

ردیابی هدف زمان-محدود برای یک زیر دریایی خودگردان در فضای سه بعدی با کنترل سطح دینامیکی

الهام رزمانی^۱، خوشنام شجاعی^{۲،۳}

^۱ کارشناس ارشد برق، دانشکده مهندسی برق، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران، ramezanielham@sel.iaun.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی برق، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران، shojaei@pel.iaun.ac.ir

^۳ مرکز تحقیقات پردازش دیجیتال و بینایی ماشین، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۲۸

ویرایش: ۱۳۹۹/۰۴/۱۵

دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۲۴

چکیده: در این مقاله، مسئله کنترل ردیابی هدف زمان-محدود برای یک زیردریایی تحریک ناقص خودگردان در فضای سه بعدی در حضور نامعینی‌ها و اغتشاشات نامعلوم ناشی از امواج و جریانات اقیانوسی با کنترل سطح دینامیکی مورد توجه قرار می‌گیرد. در گام اول، با در نظر گرفتن کنترل سطح دینامیکی، پیچیدگی‌های محاسباتی روش پس‌گام تا حد زیادی جبران می‌گردد. در گام دوم، با طراحی کنترل‌کننده زمان-محدود می‌توان ثابت کرد که خطاهای سیستم در زمان محدودی به ناحیه کوچکی حول مبدأ همگرا می‌شوند. برای جبران پارامترهای نامعلوم شناور و نامعینی‌های غیر خطی از کنترل‌کننده تطبیقی مقاوم استفاده شده است. پایداری کنترل‌کننده پیشنهادی به صورت تحلیلی و براساس تئوری لیاپانوف ثابت می‌شود. در پایان، عملکرد ردیابی طرح کنترل پیشنهادی با استفاده از نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی و اعتبار آن نشان داده خواهد شد.

کلمات کلیدی: شناور زیرسطح خودگردان، کنترل‌کننده زمان محدود، کنترل‌کننده سطح دینامیکی

Finite-time Target Tracking for an Autonomous Submarine in Three-Dimensional Space by Using Dynamic Surface Control

Elham Ramezani, Khoshnam Shojaei

Abstract: In this paper, the control problem of a finite-time target tracking for an underactuated autonomous submarine is considered in three-dimensional space in the presence of unknown disturbances caused by waves and ocean currents via Dynamic Surface Control (DSC) method. At first, computational complexities of the backstepping method are greatly reduced by employing the DSC technique. Next, by designing a finite-time controller, it can be demonstrated that system errors converge to a small region containing the origin in a finite time. An adaptive robust controller is employed to compensate for unknown vehicle parameters and uncertain nonlinearities. The stability of the proposed controller is demonstrated by an analysis based on Lyapunov theory. Finally, the tracking performance of the proposed control scheme is simulated by MATLAB software and its effectiveness is shown as well.

Keywords: Autonomous Underwater Vehicles, Dynamic Surface Control, Finite-Time Control

۱- مقدمه

صنایع دریایی نقش بسیار مهمی در زندگی انسان‌ها از گذشته تا به امروز دارند. با توجه به نیاز انسان‌ها به منابع دریاها و نیز غیرقابل دسترس بودن اعماق وسیع اقیانوس‌ها برای غواصان، مهندسان همواره به دنبال بهبود و پیشرفت ربات‌های زیرآبی هستند. این ربات‌ها به انسان در بخش‌های مختلف علمی، نظامی و تجاری کمک شایانی کرده است. زیر دریایی‌های خودکار تحریک ناقص تحت تأثیر نیروهای جانب مرکز، نیروهای کوریولیس و نیروی جاذبه هستند. عموماً مسئله کنترل یک ربات شامل سه مرحله مهم است: طراحی مسیر، تولید مسیر و ردیابی مسیر [۱] که هدف این مقاله ردیابی مسیر زیردریایی تحریک ناقص می‌باشد. بررسی‌های انجام شده بر روی این سیستم‌ها نشان می‌دهند که اغلب تعداد ورودی‌های کنترل از خروجی‌ها کمتر است و به همین جهت به این سیستم‌ها تحریک ناقص گفته می‌شود. ردیابی مسیر زیردریایی‌های خودگردان تحریک ناقص (AUV)^۱ به دلیل ماهیت غیرخطی و کاربردهای بسیار بالای عملی در صنعت دریایی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. معادلات دینامیکی موجود در زیردریایی‌ها، غیرخطی متغیر با زمان است و این خود یکی از پیچیدگی‌های طراحی کنترل‌کننده برای آنها می‌باشد. استخراج این معادلات به دلیل وجود جریان‌ات آب و تأثیرات میرایی هیدرو دینامیکی و نامعینی‌های بسیار زیاد موجود در محیط دریا کاری بسیار دشوار است. در نتیجه، کنترل‌کننده‌های کلاسیک نمی‌توانند به آسانی پاسخگوی کنترل آنها باشند. در بسیاری از صنایع مختلف، استفاده از تجهیزاتی که بتوان آنها را بدون حضور مستقیم نیروی انسانی و از راه دور هدایت و کنترل کرد، کاربردهای فراوانی یافته‌اند و در بسیاری از موارد جزء جدا نشدنی کاربردهای تجاری و صنعتی بدل گشته‌اند، به گونه‌ای که انجام بسیاری از پروژه‌های مهندسی و تحقیقاتی بدون آنها امکان پذیر نیست.

