

اجماع خروجی مشارکتی مقاوم H_∞ برای سیستم‌های چند عاملی ناهمگن پیوسته با استفاده از روش یادگیری تقویتی انتگرالی

امیر پرویز ولدبیگی^۱، علی خاکی صدیق^۲، علی معرفیان پور^۳، فرانک لویس^۴

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات تهران، amirp.valad@ieee.org

^۲ استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، sedigh@kntu.ac.ir

^۳ استادیار، دانشکده مهندسی برق و مکانیک، گروه کنترل، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات تهران، moarefian@srbiau.ac.ir

^۴ استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تگزاس آرلینگتون، lewis@uta.edu

پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۵

دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۸

چکیده: این مقاله به مسأله اجماع خروجی مشارکتی^۱ مقاوم در سیستم‌های چند عاملی ناهمگن پیوسته با گراف ارتباطی جهت‌دار می‌پردازد. حل استاندارد مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم با استفاده از روش p -کپی مدل داخلی^۲ است، که در این روش دانستن معادلات دینامیکی عوامل و عامل رهبر^۳ ضروری است. در این مقاله با استفاده از ایده سیستم کمکی معادل^۴، یک سیستم کمکی جدید برای حل مسأله به دست می‌آید. سپس مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم با محدودیت H_∞ به صورت یک مسأله کنترل H_∞ تبدیل می‌شود. با استفاده از روش یادگیری تقویتی انتگرالی (IRL)^۵ یک الگوریتم بدون مدل^۶ برای حل معادلات جبری ریکاتی مقاوم (RARE)^۷ بدون نیاز به مدل عوامل ارائه می‌شود. ثابت می‌شود که این روش معادلات تنظیم خروجی را نیز برآورده می‌سازد. نتایج شبیه‌سازی توانایی این روش در حل مسأله تنظیم خروجی مشارکتی مقاوم با محدودیت H_∞ را نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: اجماع خروجی مشارکتی مقاوم، سیستم کمکی معادل، کنترل H_∞ ، یادگیری تقویتی.

Cooperative Robust H_∞ Output Consensus in Continuous-Time Heterogeneous Multi-Agent Systems Using Integral Reinforcement Learning Method

Amir Parviz Valadbeigi, Ali Khaki Sedigh, Frank.I Lewis, Ali Moarefian Poor

Abstract: The Robust Cooperative Output Consensus (RCOC) in continuous time Heterogeneous Multi-Agent Systems with the directed graph is addressed. In the standard solution of the RCOC, the p -copy internal model method is used. This method requires dynamical equations of the agents and the leader. In the present paper, based on the equivalent auxiliary system method, a new auxiliary system is obtained. Then, the RCOC is transformed to a H_∞ control problem. Moreover, a model-free algorithm is proposed to solve the Robust Algebraic Riccati Equation using the Integral Reinforcement Learning (IRL) method. It is shown that the proposed method satisfies the output regulation equations. A simulation example verifies the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Robust Cooperative Output Consensus, Equivalent Auxiliary System, H_∞ Control, Reinforcement Learning.

¹ Cooperative Output Consensus

² P-copy Internal Model

³ Leader

⁴ Equivalent Auxiliary System

⁵ Integral Reinforcement Learning

⁶ Model-Free

⁷ Robust Algebraic Riccati Equation

۱- مقدمه

کنترل توزیع شده سیستم‌های چند عاملی^۱ به علت قابلیت‌های بالا به صورت گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف علوم مهندسی استفاده شده است [۱] [۲-۴]. در حل مسأله اجماع، قانون کنترل که تنها به اطلاعات همسایگان وابسته است، به گونه‌ای طراحی می‌شود که شبکه متشکل از عوامل به یک مقدار مورد نظر همگرا گردند [۵، ۶]. مسأله اجماع در دو دسته کلی مورد توجه قرار گرفته است. دسته اول سیستم‌های چندعاملی همگن^۲ هستند (کلیه عوامل دینامیک یکسان دارند). در این حالت مسأله اجماع به صورت دومسأله اجماع بدون رهبر و مسأله ردیابی رهبر- دنبال کننده^۳ مطرح می‌شود. روش حل به این صورت است که یک کنترل کننده پایدار ساز برای یک عامل تنها طراحی می‌شود، سپس یک محدودیت عددی که به گراف ارتباطی وابسته است به دست می‌آید. حل این مسائل به پاسخ یک سری معادلات جبری ریکاتی یا ناتساوی ماتریسی^۴ خطی وابسته است [۳، ۴، ۷]. دسته دیگر سیستم‌های چند عاملی ناهمگن^۵ هستند [۸-۱۰]. که از مهم ترین مسائل مطرح شده برای این نوع سیستم‌ها می‌توان به اجماع خروجی مشارکتی اشاره نمود. به دلیل وجود عدم قطعیت در سیستم‌های عملیاتی، توسعه روش‌های اجماع خروجی مشارکتی در حضور نامعینی یکی از مسائل مهم در این حوزه است. این روش‌ها در دو حوزه سیستم‌های گسسته و پیوسته مطرح شده‌اند. روش استاندارد در حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم استفاده از p -کپی مدل داخلی است [۱۱] [۱۲]. در این روش با به کار بردن کنترل کننده‌های توزیع شده- ای که در ساختار آنها از p -کپی مدل داخلی استفاده شده است، مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم حل می‌شود. در [۱۳] و [۱۴]، [۱۵] مسأله تنظیم خروجی مشارکتی مقاوم برای دسته‌ای از سیستم‌های چند عاملی نامعین غیر خطی مورد مطالعه قرار گرفته و برای حل این مسأله ابتدا یک مدل داخلی غیر متمرکز برای سیستم معرفی شده، سپس مسأله تنظیم خروجی مقاوم به مسأله پایدار سازی مقاوم سراسری سیستم چند عاملی افزوده^۶ تبدیل شده است و با استفاده از این سیستم افزوده، حل مسأله بررسی شده است. در [۱۶] مسأله تنظیم خروجی مشارکتی سیستم‌های چند عاملی توصیفی بررسی گردیده است. برای حل مسأله رویکردهای غیر متمرکز کلی پیشنهاد شده است که وظیفه آنها به دست آوردن تخمین حالات با توجه به سیستم بیرونی است. سپس کنترل کننده‌های فیدبک خروجی تکین^۷ غیر متمرکز برای حل این مسأله طراحی شده‌اند. در [۳] مسأله تنظیم خروجی مشارکتی برای سیستم‌های چند عاملی خطی با گراف ارتباطی جهتدار با وجود یک سیستم بیرونی که خروجی آن تنها برای بخشی از زیر سیستم‌ها در دسترس است بررسی شده است. برای زیر

سیستم‌های خطی نامعین از یک رویکرد غیر متمرکز استفاده شده است، سپس با استفاده از اصل مدل داخلی^۸ کنترل کننده مناسب طراحی شده است. نقطه قوت این مقاله استفاده از پروتکل‌های تطبیقی است که باعث می‌شود مسأله به صورت کاملاً توزیع شده^۹ حل شود. در این حالت نیازی به اطلاعات کلی در مورد شبکه نیست و تنها از اطلاعات محلی برای حل مسأله استفاده می‌شود. در [۱۷] یک مدل کلی برای مسأله تنظیم خروجی در نظر گرفته شده است که گراف ارتباطی بین عوامل یک گراف جهتدار است. در این مقاله نشان داده شده است که شرایط کافی برای وجود فیدبک حالت و خروجی، بر اساس نرم H_∞ قابل بیان است. در بیشتر روش‌های موجود دینامیک‌های عوامل به صورت یکسان و نامعینی‌های هر یک از عوامل به صورت متفاوت در نظر گرفته می‌شود. همچنین در روش‌های ارائه شده برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی، دانستن دینامیک‌های عوامل ضروری است.

