مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۶، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۱، صفحه ۷۶-۶۵

ارائه یک روش جدید برای آنالیز مقاومت پاسخ بازیهای با مقادیر سود تقریبی

گلاره ویسی[۱]، رجب اصغریان قنادیزدی[۲]

[۱] دانشجوی دکترای کنترل، گروه برق، دانشگاه فردوسی، gveisi@gmail.com

[۲] استاد، دانشکدهٔ مهندسی، گروه برق، دانشگاه فردوسی، rajab.asgharian@gmail.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۳/۷، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۶/۱۵)

چکیده: معمولاً هنگام استفاده از تئوری بازیها برای حل مسائل تصمیم‌گیری دنیای واقعی، مقادیر سود بازیها با تقریب و عدم قطعیت همراه هستند. اما بررسی مراجع نشان می‌دهد که تا کنون کار چندانی در زمینه آنالیز مقاومت پاسخ بازیهای با سود تقریبی و مشاهده رفتار این پاسخها در حضور عدم قطعیت انجام نشده‌است. در این مقاله دو معیار ساده برای ارزیابی مقاومت نقاط نش ارائه خواهیم داد. با استفاده از این معیارها، می‌توان رفتار نقاط نش یک بازی در حضور عدم‌قطعیت را با هم مقایسه کرده و پاسخهایی را که مقاوم‌تر هستند، انتخاب کرد. هم‌چنین در این مقاله دو روش جدید برای ارزیابی مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته پیشنهاد می‌دهیم. روش اول، یک معیار کمّی برای محاسبه میزان مقاومت نقاط هم‌بسته بوده و روش دوم، معیاری برای مقایسه این پاسخها و رتبه‌بندی آنها به شمار می‌رود. به‌علاوه در این مقاله روشی برای بهبود مقاومت نقاط نش ارائه خواهد شد. روش پیشنهادی، در یک همسایگی حول نقاط نش به دنبال پاسخهای تقریبی با مقاومت بیشترمی گردد. هم‌چنین پیشنهاد می‌دهیم که اگر تصمیم‌گیرنده از میزان مقاومت پاسخهای نش یک بازی راضی نباشد، ممکن است بتواند در مجموعه نقاط هم‌بسته، پاسخهای مقاوم‌تر پیدا کند. به کمک چند مثال عددی، کارایی و اعتبار روشهای پیشنهادی ارزیابی خواهد شد.

کلمات کلیدی: تئوری بازیها، نقطه تعادل نش مقاوم، نقطه تعادل هم‌بسته مقاوم، آنالیز مقاومت، عدم قطعیت مقادیر سود بازیها

A Novel Approach to Robustness Analysis for the Solutions of the Games with Approximate Payoffs

Gelareh Veisi, Rajab Asgharian

Abstract: When using game theory for modeling real- world problems, players' payoffs are usually known approximately. Literature reveals that some authors have modeled the approximate payoffs using stochastic or fuzzy variables and some others have used robust optimization techniques to solve these games. Surprisingly little work has been done on robustness analysis of real- world's games solutions.

In this paper, we propose two simple and practical measures to assess robustness degrees of Nash equilibria. These measures quantitatively show how Nash points behave in the presence of uncertainty and they can be used as refinements of Nash equilibrium. Also we propose two novel approaches to assess robustness degrees of correlated equilibria. One approach is a quantitative way to calculate robustness degrees and the other is a comparative measure to rank correlated equilibria in order of their robustness. We suggest that the decision maker may be able to find more robust solutions in the set of non- Nash correlated equilibria. Moreover, we present a method to improve robustness of Nash points. The improvement algorithm searches for more robust solutions in a neighborhood around a Nash point.We validate our methods with some numerical examples. The examples verify the efficiency of the methods.

Keywords: game theory, robust Nash point, robust correlated equilibrium, robustness analysis, payoff uncertainty

۱- مقدمه

نظریه بازیها تاکنون برای مدلسازی و تصمیم‌گیری در بسیاری از مسائل دنیای واقعی مورد استفاده قرار گرفته است[۱-۳]. اما مشکل اینجاست که در مسائل دنیای واقعی، اغلب به مدلهای بازیهای با اطلاعات ناقص برخورد می‌کنیم. یعنی بازیهایی که در آنها بازیکنان اطلاعات کاملی راجع به اجزای بازی نداشته و یا اطلاعات بازی بین همه بازیکنان مشترک نمی‌باشد. بازیهای با اطلاعات ناقص، فرض اصلی بازیهای کلاسیک را نقض می‌کنند. در نظریه کلاسیک بازیها، فرض بر آن است که بازیکنان، استراتژیهای آنها و مقادیر سودشان کاملاً معلوم بوده و این اطلاعات، در اختیار همه بازیکنان قرار دارد. به همین‌دلیل، هنگام استفاده از تئوری بازیها برای مسائل دنیای واقعی، باید راهکار مناسب و متفاوتی را اتخاذ کرد.

یکی از انواع بازیهای با اطلاعات ناقص، بازیهایی هستند که در آنها بازیکنان از مقادیر سود خود و حریفان مطمئن نمی‌باشند. این بازیها را بازیهای با مقادیر سود تقریبی می‌نامیم. در این بازیها، مقادیر سود بازی با تقریب و عدم قطعیت همراه بوده و این اطلاعات، بین همه بازیکنان مشترک است. یعنی بازیکنان، اطلاعات خصوصی راجع به اجزای بازی ندارند. این عدم قطعیت ممکن است به دلایل مختلف مانند عدم وجود اطلاعات کافی یا صحیح و یا گرد کردن مقادیر پارامترها اتفاق بیفتد. به عنوان مثال، بازی ماتریسی ۲×۲، با مقادیر سود مذکور در جدول ۱ را در نظر بگیرید.

جدول ۱: مقادیر نامی ماتریسهای سود بازی

		بازیکن دوم	
		S_{21}	S_{22}
بازیکن اول	S_{11}	۲،۲	۰،۰
	S_{12}	۰،۰	۰،۰

در جدول فوق، S_{ij} به استراتژی j ام از بازیکن i ام اشاره می‌کند. هم‌چنین در خانه‌های جدول، عدد اول، سود بازیکن اول و عدد دوم، سود بازیکن دوم می‌باشد. این بازی، دو نقطه تعادل نش خالص دارد: X_1^*=[(۱،۰)،(۱،۰)] و X_2^*= [(۰،۱)،(۰،۱)] . حال فرض کنید که مقادیر سود بازی با عدم قطعیت همراه بوده و ممکن است هر مقداری را در یک بازه حول مقادیر نامی مذکور اختیار کنند. این بازه‌ها در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲: بازه‌های ممکن برای مقادیر سود بازی

	S_{21}	S_{22}
S_{11}	[۱ ۳] ، [۱ ۳]	،[−۰.۵ ، ۰.۵] [−۰.۵ ،۰.۵]
S_{12}	[−۰.۵ ،۰.۵] ، [−۰.۵ ،۰.۵]	[−۰.۵ ،۰.۵] ، [−۰.۵ ،۰.۵]

با در نظر گرفتن این بازه‌ها، واضح است که X_1^* ، نقطه تعادل نش تمام تحققهای ممکن بازی محسوب می‌شود. یعنی X_1^* ، نسبت به تغییرات مقادیر سود بازی مقاوم بوده و در حضور عدم قطعیت نیز خواص خود را حفظ می‌کند. اما برخی تغییرات اندک در مقادیر سود بازی، ممکن است، X_2^* را از مجموعه نقاط نش حذف کند. یعنی X_2^* نسبت به تغییرات مقادیر سود بازی بسیار حساس می‌باشد. بنابراین در حضور عدم قطعیت ، انتخاب X_1^* بسیار عاقلانه‌تر خواهد بود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در این مثال به سادگی می‌توان میزان مقاومت پاسخهای بازی را با یکدیگر مقایسه کرده و تصمیم نهایی را انتخاب نمود. اما آنالیز مقاومت پاسخهای همه بازیها به این سادگی نیست. این مثال از مرجع [۴] گرفته شده است. در مقاله مذکور، نویسندگان نتیجه گرفته‌اند که X_1^* می‌تواند هر تغییراتی کوچکتر یا مساوی ۱ را در هر دو جهت حول مقادیر سود نامی تحمل کرده و نقطه نش باقی بماند. هم‌چنین، مطابق تعریف این مرجع، X_2^* یک نقطه تعادل نش مقاوم محسوب نمی‌شود. نویسندگان این مقاله، نقاط تعادل نش مقاوم را به صورت نقاط تعادلی که با تغییر مقادیر سود بازی، ثابت می‌مانند، تعریف می‌کنند. اما با در نظر گرفتن این تعریف، بسیاری از بازیها، نقطه تعادل نش مقاوم ندارند. درچنین شرایطی، به معیاری احتیاج داریم که بتواند مقاومت پاسخهای یک بازی را با یکدیگر مقایسه کرده و از بین نقاط تعادل غیرمقاوم، گزینه‌های قابل اعتمادتر را انتخاب کند. لذا در این مقاله، معیارهایی ساده و کاربردی، برای ارزیابی میزان مقاومت نقاط تعادل نش، بدون پیچیدگی زیاد محاسباتی ارائه خواهد شد. با استفاده از این معیارها می‌توان رفتار نقاط نش یک بازی در حضور عدم‌قطعیت را با هم مقایسه کرده و پاسخهایی را که نسبت به تغییرات مقادیر سود بازی مقاوم‌تر هستند، انتخاب کرد. بنابراین، معیارهای پیشنهادی، راهکاری نیز برای برخورد با مسئله وجود چند نقطه تعادل نش در یک بازی به شمار می‌روند. یعنی به کمک این معیارها، می‌توان یک پاسخ را از بین چند نقطه تعادل نش، انتخاب کرد. هم‌چنین در این مقاله، دو روش جدید برای ارزیابی مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته پیشنهاد می‌دهیم. نقاط تعادل هم‌بسته، همان عقلانیت نقاط نش را داشته و حتی ممکن است در بعضی از مسائل با در نظر گرفتن سود بازیکنان، راهکارهای بهتری را ارائه دهند. اما بررسی مراجع نشان می‌دهد که تا کنون توجه کافی به مفاهیم و کاربردهای نقاط هم‌بسته نشده و به‌ویژه در زمینه مفهوم تعادل هم‌بسته برای بازیهای با مقادیر سود تقریبی، کاری انجام نشده است. در هر یک از معیارها، تعاریف مناسبی را برای نقاط تعادل مقاوم پیشنهاد می‌دهیم. این تعاریف با توجه به نیازهای مسائل دنیای واقعی، ارائه شده و قبلاً در مراجع به آنها پرداخته نشده است. علاوه بر اینها، دو روش نیز برای بهبود مقاومت نقاط نش ارائه خواهد شد. از تمام روشهای پیشنهادی می‌توان به سادگی برای بازیهای با ابعاد بالا نیز استفاده نمود. هم‌چنین از معیارهای ارائه شده در این مقاله می‌توان برای مدلهای تئوری بازیها در مسائل مختلف دنیای واقعی، استفاده کرد. به کمک چند مثال عددی، کارایی و اعتبار روشهای پیشنهادی، ارزیابی خواهد شد.