در مرجع [۲]، یک کنترل‌کننده ردیاب برای هدایت زیردریایی‌های خودگردان با تأخیر ورودی ثابت پیشنهاد شده است. در این مقاله، یک عبارت مبتنی بر پیش بین برای حذف تأخیر ورودی در دینامیک‌های حلقه باز در نظر گرفته شده است. در مرجع [۳] و [۴]، برای چندین AUV تجزیه و تحلیل همگرایی با آرایش رهبر-پیرو انجام شده است. متأسفانه، در بیشتر منابع مورد بحث، تمرکز بر روی طراحی کنترل حرکت دو بعدی در سطح است [۵] و [۶]. در [۷]، ردیابی مسیر شناور زیرسطح در فضای سه بعدی با استفاده از کنترل‌کننده عصبی- تطبیقی انجام شده است. در [۸]، پژوهشگر تلاش برای رفع پیچیدگی محاسباتی در روش کنترل گام به عقب را دارد. در مرجع [۹] هم روش گام به عقب مبتنی بر PID^۲ برای

کنترل زیردریایی مورد استفاده قرار گرفته است و در این مقاله سیستم به دو زیر سیستم چرخشی و انتقالی تقسیم شده است. در مرجع [۱۰]، یک روش کاربردی برای کنترل مستقل چند زیردریایی مستقل خودگردان (AUV) ارائه شده است. در مرجع [۱۱]، از کنترل‌کننده PID به منظور ساده‌سازی مسیر در فضای سه بعدی استفاده شده است. در مرجع [۱۲]، از کنترل‌کننده عصبی مقاوم مد لغزشی برای جبران پیچیدگی‌های سیستم نظیر دینامیک‌های مدل‌سازی نشده استفاده شده است. در این مقاله، مدل جریان‌های اقیانوسی نیز به عنوان اغتشاش در نظر گرفته شده و اهداف کنترل مطلوب در برابر اغتشاش ذکر شده به دست آمده است. در مرجع [۱۳]، از کنترل‌کننده مقاوم تناسبی- مشتق‌گیر و در [۱۴]، از یک کنترل‌کننده تطبیقی فازی مد لغزشی برای کنترل عمق یک وسیله نقلیه زیرآبی استفاده شده است. در [۱۵]، برای آرایش رهبر- پیرو AUV از کنترل‌کننده مقاوم تطبیقی همراه با کنترل سطح دینامیکی بهره برده است. در [۱۶]، الگوریتم کنترل مقاوم برای پایدارسازی محلی AUV به کار گرفته شده است. در [۱۷]، ردیابی مسیر شناور زیرسطحی با استفاده از یک کنترل‌کننده مقاوم بر پایه کنترل تناسبی- مشتق‌گیر مرتبه کسری انجام گرفته است. در مرجع [۱۸] نیز یک روش کنترل مقاوم برای کنترل شناور زیرآبی شش درجه آزادی با استفاده از تخمین‌گرهای حالت غیرخطی پیشنهاد شده است. در مرجع [۱۹]، از کنترل فیدبک حالت جزئی برای ردیابی مسیر شناور زیرسطح شش درجه آزادی با استفاده از کنترل سطح دینامیکی تطبیقی- عصبی استفاده شده است. در مرجع [۲۰]، از کنترل عصبی- تطبیقی و در [۲۱] از کنترل‌کننده تطبیقی برای ردیابی شناور زیرسطح در فضای سه بعدی استفاده شده است. به منظور ردیابی مسیر هماهنگ چندین ربات زیرآبی مستقل، از کنترل‌کننده‌های تطبیقی- مقاوم و کنترل سطح دینامیکی در مرجع [۲۲] استفاده شده است. در پایداری مجانبی مسیر سیستم در زمان بی‌نهایت به تعادل می‌رسد، در حالی که پایداری زمان محدود می‌تواند منجر به عملکرد سریع سیستم در حالت گذرا در یک زمان متناهی همراه با دقت بالای ردیابی و همگرایی به سمت مسیر مطلوب شود. بنابراین، امروزه با توجه به اهمیت سرعت پاسخ در عملکرد سریع و بهنگام سیستم‌های رباتیکی نظیر شناور در عملیات زیرآبی، کنترل زمان محدود در بسیاری از کاربردهای کنترل مورد توجه محققان قرار گرفته است [۲۳]-[۲۵]. از جمله کاربردهای پایداری زمان محدود می‌توان به عملکرد ایمن در عملیات نظامی اشاره کرد. به طور مثال، زمانی که ربات در حال عملیات نجات و مین‌یابی است، سرعت در انجام فرآیند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اندکی تأخیر در انجام عملیات می‌تواند منجر به تلفات و انفجار گردد. به عنوان نمونه،