یادگیری تقویتی یکی از روشهای یادگیری ماشین است که بطور گسترده‌ای در مسائل کنترل بهینه استفاده شده است. در این روش در هر گام هر یک از عوامل یادگیری تقویتی، یک بازخورد ارزیابی در مورد عملکرد خود دریافت می‌کند و بر اساس آن عملکردش را بهبود میبخشد. در بین روشهای موجود یادگیری تقویتی تکرار سیاست^{۱۰} بطور گسترده‌ای در طراحی کنترل کننده‌ها استفاده شده است. بخصوص این روش برای حل مسائل تنظیم کننده‌های درجه دوم خطی^{۱۱} (LQR) در محیط‌های پیوسته و گسسته استفاده شده است. یکی دیگر از کاربردهای روش یادگیری تقویتی حل مسائل مربوط به کنترل H_∞ است. حل مسأله کنترل H_∞ ارتباط نزدیکی با مسأله بازی با جمع صفر^{۱۲} دارد. یافتن پاسخ مسأله بازی با جمع صفر در سیستم‌های خطی به حل یک معادله جبری ریکاتی منجر می‌شود که این معادله را می‌توان با استفاده از روشهای یادگیری تقویتی حل نمود [۱۸-۲۱]. روشهای یادگیری تقویتی برای حل مسأله اجماع در حوزه سیستم‌های چند عاملی نیز استفاده شده است. اکثر روشهای موجود برای حل مسأله اجماع خروجی وابسته به یافتن پاسخ معادلات تنظیم خروجی^{۱۳} است. اما حل معادلات تنظیم خروجی نیازمند داشتن اطلاعات دقیق از دینامیک سیستم است. در [۲۲] و [۲۳] دو روش برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی ارائه شده است. این روش‌ها بدون نیاز به دینامیک‌های عوامل مسأله اجماع خروجی را حل می‌کند. با این وجود در این مقالات اثر وجود نامعینی و اغتشاش در نظر گرفته نشده است.

با توجه به موارد یاد شده در این مقاله یک راهکار جدید برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم ارائه می‌گردد. این روش مسأله

⁸ Internal Model Principle

⁹ Fully Distributed

¹⁰ Policy Iteration

¹¹ Linear Quadratic Regulator

¹² Zero-Sum Game Problem

¹³ Output Regulation Equations

¹ Distributed Control of Multi-Agent Systems

² Homogeneous

³ Leader-follower

⁴ Linear Matrix Inequality

⁵ Heterogeneous

⁶ Augmented Systems

⁷ Singular

سیستم چند عاملی نامعین زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_{wi} x_i(t) + B_{wi} u_i(t) + B_i d_i(t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که بردار حالت عامل i ام، $x_i \in R^{n_i}$ ، ورودی $u_i \in R^{m_i}$ ، ورودی کنترل، $d_i(t) \in R^l$ ، ورودی اغتشاش و $y_i \in R^p$ خروجی اندازه گیری شده هستند. همچنین ماتریس‌های A_{iw} ، B_{iw} ، B_i ($i=1, \dots, N$) ماتریس‌های نامعین هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} A_{iw} &= A_i + \delta A_i, \quad B_{iw} = B_i + \delta B_i \\ \delta A_i &= H_i F_i(t) E_{1i}, \quad \delta B_{1i} = H_i F_i(t) E_{2i} \\ F_i^T(t) F_i(t) &\leq I \end{aligned} \quad (2)$$

δA_i ، δB_i نشان دهنده نامعینی‌های موجود در سیستم هستند، همچنین که H_i ، E_{1i} ، E_{2i} ماتریس‌هایی معلوم هستند. ماتریس‌های A_i و B_i ماتریس‌های سیستم نامعین با ابعاد مناسب هستند. $F_i(t) \in R^{l \times m}$ تابع ماتریسی نامشخص است که $F_i^T(t) F_i(t) \leq I$ برای سادگی کلیه مقادیر نامعینی را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$w = (\text{vec}(\delta A_1, \dots, \delta A_N), \text{vec}(\delta B_1, \dots, \delta B_N)) \quad (3)$$

تعریف ۱: برای ماتریس $X = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ ($x_i \in R^n$)، $\text{vec}(X) = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ که در این رابطه $\text{col}(x_1, x_2, \dots, x_m) = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_m^T]^T$ است.

فرض کنید دینامیک عامل رهبر به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_0 &= S \varepsilon_0 \\ y_0 &= R \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (4)$$

که $\varepsilon_0 \in R^q$ دینامیک رهبر یا مسیر مرجعی است که باید توسط دنبال کنندگان ردیابی شود. $y_0 \in R^p$ خروجی عامل رهبر است. ماتریس $S \in R^{p \times q}$ ، ماتریس دینامیک رهبر و $R \in R^{p \times q}$ ماتریس خروجی است.

فرض‌های استاندارد زیر در حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم در نظر گرفته می‌شوند:

فرض ۱: (A_i, B_i) پایدار پذیر و (A_i, C_i) آشکار پذیر هستند.

فرض ۲: بخش حقیقی مقادیر ویژه ماتریس S نامنفی است.

فرض ۳:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_i - \lambda I & B_i \\ C_i & 0 \end{bmatrix} = n + p \quad \lambda \in \sigma(S) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

($\sigma(S)$ مجموعه مقادیر ویژه S است).

فرض ۴: گراف دارای درخت پوشا است و عامل رهبر حداقل با یک عامل در ارتباط است.

اجماع خروجی مشارکتی مقاوم را با در نظر گرفتن نامعینی‌های موجود در مدل عوامل حل می‌نماید. لازم به ذکر است که در این حالت دینامیک‌های عوامل نیز به صورت ناهمگن در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از ساختار سیستم کمکی معادل، مسأله اجماع خروجی مقاوم به یک مسأله کنترل H_∞ تقلیل یافته تبدیل می‌شود. جهت تضمین پایداری سیستم حلقه بسته یک حد بالا برای ضریب تقلیل به دست می‌آید. ثابت می‌شود که روش پیشنهادی معادلات تنظیم خروجی برای سیستم نامعین را برآورده می‌سازد. با استفاده از ساختار سیستم کمکی معادل، یک الگوریتم یادگیری تقویتی انتگرالی برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم پیشنهاد می‌گردد. این الگوریتم مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم را بدون نیاز به مدل عوامل حل می‌کند.

۲- مقدمات و فرموله سازی مسأله

در این بخش مقدمه‌های کوتاه در مورد نظریه گراف و همچنین حل استاندارد مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم بیان می‌شود.

۲-۱ نظریه گراف

گیریم $G = \{V, \varepsilon, A\}$ یک گراف جهتدار^۱ باشد، $V = \{1, 2, \dots, N\}$ مجموعه‌ای از گره‌هاست که گره i ام نشان دهنده یک عامل است. $\varepsilon \in V \times V$ مجموعه‌ای از یال‌هاست. زوج مرتب $(j, i) \in \varepsilon$ نشان می‌دهد که عامل i می‌تواند اطلاعات را از عامل j دریافت کند. عامل j را همسایه عامل i گویند. مجموعه همسایگان عامل i ام را با N_i نمایش می‌دهند. در این مقاله فرض می‌شود که گراف ساده است $(i, i) \notin \varepsilon$ ، ماتریس مجاورت^۲ $A = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$ با وزنهای a_{ij} به گونه‌ای است که اگر $(j, i) \in \varepsilon$ باشد آنگاه $a_{ij} > 0$ و $a_{ij} = 0$ اگر $(j, i) \notin \varepsilon$. درجه داخلی^۳ گره i به صورت $d_{in}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ تعریف می‌شود. ماتریس قطری درون درجه به صورت $D = \text{diag}(d_{in}(i))$ تعریف می‌شود. ماتریس لاپلاسیان گراف عبارت است از $L = D - A$. یک درخت جهتدار، یک گراف جهتدار متصل است به طوری که هر گره به جز یکی که گره ریشه^۴ نامیده می‌شود، دارای درجه داخلی ۱ باشد. درخت پوشا^۵ در یک گراف، یک درخت جهتدار است که کلیه گره‌های یک گراف را به هم متصل می‌کند. بهره اتصال g یک است، اگر گره به گره رهبر متصل باشد، در غیر این صورت صفر است. ماتریس اتصال G به صورت $G = \text{diag}(g_i)$ تعریف می‌شود [۲۴].

۲-۲ حل استاندارد مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم

⁴ Root Node

⁵ Spanning Tree

¹ Directed Graph

² Adjacency Matrix

³ In-Degree

مشخصه مینیمال β یکسان است. در حالت خاص می‌توان (G_1, G_2) را به صورت P - کپی مدل داخلی در نظر گرفت.