۲- مروری بر کارهای انجام شده

در این بخش مروری اجمالی بر کارهای انجام گرفته در زمینه بازیهای با اطلاعات ناقص ارائه می‌شود. با بررسی مراجع، انگیزه و جایگاه کار این مقاله نیز مشخص خواهد شد. در سال ۱۹۶۷، هاریزانی[۱] مدلی را برای یک کلاس از بازیهای با اطلاعات ناقص ارائه داد[۷]. در این بازیها که بازیهای بیزین نامیده می‌شوند، بازیکنان اطلاعات کاملی راجع به مقادیر سود و استراتژیهای حریفان خود ندارند. در واقع، هر بازیکن یکسری اطلاعات خصوصی راجع به اجزای بازی دارد. هاریزانی برای بیان این اطلاعات خصوصی، مفهوم "نوع" را برای هر بازیکن مطرح کرد. هر بازیکن، هنگام انتخاب استراتژیش نمی‌داند که با چه "نوعی" از حریفان روبرو خواهد شد، اما اطلاعاتی راجع به توزیع احتمالاتی انواع ممکن بازیکنان در اختیار خواهد داشت [۵،۶].کارهای زیادی در زمینه بازیهای بیزین و ارائه مفاهیم پاسخ برای آنها انجام شده است. در چند مقاله به مفهوم نقطه تعادل بازیهای بیزین در صورت عدم وجود توزیع احتمالاتی، پرداخته شده که نقطه تعادل به وقوع پیوسته[۲] یکی از معروف‌ترین آنها به شمار می‌رود[۷]. اما مشکل اینجاست که شرط وجود این تعادل، بسیار قوی بوده و اکثر بازیهای بیزین چنین پاسخی ندارند. علاوه بر اینها، از حدود سال ۱۹۸۰، کارهای متنوعی برای تعریف نقاط تعادل مقاوم در بازیهای بیزین انجام شده است [۸-۱۱]. به عنوان مثال می‌توان به مقاله‌ای در سال ۱۹۸۸، اشاره کرد[۸]. در این مقاله، نویسندگان عدم قطعیت در مقادیر سود بازی، استراتژیهای بازیکنان و یا اطلاعات خصوصی هر بازیکن را در نظر گرفته و تعاریفی را برای نقطه تعادل نش مقاوم، پیشنهاد دادند. در مدل این مقاله، هر تغییری ممکن است در شرایط نامی یک بازی، شامل مقادیر سود و استراتژیهای بازیکنان، اتفاق بیفتد، ولی احتمال این تغییرات، بسیار کم بوده و به سمت صفر میل می‌کند[۸]. پس از این مقاله، در سال ۱۹۹۰، مفاهیم دیگری برای مقاومت نقطه تعادل در بازیهای بیزین، مورد بررسی قرار گرفت[۹]. در سال ۱۹۹۷ نیز، کاجی و موریس[۳]، تعریف دیگری را برای نقطه تعادل نش مقاوم درمدلهای بازی بیزین ارائه دادند[۱۰]. هم‌چنین در سال ۲۰۰۵، رفتار پاسخ بازیهای با اطلاعات کامل، وقتی شرط مشترک بودن همه اطلاعات بازی حذف شود، مورد مطالعه قرار گرفت[۱۱]. به طور خلاصه، مرور مراجع نشان می‌دهد که تا کنون در مورد آنالیز مقاومت نقاط تعادل بازیهای بیزین، کارهای متفاوتی انجام گرفته است. مراجع مختلف، عدم قطعیت را در مقادیر سود بازی، استراتژیهای بازیکنان و یا باورهای مشترک اولیه آنها در نظر گرفته و تعاریفی را برای نقطه تعادل نش مقاوم در حضور این عدم قطعیتها ارائه داده‌اند. اما با در نظر گرفتن این تعاریف، بسیاری از بازیها، نقطه تعادل نش مقاوم ندارند. در این صورت، به معیاری احتیاج داریم که بتواند مقاومت پاسخهای یک بازی را با یکدیگر مقایسه کرده و از بین نقاط تعادل غیرمقاوم، گزینه‌های قابل اعتمادتر را انتخاب کند. از طرفی در مسائل دنیای واقعی، ممکن است با نوع دیگری از بازیهای با اطلاعات ناقص مواجه شویم که نمی‌توان آنها را به کمک مدلهای بازیهای بیزین توصیف کرد. بازیهای با مقادیر سود تقریبی از جمله این بازیها هستند.

در مدلهای بازیهای با مقادیر سود تقریبی، بازیکنان اطلاعات خصوصی راجع به اجزای بازی نداشته و توزیع احتمالاتی پارامترهای غیر قطعی مسئله را نیز نمی‌دانند. به علاوه در بازیهای با مقادیر سود تقریبی، اغلب احتمال وقوع تمام حالات ممکن یکسان بوده و هیچ‌کدام به سمت صفر میل نمی‌کند. بررسی مراجع نشان می‌دهد که برای حل بازیهای با مقادیر سود تقریبی، بسیاری از مقالات از روشهای مبتنی بر بهینه‌سازی مقاوم، استفاده کرده‌اند[۱۲-۱۷]. به عنوان مثال، هیاشی[۴] این پیشنهاد را مطرح کرد که هر بازیکن، باید به صورت بدبینانه مقادیر ممکن سود خود را در نظر بگیرد [۱۲، ۱۳]. هیاشی، عدم قطعیت سود و استراتژیهای بازیکنان را در نظر گرفته و نقطه تعادل نش بازیهای نامتقارن دونفره را با روش مبتنی بر بهینه‌سازی مقاوم و با در نظر گرفتن بدترین حالت، بدست آورد. در سال ۲۰۰۹، همین روش، برای محاسبه نقاط نش بازیهای چند نفره غیرهمکارانه، تعمیم داده شد[۱۴]. در این مقاله نیز عدم قطعیت در مقادیر سود و استراتژیهای بازیکنان لحاظ شده بود . درسال ۲۰۰۶، روشی بسیار بدبینانه‌تر از روش هیاشی پیشنهاد داده شد[۱۷]. هم‌چنین از روشهای مبتنی بر کنترل مقاوم، برای حل انواعی از بازیها در حضور عدم قطعیت استفاده شده است[۱۸]. برخلاف بازیهای بیزین، در مورد تعریف نقطه نش مقاوم برای بازیهای با مقادیر سود تقریبی، کار قابل توجهی انجام نشده است. در سال ۲۰۰۷، تعریفی برای نقطه تعادل نش مقاوم در بازیهای با مقادیر سود تقریبی ارائه شد. طبق این تعریف، نقاط نش مقاوم، نقاط تعادلی هستند که با تغییر مقادیر سود بازی، ثابت می‌مانند. اما با در نظر گرفتن این تعریف، بسیاری از بازیها نقطه تعادل نش مقاوم نخواهند داشت[۴].

به طور خلاصه، مرور مراجع نشان می‌دهد که در زمینه بازیهای با مقادیر سود تقریبی، اصطلاح "نقطه تعادل مقاوم"، اغلب در مواردی استفاده شده که بازیکنان از روشهای بهینه‌سازی مقاوم برای اتخاذ استراتژیهای خود استفاده می‌کنند و به ندرت بحث آنالیز مقاومت پاسخهای این بازیها، مورد توجه قرار گرفته است. روشهای بهینه‌سازی مقاوم، یک راهکار عملی را برای حل بازیهای با مقادیر سود تقریبی ارائه می‌دهند. اما پس از محاسبه پاسخهای یک بازی، به هر روش، من جمله روشهای مبتنی بر بهینه‌سازی مقاوم، این سوال مطرح می‌شود که کدام‌یک از پاسخهای بدست آمده، در حضور عدم قطعیت و در مواجهه با تحققهای مختلف بازی، ایمن‌تر و مقاوم‌تر بوده و بخش عمده خواص خود را حفظ می‌کنند. این مقاله، پاسخی به همین سوال محسوب می‌شود.

[1] . Harasanyi
[2] . Ex- post
[3] . Kaji and Morris
[4] . Hayashi

۳- مبانی تئوری مورد استفاده در مقاله

برای توصیف یک بازی ایستای n نفره به فرم نرمال باید موارد زیر را مشخص کرد[۱]:

الف) مجموعه بازیکنان

$$N = \{1,2,\dots,n\} \qquad (۱)$$

ب) مجموعه استراتژیهای خالص برای هر بازیکن

$$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ik_i}\} \qquad i = 1,\dots,n \qquad (۲)$$

که S_i مجموعه استراتژیهای بازیکن i ام بوده و k_i تعداد استراتژیهای خالص این بازیکن را نشان می‌دهد.