^۱ Autonomous Underwater Vehicles^۲ Proportional Integral Derivative

تحلیل پایداری آن در بخش‌های چهارم و پنجم ارائه خواهند شد. بخش ششم شبیه‌سازی‌های عددی را ارائه خواهد کرد و نهایتاً بخش هفتم از این مقاله نتیجه‌گیری می‌کند.

۲- مدل شناور زیر سطح

معادلات سینماتیک و دینامیک شناور با پنج درجه آزادی (DOF)^۱ به صورت زیر قابل بیان است [۲۹]:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos(\psi) \cos(\theta) - v \sin(\psi) + w \sin(\theta) \cos(\psi), \\ \dot{y} = u \sin(\psi) \cos(\theta) + v \cos(\psi) + w \sin(\theta) \sin(\psi), \\ \dot{z} = -u \sin(\theta) + w \cos(\theta), \\ \dot{\theta} = q, \\ \dot{\psi} = r / \cos(\theta), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{m_{22}}{m_{11}} vr - \frac{m_{33}}{m_{11}} wq - f_u(u) + \frac{\tau_u}{m_{11}} - \frac{\tau_{eu}(t)}{m_{11}}, \\ \dot{v} = \frac{m_{11}}{m_{22}} ur - f_v(v) - \frac{\tau_{ev}(t)}{m_{22}}, \\ \dot{w} = \frac{m_{11}}{m_{33}} uq - f_w(w) - \frac{\tau_{ew}(t)}{m_{33}}, \\ \dot{q} = \frac{m_{33} - m_{11}}{m_{55}} uw - f_q(q) - \frac{\rho g \nabla G M_L \sin(\theta)}{m_{55}} + \frac{\tau_q}{m_{55}} - \frac{\tau_{eq}(t)}{m_{55}}, \\ \dot{r} = \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{66}} uv - f_r(r) + \frac{\tau_r}{m_{66}} - \frac{\tau_{er}(t)}{m_{66}}. \end{cases} \quad (2)$$

در معادلات (۱) و (۲)، از علامت‌گذاری استاندارد جامعه مهندسی دریایی (SNAME)^۲ به صورت جدول (۱) استفاده شده است.

جدول ۱: متغیرهای توصیف رفتار یک زیر دریایی شش درجه آزادی [۳۰]

درجات آزادی	متغیرهای حالت	سرعت - های شناور	نیروها و گشتاورها
طولی (حرکت در جهت محور x)	x	u	τ_u
عرضی (حرکت در جهت محور y)	y	v	τ_v
عمقی (حرکت در جهت محور z)	z	w	τ_w
غلتش (چرخش حول محور x)	φ	p	τ_p
خمش (چرخش حول محور y)	θ	q	τ_q
گردش (چرخش حول محور z)	ψ	r	τ_r

متغیرهای موقعیت و زوایای اوپلر در چارچوب زمین ثابت نشان داده شده اند. سیگنال‌های τ_u, τ_v, τ_w و τ_r بیانگر نیرو و گشتاورها هستند که توسط پروانه‌ها و پیش‌ران‌ها تولید شده است. $\tau_{eu}(t), \tau_{ev}(t), \tau_{ew}(t)$ و $\tau_{er}(t)$ نشان‌دهنده اختلالات محیطی متغیر با زمان شامل جریان‌های اقیانوسی، باد و امواج می‌باشند. پارامترهای $m_{ii}, i = 1, 2, \dots, 5$ جرم و ممان اینرسی شناور زیر سطح را نشان می‌دهد

پژوهشگران در مرجع [۲۶] از کنترل زمان محدود برای همگرایی سریع هلوکوپتر سه درجه آزادی استفاده کرده‌اند.