با توجه به (۷) و تعریف ۲ قانون کنترل فیدبک حالت دینامیکی توزیع شده برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم به صورت زیر ارائه می‌شود [۱۱]

$$u_i(t) = K_x \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) + a_{i0} x_i(t) \right) + K_z \eta_i(t) \quad (10)$$

$$\dot{\eta}_i(t) = G_1 \eta_i(t) + G_2 e_{iv}$$

که K_x, K_z و $\eta_i(t) \in R^{n_i}$ ماتریس‌های طراحی هستند. لازم به ذکر است می‌توان از قانون کنترل فیدبک دینامیکی خروجی نیز برای حل این مسأله نیز استفاده نمود. ثابت می‌شود که استفاده از قانون کنترل (۱۰) مسأله ۱ را حل می‌کند. همچنین سبب می‌شود معادلات تنظیم خروجی زیر برآورده شوند [۱۱، ۲۷].

$$\begin{aligned} A_{iw} \Pi_{iw} + B_{iw} \Gamma_{iw} &= \Pi_{iw} S \\ C_i \Pi_{iw} &= R \end{aligned} \quad (11)$$

که $\Gamma_{iw} \in R^{m_i \times p}$ و $\Pi_{iw} \in R^{n_i \times p}$ هستند.

تذکره ۱: همانطور که از معادلات (۱۰) مشخص است، در این ساختار دینامیک کلیه عوامل و همچنین دینامیک عامل رهبر برای به دست آوردن قانون کنترل توزیع شده مورد نیاز است.

۳- روش پیشنهادی حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم با استفاده از معادلات سیستم کمکی افزوده

با توجه به راه حل استاندارد که در بخش قبل ارائه شد، در این روش داشتن اطلاعات کامل دینامیک‌های سیستم ضروری است. در ادامه با استفاده از ایده سیستم کمکی افزوده، کنترل کننده توزیع شده‌ای ارائه می‌شود که بدون استفاده از p - کپی مدل داخلی و همچنین بدون در اختیار داشتن اطلاعات سیستم مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم با معیار H_∞ را حل می‌کند. ساختار کلی این کنترل کننده به صورت زیر است

$$u_i(t) = K_{1i} x_i(t) + K_{2i} e_0(t) \quad (12)$$

سیستم افزوده که به صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= A'_i X_i + \Delta A'_i X_i + B'_{1i} u_i + B'_{2i} w_i \\ z_i &= e_i = y_i - y_0 = C_{1i} X_i \end{aligned} \quad (13)$$

که $X_i = \begin{bmatrix} x_i^T & e_0^T \end{bmatrix}^T$ بردار حالت سیستم افزوده است. ماتریس‌های $A'_i, \Delta A'_i, B'_{1i}, B'_{2i}, C_{1i}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

تعریف ۲: سیستم (۱) دارای بهره L_2 (نرم H_∞) تقلیل یافته^۱ محدود به γ اگر

$$J_i = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)} \left(\|z_i\|^2 - \gamma^2 \|w_i\|^2 \right) d\tau < 0 \quad (5)$$

در این رابطه γ ضریب تضعیف اغتشاش، α ضریب تقلیل و z_i خروجی کنترل شده هستند.

مسأله اصلی مورد بحث در این مقاله به صورت زیر بیان می‌شود.

مسأله ۱ (تنظیم خروجی مشارکتی مقاوم با معیار تقلیل یافته H_∞):

هدف از مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم با محدودیت H_∞ ، طراحی کنترل کننده توزیع شده $u_i(t)$ برای کلیه عوامل در معادله (۱) است چنانکه [۲۵]، [۲۶]، [۱۱]:

۱. ماتریس سیستم حلقه بسته نامی A_{C0} هرویتز باشد.

۲. یک همسایگی W از $w = 0$ وجود داشته باشد که برای

خطای ردیابی سیستم حلقه بسته رابطه زیر صادق باشد (به ازای $d_i(t) = 0$)

$$J_i = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)} \left(\|z_i\|^2 - \gamma^2 \|w_i\|^2 \right) d\tau < 0 \quad (6)$$

$$J_i = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)} \left(\|z_i\|^2 - \gamma^2 \|w_i\|^2 \right) d\tau < 0$$

که γ ضریب تضعیف اغتشاش است.

در ادامه روش استاندارد حل مسائل کنترل اجماع خروجی مشارکتی مقاوم ارائه می‌گردد.

خروجی تنظیم شده مجازی^۲ e_{iv} برای زیر سیستم i ام به صورت زیر تعریف می‌شود

$$e_{iv} = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (y_i - y_j) \quad (7)$$

تعریف ۳: زوج ماتریس (M_1, M_2) ، p - کپی مدل داخلی ماتریس S گفته می‌شود اگر

$$M_1 = F \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & G_1 \end{bmatrix} F^{-1}, \quad M_2 = F \begin{bmatrix} T_3 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

که T_i ($i = 1, 2, 3$) ماتریس‌های با ابعاد مناسب هستند. F یک ماتریس ناویژه است و

$$G_1 = \text{block diag} (\underbrace{\beta, \dots, \beta}_p) \quad (9)$$

$$G_2 = \text{block diag} (\underbrace{\sigma, \dots, \sigma}_p)$$

β یک ماتریس مربعی است و σ یک بردار ستونی است، چنانکه (β, σ) کنترل پذیر و چند جمله‌ای مشخصه مینیمال S با چند جمله‌ای

² Virtual Regulated Output

¹ Discounted Factor

که در این رابطه $V_i^*(X_i(t))$ تابع ارزش بهینه است. این بازی با جمع صفر دارای جواب منحصر بفرد است اگر و فقط اگر شرط تعادل نش زیر برقرار باشد [۲۱].

$$V_i^*(X_i(t)) = \min_{u_i} \max_{\tilde{d}_i} J_{2i}(u_i, \tilde{d}_i) \tag{۲۲}$$

$$= \max_{\tilde{d}_i} \min_{u_i} J_{2i}(u_i, \tilde{d}_i)$$

با توجه به روابط (۲۰) و (۲۲) تابع همیتونین به صورت زیر به دست می‌آید

$$H_i(V_i, u_i, \tilde{d}_i) = X_i^T Q_{\zeta_i} X_i + 2X_i^T \left(\frac{1}{\zeta_i} E_{1i}^T E_{2i} \right) u_i + u_i^T R_{\zeta_i} u_i - \tilde{d}_i^T \tilde{d}_i - \alpha V_i + (2P_i X_i)^T (A_i' X_i + B_{1i}' u_i + [\sqrt{\zeta_i} H_i' \quad \gamma_i^{-1} B_{2i}'] \tilde{d}_i)$$

با اعمال شرایط ایستایی $\frac{\partial H}{\partial \tilde{d}_i} = 0, \frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$ ، کنترل بهینه و ورودی اغتشاش به صورت زیر به دست می‌آیند

$$u_i^*(t) = -R_{\zeta_i}^{-1} \left(B_{1i}'^T P_i + \frac{E_{2i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} \right) X_i(t) = -R_{\zeta_i}^{-1} \left([B_{1i}' P_{11} \quad B_{1i}' P_{11}] + [E_{1i}'^T E_{2i}' \quad 0] \right) \begin{bmatrix} x_i \\ \varepsilon_0 \end{bmatrix} \tag{۲۴}$$

$$\tilde{d}_i^*(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{\zeta_i} H_i'^T \\ \gamma_i^{-1} B_{2i}'^T \end{bmatrix} P_i X_i(t)$$

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i \end{bmatrix}$$

جایگذاری (۲۴) در (۲۳) و همچنین با توجه به اینکه

$$H(V_i^*, u_i^*, \tilde{d}_i^*) = 0$$

$$A_i'^T P_i + P_i A_i' + Q_{\zeta_i} - \left(\frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} + P_i B_{1i}' \right) R_{\zeta_i}^{-1} \left(\frac{E_{1i}'^T E_{2i}'}{\zeta_i} + P_i B_{1i}' \right)^T + P_i \left(\zeta_i H_i' H_i'^T + \gamma_i^{-2} B_{2i}'^T B_{2i}' \right) P_i - \alpha P_i = 0 \tag{۲۵}$$

با حل معادله جبری ریکاتی (۲۵) ماتریس P_i به دست می‌آید، با استفاده از ماتریس P_i می‌توان قانون کنترل (۲۴) را محاسبه نمود.

قضیه زیر نشان می‌دهد با اعمال قانون کنترل (۲۴) و با انتخاب ضریب تقلیل به گونه‌ای که در شرایط قضیه زیر صدق کند مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم حل می‌شود.