ج) سود هریک از بازیکنان به ازای تمام ترکیبهای ممکن استراتژیهای خالص اتخاذ شده توسط آنها:

$$\pi_i: S \to R \quad where \;\; S = \prod_{i\in N} S_i \quad i = 1,\dots,n \qquad (۳)$$

در رابطه فوق، S مجموعه تمام ترکیبهای ممکن استراتژی های بازیکنان بوده و فضای استراتژی نامیده می شود. π_i نیز سود بازیکن i ام را نشان می‌دهد. برای بازیکن i ام، مجموعه استراتژیهای مختلط عبارت است از:

$$\Sigma_i = \{\sigma_i = (p_{i1},\dots,p_{ik_i}) : \textstyle\sum_j p_{ij} = 1,\; p_{ij} \geq 0\} \qquad (۴)$$

درایه‌های بردار σ_i، توابعی حقیقی مقدار روی S_i هستند که باید شرایط فوق را برآورده کنند. هم‌چنین p_{ij} به $p_i(s_{ij})$ اشاره کرده و احتمال انتخاب استراتژی s_{ij} توسط بازیکن i ام را نشان می‌دهد.

حال فرض کنید که $\Sigma = \prod_{i\in N} \Sigma_i$ بوده و $K = \sum_{i\in N} k_i$ در نظر گرفته شود. المانهای Σ، ترکیبهای مختلف استراتژیهای خالص و مختلط همه بازیکنان و به فرم $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ هستند که $\sigma_i \in \Sigma_i$ بوده و مطابق رابطه (۴) می‌باشد. بنابراین Σ، زیر مجموعه‌ای از R^K خواهد بود. در این حالت پیامد انتظاری بازیکن iام، از رابطه زیر بدست می‌آید:

(۵)

$$\pi(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_1\in S_1} \dots \sum_{s_n \in S_n} p_1(s_1)\dots p_n(s_n)\pi_i(s_1,\dots,s_n)$$

طبق تعریف، بردار $\sigma^* = (\sigma_1{}^*,\dots,\sigma_n{}^*) \in \Sigma$ یک نقطه تعادل نش است، اگر و فقط اگر برای هر بازیکن $i \in N$ و تمام مقادیر $\sigma_i \in \Sigma_i$، رابطه (۶) برقرار باشد:

$$\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}{}^*) \leq \pi_i(\sigma^*) \qquad (۶)$$

در این رابطه، $(\sigma_i, \sigma_{-i}{}^*)$ نشان‌دهنده موقعیتی است که بازیکن i ام استراتژی دلخواه σ_i را بازی کرده و بقیه بازیکنان استراتژیهای مشخص شده در نقطه تعادل نش را بازی می‌کنند. نقطه تعادل نش، یکی از پرکاربردترین مفاهیم پاسخ برای موقعیتهای تصمیم‌گیری تعاملی به شمار می‌رود. در نقطه نش، هیچ از بازیکنان با در نظر گرفتن اینکه سایر حریفان استراتژی های نش خود را بازی می‌کنند؛ تمایلی برای تغییر استراتژیهای خود نخواهد داشت.

در سال ۱۹۹۱، مک کلوی[۱]، نشان داد که نقاط تعادل نش یک بازی نرمال، ریشه‌های یک تابع حقیقی به فرم $v: \Sigma \to R$ هستند که تابع لیاپانوف نش نامیده می‌شود[۱۹]. این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹- ۲۱]:

$$v(\sigma) = \sum_{i\in N} \sum_{1\leq j\leq k_i} g_{ij}(\sigma) \qquad (۷)$$

که در آن $g_{ij}(\sigma)$ عبارت است از:

$$g_{ij}(\sigma) = \{\max[\pi_i(s_{ij}, \sigma_{-i}) - \pi_i(\sigma), 0]\}^2 \qquad (۸)$$

مک کلوی نشان داد که تابع لیاپانوف نش به ازای همه مقادیر $\sigma \in \Sigma$، پیوسته، مشتق‌پذیر و بزرگتر یا مساوی صفر است. به‌علاوه وی ثابت کرد که ریشه‌های این تابع، یعنی مینیممهای سراسری آن، نقاط تعادل نش بازی متناظر هستند[۱۹].

۳-۱ نقاط تعادل هم‌بسته

نقطه تعادل هم‌بسته، یک توزیع احتمالاتی روی تمام ترکیبهای ممکن استراتژی‌های خالص بازی بوده و شرط تعادل ضعیف‌تری را نسبت به نش برآورده می‌کند [۳، ۲۲، ۲۳]. فرض کنید که S، فضای استراتژی بازی توصیف شده توسط روابط (۱) تا (۳) بوده و $D_S = \prod_i k_i$ تعداد اعضای آن باشد. برداری با ابعاد $1\times D_s$ به فرم $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_{D_S})$، اگر در روابط (۹) و (۱۰) صدق کند، یک توزیع احتمالاتی روی S محسوب خواهد شد.

$$\mu_l \geq 0, \quad l = 1,\dots,D_s \qquad (۹)$$

$$\sum_{l=1}^{D_s} \mu_l = 1 \qquad (۱۰)$$

در روابط فوق، μ_l، احتمال بازی کردن l امین ترکیب استراتژی توسط بازیکنان بازی را نشان می‌دهد. یک توزیع احتمالاتی روی فضای استراتژی، مانند μ، نقطه تعادل هم‌بسته محسوب می‌شود، اگر و فقط اگر برای هر بازیکن $i \in N$ و هر $s = (s_i, s_{-i}) \in S$، رابطه زیر برقرار باشد [۲۲- ۲۴]:

(۱۱)

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu(s_i, s_{-i})\pi_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu(s_i, s_{-i})\pi_i(s_i', s_{-i}) \;\; \text{for all } s_i' \in S_i$$

رابطه (۱۱) را می‌توان به صورت زیر نیز در نظر گرفت:

(۱۲)

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} ((\pi_i(s_i, s_{-i}) - \pi_i(s_i', s_{-i}))\mu(s_i, s_{-i}) \geq 0 \quad \text{for all } s_i' \in S_i$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، شرط فوق باید برای تمام گزینه‌های دیگری که در اختیار بازیکن i ام قرار دارد، یعنی s_i'، برقرار باشد. با توجه به محدودیت نامساویهای فوق، در نقطه تعادل هم‌بسته هیچ‌یک از بازیکنان تمایلی برای تغییر استراتژی خود نخواهد داشت. در نقاط تعادل نش، این احتمالات، حاصل ضرب مقادیر مستقلی برای هر بازیکن بوده و رابطه $\mu(s_i, s_{-i}) = \mu(s_i)\mu(s_{-i})$ برقرار می‌باشد. به بیان دیگر، نش

[۱] . Mckelvey

یک توزیع احتمالاتی غیر هم‌بسته روی فضای استراتژی است. درحالیکه نقطه تعادل هم‌بسته این شرط را نداشته وکلی‌تر است. ثابت شده است که مجموعه نقاط تعادل هم‌بسته بازیهای متناهی، غیرتهی بوده و مجموعه نقاط نش را در بر می‌گیرد. یعنی، هر نقطه نش، یک تعادل هم‌بسته نیز محسوب می‌شود[۲۲- ۲۴]. رابطه (۱۱) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نیز بیان کرد:

$$A\mu' \geq 0 \qquad (۱۳)$$

در رابطه (۱۳) ماتریس محدودیت A به ابعاد $N_{con} \times D_S$ است. که N_{con} تعداد محدودیتهای نامساوی بوده و از رابطه (۱۴) بدست می‌آید:

$$N_{con} = \sum_{i=1}^{n} k_i (k_i - 1) \qquad (۱۴)$$

در رابطه (۱۴)، k_i تعداد استراتژیهای بازیکن i ام می‌باشد. به طور خلاصه، نقاط تعادل هم‌بسته باید محدودیتهای مشخص شده در روابط (۹)، (۱۰) و (۱۳) را ارضا کنند. به همین دلیل، محاسبه آنها حتی برای بازیهای با ابعاد بالا نیز، به سادگی و با استفاده از روشهای برنامه‌ریزی خطی امکان‌پذیر خواهد بود.

۴- آنالیز مقاومت نقاط تعادل نش

در این بخش، دو معیار کاربردی برای ارزیابی میزان مقاومت نقاط تعادل نش ارائه می‌دهیم. در هریک از دو معیار، با توجه به دغدغه‌های مسائل دنیای واقعی، تعریف خاصی برای "نقطه نش مقاوم" پیشنهاد داده خواهد شد. در معیار اول، منظور از نقاط تعادل نش مقاوم، آن دسته از نقاط تعادلی است که در مواجهه با تغییرات محدود مقادیر سود بازی، نش یا نزدیک باقی مانده و همه یا بخش عمده خواص خود را حفظ می‌کنند. اما در معیار دوم، ما به دنبال پاسخهایی هستیم که در حضور عدم قطعیت، در مجموعه نقاط تعادل هم‌بسته باقی می‌مانند. هر دو معیار، بسیار ساده، منطقی و کاربردی هستند و تصمیم‌گیرنده، براساس شرایط مسئله، ممکن است هریک را انتخاب کند. کار مقاله در این بخش، گامی در جهت ارائه مفهوم"تئوری بازیهای مقاوم" محسوب می‌شود. که منظور از تئوری بازیهای مقاوم، یافتن آن دسته از پاسخهای بازیهای نامی است که در مواجهه با تحققهای مختلف مقادیر سود بازی، مقاوم‌تر هستند. فرض می‌کنیم که پارامترهای غیرقطعی ممکن است هر مقداری در یک بازه حول مقادیر نامی خود را اختیار کنند. هم‌چنین در نظر می‌گیریم که هیچ اطلاعی راجع به توزیع احتمالاتی مقادیر غیرقطعی مسئله در دست نمی‌باشد.

در این مقاله برای آنالیز مقاومت، از روشهای مبتنی بر نمونه‌برداری از پارامترهای غیرقطعی استفاده خواهیم کرد. نمونه‌برداری، یک روش ساده و متداول برای ارزیابی مقاومت به شمار می‌رود[۲۵-۲۷] . این روش، به شرایط خاصی روی مدل مسئله نیاز نداشته و می‌توان برای هر مسئله و با هر ابعادی، بدون پیچیدگی محاسباتی از آن استفاده کرد[۲۷].

