8 \\ 0 & 60 & 0 \\ -8 & 0 & 120 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2 \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 90 & 10 & 0 \\ 10 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2 \quad (64)$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 110 & -15 \\ 0 & -15 & 120 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2 \quad \mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 10 \\ 0 & 60 & 0 \\ 10 & 0 & 90 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2$$

که ماتریس لاپلاسن آن به فرم زیر خواهد بود:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

با توجه به اینکه زوایای اوایل فهم بهتری از بیان وضعیت و دقت نشانه روی برای اکثر ماموریت های ماهواره ای فراهم می کند، واریانس خطای اندازه گیری در بیان زوایای اوایل را به بیان MRP تبدیل می کنیم تا بتوان اثر آن را در کنترل کننده پیشنهادی مشاهده کرد. برای این منظور، در ابتدا

$$4\varepsilon \dot{\mathbf{K}}_{oi} \leq -\frac{1}{4} (\mathbf{J}_M \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}_o) \bar{\mathbf{E}}_i - 4\mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_i)^T \left(2\mathbf{K}_{oi} - \varepsilon (\mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M) - 3\mathbf{I}_{3N} \right)^{-1} \quad (55)$$

$$(\mathbf{J}_M \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}) \bar{\mathbf{E}}_i - 4\mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{K}_{q_i} \mathbf{L}_i)$$

که بین هر سطر، عملگر ضرب ماتریسی برقرار است. می توان پس از بسط نامساوی فوق طبق روابط تفصیلی در ضمیمه ۵، نامساوی زیر را بدست آورد که

$$\dot{k}_{a_i} \leq -\frac{1}{16\varepsilon} \left(\frac{\left(\varepsilon \lambda_{\max}(\mathbf{J}_i) \|\bar{\mathbf{e}}_{a_i}\| + (3+2\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|+3\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2) \right)^2 + k_{q_i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{2(k_{a_i} - h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}))} + \left(\varepsilon \lambda_{\max}(\mathbf{J}_i) \|\bar{\mathbf{e}}_{a_i}\| + (3+2\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|+3\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2) \right)^2 + \frac{k_{q_i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{4(k_{a_i} - h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}))^2} \right) \quad (56)$$

لذا قانون به روزرسانی ضریب k_{wi} با توجه به رابطه فوق و با تعریف

$$r(\bar{\mathbf{E}}_i) = r(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}, \bar{\mathbf{e}}_{a_i}) = \left(\varepsilon \lambda_{\max}(\mathbf{J}_i) \|\bar{\mathbf{e}}_{a_i}\| + (3+2\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|+3\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2) \right)^2 \quad (57)$$

طبق رابطه زیر خواهد بود:

$$\dot{k}_{a_i} = \begin{cases} -\frac{1}{16\varepsilon} \left(\frac{r(\bar{\mathbf{E}}_i) + k_{q_i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{2(k_{a_i} - h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}))} + r(\bar{\mathbf{E}}_i) + \frac{k_{q_i}^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{4(k_{a_i} - h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}))^2} \right), & k_{a_i} > h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (58)$$

حال با استخراج قوانین مربوط به ضرایب کنترلی k_{wi} و k_{qi} در روابط (۵۴) و (۵۸) می توان تضمین نمود که $\lambda_{\min}(\mathbf{T}) > 1$ (یا به بیان دیگر $I_{6N} < \mathbf{T}$) که با این نتیجه و با توجه به رابطه (۴۲) ناحیه همگرایی برای بردار خطاهای دنباله روی برابر خواهد بود با

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) < 0 \Rightarrow \|\bar{\mathbf{E}}\|^2 > \frac{1}{2\lambda_{\min}(\mathbf{T})} \|\bar{\mathbf{D}}\|^2 \quad (59)$$

که با توجه به اندازه بردار $\bar{\mathbf{D}}$:

$$\|\bar{\mathbf{D}}\|^2 = \sum_{i=1}^N \|\bar{\mathbf{d}}_i\|^2 = m^2 \sum_{i=1}^N (k_{a_i} + (2N_i + 1)k_{q_i})^2 \quad (60)$$

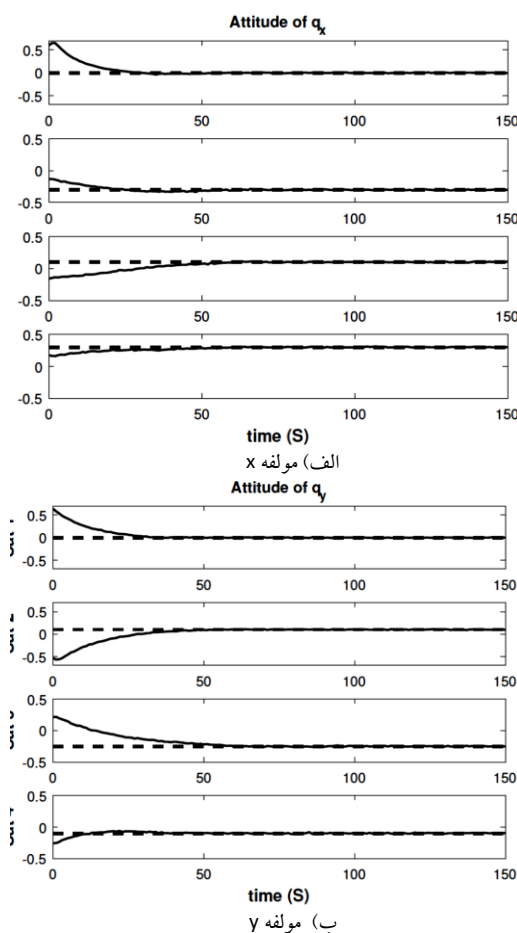
و همچنین نتیجه ی $\lambda_{\min}(\mathbf{T}) > 1$ خواهیم داشت:

$$\|\bar{\mathbf{E}}\| > m \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_{a_i} + (2N_i + 1)k_{q_i})^2} \quad (61)$$

نتیجه فوق بیان می دارد که بر اساس تحلیل لیاپانوف، مادامی که خطای دنباله روی از کران بدست آمده در رابطه فوق فراتر رود، کنترل کننده آن را در نهایت ($t \rightarrow \infty$) زیر کران مذکور قرار خواهد داد.