قضیه ۲: فرض کنید که سیاست کنترلی (۲۴) به سیستم (۱) اعمال شود. آنگاه $(A_i + B_{1i}' K_i)$ پایدار است و خطای محلی $e_i = y_i - y_0$ با گذشت زمان به صفر میل می‌کند، اگر حد بالای ضریب تقلیل به صورت زیر بیان شود.

$$A_i' = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, B_{1i}' = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{bmatrix}, B_{2i}' = \begin{bmatrix} B_{2i} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

$$C_{1i} = [C_i \quad -R]$$

$$\Delta A_i' = \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = H_i' F' E_{1i}', \Delta B_i' = H_i' F' E_{2i}' \tag{۱۵}$$

$$H_i' = \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F' = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{۱۶}$$

$$E_{1i}' = \begin{bmatrix} E_{1i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{2i}' = \begin{bmatrix} E_{2i} \\ 0 \end{bmatrix}$$

جهت یافتن قانون کنترلی که مسأله ۱ را حل کند، شاخص عملکرد زیر را در نظر بگیرید

$$J_i(x_i, u_i, w_i) = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)} [z_i^T z_i - \gamma_i^2 d_i^T d_i] d\tau \tag{۱۷}$$

قضیه زیر نحوه به دست آوردن سیستم کمکی معادل که برای حل مسأله ۱ استفاده می‌شود را بیان می‌کند [۳۱].

قضیه ۱: دینامیک عامل نامعین \dot{w}_i را در نظر بگیرید، این سیستم پایدار مقاوم با معیار H_∞ تقلیل یافته است اگر و فقط اگر سیستم کمکی زیر

$$\dot{X}_i = A_i' X_i + B_{1i}' u_i + [\sqrt{\zeta_i} H_i' \quad \gamma_i^{-1} B_{2i}'] \tilde{d}_i$$

$$\tilde{z}_i = \begin{bmatrix} E_{1i}' \\ \sqrt{\zeta_i} \end{bmatrix} X_i + \begin{bmatrix} E_{2i}' \\ 0 \end{bmatrix} u_i \tag{۱۸}$$

پایدار باشد و شرط زیر را بر آورده سازد

$$J_{2i}(x_i, u_i, \tilde{d}_i) = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)} [\tilde{z}_i^T \tilde{z}_i - \tilde{d}_i^T \tilde{d}_i] d\tau < 0 \tag{۱۹}$$

در رابطه فوق ضریب تضعیف اغتشاش ۱ است. همچنین $\tilde{d}_i \in R^{l+m}$ و $\tilde{z}_i \in R^{p+m}$ عدد ζ_i یکی از پارامترهای طراحی برای مسأله کنترل مقاوم با معیار تقلیل یافته است.

حال با توجه به قضیه ۱ می‌توان از سیستم کمکی معادل و شاخص (۱۹) برای حل مسأله ۱ استفاده نمود. برای این کار رابطه (۱۸) را در رابطه (۱۹) جایگذاری می‌کنیم، در نتیجه به دست می‌آید

$$J_{2i}(x_i, u_i, \tilde{d}_i) = \int_t^\infty e^{-\alpha(\tau-t)} \left[x_i^T \left(\frac{1}{\zeta_i} E_{1i}'^T E_{2i}' + C_{1i}'^T C_{1i}' \right) x_i + u_i^T \left(\frac{E_{2i}'^T E_{1i}'}{\zeta_i} \right) u_i + 2x_i^T \left(\frac{E_{2i}'^T E_{1i}'}{\zeta_i} \right) u_i - \tilde{d}_i^T \tilde{d}_i \right] d\tau \tag{۲۰}$$

$$V_i^*(X_i(t)) = J_{2i}(u_i^*, \tilde{d}_i^*) = \min_{u_i} \max_{\tilde{d}_i} J_{2i}(u_i, \tilde{d}_i) \tag{۲۱}$$

^۱ Stationarity Conditions

$$A_i^T P_{11}^i + P_{11}^i A_i + Q_{\zeta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i} \quad (۳۱)$$

$$+ P_{11}^i (B_{1i} R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T + 2\zeta_i H_i H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i} B_{2i}^T) P_{11}^i - \alpha_i P_{11}^i = 0$$

سیستم حلقه بسته برای $\tilde{d}_i(t) = 0$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{X}_i = \left(A_i' - R_{\zeta_i}^{-1} \left(B_{1i}^{T'} P_i + \frac{E_{2i}^{T'} E_{2i}'}{\zeta_i} \right) \right) X_i \quad (۳۲)$$

آنگاه با توجه به روابط (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) می‌توان از رابطه (۳۲) نتیجه گرفت:

$$\dot{x}_i = \left(A_i - R_{\zeta_i}^{-1} \left(B_{1i}^T P_{11}^i + \frac{E_{2i}^T E_{2i}}{\zeta_i} \right) \right) x_i = A_{ci} x_i \quad (۳۳)$$

از روابط (۳۱) و (۳۳) می‌توان نتیجه گرفت:

$$A_{ci}^T P_{11}^i + P_{11}^i A_{ci} + Q_{\zeta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i} + P_{11}^i (B_{1i} R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T + 2\zeta_i H_i H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i} B_{2i}^T) P_{11}^i - \alpha_i P_{11}^i = 0 \quad (۳۴)$$

برای یافتن حد بالای α_i جهت تضمین پایداری دینامیک حلقه بسته، فرض کنید λ_i مقدار ویژه ماتریس A_{ci} باشد. از جبرخطی به یاد داریم $r_i = \lambda_i r_i$ که بردار ویژه متناظر λ_i است. آنگاه با ضرب r_i^T از چپ و راست در رابطه (۳۴) می‌توان نتیجه گرفت:

$$r_i^T (A_{ci}^T P_{11}^i + P_{11}^i A_{ci} + Q_{\zeta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i} + P_{11}^i (B_{1i} R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T + 2\zeta_i H_i H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i} B_{2i}^T) P_{11}^i - \alpha_i P_{11}^i) r_i = 0 \quad (۳۵)$$

رابطه (۳۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$2(\operatorname{Re}(\lambda_{ci}) - 0.5\alpha_i) r_i^T P_{11}^i r_i = -r_i^T \left(Q_{\zeta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i} \right) r_i \quad (۳۶)$$

$$-r_i^T (P_{11}^i (B_{1i} R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T + 2\zeta_i H_i H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i} B_{2i}^T) P_{11}^i) r_i$$

با توجه به رابطه $a^2 + b^2 \geq 2ab$ و همچنین $P_{11}^i > 0$ از رابطه فوق

می‌توان نتیجه گرفت:

$$(\operatorname{Re}(\lambda_i) - 0.5\alpha_i) \leq - \left\| \left(Q_{\zeta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i} \right)^{-1} \right\| \left\| \left(G_i (P_{11}^i)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \right\| \quad (۳۷)$$

با استفاده از نامساوی $\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$ ، آنگاه رابطه (۳۷) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i - 0.5\alpha_i) \leq - \left\| \left(G_i Q_{i-new} \right)^{\frac{1}{2}} \right\| \quad (۳۸)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq .05\alpha_i - \left\| \left(G_i Q_{i-new} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|$$

$$\alpha_i \leq 2 \left\| \left(G_i Q_{i-new} \right)^{\frac{1}{2}} \right\| \quad (۲۶)$$

$$Q_{i-new} = \left(Q_{\zeta_i}^{11} - \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E_{1i}}{\zeta_i} \right)$$

$$G_i = (B_{1i} R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T + 2\zeta_i H_i H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i} B_{2i}^T)$$

اثبات: ماتریس P_i را در نظر بگیرید که به صورت زیر بخش بندی شده است:

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i \end{bmatrix} \quad (۲۷)$$