البته اگر تولید نمونه‌ها، به صورت کاملاً تصادفی انجام شود، احتمال اینکه فضا به خوبی پوشش داده نشده و نمونه‌ها در خوشه‌هایی متمرکز شوند، زیاد خواهد بود [۲۵، ۲۶]. لذا در این مقاله از روش نمونه‌برداری لاتین هایپرکیوب[1] استفاده خواهیم کرد که تا حدودی این مشکل را برطرف کرده و فضای مسئله را به‌طور مناسبی پوشش می‌دهد. در این روش، بازه تغییرات هر پارامتر غیرقطعی به n قسمت افراز شده و از هر قسمت فقط یک نمونه، به طور تصادفی انتخاب می‌گردد. سپس نمونه‌های انتخابی برای هریک از پارامترها، به صورت تصادفی و بدون جایگزینی با هم جور شده و یک مجموعه شامل n نمونه برای مقادیر غیرقطعی تولید می‌گردد[۲۸]. اگر نمونه‌های پارامترهای غیرقطعی در آنالیز مقاومت، با استفاده از روش لاتین هایپرکیوب تولید شوند، جوابهای بدست آمده، قابل اعتمادتر خواهند بود [۲۵، ۲۶]. البته باید به این نکته نیز توجه داشت که هرچه تعداد نمونه‌ها بیشتر باشد، پیچیدگی محاسباتی روش بیشتر شده ولی صحت نتایج، افزایش خواهد یافت.

۴-۱- معیار اول

ابتدا باید تعریف خود را برای اصطلاح "نش تقریبی" ارائه دهیم. این تعریف بر مبنای تعریف مشابهی برای تقریب نقطه ثابت، ارائه شده است.

تعریف ۱: فرض کنید که $X^* \in \Sigma$، یک نقطه تعادل نش خالص یا مختلط برای بازی ماتریسی G باشد. استراتژی خالص یا مختلط $X' \in \Sigma$، یک *تقریب ε قوی* برای X^* نامیده می‌شود اگر و فقط اگر $\|X^* - X'\| < \varepsilon$.

تعریف ۲: بازی ماتریسی G با تابع لیاپانوف $v: \Sigma \to R$ را در نظر بگیرید. اگر به ازای استراتژی خالص یا مختلط X' متعلق به Σ، مقدار تابع لیاپانوف کوچکتر از ε بوده و ε به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه X' نزدیک یکی از نقاط نش بازی مانند X^* قرار خواهد داشت. در این حالت X' یک تقریب ε ضعیف از X^* بوده و *نقطه نش با تقریب ضعیف* نامیده می‌شود.

تعریف ۳: فرض کنید که X^* یک نقطه تعادل نش برای بازی ماتریسی نامی G باشد. X^* یک نقطه نش مقاوم نامیده می‌شود، اگر و فقط اگر برای تمام تحققهای ممکن (محتمل) G، نش یا نش با تقریب ضعیف محسوب شود.

در بسیاری از موارد، نقاط نش صددرصد مقاوم نبوده و در تمام حالات ممکن، شرط تعریف ۳ را ارضا نمی‌کنند. بنابراین درجه مقاومت یک پاسخ را می‌توان متناسب با تعداد تحققهای ممکن بازی که برای آنها شرط تعریف فوق برآورده می‌شود، در نظر گرفت. در صورتی که با در نظر گرفتن این معیار، مقاومت یک پاسخ بیشتر از ۵۰ درصد باشد، آن

[1] . Latin Hypercube Sampling

پاسخ "*تقریباً مقاوم*" نامیده می‌شود. لذا با در نظر گرفتن تعاریف فوق، روند ارزیابی اولین شاخص مقاومت پیشنهادی به شرح زیر خواهد بود:

گام اول: برای آنالیز مقاومت، ابتدا باید مقادیر تابع لیاپانوف نامی را در همسایگی نقاط نش ارزیابی نمود. بدین منظور، یک همسایگی حول هر یک از نقاط نش در نظر گرفته خواهد شد. ابعاد این همسایگی، ماکزیمم انحراف مجاز از احتمالات نقطه نش را نشان می‌دهد که بر تصمیم نهایی تاثیری نمی‌گذارد. بنابراین انتخاب آن کاملاً به مسئله بستگی دارد و اینکه تصمیم‌گیرنده با احتمالات مربوط به نش مختلط چگونه برخورد میکند. به عنوان مثال اگر برای یک بازی ۲×۲ ، آستانه تحمل برابر ۰.۰۵ در نظر گرفته شود و[(۱،۰)،(۱،۰)] =X^* یک نقطه تعادل نش خالص برای این بازی باشد، یعنی با استراتژیهایی مانند [(۰.۰۵، ۰.۹۵)، (۰.۰۵، ۰.۹۵)] یا [(۰.۰۲،۰.۹۸)،(۰.۰۴،۰.۹۶)] نیز از دید تصمیم‌گیرنده نهایی مشابه X^* برخورد شده و این تغییر احتمالات تاثیری در تصمیم نهایی نمی‌گذارد. مسلماً تصمیم‌گیرنده می‌تواند با توجه به شرایط مسئله این آستانه تحمل را تغییر دهد.

سپس یک مجموعه از پروفایلهای استراتژی نمونه در هر همسایگی در نظر گرفته می‌شود. به منظور تولید پروفایلهای نمونه، از روش لاتین هایپرکیوب استفاده خواهد شد. با استفاده از این روش، تعدادی استراتژی نمونه در هر همسایگی حول نقاط تعادل نش انتخاب شده و سپس مقدار تابع لیاپانوف نامی به ازای تمام نمونه‌ها محاسبه می‌گردد. تابع لیاپانوف، به ازای این نمونه‌ها، مقداری نزدیک به صفر خواهد داشت. دلیل این امر آن است که تابع لیاپانوف یک تابع پیوسته بوده و فقط در نقاط نش، مقدارش برابر صفر می‌شود[۱۹]. لذا با توجه به اینکه تمام نمونه‌ها از یک همسایگی کوچک حول نقاط نش انتخاب شده اند، مقدار تابع لیاپانوف به ازای آنها، نزدیک صفر خواهد بود. بیشترین مقدار تابع لیاپانوف به ازای همه استراتژیهای نمونه در هر همسایگی، به عنوان ماکزیمم تغییرات مجاز تابع لیاپانوف حول نقطه نش مربوطه در نظر گرفته خواهد شد.

تعداد نمونه‌هایی که در هر همسایگی مورد بررسی قرار می‌گیرند، به صورت مسئله بستگی داشته و باید به دقت تعیین گردد. با افزایش تعداد نمونه‌ها، حجم محاسبات افزایش پیدا می‌کند، اما نتایج بدست آمده به واقعیت نزدیک‌تر خواهند بود.

گام دوم: در گام دوم، تحققهای مختلف ماتریس سود بازی در نظر گرفته می‌شوند. بدین منظور، ابتدا برای پارامترهای غیرقطعی تاثیرگذار روی سود بازی، تعدادی نمونه تولید می‌شود. برای تولید نمونه‌ها، مجدداً می‌توان از روش لاتین هایپرکیوب استفاده کرد. سپس با استفاده از مجموعه نمونه‌های تولید شده برای پارامترهای غیرقطعی تاثیرگذار روی سود بازی، N تحقق مختلف ممکن برای بازی بدست می‌آید. هریک از این بازیها، تابع لیاپانوف متفاوتی خواهند داشت. برای محاسبه میزان مقاومت یک نقطه نش، باید مقدار تمام این توابع را به ازای آن نقطه تعادل بدست آورد. آنگاه میزان مقاومت نقطه نش مربوطه به کمک رابطه (۱۵) بدست می‌آید.

$$Robustness'\text{first measure}' = 100\left(1-\frac{n_1}{N}\right) \quad (۱۵)$$

در رابطه (۱۵)، n_1، تعداد تحققهایی است که مقدار تابع لیاپانوف آنها به ازای نقطه نش مورد نظر از ماکزیمم تغییرات مجاز بیشتر بوده و N، تعداد کل تحققهای در نظر گرفته شده است. با استفاده از این معیار، مقاومت نقاط نش، عددی بین ۰ و ۱۰۰ خواهد بود.

۴-۲- معیاردوّم

ایده دومین معیار پیشنهادی برای ارزیابی مقاومت نقاط تعادل نش، بر مبنای مفهوم تعادل هم‌بسته استوار است. با توجه به اینکه نقاط نش، زیر مجموعه‌ای از نقاط تعادل هم‌بسته هستند، منطقی به نظر می‌رسد که در جستجوی آن دسته از نقاط نشی باشیم که علیرغم تغییرات ماتریس سود بازی، در مجموعه مرجع خود، یعنی مجموعه نقاط هم‌بسته، باقی می‌مانند. یعنی برای این نقاط، عقلانیت تعادل هم‌بسته هنگام مواجهه با تحققهای ممکن بازی، حفظ خواهد شد. معیار دوم بر مبنای تعریف زیر استوار است:

تعریف ۴: فرض کنید که $X^* \in \Sigma$ ، یک نقطه تعادل نش برای بازی نامی G باشد. آنگاه X^* یک نقطه *نش مقاوم نوع ۲*، نامیده می‌شود، اگر و فقط اگر X^*، یک تعادل هم‌بسته برای تمام تحققهای ممکن G باشد.