نکته ۱: با توجه به اینکه مقادیر واقعی $\bar{\mathbf{e}}_o$ و $\bar{\mathbf{e}}_q$ در دسترس نیستند، لذا برای محاسبه k_{wi} طبق (۵۸) می توان از جایگزینی $\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^m\| + m$ و $\|\bar{\mathbf{e}}_{a_i}^m\| + m$ استفاده نمود که منظور از $\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^m\|$ و $\|\bar{\mathbf{e}}_{a_i}^m\|$ مقادیر اندازه گیری شده متغیرهای حالت جهت و سرعت زاویه ای حاصل از حسگرهاست.

مانور، طبق شکل‌های (۴) و (۵) تقریباً در زمانی کمتر از ۷۵ ثانیه عملیات نشانه‌روی تمامی ماهواره‌ها اتفاق می‌افتد که با توجه به کند بودن ذاتی دینامیک ماهواره زمان قابل قبولی است. به‌طور کلی، با توجه به پیش‌بینی بازه‌ی زمانی مانور، می‌توان فرمان نشانه‌روی برای ماهواره‌های مستقر در مدار LEO را قبل از رسیدن به موقعیت مداری مورد نظر، ارسال کرد. همچنین بهره‌های کنترلی و سیگنال کنترلی در شکل ۵ نمایش داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود و قابل انتظار است در طی زمان و به دلیل عملکرد مناسب کنترل‌کننده، مقادیر نهایی بهره کنترلی k_{wi} روند کاهشی دارند. در پایان، برای روشن‌تر شدن هر چه بیشتر اهمیت الگوریتم ارائه شده، آرایش پرواز حاضر با یک کنترل‌کننده موجود در مقالات که خطای اندازه‌گیری را لحاظ نکرده است، شبیه‌سازی می‌شود. طبق روش کنترل [۳۵] که بر اساس فیدبک حالت PD است، سیگنال کنترلی آن با لحاظ $k_{qi}=50$ و $k_{wi}=600$ به آرایش پرواز اعمال می‌شود. همان‌طور که در شکل‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود، خطاهای دنباله‌روی جهت نه تنها واگرا شده بلکه با یکدیگر نیز همزمان نشده‌اند. اگرچه سرعت زاویه‌ای به صفر همگرا می‌شود ولی در مقایسه با روش حاضر در شکل ۵، در بازه‌ی زمانی طولانی‌تری این اتفاق روی می‌دهد.

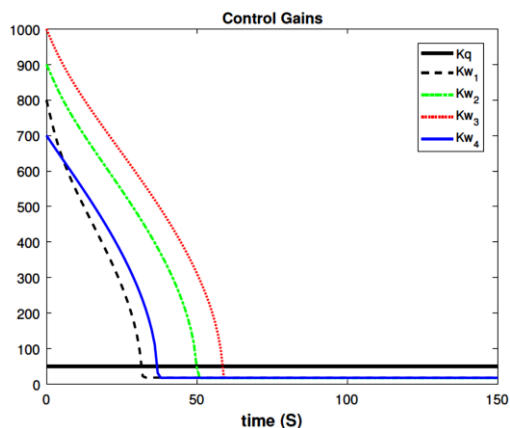


یک بردار دلخواه سه مولفه‌ای (غلش یا Roll، خمش یا Pitch، گردش یا Yaw) که هر مولفه‌ی آن یک سیگنال متغیر با زمان است تولید می‌شود. سپس، یک بردار تصادفی سه مولفه‌ای که هر مولفه‌ی آن با توزیع نرمال و میانگین صفر و واریانس خطای اندازه‌گیری ساخته شده است، به بردار اول اضافه می‌شود تا یک بردار آمیخته با خطا بدست آید. سپس، بردار اول و بردار خطاآلود را از فضای زوایای اوپلر به فضای MRP تبدیل می‌کنیم. از تفاضل دو بردار حاصل در MRP نسبت به یکدیگر، برداری تصادفی حاصل می‌شود که میانگین توزیع آن صفر و واریانس آن، خطای اندازه‌گیری در بیان MRP است. برای نمونه، برخی از حسگرهای مغناطیسی دقت وضعیتی در حدود یک درجه به عنوان $1-\sigma$ را در اختیار قرار می‌دهند [۴۱]. با استفاده از روش مذکور، خطا در بیان MRP در حدود 0.005 بدست می‌آید. خطای اندازه‌گیری حسگر سرعت زاویه‌ای نیز برابر 0.1 درجه بر ثانیه لحاظ می‌شود. تمامی چهار ماهواره خطای اندازه‌گیری مشابهی در حسگرهای خود را دارند.