متأسفانه، کارهای قبلی هنوز متحمل ضعف‌هایی هستند که تحقیقات روی طراحی کنترل‌کننده‌های ردیاب را چالش برانگیز و فعال نگه داشته است. مجموعه انتشارات موجود گواه آن است که مقالات کمی روی طراحی کنترل ردیاب در فضای سه بعدی برای شناورهای تحریک ناقص انجام شده است. در کنترل‌کننده‌های سه بعدی موجود نیز همگرایی خطای ردیابی سیستم کنترل به صورت مجانبی با عملکرد گذرای طولانی-مدت محقق شده است. برای افزایش مقاومت کنترل‌کننده و همگرایی خطای ردیابی در زمان محدود، یک روش کنترل مقاوم تطبیقی زمان-محدود در فضای سه بعدی برای شناور تحریک ناقص بر اساس فاصله و زاویه‌های نسبی در این مقاله برای اولین بار با تحلیل‌های پایداری قوی پیشنهاد می‌گردد. مزیت‌های روش کنترلی پیشنهادی به شرح زیر است:

(۱) با تبدیل خطای موقعیت به فاصله و زاویه‌های نسبی امکان

کنترل شناور تحریک ناقص در فضای سه بعدی با موفقیت فراهم می‌گردد و کنترل‌کننده زمان-محدود پیشنهادی وادار می‌کند که سیگنال خطای ردیابی هم در سطح سینماتیک و هم در سطح دینامیک در زمان محدودی به صفر میل کنند و در ناحیه کوچکی حول مبدأ کراندار باقی بمانند.

(۲) در مراجع قبلی نظیر [۲۷]-[۲۸]، از کنترل‌کننده پسگام برای کنترل یک زیردریایی خودگردان استفاده شده است. استفاده از کنترل‌کننده پسگام در طراحی مشکل انفجار ذاتی پیچیده به دلیل تکرار مشتقات از کنترل‌کننده مجازی در هر مرحله را به همراه دارد. جهت کاستن از محاسبات طولانی در طراحی با روش‌های مرسوم مانند پسگام از فیلتر پایین‌گذر مرتبه اول استفاده می‌شود که از طراحی کنترل‌کننده می‌کاهد.

(۳) کنترل‌کننده پیشنهادی با ترکیب بهترین ویژگی‌های روش‌های کنترل مقاوم تطبیقی و تکنیک زمان محدود پارامترهای ناشناخته شناور، دینامیک‌های مدل نشده و اغتشاشات محیطی ناشی از امواج و جریانات اقیانوسی را به خوبی جبران کرده است.

در ادامه، در بخش دوم مدل شناور زیر سطحی مرور می‌گردد. سپس، یک کنترل‌کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم زمان-محدود در حضور نامعینی‌ها در بخش سوم طراحی می‌شود. دینامیک خطای حلقه بسته و

¹Degree-of-freedom

²Society of Naval Architects and Marine Engineers

اندازه گیری متغیرهای حالت شناور به کار گرفته می‌شود. با ترکیب اطلاعات سنسوری این حسگرها نظیر واحد اندازه گیری اینرسی و سیستم موقعیت بایبی جهانی موقعیت ها و زوایای تعریف شده در شکل ۱ اندازه گیری می‌شود.

فرض ۱ [۲۹]: سیگنال‌های $x_d, y_d, z_d, \dot{x}_d, \dot{y}_d, \dot{z}_d, \ddot{x}_d, \ddot{y}_d, \ddot{z}_d$ که به ترتیب بیانگر موقعیت، سرعت و شتاب شناور هدف یا مرجع در جهات مختلف هستند، سیگنال‌هایی کران‌دار می‌باشند.