به کمک تعریف فوق، معیار دوم برای ارزیابی مقاومت یک نقطه نش به این صورت پیشنهاد داده می‌شود:

$$Robustness'\text{second measure}' = 100\frac{n_2}{N} \quad (۱۶)$$

برای محاسبه میزان مقاومت نقاط نش به کمک رابطه فوق، با استفاده از روش نمونه‌برداری لاتین هایپرکیوب، N تحقق مختلف برای ماتریس سود بازی بدست می‌آید. آنگاه n_2، تعداد تحققهایی است که X^* یک نقطه تعادل هم‌بسته برای آنها محسوب می‌شود. بار محاسباتی این روش، از معیار اول بسیار کمتر است. زیرا نقاط تعادل هم‌بسته برخلاف نقاط نش، با مجموعه‌ای از نامساوی‌های ساده خطی مشخص می‌شوند. اما از آنجایی که این معیار، حفظ خواص بیشتری را نسبت به معیار اول در نظر می‌گیرد، مقادیر بدست آمده توسط آن، کمتر از مقادیر بدست آمده با شاخص اول خواهند بود. در واقع درجه مقاومت بدست آمده توسط معیار اول، نوعی تقریب خوش‌بینانه و کران بالا برای مقادیر بدست آمده توسط دومین معیار محسوب می‌شود.

۵- آنالیز مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته

در این بخش، دو روش جدید برای ارزیابی میزان مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته ارائه خواهد شد. روش اول، یک شاخص کمی برای ارزیابی مقاومت نقاط هم‌بسته است که ایده آن از دومین معیار پیشنهادی در بخش قبل الهام گرفته شده و روش دوم، یک شاخص ساده برای

مقایسه مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته یک بازی بوده و فقط پاسخها را براساس میزان مقاومتشان رتبه‌بندی می‌کند.

۵-۱ ارائه یک معیار کمّی برای سنجش مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته

این معیار، بر مبنای تعریف پیشنهادی زیر برای نقطه هم‌بسته مقاوم بوده و نوعی تعمیم برای تعریف ۴ محسوب می‌شود.

تعریف ۵ : فرض کنید که μ، یک نقطه تعادل هم‌بسته برای بازی نامی G باشد. آنگاه μ، یک نقطه هم‌بسته مقاوم نامیده می‌شود، اگر و فقط اگر یک تعادل هم‌بسته برای تمام تحققهای ممکن G باشد.

با توجه به تعریف فوق، نقاط تعادل هم‌بسته‌ای که در تمام حالات ممکن پارامترهای غیرقطعی مسئله، خواص خود را حفظ می‌کنند، به عنوان پاسخهای مقاوم در نظر گرفته می‌شوند. یعنی نقاط تعادل هم‌بسته مقاوم، به ازای تمام تحققهای ممکن بازی، محدودیتهای نامساوی مربوطه را ارضا می‌کنند. با در نظر گرفتن تعریف فوق، می‌توان از رابطه (۱۶) برای محاسبه میزان مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته نیز استفاده کرد. در این صورت، n_2 تعداد نمونه‌هایی است که تمام خواص تعادل هم‌بسته برای آنها حفظ می‌شود.

۵-۲- ارائه یک معیار نسبی برای مقایسه مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته

در این بخش، یک معیار نسبی برای مقایسه مقاومت نقاط تعادل هم-بسته ارائه می‌دهیم. در این معیار، در نظر می‌گیریم که یک نقطه تعادل هم‌بسته بازی نامی، تا چه اندازه از محدودیتهای نامساوی مربوطه با در نظر گرفتن تحققهای مختلف بازی تجاوز می‌کند. با کمک این معیار، نقاط تعادل هم‌بسته براساس میزان مقاومتشان در حضور عدم قطعیت، رتبه‌بندی خواهند شد. این معیار، پیچیدگی محاسباتی چندانی ندارد و محاسبه آن برای بازیهای با ابعاد بالا نیز به سادگی انجام می‌شود.

همان‌طور که قبلاً نیز به آن اشاره شد، نقاط تعادل هم‌بسته با مجموعه‌ای از نامساویهای خطی ماتریسی به فرم $A\mu' \geq 0$ توصیف می‌شوند. اگر مقادیر سود بازی با عدم قطعیت همراه باشد، درایه‌های ماتریس محدودیت A نیز اعداد بازه‌ای بوده و ممکن است هر مقداری را در بازه مربوطه اختیار کنند. لذا تحققهای مختلفی برای ماتریس A وجود خواهد داشت و یک نقطه تعادل بازی نامی، ممکن است در محدودیت نامساوی مربوط به برخی از این تحققها صدق نکند. در نظر بگیرید که $A\mu'$ مساوی b باشد. در این صورت b، یک ماتریس با ابعاد $N_{con} \times 2$ خواهد بود که هر یک از سطرهای آن کرانهای یک عدد بازه‌ای را نشان می‌دهد. لذا پیشنهاد می‌دهیم که میزان تجاوز از هریک از N_{con} محدودیت نامساوی را می‌توان به کمک رابطه زیر محاسبه کرد:

$$V(i) = \frac{\min(b(i,1),0)}{\max\left(\varepsilon,\left(b(i,2)-b(i,1)\right)\right)} \quad i = 1, \dots, N_{con} \qquad (۱۷)$$

به کمک رابطه (۱۷)، می‌توان به سادگی میزان تخطی از هریک از محدودیتها را محاسبه کرد. $V(i)$، درایه سطر i ام بردار V بوده و میزان تجاوز از محدودیت i ام را نشان می‌دهد. $b(i,1)$ و $b(i,2)$ نیز کران بالا و پایین عدد بازه‌ای i ام در ماتریس b هستند. ε هم یک عدد بسیار کوچک و مثبت است. با استفاده از رابطه (۱۷)، اگر $[b(i,1),b(i,2)]$ یک عدد بازه‌ای مثبت باشد، یعنی $b(i,1)>0$، میزان تخطی از محدودیت iام برابر صفر بوده و اگر عدد بازه‌ای مذکور یک عددمنفی باشد، یعنی $b(i,2)<0$، میزان تجاوز از محدودیت مربوط به آن یک عدد بسیار بزرگ خواهد بود.

از میانگین بردار V می‌توان برای مقایسه میزان مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته در حضور عدم قطعیت استفاده کرد. هرچه میانگین تجاوز از محدودیتها برای یک نقطه تعادل بیشتر باشد، یعنی احتمال برآورده نشدن محدودیتها به‌ازای تحققهای مختلف، بیشتر بوده و لذا میزان مقاومت آن نقطه تعادل در حضور عدم قطعیت، کمتر خواهد بود. با استفاده از این روش، دیگر نیازی به نمونه‌برداری از پارامترهای غیرقطعی مسئله نخواهیم داشت. مثالهای عددی نشان می‌دهند که نتایج این معیار، با نتایج شاخصهای مبتنی بر نمونه برداری منطبق بوده و آنها را تایید می‌کند.

۶- بهبود میزان مقاومت پاسخهای یک بازی

در بعضی از مدلهای تئوری بازیها، ممکن است تصمیم‌گیرنده از میزان مقاومت نقاط تعادل نش بدست آمده راضی نباشد. در چنین مسائلی، تصمیم‌گیرنده می‌تواند یکی از دو روش ذیل را اتخاذ نماید.

۶-۱ جستجوی پاسخهای مقاوم‌تر در همسایگی نقاط تعادل نش

به عنوان اولین روش، پیشنهاد می‌دهیم که اگر تصمیم‌گیرنده از میزان مقاومت پاسخهای یک بازی، رضایت نداشته باشد، می‌تواند دقت احتمالات نقاط نش را قربانی کرده و پاسخهایی تقریبی با مقاومت بالاتر بدست آورد. برای اینکه مصالحه‌ای بین خواص نقاط تعادل نش و مقاومت آنها در حضور عدم قطعیت برقرار گردد، از یک الگوریتم بهینه-سازی مقید استفاده خواهد شد. این الگوریتم باید به دنبال پاسخهایی بگردد که بیشترین مقاومت را داشته و در یک همسایگی حول نقاط نش باقی می‌مانند. ابعاد این همسایگی، ماکزیمم انحراف مجاز از احتمالات نقطه نش را نشان می‌دهد که بر تصمیم نهایی تاثیری نمی‌گذارد. همان طور که قبلاً نیز به آن اشاره شد، این ابعاد، در هر مسئله و با توجه به شرایط آن توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شود.

با توجه به ویژگی‌های توابع پیشنهادی برای سنجش میزان مقاومت نقاط تعادل نش، از الگوریتم ژنتیک برای حل این مسئله بهینه‌سازی مقید استفاده خواهد شد. با استفاده از تابع جریمه، مسئله بهینه‌سازی مقید را به یک مسئله بدون محدودیت تبدیل می‌کنیم. تابع جریمه، پاسخهایی را که در همسایگی مجاز نقاط نش واقع نیستند، جریمه کرده و برازندگی آنها

را کاهش می‌دهد. با استفاده از تابع جریمه، الگوریتم ژنتیک قادر به جستجوی پاسخهایی مقاوم‌تر در همسایگی هر یک از نقاط تعادل نش خواهد بود. برای سنجش مقاومت پاسخها می‌توان از هریک از دو معیار پیشنهادی استفاده کرد. اگر در یک همسایگی پاسخی مقاوم‌تر پیدا نشود، تصمیم‌گیرنده می‌تواند ابعاد همسایگی را افزایش داده و به دنبال تقریبهایی ضعیف‌تر اما مقاوم‌تر بگردد. هم‌چنین می‌توان روند بهبود مقاومت نقاط نش را با الگوریتم محاسبه آنها ادغام کرد. به بیان دیگر با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه، محاسبه نقاط تعادل نش، یعنی نقاط بهینه سراسری تابع لیاپانوف، و بیشینه کردن مقاومت آنها در حضور عدم قطعیت را به طور هم‌زمان انجام داد.

۶-۲- جستجوی پاسخهای مقاوم‌تر در مجموعه نقاط تعادل هم‌بسته

در روش دوم، پیشنهاد می‌دهیم که اگر تصمیم‌گیرنده از میزان مقاومت پاسخهای یک بازی، رضایت نداشته باشد، می‌تواند در مجموعه نقاط هم‌بسته غیرنش به دنبال پاسخهای مقاوم‌تری بگردد. مجموعه نقاط تعادل هم‌بسته، یک چند وجهی هم‌بند و محدب بوده و مجموعه نقاط تعادل نش را که ممکن است غیرهم‌بند و غیر محدب باشد، در بر می-گیرد. هم‌چنین ثابت شده است که نقاط نش روی مرزهای مجموعه نقاط هم‌بسته قرار دارند [۲۳]. بنابراین ممکن است بتوان در مجموعه نقاط غیرمرزی، پاسخهای مقاوم‌تری را پیدا کرد. در این صورت، توصیه می-شود که تصمیم گیرنده نقاط نش غیر مقاوم را کنار گذاشته و نقاط هم-بسته غیر نش اما مقاوم را، به عنوان تصمیم نهایی انتخاب کند.