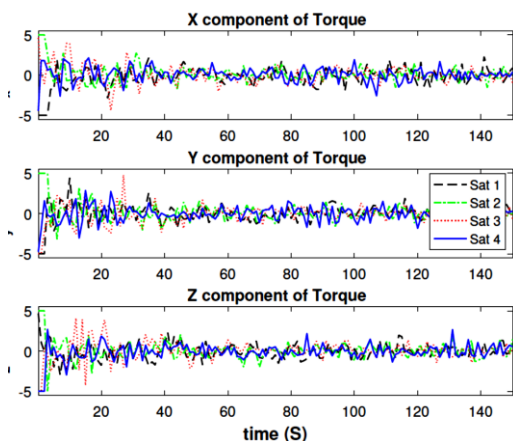
شرایط اولیه بردارهای جهت $(\bar{q}_0)$ به ترتیب عبارتند از $[0.6 \ 0.63 \ -0.6]^T$ ، $[-0.13 \ -0.54 \ -0.02]^T$ ، $[-0.16 \ 0.21 \ -0.02]^T$ و $[0.17 \ -0.27 \ -0.07]^T$. بعلاوه تاثیر اغتشاش محیطی در شبیه‌سازی لحاظ خواهد شد. مهمترین اغتشاشات محیطی عبارتند از آیرودینامیک، مغناطیسی، گرانشی و تشعشعی که با توجه به فرض مدار LEO، مجموعاً در حدود 0.0001 نیوتن متر بزرگی خواهند داشت [۴۱]. همچنین برای واقعی‌تر کردن شبیه‌سازی، اشباع عملگرها نیز لحاظ می‌شوند به این ترتیب که برای هر محور، بیشینه پنج نیوتن متر گشتاور قابل اعمال است. حال می‌توان ضرایب کنترلی را طبق زیر محاسبه نمود:

- k_{qi} : با توجه به ماتریس‌های لختی دورانی، بزرگ‌ترین مقدار ویژه متعلق است به I_1 که می‌توان بهره k_q را طبق رابطه (۵۴) برابر ۵۰ برای تمامی ماهواره‌ها در نظر گرفت.
- k_{wi} : این ضرایب با استفاده از رابطه (۵۸) به‌روز می‌شوند. با توجه به وابستگی ضرایب مذکور به خطای دنباله‌روی، انتظار می‌رود در صورت عملکرد مناسب کنترل‌کننده، مقادیر نهایی آنها کمتر از مقادیر اولیه باشد.

همان‌طور که در شکل ۳ قابل مشاهده است مولفه‌های بردار MRP به مقادیر مطلوب خود که به ترتیب برای هر ماهواره برابراند با $[0 \ 0 \ 0]^T$ ، $[-0.3 \ 0.1 \ 0.25]^T$ ، $[0.1 \ -0.25 \ -0.5]^T$ و $[0.3 \ -0.1 \ -0.1]^T$ میل می‌کنند. همچنین با توجه به اینکه ماموریت آرایش پرواز، مشاهده زمین است لذا بایستی بردار مطلوب برای سرعت زاویه‌ای در تمامی ماهواره‌ها برابر $[0 \ 0 \ 0]^T$ باشد. در **Error! Reference source not found.** مولفه‌های بردارهای خطای دنباله‌روی جهت $(\bar{q}_e)$ نشان داده شده‌اند. همچنین مولفه‌های بردار خطای دنباله‌روی سرعت زاویه‌ای $(\dot{\bar{q}}_e)$ در شکل ۴ ارائه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود خطاهای دنباله‌روی از حالات اولیه متفاوت به یک باند حول صفر رسیده‌اند که کران باند مذکور طبق (۶۱) وابستگی کامل به کران خطای اندازه‌گیری حسگرها دارد. از دیدگاه زمان