فرض ۲: تمامی پارامترهای هندسی ربات مانند پارامترهای سینماتیکی و بردار مختصات تعمیم یافته $\eta = (x, y, z, \theta, \psi)^T$ و سرعت‌های تعمیم یافته $\dot{\eta} = (u, v, w, q, r)^T$ ، از طریق سنسورها قابل اندازه گیری می‌باشد و معلوم فرض می‌شود. به عبارتی، تمامی حالات $x = (q, v)^T$ معلوم در نظر گرفته می‌شوند.

فرض ۳: جملات اغتشاش $\bar{\tau}_{wu}, \bar{\tau}_{wv}, \bar{\tau}_{wr}$ کران‌دار می‌باشد، به این معنا که با در نظر گرفتن ثابت‌های مثبت $\ell_{wu}, \ell_{wv}, \ell_{wr}$ می‌توان نوشت:

$$\sup_{t \geq 0} \|\bar{\tau}_{wr}\| < \ell_{wr} \quad \text{و} \quad \sup_{t \geq 0} \|\bar{\tau}_{wu}\| < \ell_{wu}, \sup_{t \geq 0} \|\bar{\tau}_{wv}\| < \ell_{wv}$$

فرض ۴ [۲۹]: سرعت‌های عرضی و عمقی شناور، سیگنال‌های کران‌دار منفعل می‌باشند. یعنی $\sup_{t \geq 0} \|v\| < \varepsilon_v$ و $\sup_{t \geq 0} \|w\| < \varepsilon_w$ که در آنها ε_w و ε_v بیانگر ثابت‌های مثبت نامعلوم می‌باشند.

فرض ۵: جهت جلوگیری از تکیه شدن و ایجاد ناپایداری، زاویه پیچش زیردریایی به صورت $|\theta| < \theta_{max} < \pi/2$ محدود می‌گردد.

تذکر ۲: جهت سادگی طراحی کنترل کننده، از جملات میرایی هیدرودینامیک و معادله غلتش صرف نظر می‌گردد. این فرض هنگامی برقرار است که شناور زیر سطح علاوه بر مجهز بودن به عملگر غلتش، با سرعت کمی در حال حرکت باشد [۲۹].

تعریف ۱ [۳۳]-[۳۴]: پاسخ‌های معادله $x = \dot{f}(x, t)$ به نهایت به طور یکنواخت کران‌دار هستند، اگر ثابت‌های $C_1 > 0$ و $C_2 > 0$ مستقل از $T \in R^+$ وجود داشته باشند به طوری که برای C_2 ، یک ثابت $T(C_2) > 0$ مستقل از $t_0 \in R^+$ وجود داشته باشد که به ازای آن برای همه زمان‌های T و $t > t_0 + T$ ، هر شرط اولیه کران‌دار $\|x(t_0)\| < C_2$ نتیجه دهد $\|x(t)\| < C_1$.

تعریف ۲: پاسخ‌های سیستم غیر خطی $x = \dot{f}(x, t)$ پایدار زمان-محدود است، اگر تابع لیاپانوف مثبت معین $V(x)$ و ثابت‌های مثبت به شکل

$0 < \gamma < 1$ و $\beta_1, \beta_2 > 0$ موجود باشند که مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر حاصل شود [۳۵]:

$$\dot{V}(x) \leq -\beta_1 V(x) - \beta_2 V^\gamma(x) \quad (۳)$$

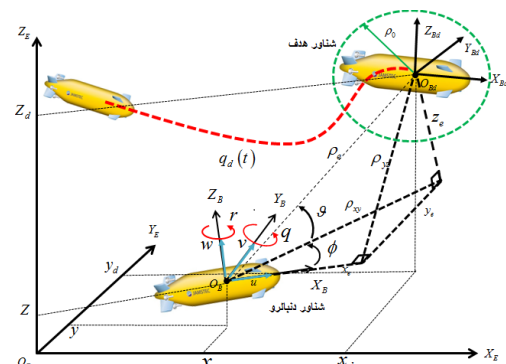
و در این صورت، می‌توان ثابت نمود که زمان نشست به صورت زیر نتیجه می‌گردد:

$$T_s \leq \frac{1}{\beta_1(1-\gamma)} \ln \frac{\beta_1 V(x(0))^{1-\gamma} + \beta_2}{\beta_2} \rho. \quad (۴)$$

$f_k(k), k = u, v, w, q, r$. دینامیک‌های غیرخطی نامعلوم وسیله نقلیه شامل عبارت‌های اصطکاک و میرایی می‌باشد. با توجه به این امر که ورودی‌های کنترلی عرضی τ_v و عمقی τ_w در دسترس نیستند، ربات زیرسطحی تحریک ناقص می‌باشد. پارامترهای GM_L, ∇, g, ρ به ترتیب چگالی آب، شتاب گرانشی، حجم جابجا شده از آب و ارتفاع میان مرکزی طولی هستند. استخراج این معادلات به همراه توصیف دقیق آنها در مراجع [۳۱] و [۳۲] به طور مفصل بیان شده است و از مجال این مقاله خارج است.