۷- مثالهای عددی

مثال ۱.۷: اکنون به مثال مطرح شده در بخش مقدمه برمی‌گردیم. همان‌طور که اشاره شد، بازی مذکور، دو نقطه تعادل نش دارد. برای محاسبه اولین شاخص مقاومت، آستانه تحمل ۰.۰۵ $\pm$ را برای تغییر احتمالات نقاط تعادل نش در نظر می‌گیریم. بنابراین همسایگی مجاز یک استراتژی به فرم $X_0=(p,1-p)$ ، شامل همه استراتژیهایی خواهد بود که به صورت $X=(p+r_1,1-p+r_2)$ تعریف می‌شوند. به شرطی که r_1 و r_2 دو عدد رندوم بین ۰.۰۵- و ۰.۰۵ باشند. البته با توجه به اینکه استراتژی هر بازیکن یک توزیع احتمالاتی بوده و باید در رابطه (۱۸) صدق کند، پروفایلهای تولید شده برای هر بازیکن، مطابق رابطه (۱۹)، نرمالیزه خواهند شد.

$$X=(x_1,x_2):x_1+x_2=1, x_i\geq 0\ \forall i \qquad (۱۸)$$

$$X=\frac{|X|}{\sum_{i=1}^{2}|x_i|} \qquad (۱۹)$$

با استفاده از روش لاتین هایپرکیوب، ۲۰۰ استراتژی نمونه در همسایگی مجاز هر پاسخ تولید می‌شود. سپس مقدارتابع لیاپانوف به ازای همه این نمونه‌ها ارزیابی شده و بیشترین مقدار آن به عنوان ماکزیمم تغییرات مجاز تابع لیاپانوف حول پاسخ مربوطه در نظر گرفته می‌شود. نتایج جدول ۳، میانگین ۱۰۰ اجرای متوالی برنامه هستند.

جدول ۳: ماکزیمم تغییرات مجاز تابع لیاپانوف حول هریک از نقاط تعادل نش

ماکزیمم تغییرات مجاز تابع لیاپانوف حول هر نقطه نش	نقاط نش
۰.۰۱۵۰	X_1*
۰.۰۱۸۱	X_2*

هم‌چنین میزان مقاومت هر یک از نقاط نش، با در نظر گرفتن مجموعه‌ای شامل ۳۰۰ تحقق مختلف بازی و با استفاده از هر دو معیار محاسبه شده و در جدول (۴) ارائه شده است. این نتایج نیز میانگین بدست آمده برای ۱۰۰ اجرای متوالی برنامه، با در نظر گرفتن مجموعه نمونه‌های مختلف هستند.

جدول ۴: میزان مقاومت نقاط تعادل نش

رتبه‌بندی نقاط نش	میانگین تجاوز از محدودیتها	میزان مقاومت (معیار دوم)	میزان مقاومت (معیار اول)	نقاط نش
۱	۰	۱۰۰	۱۰۰	X_1^*
۲	۰.۲۵-	۲۵	۴۵	X_2^*

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نتایج بدست آمده با نتایج مرجع [۴] همخوانی دارد. البته باید توجه داشت که شاخصهای عددی ارائه شده در این فصل، اطلاعات بیشتری را در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌دهند. به کمک این شاخصها می‌توان میزان مقاومت پاسخهای یک بازی را به طور کمّی با یکدیگر مقایسه کرد.

در دو ستون آخر جدول نتایج مربوط به معیار نسبی بخش ۲.۵، ارائه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، برای X_1^*، میانگین تجاوز از محدودیتها برابر ۰ است و بنابراین کاملاً مقاوم می‌باشد. این نتیجه به خوبی با نتیجه بدست آمده از معیارهای کمّی نیز منطبق است. نکته جالب توجه دیگر در مورد نتایج این مثال، آن است که X_1^*، یک استراتژی پایدار تکاملی است، در حالیکه X_2^*، این ویژگی را ندارد. استراتژیهای پایدار تکاملی، پاسخهای یک بازی تکاملی بوده و زیر مجموعه‌ای از نقاط تعادل نش بازی کلاسیک متناظر یک بازی تکاملی محسوب می-شوند[۱]. برای اطلاعات بیشتر در مورد تعاریف و مفاهیم استراتژیهای پایدار تکاملی به مراجع [۱] و [۲۹] مراجعه شود.

مثال ۲.۷ یک بازی ۲×۲ را در نظر بگیرید که ماتریس سود نامی آن در جدول ۵ ارائه شده است:

جدول ۵: مقادیر نامی ماتریسهای سود بازی

<table>
<tr><td rowspan="4">بازیکن ۱</td><td colspan="3">بازیکن ۲</td></tr>
<tr><td></td><td>S_{21}</td><td>S_{22}</td></tr>
<tr><td>S_{11}</td><td>-۳ ، -۳</td><td>۴ ،۰</td></tr>
<tr><td>S_{12}</td><td>۰ ،۴</td><td>۲ ،۲</td></tr>
</table>

این بازی سه نقطه تعادل نش دارد: X_1^* = [(۰.۶، ۰.۴)، (۰.۶، ۰.۴)] ، X_2^*=[(۱،۰)،(۰،۱)] و X_3^*=[(۰،۱)،(۱،۰)] . مجدداً فرض کنید که مقادیر سود بازی، تقریبی بوده و ممکن است مطابق جدول ۶، هر مقداری

در یک بازه حول مقادیر نامی را اختیار کنند. مقادیر آستانه تحمل، تعداد نمونه‌ها و تعداد دفعات اجرای متوالی برنامه، مشابه مثال ۱.۷در نظر گرفته شوند.

جدول ۶: بازه‌های ممکن برای مقادیر سود بازی

	S_{21}	S_{22}
S_{11}	[-۴.۵ -۱.۵] ، [-۴.۵ -۱.۵]	[۲ ۶] ، [-۰.۵ ،۰.۵]
S_{12}	[-۰.۵ ،۰.۵] ، [۲ ۶]	[۱ ۳] ، [۱ ۳]

جدول ۷: ماکزیمم تغییرات مجاز تابع لیاپانوف حول هریک از نقاط تعادل نش

نقاط نش	ماکزیمم تغییرات مجاز تابع لیاپانوف حول هر نقطه نش
X_1*	۰.۰۳۲۸
X_2*	۰.۰۲۲۵
X_3*	۰.۰۲۴۵

جدول ۸: میزان مقاومت نقاط تعادل نش

رتبه‌بندی نقاط نش	میانگین تجاوز از محدودیتها	میزان مقاومت (معیار دوم)	میزان مقاومت (معیار اول)	نقاط نش
۲	-۰.۵	۰	۱۰	X_1*
۱	-۰.۰۴۱۷	۹۴	۹۶	X_2*
۱	-۰.۰۴۱۷	۹۴	۹۶	X_3*

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مقاومت اولین نقطه تعادل نش با استفاده از معیار اول، ۱۰ درصد ارزیابی شده است. یعنی اگر مقادیر سود بازی در بازه‌های مجازشان تغییر کنند، این تعادل در ۹۰ مورد از ۱۰۰ مورد، خواص خود را کاملاً از دست می‌دهد. بنابراین X_1*، یک نقطه نش مقاوم نیست. اما X_2* و X_3*، نقاط نش مقاوم هستند. همان‌طور که پیش‌بینی کرده بودیم، مقادیر بدست آمده با معیار اول، بزرگ‌تر از مقادیر ارزیابی شده با معیار دوم هستند. در واقع مقاومت محاسبه شده با معیار اول، نوعی تقریب خوش‌بینانه برای مقادیر بدست آمده با دومین شاخص محسوب می‌شود. دلیل این امر نیز آن است که شاخص دوم، شرایط سخت‌تری را برای مقاومت در نظر گرفته و حفظ خواص بیشتری را تضمین می‌کند. باید توجه داشت که با استفاده از شاخصهای مراجع قبلی، هیچ یک از این سه نقطه تعادل، مقاوم محسوب نمی‌شوند. اما شاخصهای پیشنهادی، امکان مقایسه نقاط نش غیر مقاوم را فراهم می‌آورند. مانند مثال قبل در دو ستون آخر جدول، نتایج مرتبط با معیار نسبی ارائه شده است. همان‌طور که قبلاً نیز به آن اشاره شد، اگر میانگین تجاوز از محدودیتها برای یک پاسخ بیشتر باشد، میزان مقاومت آن پاسخ در حضور عدم قطعیتها کمتر خواهد بود. لذا X_2* و X_3* مقاوم‌تر بوده و رتبه ۱ را به خود اختصاص داده‌اند .

برای تایید صحت نتایج بدست آمده، نقاط تعادل نش تمام تحققهای نمونه بازی را به کمک یک الگوریتم ژنتیک مالتی مدال بدست آورده و با نتایج بدست آمده از معیارهای پیشنهادی مقایسه کردیم. مسلماً این کار از نظر محاسباتی مناسب نبوده و نباید به عنوان یک شاخص برای ارزیابی میزان مقاومت نقاط تعادل نش، به‌کار گرفته شود و در اینجا فقط برای اعتبارسنجی روشهای پیشنهادی از آن استفاده شده است.