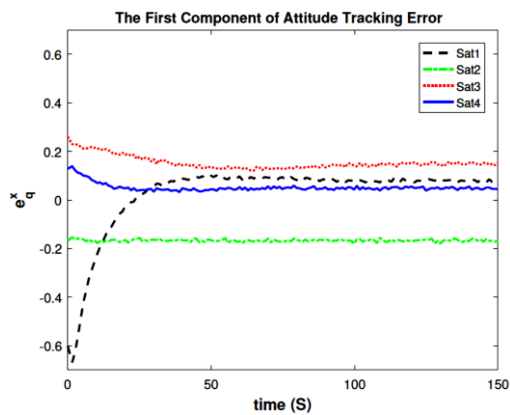


الف) بهره های کنترلی

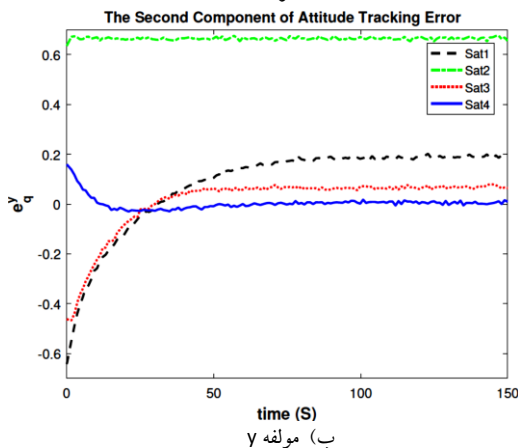


ب) سیگنال کنترلی

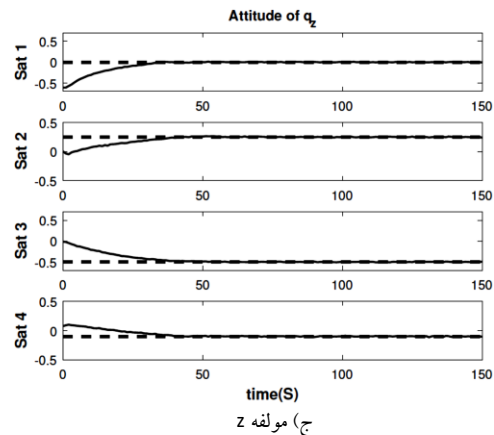
شکل ۵: بهره ها و سیگنال کنترلی



الف) مولفه X

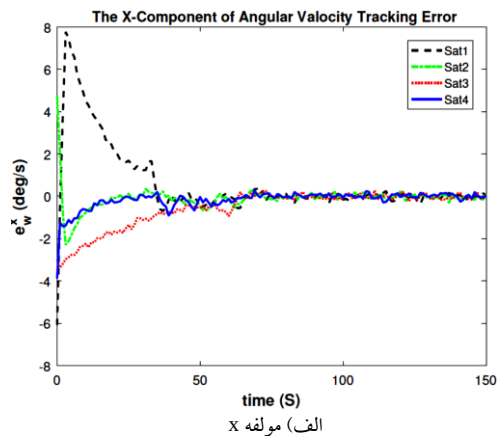


ب) مولفه Y

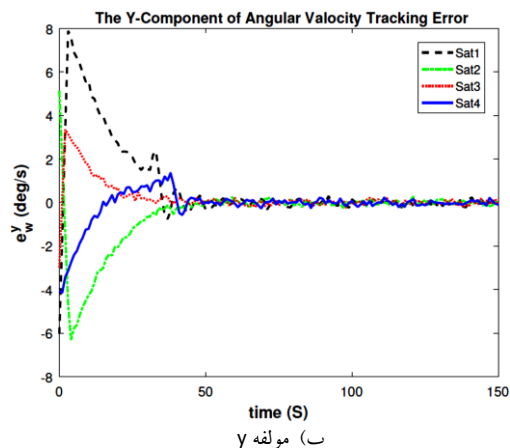


ج) مولفه Z

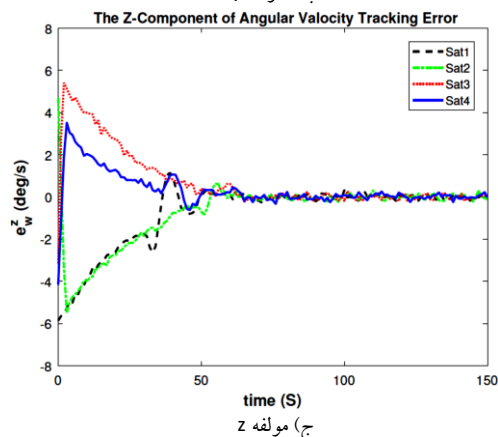
شکل ۳: بردار MRP؛ -- بردار مطلوب - بردار اندازه گیری شده



الف) مولفه X



ب) مولفه Y



ج) مولفه Z

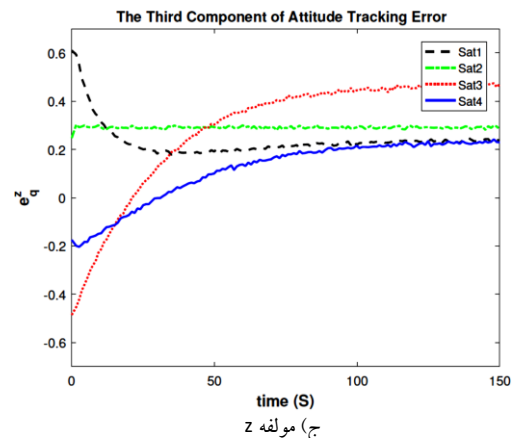
شکل ۴: بردار خطای دنباله روی سرعت زاویه ای

۵- نتیجه گیری

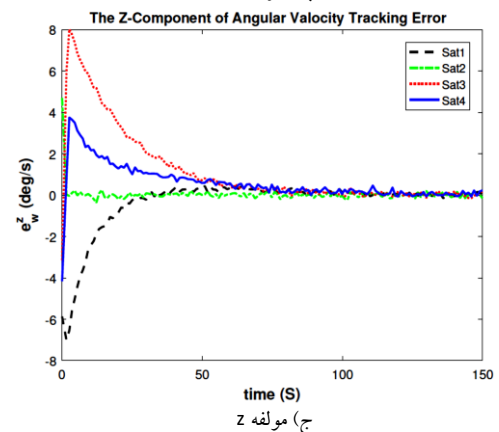
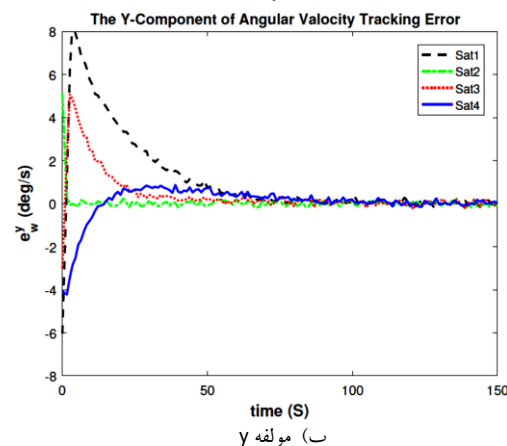
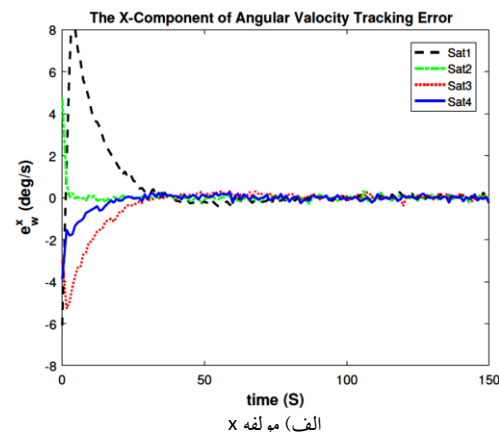
یک روش کنترلی با رویکرد غیرمتمرکز مبتنی بر فیدبک حالت با هدف همزمان سازی وضعیت بین ماهواره های نامشابه در آرایش پرواز ارائه گردید. لحاظ خطای اندازه گیری متغیرهای وضعیت شامل جهت و سرعت زاویه ای مهمترین نقطه چالش برانگیز طراحی کنترلی کننده بود و تضمین شد که خطاهای دنباله روی جهت و سرعت زاویه ای، کراندار نهایی یکنواخت (UUB) خواهند بود. متصل بودن گراف به عنوان مهمترین فرض در گراف ارتباطی لحاظ شد. استخراج ضرایب کنترلی مناسب، اصلی ترین راه کار تعدیل اثر خطای اندازه گیری وضعیت در الگوریتم کنترلی مد نظر قرار گرفت که بر اساس روش لیاپانوف و تضمین شروط پایداری آن توسعه داده شد. به علاوه در الگوریتم ارائه شده، نیازی به مخابره ای بردارهای سرعت زاویه ای بین ماهواره ها بوجود نیامد تا به بار مخابراتی الگوریتم افزوده نگردد. با توجه به نتایج قضیه ارائه شده، تضمین گردید که علاوه بر خطای دنباله روی هر ماهواره، خطای همزمانی وضعیت بین ماهواره ها نیز در یک باند کراندار حول صفر قرار می گیرد. در فاز شبیه سازی برای واقعی تر شدن نتایج حاصله، اشباع عملگرها و اغتشاشات مداری ماهواره ها لحاظ شدند. همچنین، عملکرد الگوریتم ارائه شده با یک الگوریتم موجود در مقالات مقایسه شد تا مزایای روش ارائه شده روشن شود. در راستای کار صورت گرفته در این مقاله، پیشنهاد می گردد که الگوریتم فوق به گونه ای توسعه داده شوند که همزمان سازی وضعیت در حضور عیب حسگرها، عدم قطعیت ماتریس لختی دورانی و تاخیر ارتباطی محقق گردد.