با محاسبات ریاضی نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$A_i^T P_i = \begin{bmatrix} A_i^T & 0 \\ 0 & S^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i^T P_{11}^i & A_i^T P_{12}^i \\ * & * \end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

$$P_i A_i = \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^i A_i & * \\ P_{21}^i A_i & * \end{bmatrix}$$

$$P_i (\zeta_i H_i^T H_i + \gamma_i^{-2} B_{2i}^T B_{2i}) P_i = \begin{bmatrix} \zeta_i \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \gamma_i^{-2} \begin{bmatrix} B_{2i} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{2i}^T & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} P_i = \begin{bmatrix} P_{11}^i (2\zeta_i H_i H_i^T + \gamma_i^{-2} B_{2i} B_{2i}^T) & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad (۲۹)$$

$$Q_{\zeta_i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\zeta_i} E_{1i}^T E_{1i} + C_i^T C_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta_i} E_{1i}^T E_{1i} \end{bmatrix}$$

$$E_{1i}^{T'} E_{2i}' = \begin{bmatrix} E_{1i}^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1i}^T E_{2i} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_i B_{1i}' = \begin{bmatrix} P_{11}^i & P_{12}^i \\ P_{21}^i & P_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^i B_{1i} \\ P_{21}^i B_{1i} \end{bmatrix}$$

$$E_{1i}^{T'} E_{2i}' + P_i B_{1i}' = \begin{bmatrix} \frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} + P_{11}^i B_{1i}' \\ P_{21}^i B_{1i} \end{bmatrix} \quad (۳۰)$$

$$(E_{1i}^{T'} E_{2i}' + P_i B_{1i}') R_{\zeta_i}^{-1} \left(\frac{E_{1i}^{T'} E_{2i}'}{\zeta_i} + P_{11}^i B_{1i}' \right)^T = \begin{bmatrix} \left(\frac{E_{1i}^T E_{2i}}{\zeta_i} + P_{11}^i B_{1i}' \right) & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

با توجه به روابط (۲۵)، (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= X_i^T (P_i A_{cl_i} + A_{cl_i}^T P_i) X_i \\ A_{cl_i} &= \begin{bmatrix} A'_i + B'_{li} K_{li} & B'_{li} K_{2i} \\ 0 & S \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

اگر شرط (۲۶) برقرار باشد آنگاه $A'_i + B'_{li} K_{li}$ هرویتز است. با توجه به اینکه مقادیر ویژه S بر روی محور حقیقی قرار دارند و پایدار مرزی است. بنابراین یک $Q_i > 0$ وجود دارد که $\dot{V}_i(X_i) = -X_i^T Q_i X_i \leq 0$ حالت از قضیه مجموعه نامتغیر^۱ نتیجه گرفت X_i به سمت بزرگترین مجموعه نامتغیر همگرا می‌شود ($\dot{V}_i(X_i) = 0$) و می‌دانیم $\dot{V}_i(X_i) = 0$ است اگر $P_i X_i = 0$ در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

پاسخ معادلات تنظیم خروجی (۱۱) را می‌توان برحسب پاسخ معادله ریکاتی (۳۱) بیان نمود. فرض کنید فضای پوچی P_i به صورت زیر تعریف شود

$$M_i = \{X_i \neq 0 : P_i X_i = 0\} \quad (45)$$

در مرجع [۲۲] روابط بین $x_i(t)$ و $\varepsilon_i(t)$ برای حالت گسسته بیان شده است. به روشی مشابه می‌توان نشان داد که

$$x_i(t) = -(P_i^{11})^{-1} P_i^{12} \varepsilon_i(t) \quad (46)$$

با توجه به این رابطه، در لم ۱ رابطه بین پاسخ‌های معادلات تنظیم (۱۱) و پاسخ معادله ریکاتی مربوط به مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم به دست می‌آید.

تذکره ۲: در مسأله اجماع خروجی مشارکتی بر اساس پاسخ‌های معادلات تنظیم خروجی (Π_{iw}, Γ_{iw}) ، کنترل کننده‌ای به شکل زیر پیشنهاد می‌شود [۲۳]

$$u_i(t) = \bar{K}_i(x_i(t) - \Pi_{iw} \varepsilon_i(t)) + \Gamma_{iw} \varepsilon_i(t) \quad (47)$$

که در این رابطه \bar{K}_i بهره فیدبک حالتی است که $A_{iw} + B_i \bar{K}_i$ پایدار می‌سازد. همچنین ε_i تخمین حالت دینامیک رهبر برای عامل i ام است که به صورت زیر به دست می‌آید، که c بهره اتصال^۲ است.

$$\dot{\varepsilon}_i = S \varepsilon_i + c \left[\sum_{j=1}^N a_{ij} (\varepsilon_j - \varepsilon_i) + g_i (\varepsilon_0 - \varepsilon_i) \right] \quad (48)$$

لم ۱: فرض کنید P_i پاسخ معادله جبری ریکاتی (۲۵) باشد و $K_i^* = [K_{li}^* \ K_{2i}^*]$ باشند، آنگاه معادلات تنظیم خروجی (۱۱) با در نظر گرفتن مقادیر زیر برآورده می‌شوند

$$\begin{aligned} \Pi_i &= -(P_i^{11})^{-1} P_i^{12} \\ \Gamma_i &= K_{2i}^* - K_{li}^* (P_i^{11})^{-1} P_i^{12} \end{aligned} \quad (49)$$

اثبات: با توجه به رابطه (۲۶) می‌توان نوشت

با توجه به این محاسبات، دینامیک حلقه بسته در صورتی پایدار است (ماتریس $(A_i + B_{li} K_i)$ هرویتز باشد) که شرط (۲۶) برقرار باشد. می‌توان نتیجه گرفت اگر رابطه (۲۶) برقرار باشد آنگاه $(A_i + B_{li} K_i)$ هرویتز است. معادله ریکاتی (۳۱) نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} X_i^T (A_i^T P_i + P_i A_i + Q_{\zeta_i} \\ - \left(\frac{E_{li}^T E'_{2i}}{\zeta_i} + P_i B_{li} \right) R_{\zeta_i}^{-1} \left(\frac{E_{li}^T E_{2i}}{\zeta_i} + P_i B'_{li} \right)^T \\ + P_i (\zeta_i H_i^T H_i + \gamma^{-2} B_{2i}^T B_{2i}) P_i - \alpha P_i) X_i = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

می‌توان دید که اگر $P_i X_i = 0$ باشد، آنگاه $(X_i^T (Q_{\zeta_i} - \frac{E_{li}^T E'_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{li}^T E'_{li}}{\zeta_i}) X_i = 0)$ $\tilde{Z}_i^T \tilde{Z}_i$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_i^T \tilde{Z}_i &= X_i^T Q_{\zeta_i} X_i \\ &+ X_i^T \left(\frac{E_{li}^T E'_{2i}}{\zeta_i} + P_i B_{li} \right) R_{\zeta_i}^{-1} \left(\frac{E_{li}^T E'_{2i}}{\zeta_i} + P_i B_{li} \right)^T \\ &+ 2 X_i^T \frac{E_{li}^T E'_{2i}}{\zeta_i} \left[R_{\zeta_i}^{-1} \left(- \frac{E_{li}^T E'_{2i}}{\zeta_i} + P_i B_{li} \right) \right] X_i = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

حال با فرض $P_i X_i = 0$ آنگاه رابطه (۴۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_i^T \tilde{Z}_i &= X_i^T Q_{\zeta_i} X_i + X_i^T \frac{E_{li}^T E'_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E'_{li}}{\zeta_i} X_i \\ &- 2 X_i^T \frac{E_{li}^T E'_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E'_{li}}{\zeta_i} X_i \\ &= X_i^T Q_{\zeta_i} X_i - X_i^T \frac{E_{li}^T E'_{2i}}{\zeta_i} R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E'_{li}}{\zeta_i} X_i \end{aligned} \quad (41)$$

با توجه به (۳۹) می‌دانیم که رابطه (۴۰) برابر صفر است. پس می‌توان نتیجه گرفت: $\tilde{Z}_i^T \tilde{Z}_i = 0$ را می‌توان به صورت زیر بخش بندی نمود:

$$\tilde{Z}_i = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_i^1 \\ \tilde{Z}_i^2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} Z_i^1 = 0 \\ Z_i = 0 \rightarrow z_i = e_i, y_i - y_0 = 0 \end{cases} \quad (42)$$

به عبارت دیگر فضای پوچی $(P_i X_i = 0)$ زیر مجموعه‌ای از فضای است که خطای ردیابی صفر است. حال تابع لیاپانف زیر را در نظر بگیریم:

$$V_i(X_i) = X_i^T P_i X_i \geq 0 \quad (43)$$

برای اثبات پایداری باید نشان دهیم $\dot{V}_i(x_i) < 0$ اگر $X_i^T P_i X_i = 0$ و رابطه (۲۶) برقرار باشد.