۲-۱ اهداف کنترلی

در این مقاله، فرض بر این است که شناور زیرسطح مورد نظر مجهز به سنسور برای اندازه گیری فاصله بین مراکز جرم شناور واقعی و شناور هدف می‌باشد که با پارامتر ρ نشان داده شده است. به علاوه، شناور مجهز به سنسورهای اندازه گیری زاویه‌های ϕ و θ در شکل ۱ می‌باشد. بنابراین، با در نظر گرفتن معادلات (۱) و (۲)، هدف کلی کنترلی در ادامه به این صورت دنبال می‌گردد که خطاهای ردیابی ρ, θ و ϕ در زمان محدودی به صفر همگرا شوند. در این صورت، شناور واقعی به وسیله ردیابی شناور هدف، مسیر مرجع ایجاد شده توسط آن را با وجود نامعینی‌های پارامتری و اغتشاشات خارجی مانند امواج و جریان‌های اقیانوسی، با دقت و سرعت بسیار خوبی در زمان محدود دنبال می‌نماید. شکل ۱ هدف کنترلی یک زیر دریایی را به همراه تمام متغیرها در فضای سه بعدی نشان می‌دهد.



شکل ۱: ردیابی هدف زیردریایی در فضای سه بعدی [۲۹]

جهت سادگی طراحی کنترل کننده، از جملات میرایی هیدرودینامیک و معادله دینامیک غلتش صرف نظر می‌گردد. این فرض هنگامی برقرار است که شناور علاوه بر مجهز بودن به عملگر غلتش، با سرعت کمی در حال حرکت باشد. در ادامه، برخی از فرض‌ها و نکات مورد توجه در مقاله حاضر به طور اجمالی مرور خواهند شد.

تذکر ۱: در طراحی شناورهای زیرسطح طیف وسیعی از سنسورها مانند دوربین، ژیرسکوپ، شتاب‌سنج، سنسور عمق، سونار، GPS و غیره برای

۲-۲ تعیین خطا در فضای دکارتی و مختصات کروی

در این بخش، متغیرهای ρ_e, ϑ و ϕ به صورت توابعی از خطاهای حالات به شکل زیر تعریف می‌گردند:

$$\begin{aligned} x_e &= \rho_e \cos(\vartheta) \cos(\phi) \cdot y_e & \rho_e^2 &= x_e^2 + y_e^2 + z_e^2 \\ &= \rho_e \cos(\vartheta) \sin(\phi) \cdot z_e & z_e^2, \phi &= \\ &= \rho_e \sin(\vartheta) & \arctan\left(\frac{y_e}{x_e}\right), \vartheta &= \\ & & \arctan\left(\frac{z_e}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

جهت محاسبه دینامیک خطا در دستگاه مختصات کروی، قبل از هر اقدامی ابتدا لازم است که تمامی بردارها از دستگاه متصل به زمین به دستگاه متصل به بدنه انتقال یابند. بنابراین، خطاهای حالات و پارامترهای هندسی بین شناور و شناور هدف توسط تبدیل زیر از دستگاه $\{O_E, X_E, Y_E, Z_E\}$ به دستگاه $\{O_B, X_B, Y_B, Z_B\}$ انتقال می‌یابند [۲۹]:

$$\begin{aligned} x_e &= \cos(\theta) \cos(\psi) (x - x_d) + \cos(\theta) \sin(\psi) (y - y_d) - \sin(\theta) (z - z_d), \\ y_e &= -\sin(\psi) (x - x_d) + \cos(\psi) (y - y_d), \\ z_e &= \sin(\theta) \cos(\psi) (x - x_d) + \sin(\theta) \sin(\psi) (y - y_d) + \cos(\theta) (z - z_d), \end{aligned} \quad (6)$$