مراجع

- [1] Kroes R. Precise relative positioning of formation flying spacecraft using GPS. TU Delft, Delft University of Technology; 2006.
- [2] Rezaee, Hamed and Abdollahi, Farzaneh and Talebi, Heidar A. H_∞ Based Motion Synchronization in Formation Flight with Delayed Communications. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2014;61(11):6175--6182.
- [3] Rezaee, Hamed and Abdollahi, Farzaneh. Motion synchronization in unmanned aircrafts formation control with communication delays. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2013;18(3):744 - 756.
- [4] Alfriend, Kyle and Vadali, Srinivas Rao and Gurfil, Pini and How, Jonathan and Breger, Louis. Spacecraft formation flying: Dynamics, control and navigation. Butterworth-Heinemann; 2009.
- [5] Hui, Liu and Li, Junfeng. Terminal sliding mode control for spacecraft formation flying. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2009;45(3):835--846.
- [6] Wu, Baolin and Xu, Guangyan and Cao, Xibin. Relative dynamics and control for satellite formation: accommodating J 2 perturbation. Journal of Aerospace Engineering. 2016;29(4):401--411.
- [7] Sandau, Rainer and Roeser, Hans Peter and Valenzuela, Arnoldo and others. Small Satellite Missions for Earth Observation. Springer; 2014.



شکل ۶: بردار خطای دنباله روی جهت با استفاده از کنترل کننده در [۳۵]



شکل ۷: بردار خطای دنباله روی سرعت زاویه ای با استفاده از روش [۳۵]