² Coupling Gain

¹ Invariant Set Theorem

$$\dot{V}_i = \alpha_i V_i - X_i^T Q_{\zeta_i} X_i - u_i^k T \left(\frac{E_{2i}^T E'_{2i}}{\zeta_i} \right) u_i^k \quad \dot{x}_i(t) = -(P_i^{11})^{-1} P_i^{12} \dot{\varepsilon}_0(t) \quad (50)$$

با جایگذاری (۱)، (۴) (با فرض $d_i(t) = 0$) و (۱۲) در (۵۰) داریم

$$+ 2X_i^T \left(\frac{E_{2i}^T E'_{1i}}{\zeta_i} \right) u_i^k - (\tilde{d}_i^k)^T \tilde{d}_i^k \quad A_{iw} x_i(t) + B_{iw} K_{1i} x_i(t) + B_{iw} K_{2i} \varepsilon_0(t) \quad (51)$$

(۵۷)

$$+ 2(u_i^{k+1})^T R_{\zeta_i} + X_i^T \left(\frac{E_{2i}^T E'_{2i}}{\zeta_i} \right) (K_i^k X_i - u_i) = -(P_i^{11})^{-1} P_i^{12} S \varepsilon_0(t)$$

با توجه به ورودی کنترل $u_i(t) = K_{1i} x_i(t) + K_{2i} \varepsilon_0(t)$ و (۴۷)، داریم

$$+ 2\tilde{d}_i^{k+1} (\tilde{d}_i - K_{d_i}^k X_i) \quad \bar{K}_i = K_{1i}, \quad K_{2i} = \Gamma_{iw} - \bar{K}_i \Pi_{iw} \quad (52)$$

$$u_i^{k+1} = K_i^{k+1} X_i, \quad \tilde{d}_i^k = K_{d_i}^k X_i$$

$$u_i^k = -R_{\zeta_i}^{-1} (B_{1i}^T P_i^k + \frac{E_{2i}^T E'_{2i}}{\zeta_i}) X_i$$

$$= -R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T P_i^k X_i - R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E'_{2i}}{\zeta_i} X_i \quad (58)$$

$$u_i^k + R_{\zeta_i}^{-1} \frac{E_{2i}^T E'_{2i}}{\zeta_i} X_i = -R_{\zeta_i}^{-1} B_{1i}^T \times \frac{1}{2} (V_i)_{Xk}$$

$$(V_i)_{Xk}^T B_{1i}^T = -((u_i^{k+1})^T R_{\zeta_i} + X_i^T \frac{E_{2i}^T E'_{2i}}{\zeta_i})$$

$$\tilde{d}_i^k(t) = B_{2i}^T P_i^k X_i, \quad 2(\tilde{d}_i^k(t))^T = (V_i)_{Xk} B_{2i}^T$$

با محاسبات ریاضی و با توجه به [۲۱]، [۳۰] می‌توان نتیجه گرفت

$$e^{-\alpha_i T} V_i(X_i(t+T)) - V_i(X_i(t)) = \int_t^{t+T} e^{-\alpha(\tau-t)} (-X_i^T Q_{\zeta_i} X_i - u_i^k T \left(\frac{E_{2i}^T E'_{2i}}{\zeta_i} \right) u_i^k + 2X_i^T \left(\frac{E_{2i}^T E'_{1i}}{\zeta_i} \right) u_i^k - (\tilde{d}_i^k)^T \tilde{d}_i^k) d\tau \quad (59)$$

$$+ 2 \int_t^{t+T} e^{-\alpha(\tau-t)} (u_i^{k+1})^T R_{\zeta_i} + X_i^T \left(\frac{E_{2i}^T E'_{2i}}{\zeta_i} \right) (K_i^k X_i - u_i) + 2\tilde{d}_i^{k+1} (\tilde{d}_i - K_{d_i}^k X_i) d\tau$$

با توجه به رابطه (۵۹) الگوریتم زیر پیشنهاد می‌گردد.

الگوریتم حل مسأله اجماع خروجی مقاوم بدون مدل:

- سیاست کنترلی $u_i^0 = K_i^0 X_i + e$ را چنان انتخاب کنید که K_i^0 یک کنترل کننده پایدار ساز باشد. همچنین e نویز جستجو^۱ است.
- معادله بلمن زیر را حل کنید

$$e^{-\alpha_i T} X_i^T(t + \delta t) P_i^k X_i(t + \delta t) - X_i^T(t) P_i^k X_i(t) = \int_t^{t+T} e^{-\alpha(\tau-t)} (-X_i^T Q_{\zeta_i} X_i - u_i^k T \left(\frac{E_{2i}^T E'_{2i}}{\zeta_i} \right) u_i^k + 2X_i^T \left(\frac{E_{2i}^T E'_{1i}}{\zeta_i} \right) u_i^k - (\tilde{d}_i^k)^T \tilde{d}_i^k) d\tau \quad (60)$$

$$+ 2 \int_t^{t+T} e^{-\alpha(\tau-t)} (u_i^{k+1})^T R_{\zeta_i} + X_i^T \left(\frac{E_{2i}^T E'_{2i}}{\zeta_i} \right) (K_i^k X_i - u_i) + 2\tilde{d}_i^{k+1} (\tilde{d}_i - K_{d_i}^k X_i) d\tau$$

- الگوریتم را تا زمانی اجرا کنید که همگرایی حاصل شود. در غیر اینصورت $k = k + 1$ و به گام ۲ بروید.

$$y_i - y_0 = 0 \quad (54)$$

$$(C_i' x_i - R \varepsilon_0)^T (C_i' x_i - R \varepsilon_0) = 0$$

همچنین $x_i(t) = \Pi_{iw} \varepsilon_0(t)$ پس نتیجه می‌گیریم

$$C_i \Pi_{iw} = R \quad (55)$$

رابطه (۵۰) نشان می‌دهد که معادله دوم از معادلات تنظیم خروجی نیز برآورده شده است. در نتیجه اثبات کامل می‌شود. در ادامه با استفاده از یک الگوریتم یادگیری تقویتی انتگرالی پاسخ معادله جبری ریکاتی (۲۵) را با استفاده از داده های اندازه گیری شده بر خط بدست می‌آوریم.

۴- حل مسأله اجماع خروجی مقاوم H_∞ با رویکرد بدون مدل

به منظور به دست آوردن بهره فیدبک در مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم بدون نیاز به دینامیک سیستم، از یک الگوریتم IRL [۲۱]، [۲۸]، [۲۹] استفاده می‌کنیم. فرض کنید سیستم (۱۸) به صورت زیر بازنویسی شود

$$\dot{X}_i = M_i X_i + B_{1i}' (u_i - K_i^k X_i) + B_{2i}' (\tilde{d}_i - K_{d_i}^k X_i) \quad (56)$$

که $M_i = A_i' + B_{1i}' K_i^k + B_{2i}' K_{d_i}^k$ در نظر بگیرید

$$V_i(X_i) = X_i^T P_i X_i$$

¹ Probing Noise

$$p_i = \text{diag}(q_i) \quad (64)$$

$$q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_N]^T = ((L+G) \otimes I_p)^{-T} 1_{Np}$$

$q \in R^{Np}$ بردار ویژه چپ ماتریس لاپلاسیس گراف است. 1_{Np} برداری با عناصر یک است. $(q_i \in R^p)$. قانون تطبیق \hat{R}_i نیز به صورت زیر طراحی می‌شود.

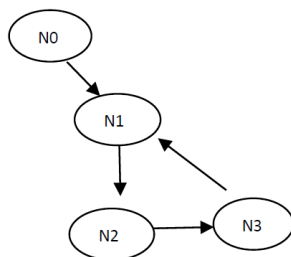
$$\dot{\hat{R}}_i = \alpha \left[\sum_{j=1}^N a_{ij} (\hat{R}_j \hat{\varepsilon}_j - \hat{R}_i \hat{\varepsilon}_i) + g_i (\gamma_0 - \hat{R}_i \hat{\varepsilon}_i) \right] \hat{\varepsilon}_i^T \quad (65)$$

که $\alpha > 0$ یک عدد است.

تذکره ۸: روشهای موجود برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی [۱۵]، [۲۷، ۱۴] از $p -$ کپی مدل داخلی استفاده می‌کنند. استفاده از این ساختار سبب پیچیده شدن کنترل کننده می‌گردد. همچنین در کلیه این روشها داشتن اطلاعات کامل عوامل و عامل رهبر امری ضروری است که در بسیاری از کاربردهای عملی ممکن نیست. با توجه به این موضوع می‌توان از روشهایی که بر پایه روشهای یادگیری تقویتی هستند، استفاده نمود [۲۲، ۲۳]. در روشهای ارائه شده تاثیر وجود اغتشاش و عدم قطعیت در نظر گرفته نشده است. به علت وجود اغتشاش و عدم قطعیت این روشها کارایی خود را از دست می‌دهند. با توجه به این موارد در این مقاله با استفاده از روش IRL کنترل کننده بدون مدل با وجود نامعینی طراحی شد که بدون استفاده از $p -$ کپی مدل داخلی برآورده شدن هدف تنظیم خروجی مشارکتی مقاوم را تضمین می‌کند. به علت استفاده از ساختار سیستم کمکی، طراحی کنترل کننده مقاوم با محدودیت H_∞ به سادگی قابل حل می‌باشد. همچنین ساختار جدید شرایط لازم برای استفاده از روش IRL را فراهم ساخت.