مثال ۳.۷: بازی جوجه

جدول ۹: مقادیر نامی ماتریسهای سود بازی (بازی جوجه)

بازیکن اول	بازیکن دوم		
		S_{21}	S_{22}
	S_{11}	۴،۴	۱،۵
	S_{12}	۵ ،۱	۰،۰

این بازی سه نقطه تعادل نش دارد: X_1^*=[(۰.۵،۰.۵)،(۰.۵،۰.۵)]، X_2^*=[(۱،۰)،(۰،۱)] ، X_3^*=[(۰،۱)،(۱،۰)]. حال فرض کنید که مقادیر سود بازی در بازه‌هایی مطابق جدول ۱۰، تغییر کنند.

جدول ۱۰: بازه‌های ممکن برای مقادیر سود بازی (بازی جوجه)

	S_{21}	S_{22}
S_{11}	[۲ ۶] ، [۲ ۶]	[۰.۵ ، ۱.۵]، [۲.۵ ۷.۵]
S_{12}	[۲.۵ ۷.۵] ، [۰.۵ ، ۱.۵]	[-۰.۵ ،۰.۵] ، [-۰.۵ ،۰.۵]

جدول ۱۱: میزان مقاومت نقاط تعادل نش (بازی جوجه)

رتبه‌بندی نقاط نش	میانگین تجاوز از محدودیتها	میزان مقاومت (معیار دوم)	میزان مقاومت (معیار اول)	نقاط نش
۲	-۰.۵	۰	۱	X_1*
۱	-۰.۰۹۷۲	۶۹	۷۱	X_2*
۱	-۰.۰۹۷۲	۶۹	۷۱	X_3*

براساس تعریف مرجع [۴]، این بازی هیچ نقطه تعادل نش مقاومی ندارد. نتایج بدست آمده از معیارهای پیشنهادی نیز نشان می‌دهند که میزان مقاومت هیچ‌یک از پاسخها ۱۰۰ نیست. اما همان‌طور که اشاره شد، با استفاده از معیارهای پیشنهادی، امکان مقایسه مقاومت نقاط نش غیر مقاوم فراهم شده و تصمیم‌گیرنده می‌تواند پاسخی را که قابل اعتمادتر است ، انتخاب کند.

اکنون با استفاده از الگوریتم ژنتیک در مجموعه نقاط هم‌بسته غیرنش به دنبال پاسخهای مقاوم‌تری می‌گردیم. نتایج دو مرتبه اجرای الگوریتم، از شرایط اولیه مختلف، در جدول ۱۲ ارائه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، دو نقطه تعادل هم‌بسته با میزان مقاومت قابل قبولی بدست آمده است. هر دو پاسخ، از نقطه نش مختلط این بازی، یعنی X_1*، مقاوم‌تر هستند. در صورت لزوم، می‌توان الگوریتم را از شرایط اولیه دیگری نیز راه‌اندازی کرده و گزینه‌های بیشتری را بدست آورد.

جدول ۱۲: میزان مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته غیرنش

نقاط تعادل هم‌بسته	میزان مقاومت (معیار دوم)	میانگین تجاوز از محدودیتها
CE₁=[۰ ۰.۵ ۰.۵ ۰]	۵۰	-۰.۱۹۴۴
CE₂=[۰ ۰.۲۵ ۰.۷۵ ۰]	۵۰	-۰.۱۹۴۴

مثال ۴.۷ (بازی ۳×۳×۳): با توجه به اینکه روشهای آنالیز مقاومت ارائه شده در این مقاله برای بازیهای چند نفره هم قابل استفاده هستند، نتایج مربوط به یک مثال از بازیهای سه نفره را نیز ارائه می‌دهیم. این بازی یکی از مثالهای موجود در نرم‌افزار گمبیت[1] است. نرم‌افزار گمبیت یک کتابخانه شامل ابزارهای آنالیز و حل بازیهای ایستا و پویا بوده و در نوع خود یکی از قوی‌ترین کارهای ارائه شده به شمار می‌رود [۳۰]. این بازی سه نفره، سیزده نقطه تعادل نش دارد و یک مثال چالش‌برانگیز وپیچیده به شمار می‌رود.

جدول۱۳: مقادیر نامی ماتریسهای سود بازی

S_{31}	S_{21}	S_{22}	S_{23}	S_{32}	S_{21}	S_{22}	S_{23}	S_{33}	S_{21}	S_{22}	S_{23}
S_{11}	۱،۱،۱	۰،۰،۰	۰،۰،۰	S_{11}	۰،۰،۰	۰،۰،۰	۰،۰،۰	S_{11}	۰،۰،۰	۰،۰،۰	۰،۰،۰
S_{12}	۰،۰،۰	۰،۰،۰	۰،۰،۰	S_{12}	۰،۰،۰	۱،۱،۱	۰،۰،۰	S_{12}	۰،۰،۰	۰،۰،۰	۰،۰،۰
S_{13}	۰،۰،۰	۰،۰،۰	۰،۰،۰	S_{13}	۰،۰،۰	۰،۰،۰	۰،۰،۰	S_{13}	۰،۰،۰	۰،۰،۰	۱،۱،۱

جدول ۱۴: نقاط تعادل نش بازی

نقاط نش	احتمالات مربوط به نقاط نش بازی
X_1*	[(۰،۰.۵،۰.۵)، (۰،۰.۵،۰.۵)، (۰،۰.۵،۰.۵)]
X_2*	[(۰.۵،۰.۵،۰)، (۰.۵،۰.۵،۰)، (۰.۵،۰.۵،۰)]
X_3*	[(۰.۵،۰،۰.۵)، (۰.۵،۰،۰.۵)، (۰.۵،۰،۰.۵)]
X_4*	[(۱/۳،۱/۳،۱/۳)، (۱/۳،۱/۳،۱/۳)،(۱/۳،۱/۳،۱/۳)]
X_5*	[(۰،۱،۰)،(۰،۰،۱)،(۱،۰،۰)]
X_6*	[(۱،۰،۰)،(۰،۱،۰)،(۱،۰،۰)]
X_7*	[(۱،۰،۰)،(۱،۰،۰)،(۱،۰،۰)]
X_8*	[(۱،۰،۰)،(۰،۰،۱)،(۰،۱،۰)]
X_9*	[(۰،۱،۰)،(۰،۱،۰)،(۰،۱،۰)]
$X_{10}*$	[(۰،۰،۱)،(۱،۰،۰)،(۰،۱،۰)]
$X_{11}*$	[(۰،۰،۱)،(۰،۰،۱)،(۰،۰،۱)]
$X_{12}*$	[(۱،۰،۰)،(۰،۱،۰)،(۰،۰،۱)]
$X_{13}*$	[(۰،۱،۰)،(۱،۰،۰)،(۰،۰،۱)]

جدول ۱۵: میزان مقاومت نقاط تعادل نش

رتبه‌بندی نقاط نش	میانگین تجاوز از محدودیتها	میزان مقاومت (معیار دوم)	میزان مقاومت (معیار اول)	نقاط نش
۳	-۰.۲۹۱۷	۰	۱	X_1*
۳	-۰.۲۹۱۷	۰	۰	X_2*
۳	-۰.۲۹۱۷	۰	۰	X_3*
۴	-۰.۵	۰	۰	X_4*
۲	-۰.۱۶۶۷	۴	۵	X_5*
۲	-۰.۱۶۶۷	۴	۵	X_6*
۱	۰	۱۰۰	۱۰۰	X_7*
۲	-۰.۱۶۶۷	۴	۵	X_8*
۱	۰	۱۰۰	۱۰۰	X_9*
۲	-۰.۱۶۶۷	۴	۵	$X_{10}*$
۱	۰	۱۰۰	۱۰۰	$X_{11}*$
۲	-۰.۱۶۶۷	۴	۵	$X_{12}*$
۲	-۰.۱۶۶۷	۴	۴	$X_{13}*$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با وجود افزایش ابعاد بازی، نتایج بدست آمده ازهر سه معیار، کاملاً با هم سازگار هستند. البته باید توجه داشت که اگر میانگین تجاوز از محدودیتها، بزرگتر یا مساوی ۰.۲۹۱۷- باشد، میزان مقاومت با دو معیار کمّی، برابر با صفر ارزیابی می‌شود و لذا با در نظر گرفتن این دو معیار، مقاومت نقاط نش X_1* تا X_3*، با مقاومت X_4*، تفاوتی ندارد. نتایج این مثال نشان می‌دهد که شاخصهای پیشنهادی برای بازیهای با ابعاد بالا نیز معتبر هستند. از بین نقاط تعادل نش خالص این بازی، X_7^*، X_9^* و X_{12}^* که مقاوم‌تر از بقیه هستند،پایدار تکاملی نیز بوده و بقیه نقاط نش خالص، ویژگی پایداری تکاملی را ندارند.

مثال ۵.۷ (جستجوی پاسخهای مقاوم‌تر در همسایگی نقاط تعادل نش)

جدول ۱۶: مقادیر نامی ماتریسهای سود بازی

بازیکن اول	بازیکن دوم		
		S_{21}	S_{22}
	S_{11}	۲،۰	۰،۱
	S_{12}	۰،۱	۱،۰

این بازی فقط یک نقطه تعادل نش دارد: $X*=[(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3})]$ که میزان مقاومت آن با استفاده از شاخص اول، ۱۴ ٪ است. مسلماً این مقاومت در اغلب مسائل تصمیم‌گیری قابل اعتماد نخواهد بود. همان‌طور که اشاره شد، می‌توان با استفاده از الگوریتم ژنتیک در همسایگی $X*$،

[1] . Gambit

به دنبال پاسخهای مقاوم‌تر گشت. با بهره‌گیری از یک جمعیت پانزده نفره و پس از ۵۶ نسل، پاسخ $X_{new}=[(0.7066, 0.2934), (0.4585, 0.5415)]$ بدست می‌آید. فاصله اقلیدسی بین X_{new} و X^* برابر ۰.۰۸۱۴ بوده و اختلاف بین احتمالات این دو استراتژی از آستانه مجاز ، $\pm$ ۰.۰۵ ، بیشتر نیست. اما مقاومت X_{new} ، طبق معیار اول، ۲۷٪ است. یعنی با اعمال اندکی تغییرات روی احتمالات نقطه نش، میزان مقاومت آن تاحدود دو برابر بهبود یافته است. باید توجه داشت که X^*، تنها نقطه تعادل هم‌بسته این بازی نیز به شمار می‌رود. لذا نمی‌توان در مجموعه نقاط تعادل هم‌بسته، پاسخ مقاوم‌تری را پیدا کرد.