- [22] Hu, Qinglei and Zhang, Jian and Zhang, Youmin. Velocity-free attitude coordinated tracking control for spacecraft formation flying. *ISA Transactions*. 2018;73(1):54-65.
- [23] Ren W. Distributed cooperative attitude synchronization and tracking for multiple rigid bodies. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2010;18(2):383--392.
- [24] Guo, Yong and Guo, Jin-hua and Li Ai-jun and Wang, Chang-qing. Attitude Coordination Control for Formation Flying Spacecraft Based on the Rotation Matrix. *Journal of Aerospace Engineering*. 2017;30(5):04017051.
- [25] Kang, Wei and Yeh, Hsi Han. Coordinated attitude control of multi-satellite systems. *International Journal of robust and nonlinear control*. 2002;12(2--3):185--205.
- [26] Kristiansen, Raymond and Nicklasson, Per Johan and Gravdahl, Jan Tommy. Quaternion-based backstepping control of relative attitude in a spacecraft formation. In: 45th IEEE Conference on Decision and Control; 2006; San Diego, California.
- [27] Lawton, Jonathan R and Beard, Randal W. Synchronized multiple spacecraft rotations. *Automatica*. 2002;38(8):1359--1364.
- [28] VanDyke, Matthew C and Hall, Christopher D. Decentralized coordinated attitude control within a formation of spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2006;29(5):1101--1109.
- [29] Bai, He and Arcak, Murat and Wen, John T. Leader-follower cooperative attitude control of multiple rigid bodies. *Systems and Control Letters*. 2009;58(6):429--465.
- [30] Ren, Wei and Beard, Randal. Decentralized scheme for spacecraft formation flying via the virtual structure approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2004;27(1):73--82.
- [31] Cong, Bing Long and Liu, Xiang Dong and Chen, Zhen. Distributed attitude synchronization of formation flying via consensus-based virtual structure. *Acta Astronautica*. 2011;68(11):1973--1986.
- [32] Lawton, Jonathan and Beard, Randal W and Hadaegh, Fred Y. Elementary attitude formation maneuvers via leader-following and behavior-based control. In: AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit; 2000; Montreal, Canada.
- [33] Beard, Randal W and Lawton, Jonathan and Hadaegh, Fred Y and others. A coordination architecture for spacecraft formation control. *IEEE Transactions on control systems technology*. 2001;9(6):777--790.
- [34] Mehrabian, Alireza and Khorasani, Khashayar. Distributed and cooperative quaternion-based attitude synchronization and tracking control for a network of heterogeneous spacecraft formation flying mission. *Journal of the Franklin Institute*. 2015;352(9):3885--3913.
- [35] Wang, Xinsheng and Wu, Jingxin and Wang, Xiaoli. Distributed attitude consensus of spacecraft formation flying. *Journal of Systems Engineering and Electronics*. 2013;24(2):296--302.
- [36] Zhao, Lin and Jia, Yingmin. Neural network-based distributed adaptive attitude synchronization control of
- [8] Running, Zhang and Yang, Li and Shengil, Liu. System requirements and mission analysis for spacecraft SAR interferometry based on formation flying satellites. In: 21st international society of photogrammetry and remote sensing (ISPRS) congress; 2008; China.
- [۹] فلاورجانی فک. کنترل همزمان مدار و وضعیت برای آرایش های پروازی دنباله روی. پژوهشگاه هوافضا; ۱۳۸۸.
- [10] Wang, P K C and Hadaegh, F Y and Lau, K. Synchronized formation rotation and attitude control of multiple free-flying spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1999;22(11):28--35.
- [11] Kapila, Vikram and Sparks, Andrew G and Buffington, James M and Yan, Qiguo. Spacecraft formation flying: dynamics and control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2000;23(3):561--564.
- [12] Kang, Wei and Sparks, Andrew. Coordinated attitude and formation control of multisatellite systems. In: AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit; 2002; Monterey, California.
- [13] Chung, Soon Jo and Ahsun, Umair and Slotine, Jean Jacques E. Application of synchronization to formation flying spacecraft: Lagrangian approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2009;32(2):512--526.
- [14] Lee D. Spacecraft coupled tracking maneuver using sliding mode control with input saturation. *Journal of Aerospace Engineering*. 2014;28(5):401--413.
- [15] Shan J. Six-degree-of-freedom synchronised adaptive learning control for spacecraft formation flying. *IET Control Theory & Applications*. 2008;2(10):930--949.
- [16] Beard, Randal W and Lawton, Jonathan and Hadaegh, Fred Y and others. A coordination architecture for spacecraft formation control. *IEEE Transactions on control systems technology*. 2009;9(6):777--790.
- [17] Nazari, Morad and Butcher, Eric A and Yucelen, Tansel and Sanyal, Amit K. Decentralized consensus control of a rigid-body spacecraft formation with communication delay. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2016;39(4):838--851.
- [18] Wang, Danwei and Wu, Baolin and Chung, Eng Kee Poh. *Satellite Formation Flying*. Singapore: Springer; 2017.
- [19] Abdessameud, Abdelkader and Tayebi, Abdelhamid. Attitude synchronization of a group of spacecrafts without velocity measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2009;54(11):2642--2648.
- [20] Kristiansen, Raymond and Lora, Antonio and Chaillet, Antoine and Nicklasson, Per Johan. Spacecraft relative rotation tracking without angular velocity measurements. *Automatica*. 2009;45(3):750--756.
- [21] Bondhus, Anne Karin and Pettersen, Kristin Y and Gravdahl, J Tommy. Leader/follower synchronization of satellite attitude without angular velocity measurements. In: 44th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference; 2005; Seville, Spain.

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^T (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \geq 0 \quad (\text{ض ۱-۳})$$

$$\Rightarrow \bar{X}_1^T \bar{X}_2 \leq \frac{1}{2} \bar{X}_1^T \bar{X}_1 + \frac{1}{2} \bar{X}_2^T \bar{X}_2$$

ضمیمه ۲: لم کاربردی

لم ۱: برای هر ماتریس قطری مثبت D و متقارن مثبت M داریم

$$MDM \leq \lambda_{\max}^2(M) D$$

اثبات: یک تبدیل همانندی متقارن P می توان یافت که

$$D = PJP^T \quad (\text{ض ۲-۱})$$

که J فرم ماتریس قطری D است. D متقارن است لذا $P^{-1} = P^T$. حال می توان یک ماتریس متقارن S را یافت به طوری که

$$S = J^{\frac{1}{2}} P^T M P J^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{ض ۲-۲})$$

از آنجا که $PJ^{-\frac{1}{2}}$ می تواند به عنوان یک تبدیل همانندی متقارن باشد، می توان نتیجه گرفت که

$$\lambda_{\max}(S) = \lambda_{\max}(M) \quad (\text{ض ۲-۳})$$

که با توجه به تقارن هر دو ماتریس S و M خواهیم داشت که

$$\|S\| = \|M\| \quad (\text{ض ۲-۴})$$

بنابراین

$$\lambda_{\max}(S^T S) = \|M\|^2 \quad (\text{ض ۲-۵})$$

یا به عبارت دیگر

$$S^T S - \|M\|^2 I \leq 0 \quad (\text{ض ۲-۶})$$

حال با توجه به (ض ۲-۵) خواهیم داشت

$$J^{\frac{1}{2}} P^T M P J^{-\frac{1}{2}} - \|M\|^2 I \leq 0 \quad (\text{ض ۲-۷})$$

با ضرب ماتریس مثبت معین $J^{\frac{1}{2}}$ از چپ و راست و همچنین (ض ۲-۴) می توان نتیجه گرفت که

$$P^T M D M P - \|M\|^2 J \leq 0 \quad (\text{ض ۲-۸})$$

با توجه به اینکه ماتریس تبدیل همانندی، مقادیر ویژه را تغییر نمی دهد خواهیم داشت

$$MDM - \|M\|^2 PJP^T \leq 0 \quad (\text{ض ۲-۹})$$

به بیان دیگر

spacecraft formation under modified fast terminal sliding mode. Neurocomputing. 2016;171(1):230 - 241.