۵ - نتایج شبیه سازی

در این بخش با استفاده از یک مثال عددی کارآیی روش پیشنهاد شده برای حل مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم را بررسی می‌کنیم. سیستم چند عاملی پیوسته ناهمگن زیر را در نظر بگیرید. این سیستم دارای ۳ عامل می‌باشد، که گراف ارتباطی آنها به صورت زیر نمایش داده می‌شود.



شکل ۱ (گراف ارتباطی عوامل)

دینامیک عامل رهبر به صورت زیر است

تذکره ۳: در الگوریتم ارائه شده فرض بر این است که مقادیر E_{1i} ، E_{2i} و H_i که مربوط به ساختار نامعینی در معادلات (۲) می‌باشند، معلوم هستند. همچنین اغتشاش وارد شده به سیستم کراندار است.

تذکره ۴: در الگوریتم فوق سیاست کنترلی u_i که به عوامل اعمال می‌شود را می‌توان به صورت یک سیاست کنترلی پایدار ساز ثابت در نظر گرفت. اطلاعات گردآوری شده توسط این سیاست ثابت، برای به دست آوردن ماتریس P_i^k و سیاست بهبود کنترل $X_i^{k+1} = K_i^{k+1} X_i$ به کار برده می‌شود. همچنین ورودی اغتشاش d_i ورودی اغتشاش واقعی است، اما $d_i^{k+1} = K_i^{k+1} X_i$ ورودی اغتشاشی است که ارزیابی و بروز می‌شود.

تذکره ۵: می‌توان گفت الگوریتم شامل دو مرحله اساسی است. در مرحله اول، یک سیاست کنترلی اولیه ثابت u_i به سیستم اعمال می‌گردد و اطلاعات به دست آمده از عوامل در بازه زمانی T ذخیره می‌گردد. سپس بدون نیاز به دینامیک‌های عوامل، اطلاعات گردآوری شده در مرحله اول برای به دست آوردن d_i^{k+1} ، u_i^{k+1} استفاده می‌شوند این کار تا زمانی ادامه می‌یابد که این مقادیر به مقادیر u_i^* و d_i^* همگرا شوند.

تذکره ۶: همگرایی الگوریتم به روشی مشابه آنچه در [۲۱] آورده شده است، اثبات می‌شود.

تذکره ۷: در روش ارائه شده برای بدست آوردن پاسخ مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم فرض بر این است که دینامیک عامل رهبر مشخص است. در [۲۳] یک رویکرد توزیع شده تطبیقی برای تخمین حالات عامل رهبر پیشنهاد شده است. دینامیک این رویکرد به صورت زیر است

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_i = \hat{S}_i \hat{\varepsilon}_i + c \left[\sum_{j=1}^N a_{ij} (\hat{\varepsilon}_j - \hat{\varepsilon}_i) + g_i (\varepsilon_0 - \hat{\varepsilon}_i) \right] \quad (61)$$

$$\hat{y}_{0i} = \hat{R}_i \varepsilon_i$$

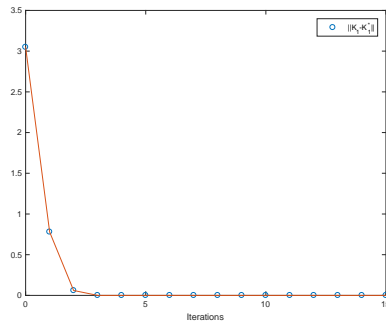
که $\hat{S}_i \in R^{p \times p}$ و $\hat{R}_i \in R^{q \times p}$ به ترتیب تخمین دینامیک S و R هستند. $\hat{\varepsilon}_i$ و \hat{y}_{0i} بردار حالت و خروجی رویکرد تطبیقی گره i ام است. خطای مشاهده شده توسط همسایگان در این حالت به صورت زیر تعریف می‌شود

$$e_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} (\hat{\varepsilon}_j - \hat{\varepsilon}_i) + g_i (\varepsilon_0 - \hat{\varepsilon}_i) \quad (62)$$

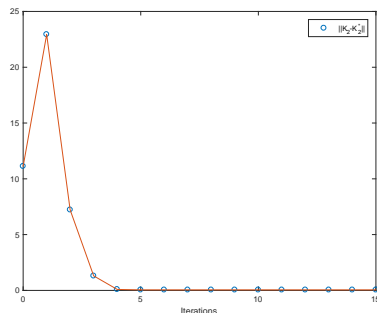
همچنین قانون تطبیق برای \hat{S}_i به صورت زیر می‌باشد

$$\dot{\hat{S}}_{veci} = \Gamma_{si} (I_p \otimes \hat{\varepsilon}_i) p_i \sum_{j=1}^N a_{ij} (\hat{\varepsilon}_j - \hat{\varepsilon}_i) + g_i (\varepsilon_0 - \hat{\varepsilon}_i) \quad (63)$$

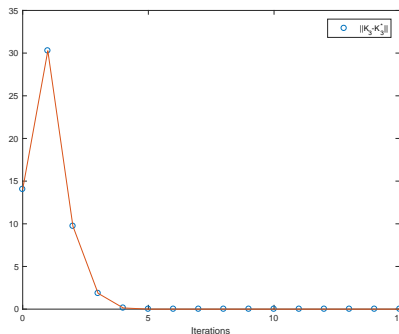
که در این رابطه \hat{S}_{veci} نمایش ستونی \hat{S}_i است (با توجه به تعریف ۱ به دست می‌آید). همچنین $\Gamma_{si} > 0$.



شکل ۳ (همگرایی ماتریس بهره K_1 به مقدار بهینه)



شکل ۴ (همگرایی ماتریس بهره K_2 به مقدار بهینه آن)



شکل ۵ (همگرایی ماتریس K_3 به مقدار بهینه)

به وضوح دیده می‌شود که الگوریتم پیشنهاد شده مسأله اجماع خروجی مشارکتی مقاوم را حل نموده است. همچنین شکل‌های ۳-۵ همگرایی کنترل کننده‌ها به مقادیر بهینه شان را نشان می‌دهد.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله به حل مسأله کنترل مقاوم با محدودیت H_∞ در سیستم‌های چند عاملی ناهمگن پرداخته شد. این مسأله با استفاده از ایده سیستم کمکی افزوده به یک مسأله کنترل H_∞ تبدیل شد. سپس یک حد پایین بالا برای ضریب تقلیل جهت تضمین پایداری به دست آمد. ثابت شد در صورت برقراری شرط ضریب تقلیل، مسأله اجماع خروجی مقاوم حل می‌شود. ثابت شد که این روش سبب می‌شود که معادلات تنظیم خروجی نیز برآورده شوند. در انتها نیز یک الگوریتم یادگیری تقویتی انتگرالی برای حل مسأله بدون نیاز به مدل عوامل ارائه گردید.

$$\zeta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \zeta_0 \quad (66)$$

$$y_0 = [1 \ 0] \zeta_0$$

دینامیک عوامل دیگر نیز به صورت زیر تعریف هستند

$$A_1 = 0, B_{11} = 10, B_{12} = 1, C_1 = 1 \quad (67)$$

$$E_{11} = E_{21} = H_1 = 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$C_2 = [1 \ 0]$$

$$E_{12} = [1 \ 1], E_2 = [0 \ 0], H = [0 \ 0.5]^T$$

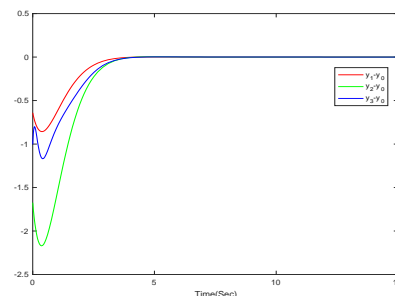
$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, B_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$C_3 = [1 \ 0]$$

$$E_{13} = [1 \ 1], E_{23} = [0 \ 0], H_3 = [0 \ 0.5]^T$$

حال با استفاده از الگوریتم ارائه شده، کنترل کننده‌های مناسب برای رسیدن به هدف اجماع خروجی مشارکتی مقاوم را به دست می‌آوریم. شکل ۲ خروجی عامل رهبر و همچنین خروجی عوامل دیگر را نشان می‌دهد. با توجه به دینامیک عامل رهبر مشخص است که یک سیگنال سینوسی توسط این دینامیک تولید می‌شود. از این شکل می‌توان نتیجه گرفت که هدف مورد نظر به خوبی برآورده می‌شود. اغتشاش در این سیستم چند عاملی برای هر یک از عوامل به صورت $d_i(t) = \sin(t) \quad i = 1, 2, 3$ در نظر گرفته شده است. همچنین ماتریس مجاورت و ماتریس درون درجه مربوط به گراف ارتباطی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$A_{adj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{in} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (70)$$