با مشتق گرفتن از رابطه بالا، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= u - qz_e + ry_e - \dot{x}_e \cos(\theta) \cos(\psi) - \dot{y}_e \cos(\theta) \sin(\psi) + \dot{z}_e \sin(\theta), \\ \dot{y}_e &= v - rx_e - rz_e \tan(\theta) + \dot{x}_d \sin(\psi) - \dot{y}_e \cos(\psi), \\ \dot{z}_e &= w + qx_e + ry_e \tan(\theta) - \dot{x}_e \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{y}_e \sin(\theta) \sin(\psi) - \dot{z}_e \cos(\theta), \end{aligned} \quad (7)$$

۳- طراحی کنترل کننده سطح دینامیکی

تطبیقی مقاوم زمان محدود در حضور نامعینی

روند کلی طراحی کنترل کننده سطح دینامیکی به این صورت است که در گام اول، ابتدا با در نظر گرفتن دینامیک خطای به دست آمده در سطح سینماتیک یک قانون کنترل مجازی طراحی می‌گردد. سپس، این قانون کنترل مجازی جهت کاستن از پیچیدگی‌هایی که در روش‌هایی مانند پس گام رخ می‌دهد، از یک فیلتر مرتبه اول عبور داده می‌شود. در گام بعدی، طراحی قانون کنترل در سطح دینامیک و با هدف تولید گشتاور مطلوب عملگرها انجام می‌گیرد. بنابراین، جهت ترکیب الگوریتم کنترلی سطح دینامیکی با کنترل زمان-محدود لازم است که جملات زمان-محدود در هر دو گام طراحی، لحاظ گردند. با انجام این کار، می‌توان ثابت کرد که خطاها چه در سطح دینامیک و چه در مختصات کروی در زمان محدودی به ناحیه کوچکی حول مبدأ همگرا خواهد شد. به عبارتی، می‌توان گفت که کنترل کننده توانسته است گشتاور لازم جهت همگرایی سریع و دقیق شناور مورد نظر به شناور هدف را به صورت مقاوم در برابر نامعینی‌ها فراهم نماید.

کنترل هریک از فاکتورهای انتقال طولی^۱، پیچش و چرخش، توسط کنترل گشتاور عملگرهای مربوط به آنها صورت می‌گیرد که این امر به ترتیب میل نمودن خطاهای ρ_e, ϑ و ϕ را به دنبال خواهد داشت. بنابراین، در ادامه دو گام طراحی کنترل کننده برای هر سه عامل به صورت مجزا انجام می‌گیرد. در گام اول، قانون کنترل مجازی جهت کنترل حرکت انتقال طولی، کنترل زاویه پیچش و چرخش به ترتیب به صورت زیر طراحی می‌گردد:

۳-۱ طراحی کنترل کننده جهت حرکت انتقال طولی

با توجه به شکل ۱، خطاهای حالات به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} x_e &= \rho_e \cos(\vartheta) \cos(\phi), y_e = \rho_e \cos(\vartheta) \sin(\phi), \\ z_e &= \rho_e \sin(\vartheta) \end{aligned} \quad (8)$$

با مشتق گرفتن از $\rho_e \dot{\rho}_e = x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e + z_e \dot{z}_e$ و جایگذاری (۷) در آن، دینامیک خطا در مختصات کروی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_e &= u \cos(\phi) \cos(\vartheta) + v \cos(\vartheta) \sin(\phi) + \\ &wsin(\vartheta) + \cos(\vartheta) \cos(\phi) \xi_{1d} + \\ &\cos(\vartheta) \sin(\phi) \xi_{2d} + \sin(\vartheta) \xi_{3d}, \end{aligned} \quad (9)$$

که $\xi_{id}, i = 1, 2, 3$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \xi_{1d} &= -\dot{x}_d \cos(\theta) \cos(\psi) - \dot{y}_d \cos(\theta) \sin(\psi) + \dot{z}_d \sin(\theta), \\ \xi_{2d} &= \dot{x}_d \sin(\psi) - \dot{y}_d \cos(\psi), \\ \xi_{3d} &= -\dot{x}_d \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{y}_d \sin(\theta) \sin(\psi) - \dot{z}_d \cos(\theta), \end{aligned} \quad (10)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۹)، قانون کنترل مجازی در جهت کنترل حرکت انتقال طولی به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_c &= (\cos(\phi) \cos(\vartheta))^{-1} (-v \cos(\vartheta) \sin(\phi) - \\ &wsin(\vartheta) - \cos(\vartheta) \cos(\phi) \xi_{1d} - \\ &\cos(\vartheta) \sin(\phi) \xi_{2d} - \sin(\vartheta) \xi_{3d} - \\ &K_{1u_e}(\rho_e - \rho_0) - K_{2u_e} \text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{\gamma_{u_c}} \end{aligned} \quad (11)$$