[37] Qinglei Hu and Jian Zhang. Relative position finite-time coordinated tracking control of spacecraft formation without velocity measurements. ISA Transactions. 2015;54(1):60--74.

[38] Song, Yong Duan and Cai, Wen Chuan. New intermediate quaternion-based control of spacecraft: part I—almost global attitude tracking. International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 2012;8(10):7307--7319.

[39] Xiao, Bing and Hu, Qinglei and Wang, Danwei. Spacecraft attitude fault tolerant control with terminal sliding-mode observer. Journal of Aerospace Engineering. 2013; 28:401--405.

[40] Schaub H., Junkins J. L. Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: A generalization of the rodrigues parameters. Journal of the Astronautical Sciences. 1996;44(1):1--19.

[41] Wertz J. R., Everett D. F., Puschell J. J. Space mission engineering: the new SMAD. Microcosm Press; 2011.

[42] N C. Output Synchronization on Strongly Connected Graphs. IEEE Transactions on Automatic Control. 2012;57(11).

[43] D S. Position synchronization of multiple motion axes with adaptive coupling control. Automatica. 2003;39(6).

[44] Castrup, Suzanne and Castrup, Howard T. Measurement uncertainty analysis principles and methods. NASA Measurement Quality Assurance Handbook -- Annex 3; 2010.

[45] Boyd, Stephen P and ElGhaoui, Laurent and Feron, Eric and Balakrishnan, Venkataramanan. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM; 1994.

[46] Wang X, Zhao K, You Z. Coordinated motion control of distributed spacecraft with relative state estimation. Journal of Aerospace Engineering. 2015;29(3).

[47] Zhang F. The Schur complement and its applications. Springer Science & Business Media; 2006.

ضمائم

ضمیمه ۱: ابزارهایی از جبر ماتریسی

با توجه به اینکه در این مقاله، از نرم ماتریسی استفاده شده است لذا به برخی از ویژگی های مفید آن در اینجا اشاره می شود. در صورتی که فرض کنیم A و B ماتریس های $n \times n$ بوده و λ_i نمایانگر مقادیر ویژه است، آنگاه روابط زیر برای نرم های آنها برقرار است [۴۵]

$$1) \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$2) \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (\text{ض ۱-۱})$$

$$3) A \text{ is symmetric; } \|A\| = \max_i |\lambda_i|$$

همچنین برای هر دو بردار دلخواه $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ داریم:

$$A \text{ is skew symmetric; } \bar{X}_1^T A \bar{X}_1 = 0 \quad (\text{ض ۱-۲})$$

و

$$\text{MDM} \leq \|M\|^2 D \quad (\text{ض ۲-۱۰})$$

■ پایان اثبات لم

ضمیمه ۳: تئوری گراف به عنوان چارچوب یک سیستم آرایش پرواز ماهواره

با استفاده از گراف، می توان ارتباطات بین ماهواره های در آرایش پرواز را مدل کرد. یک گراف G متشکل از N عامل با گره ها یا Nodes و مسیرهای یا Edges خود تبیین می شود. مجموعه گره ها را با $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ و مجموعه مسیرها را با $E \subseteq V \times V$ نمایش می دهند. بیانگر مسیرهای ارتباطی بین عامل ها در یک رویکرد غیر جهت دار یا Undirected است. برای هر گراف، یک ماتریس متقارن همسایگی $A = [a_{ij}]_{N \times N}$ تعریف می شود که $a_{ij} = 1$ در صورت وجود ارتباط از عامل i به j و $a_{ij} = 0$ در غیر این صورت. بر همین اساس، ماتریس لاپلاسیان $L = [l_{ij}]_{N \times N}$ که یک ماتریس متقارن مثبت نیمه معین است تعریف می شود که

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{i \in N_i} a_{ij} & i = j \\ -a_{ij} & i \neq j \end{cases} \quad (\text{ض ۳-۱})$$

که منظور از N_i همسایه های عامل i است. واضح است که مجموع درایه های سطری ماتریس لاپلاسیان برابر صفر است لذا همواره یکی از مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان برابر صفر خواهد بود [۴۶].

ضمیمه ۴: متمم شور (Schur Complement)

برای هر ماتریس متقارن بلوکی $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$ خواهیم داشت [۴۷]:

- اگر A معکوس پذیر باشد: $M > 0$ اگر و فقط اگر $A > 0$ و $C - B^T A^{-1} B > 0$
- اگر C معکوس پذیر باشد: $M > 0$ اگر و فقط اگر $C > 0$ و $A - B C^{-1} B^T > 0$

ضمیمه ۵: بخش هایی از اثبات قضیه ۱

با توجه به نامساوی بدست آمده در رابطه (۵۵)، می توان سمت راست آن را این گونه نوشت

$$-16\varepsilon \dot{K}_{ol} \geq (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q) + k_q L_I)^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q) + k_q L_I) \quad (\text{ض ۵-۱})$$

با فرض $\dot{K}_{ol} \leq 0$ و با توجه به قطری بودن $\dot{K}_{ol}$ سعی می کنیم بخش های قطری طرف راست نامساوی را تفکیک کنیم لذا

$$\begin{aligned} -16\varepsilon \dot{K}_{ol} &\geq (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q)) \\ &+ (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} k_q L_I \\ &+ (k_q L_I)^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q)) \\ &+ (k_q L_I)^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} (k_q L_I) \end{aligned} \quad (\text{ض ۵-۲})$$

جمله اول که بلوکی قطری است. برای جملات دوم و سوم با توجه به ویژگی ماتریسی (ض ۱-۳) و با لحاظ $\bar{X}_1 = (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))$ و همچنین $\bar{X}_2 = (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} (k_q L_I)$ متقارن بودن $(2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1}$ می توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} &(\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} k_q L_I \\ &\leq \frac{1}{2} (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))^T (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q)) \\ &+ \frac{1}{2} (k_q L_I)^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-2} (k_q L_I) \end{aligned} \quad (\text{ض ۵-۳})$$