شکل ۲ (خطای تنظیم خروجی $(y_i - y_0)$)

مقادیر ماتریسهای بهره به صورت زیر می‌باشند

$$K_1 = -6 \quad K_2 = [-6.85 \ -7.36] \quad (71)$$

$$K_3 = [-7.2 \ -6.95]$$

شکل‌های زیر همگرایی مقادیر کنترل کننده‌ها به مقادیر بهینه در فرآیند یادگیری نمایش می‌دهد.

مراجع

- [13] Y. Su and J. Huang, "Cooperative global robust output regulation for nonlinear uncertain multi-agent systems in lower triangular form," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 9, pp. 2378-2389, 2015.
- [14] W. Liu and J. Huang, "Cooperative global robust output regulation for nonlinear output feedback multiagent systems under directed switching networks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 12, pp. 6339-6352, 2017.
- [15] W. Liu and J. Huang, "Global Robust Output Regulation for a Class of Nonlinear Systems via Event-Triggered Control," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 7566-7571, 2017.
- [16] Q. Ma, S. Xu, F. L. Lewis, B. Zhang, and Y. Zou, "Cooperative output regulation of singular heterogeneous multiagent systems," *IEEE Transactions on cybernetics*, vol. 46, no. 6, pp. 1471-1475, 2015.
- [17] F. A. Yaghmaie, F. L. Lewis, and R. Su, "Output regulation of linear heterogeneous multi-agent systems via output and state feedback," *Automatica*, vol. 67, pp. 157-164, 2016.
- [18] A. Al-Tamimi, F. L. Lewis, and M. J. A. Abu-Khalaf, "Model-free Q-learning designs for linear discrete-time zero-sum games with application to H-infinity control," *Automatica*, vol. 43, no. 3, pp. 473-481, 2007.
- [19] A. P. Valadbeigi, A. K. Sedigh, and F. L. Lewis, "H ∞ Static Output-Feedback Control Design for Discrete-Time Systems Using Reinforcement Learning," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, pp. 1-11, 2019.
- [20] H. Modares, F. L. Lewis, and Z. Jiang, "Optimal Output-Feedback Control of Unknown Continuous-Time Linear Systems Using Off-policy Reinforcement Learning," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 46, no. 11, pp. 2401-2410, 2016.
- [21] H. Modares, F. L. Lewis, and Z. Jiang, "Tracking Control of Completely Unknown Continuous-Time Systems via Off-Policy Reinforcement Learning," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 26, no. 10, pp. 2550-2562, 2015.
- [22] B. Kiumarsi and F. L. Lewis, "Output synchronization of heterogeneous discrete-time systems: A model-free optimal approach," *Automatica*, vol. 84, pp. 86-94, 2017/10/01/ 2017.
- [23] H. Modares, S. P. Nageshrao, G. A. D. Lopes, R. Babuška, and F. L. Lewis, "Optimal model-free output synchronization of heterogeneous systems using off-policy reinforcement learning," *Automatica*, vol. 71, pp. 334-341, 2016/09/01/ 2016.
- [24] F. L. Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric, and A. Das, *Cooperative control of multi-agent systems:*
- [1] A. Bidram, F. L. Lewis, and A. Davoudi, "Synchronization of nonlinear heterogeneous cooperative systems using input-output feedback linearization," *Automatica*, vol. 50, no. 10, pp. 2578-2585, 2014.
- [2] Y. Chen, J. Lü, F. Han, and X. Yu, "On the cluster consensus of discrete-time multi-agent systems," *Systems Control Letters*, vol. 60, no. 7, pp. 517-523, 2011.
- [3] Z. Li, M. Z. Chen, and Z. Ding, "Distributed adaptive controllers for cooperative output regulation of heterogeneous agents over directed graphs," *Automatica*, vol. 68, pp. 179-183, 2016.
- [4] Z. Li and Z. Ding, "Distributed adaptive consensus and output tracking of unknown linear systems on directed graphs," *Automatica*, vol. 55, pp. 12-18, 2015.
- [5] Z. Li and Z. Duan, "Distributed consensus protocol design for general linear multi-agent systems: a consensus region approach," *IET Control Theory & Applications*, vol. 8, no. 18, pp. 2145-2161, 2014.
- [6] Z. Li, Z. Duan, and F. L. Lewis, "Distributed robust consensus control of multi-agent systems with heterogeneous matching uncertainties," *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 883-889, 2014.
- [7] K. Hengster-Movric, F. L. Lewis, and M. Sebek, "Distributed static output-feedback control for state synchronization in networks of identical LTI systems," *Automatica*, vol. 53, pp. 282-290, 2015/03/01/ 2015.
- [8] Y. Feng, S. Xu, F. L. Lewis, and B. Zhang, "Consensus of heterogeneous first- and second-order multi-agent systems with directed communication topologies," *International Journal of Robust Nonlinear Control*, vol. 25, no. 3, pp. 362-375, 2015.
- [9] F. A. Yaghmaie, R. Su, F. L. Lewis, and S. Olaru, "Bipartite and cooperative output synchronizations of linear heterogeneous agents " *Automatica*, vol. 80, no. C, pp. 172-176, 2017.
- [10] Y. Dong and J. Huang, "Cooperative global output regulation for a class of nonlinear multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 5, pp. 1348-1354, 2013.
- [11] Y. Su, Y. Hong, and J. Huang, "A general result on the robust cooperative output regulation for linear uncertain multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 5, pp. 1275-1279, 2012.
- [12] X. Wang, Y. Hong, J. Huang, and Z.-P. Jiang, "A distributed control approach to a robust output regulation problem for multi-agent linear systems," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 55, no. 12, pp. 2891-2895, 2010.

optimal and adaptive design approaches. Springer Science & Business Media, 2013.

- [25] F. Adib Yaghmaie, K. Hengster Movric, F. L. Lewis, R. Su, and M. Sebek, " H_∞ -output regulation of linear heterogeneous multiagent systems over switching graphs," *International Journal of Robust. Nonlinear Control*, vol. 28, no. 13, pp. 3852-3870, 2018.
- [26] Q. Jiao, H. Modares, F. L. Lewis, S. Xu, and L. Xie, "Distributed L2-gain output-feedback control of homogeneous and heterogeneous systems," *Automatica*, vol. 71, pp. 361-368, 2016/09/01/2016.
- [27] Y. Su and J. Huang, "Cooperative global robust output regulation for nonlinear uncertain multi-agent systems in lower triangular form," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 9, pp. 2378-2389, 2015.
- [28] C. Chen, H. Modares, K. Xie, F. L. Lewis, Y. Wan, and S. Xie, "Reinforcement Learning-based Adaptive Optimal Exponential Tracking Control of Linear Systems with Unknown Dynamics," *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 1-1, 2019.
- [29] L. M. Zhu, H. Modares, G. O. Peen, F. L. Lewis, and B. Yue, "Adaptive Suboptimal Output-Feedback Control for Linear Systems Using Integral Reinforcement Learning," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, no. 1, pp. 264-273, 2015.
- [30] H. Modares, F. L. Lewis, W. Kang, and A. Davoudi, "Optimal Synchronization of Heterogeneous Nonlinear Systems With Unknown Dynamics," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, no. 1, pp. 117-131, 2018.
- [۳۱] به مقاوم تطبیقی اجماع کنترل ولدبیگی، امیر پرویز، "طراحی دار" جهت ثابت توپولوژی با عاملی چند سیستم‌های برای نامعینی، رساله دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، ۱۳۹۸.