۸- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله دو معیار جدید برای ارزیابی مقاومت نقاط تعادل نش در حضور عدم قطعیت ارائه شد. با استفاده از این معیارها، می‌توان مقاومت نقاط نش را با هم مقایسه کرده و پاسخهایی را که نسبت به تغییرات سود بازی مقاوم‌تر هستند، انتخاب کرد. هم‌چنین در این مقاله دو روش جدید برای آنالیز مقاومت نقاط تعادل هم‌بسته ارائه شد. روش اول، یک معیار کمّی برای محاسبه مقاومت این نقاط بوده و روش دوم، یک معیار نسبی برای مقایسه آنها براساس رفتارشان در حضور عدم قطعیت به شمار می‌رود.

نتایج مثالهای عددی ، چند نکته جالب را نشان می‌دهند. اولاً همان‌طور که در نتایج همه مثالها ملاحظه می‌شود، نقاط نش خالص در صورت وجود، مقاوم‌تر از نقاط نش مختلط هستند. در مراجع، همین نتیجه برای مدلهای بازیهای بیزین، بدست آمده است. بنابراین در مورد بازیهای با مقادیر سود تقریبی، بهتر است در وهله اول به‌دنبال پاسخهای با استراتژی خالص باشیم و اگر چنین پاسخهایی وجود نداشت، جستجو برای پاسخهای مختلط را آغاز کنیم. دومین نکته‌ای که در نتایج مثالهای عددی ملاحظه می‌شود، آن است که در صورت وجود چند نقطه تعادل نش خالص برای یک بازی، آنهایی که پایدار تکاملی هستند، رفتاری مقاوم‌تر از بقیه دارند. همان‌طور که اشاره کردیم، استراتژیهای پایدار تکاملی، پاسخهای بازی تکاملی متناظر یک بازی کلاسیک بوده و زیر مجموعه‌ای از نقاط نش بازی کلاسیک هستند. نتایج مثالهای عددی نشان می‌دهند که در حضور عدم قطعیت، بهتر است به جای بازیهای کلاسیک، از مدلهای مبتنی بر بازیهای تکاملی استفاده کنیم، زیرا این مدلها، پاسخهای مقاوم‌تری را در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌دهند. در تئوری بازیهای کلاسیک فرض بر آن است که بازیکنان بسیار منطقی و عاقلانه رفتار می‌کنند، در حالیکه در محیطی که با عدم قطعیت همراه است، چنین رفتاری غیر منطقی و غیر عاقلانه خواهد بود! در مدلهای بازیهای تکاملی، بازیکنان با گذشت زمان و با روندی مشابه یادگیری تقویتی، یاد می‌گیرند که چگونه رفتار کنند و بنابراین رفتار آنها در برخورد با مسائل دنیای واقعی، منطقی‌تر وقابل اعتمادتر خواهد بود. در کارهای آینده به مقایسه رفتار بازیهای کلاسیک و تکاملی در حضور عدم قطعیت، خواهیم پرداخت.

ما در این مقاله، مدلهای بازیهای ایستا را در نظر گرفته و نتایج خود را برای مثالهایی از این بازیها ارائه کردیم. بازیهای ایستا، بازیهایی با حرکت هم‌زمان بازیکنان هستند. اما در بازیهای پویا (بازیهای فرم گسترده)، بازیکنان در زمانهای مختلف، تصمیمهای خود را اتخاذ می‌کنند و هر بازیکن، هنگام انتخاب تصمیم خود، حداقل از بخشی ازتصمیم‌گیریهای قبلی مطلع است. هر بازی پویا با یک بازی ایستا متناظر بوده و نقاط تعادل بازی پویا، زیرمجموعه‌ای از نقاط تعادل بازی ایستای متناظر هستند. لذا می‌توان با معیارهای ارائه شده در این مقاله، مقاومت نقاط تعادل نش فرم ایستای متناظر یک بازی پویا را بدست آورده و برای مقایسه پاسخهای بازی پویا نیز از آنها استفاده کرد. یعنی معیارهای ارائه شده در این مقاله، برای بازیهای پویا هم، قابل تعمیم و استفاده هستند. البته در کارهای آینده می‌توان بحث آنالیز مقاومت را مستقیماً در روند برگشت به عقب در نظر گرفته و معیارهایی را خاص بازیهای پویا ارائه داد.

هم‌چنین در کارهای آینده می‌توان به کمک قضایای ریاضی، مقاومت نقاط تعادل نش و نقاط هم‌بسته غیرنش را با یکدیگر مقایسه کرد. به علاوه استفاده از معیارهای پیشنهادی برای حل مسائل تصمیم‌گیری دنیای واقعی، نکته دیگری است که می‌تواند در کارهای آتی در نظر گرفته شود.

مراجع

[1] J. N. Webb, Game theory: Decisions, Interaction and Evolution, Springer, London, 2006.
[2] E. Rasmusen, Games and Information: An Introduction to Game Theory, Blackwell, 2000.
[3] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tordos and V. V. Vazirani, editors, Algorithmic Game Theory, Cambridge University Press, 2007.
[4] A.D. Procaccia and J. S. Rosenschein, " A computational characterization of multiagent games with fallacious rewards" , Proceedings of 6th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, USA, pp. 1152-1165, 2007.
[5] J. Harasanyi, "Games with incomplete information played by 'Bayesian' players: parts I-III", Management Science, vol. 14, no. 3, 1967.
[6] S. Zamir, "Bayesian Games: Games with incomplete information", Working Paper, 2008.
[7] J. Cremer and R. McLean, "Optimal selling strategies under uncertainty for a discriminating monopolist when demands are interdependent", Econometrica, vol. 53, no. 2, pp. 345–362, 1985
[8] D. Fudenberg, D. M. Kreps and D. K. Levine, "On the robustness of equilibrium refinements", Journal of Economic Theory, vol. 44, no. 2, pp. 354- 380, 1988.
[9] E. Dekel and D. Fudenberg, "Rational behavior with payoff uncertainty", Journal of Economic Theory, vol. 52, no. 2, pp. 243-267, 1990.

[10] A. Kajii and S. Morris, "The robustness of equilibria to incomplete information", Econometrica, vol. 65, no. 6, pp. 1283- 1309, 1997.

[11] S. Morris and T. Ui, "Generalized potentials and robust sets of equilibria", Journal of Economic Theory, vol. 124, pp. 45-78, 2005

[12] S. Hayashi, T. Yamaguchi, N. Yamashita and M. Fukushima "A matrix splitting method for symmetric affine second- order cone complementarity problems", Technical Report 2003-008, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, 2003.

[13] S. Hayashi, N. Yamashita and M. Fukushima, "Robust Nash Equilibria and second- order complemantarity problems", Journal of Nonlinear and Convex Analysis, vol. 6,pp. 283-296, 2005.

[14] R. Nishimura, S. Hayash and M. Fukushima, "Robust Nash equilibria in N- person non-cooperative games: uniqueness and reformulation", Pacific Joural of Optimization, vol. 5, pp. 237- 259, 2009.

[15] R. Nishimura, S. Hayashi and M. Fukushimay, "Semidefinite complementarity reformulation for robust Nash equilibrium problems with Euclidean uncertainty sets", Journal of Global Optimization, pp. 1-14, 2011.

[16] M. Marinacci, "Ambiguous games", Games and Economic Behavior, vol. 31, no. 2, pp. 191- 219, 2000.

[17] M. Aghassi and D. Bertsimas, "Robust game theory", Mathematical Programming, Series B, vol. 107, pp. 231-273, 2006.

[18] M. J. Lizarraga and L. Fridman, "Robust Nash strategies based on integral sliding mode control for a two players uncertain linear affine quadratic game", International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 5, no. 2, pp. 241-251, 2009.

[19] R. D. Mckelvey, "A liapunov function for Nash equilibria", Technical Report, California Institute of Technology, California, 1991.

[20] R. Lung and D. Dumitrescu, "An evolutionary model for solving multi- player non- cooperative games", Proceeding of International Conference on Knowledge Engineering, Romania, pp. 209-216, 2007.

[21] N. G. Pavlidis, K. E. Parsopoulos and M. N. Vrahatis, "Computing Nash equilibria through computational intelligence Methods", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 175, no. 1, pp. 113–136, 2005.

[22] C. H. Papadimitrio and T. Roughgarden, "Computing correlated equilibria in multi- player games", Journal of the ACM, vol 55, no. 3, 2008.

[23] R. Nau, G. S. Canovas and P. Hansen, "On the Geometry of Nash Equilibria and Correlated Equilibria", International Journal of Game Theory, vol. 32, no. 4, pp. 443- 453, 2003.

[24] R. Aumann, "Subjectivity and correlation in randomized strategies", Journal of Mathematical Economics, vol. 1, no. 1, pp. 67–96, 1974.

[25] J. C. Helton and F. J. Davis, "Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems", Reliability Engineering and System Safety, vol. 81, no. 1, pp. 23- 69, 2003.

[26] J.C. Helton, J. D. Johnson, C. J. Sallaberry and C. B. Storlie, "Survey of sampling- based methods for uncertainty and sensitivity analysis", Reliability Engineering and System Safety, vol. 91, no. 10, pp. 1175- 1209, 2006.

[27] L. Nillson, "Robustness analysis of Fe- models", M.S. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Lund University, Sweden, 2006.

[28] R. L. Iman, J. M. Davenport and D. K. Zeigler,"Latin hypercube sampling (A Program User's Guide)", Technical Report SAND79-1473, Sandia Laboratories, Albuquerque, 1980.

[29] J. M. Alexander, Evolutionary Game Theory, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2003.

[30] R. D. McKelvey, A. M. McLennan and T. L. Turocy, "Gambit: Software tools for game theory", 2010