لذا نامساوی (ض ۵-۲) را می توان این گونه نوشت

$$\begin{aligned} -16\varepsilon \dot{K}_{ol} &\geq (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q)) \\ &+ (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))^T + \frac{1}{2} (k_q L_I)^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-2} (k_q L_I) \\ &+ \frac{1}{2} (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q)) (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))^T \\ &+ \frac{1}{2} (k_q L_I)^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-2} (k_q L_I) \\ &+ (k_q L_I)^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} (k_q L_I) \end{aligned} \quad (\text{ض ۵-۴})$$

یا به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} -16\varepsilon \dot{K}_{ol} &\geq (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q)) \\ &- \frac{1}{2} (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))^T (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q)) \\ &- \frac{1}{2} (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q)) (\varepsilon J_M S_M (\bar{E}_\omega) - 4G_M (\bar{E}_q))^T \\ &+ \frac{1}{2} (k_q L_I)^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-2} (k_q L_I) \\ &+ \frac{1}{2} (k_q L_I)^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-2} (k_q L_I) \\ &+ (k_q L_I)^T (2K_{ol} - \varepsilon (J_M G_M (\bar{E}_q) + G_M^T (\bar{E}_q) J_M) - 3I_{3N})^{-1} (k_q L_I) \end{aligned} \quad (\text{ض ۵-۵})$$

اکنون طرف چپ نامساوی یک مجموعه بلوکی قطری است که می توان شرط هر بلوک مربوط به هر عامل را از آن استخراج نمود. حال با استفاده از لم ۱ (ضمیمه ۲)، سمت راست نامساوی فوق قطری خواهد شد:

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} (k_q \mathbf{L}_l)^T \left(2\mathbf{K}_{\text{est}} - \varepsilon (\mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M) - 3\mathbf{I}_{3N} \right)^{-2} (k_q \mathbf{L}_l) \\
& + \frac{1}{2} (k_q \mathbf{L}_l)^T \left(2\mathbf{K}_{\text{est}} - \varepsilon (\mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M) - 3\mathbf{I}_{3N} \right)^{-2} (k_q \mathbf{L}_l) \\
& + (k_q \mathbf{L}_l)^T \left(2\mathbf{K}_{\text{est}} - \varepsilon (\mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M) - 3\mathbf{I}_{3N} \right)^{-1} (k_q \mathbf{L}_l) \quad (\text{ض ۵-۶}) \\
& \leq \\
& k_q^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L}) \left(2\mathbf{K}_{\text{est}} - \varepsilon (\mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M) - 3\mathbf{I}_{3N} \right)^{-2} \\
& + k_q^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L}) \left(2\mathbf{K}_{\text{est}} - \varepsilon (\mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M) - 3\mathbf{I}_{3N} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

حال می توان نامساوی (ض ۵-۵) را می توان این گونه نوشت

$$\begin{aligned}
& -16\varepsilon \dot{\mathbf{K}}_{\text{est}} - \left(\varepsilon \mathbf{J}_M \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) - 4\mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) \right)^T \\
& \left(2\mathbf{K}_{\text{est}} - \varepsilon (\mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M) - 3\mathbf{I}_{3N} \right)^{-1} \\
& \left(\varepsilon \mathbf{J}_M \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) - 4\mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) \right) - \frac{1}{2} \left(\varepsilon \mathbf{J}_M \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) - 4\mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) \right)^T \\
& \left(\varepsilon \mathbf{J}_M \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) - 4\mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) \right) - \frac{1}{2} \left(\varepsilon \mathbf{J}_M \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) - 4\mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) \right) \quad (\text{ض ۵-۷}) \\
& \left(\varepsilon \mathbf{J}_M \mathbf{S}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) - 4\mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) \right)^T \\
& \geq \\
& k_q^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L}) \left(2\mathbf{K}_{\text{est}} - \varepsilon (\mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M) - 3\mathbf{I}_{3N} \right)^{-2} \\
& + k_q^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L}) \left(2\mathbf{K}_{\text{est}} - \varepsilon (\mathbf{J}_M \mathbf{G}_M (\bar{\mathbf{E}}_q) + \mathbf{G}_M^T (\bar{\mathbf{E}}_q) \mathbf{J}_M) - 3\mathbf{I}_{3N} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

حال با توجه به اینکه دو طرف نامساوی فوق قطری هستند، لذا می توان

شرط زیر را برای هر بلوک استخراج کرد

$$\begin{aligned}
& -16\varepsilon \dot{k}_{\text{est}} \geq \frac{\left\| \varepsilon \mathbf{J}_i \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) - 4\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \right\|^2}{\left\| 2k_{\text{est}} \mathbf{I}_3 - \varepsilon (\mathbf{J}_i \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) + \mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \mathbf{J}_i) - 3\mathbf{I}_3 \right\|} \\
& + \left\| \varepsilon \mathbf{J}_i \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) - 4\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \right\|^2 \\
& + \frac{k_q^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{\left\| 2k_{\text{est}} \mathbf{I}_3 - \varepsilon (\mathbf{J}_i \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) + \mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \mathbf{J}_i) - 3\mathbf{I}_3 \right\|^2} \quad (\text{ض ۵-۸}) \\
& + \frac{k_q^2 \lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{\left\| 2k_{\text{est}} \mathbf{I}_3 - \varepsilon (\mathbf{J}_i \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) + \mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \mathbf{J}_i) - 3\mathbf{I}_3 \right\|}
\end{aligned}$$