که در این رابطه، $\text{sig}(\rho_e)^{\gamma_{u_c}} = |\rho_e|^{\gamma_{u_c}} \text{sig}(\rho_e)$ و ρ_0 یک مقدار آستانه است که جهت جلوگیری از برخورد شناور با شناور هدف در طول مسیر، تعریف می‌گردد. همچنین، $0 < \gamma_{u_c} < 1$ و $k_{1u_e}, k_{2u_e} > 0$ قابل تنظیم کنترل کننده می‌باشند. جهت کاستن از پیچیدگی‌هایی که در طراحی با روش‌های مرسوم مانند پسگام ایجاد می‌گردد، قانون کنترل مجازی (۱۱)، از یک فیلتر مرتبه اول مطابق معادله زیر عبور داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \lambda_u \dot{u}_{cf} + u_{cf} &= u_c, u_{cf}(0) = u_c(0) \\ u_e &= u - u_{cf}, \end{aligned} \quad (12)$$

که در (۱۲)، λ_u ضریب مثبت قابل تنظیم است که توسط طراح تعیین می‌شود. با توجه به رابطه فوق، خطای خروجی فیلتر برابر $\varepsilon_u = u_{cf} - u_c$ می‌باشد. در گام دوم، پس از طراحی کنترل کننده مجازی، با در نظر گرفتن معادلات (۲)، قانون کنترل واقعی جهت کنترل گشتاور عملگر مربوط به انتقال طولی طراحی می‌گردد. به همین جهت، ابتدا با در نظر گرفتن روابط (۱۲) خطا به صورت زیر تعریف می‌شود:

¹ Surge

که ξ_{id} , $i = 1, 2, 3$ به صورت رابطه (۱۰) تعریف شده است. با در نظر گرفتن رابطه (۱۸)، قانون کنترل مجازی در جهت کنترل زاویه خمشی^۱ به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$q_c = \cos(\phi)^{-1} (-\cos(\theta)(w + \xi_{3d})/P_e - r \tan(\theta) \sin(\phi) + u \cos(\phi) \sin(\theta)/P_e + \xi_{1d} \cos(\phi) \sin(\theta)/P_e + \sin(\phi) \sin(\theta)(v + \xi_{2d})/P_e) - K_{1q_c} \dot{\theta} - K_{2q_c} \text{sig}(\theta)^{\gamma_{q_c}} \quad (19)$$

که در این رابطه، $\text{sig}(\theta)^{\gamma_{q_c}} = |\theta|^{\gamma_{q_c}} \text{sig}(\theta)$ تعریف می‌گردد. همچنین، $0 < \gamma_{q_c} < 1$ و $k_{1q_c}, k_{2q_c} > 0$ پارامترهای قابل تنظیم کنترل کننده می‌باشند. قانون کنترل مجازی (۱۹)، از یک فیلتر مرتبه اول مطابق زیر عبور داده می‌شود:

$$\lambda_q \dot{q}_{cf} + q_{cf} = q_c, q_{cf}(0) = q_c(0) \quad (20)$$

$$q_e = q - q_{cf}$$

که در این رابطه، λ_q ضریب مثبت قابل تنظیم است که توسط طراح تعیین می‌شود. با توجه به رابطه فوق، خطای خروجی فیلتر برابر $\varepsilon_q = q_{cf} - q_c$ می‌باشد. در گام دوم، پس از طراحی کنترل کننده مجازی، با در نظر گرفتن معادلات (۲)، قانون کنترل واقعی جهت کنترل گشتاور عملگر مربوط به زاویه خمشی طراحی می‌گردد. به همین جهت، ابتدا با در نظر گرفتن روابط (۲۰) خطا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q_e = q - q_{cf} + \beta_{1q_c} \text{sig}(\theta)^{\gamma_{q_c}} \quad (21)$$

که در رابطه (۲۱)، ثابت‌های مثبت $0 < \gamma_{q_c} < 1$ و $\beta_{1q_c} > 0$ ضرایب مثبت قابل تنظیم می‌باشند. با مشتق‌گیری از رابطه (۲۱) و جایگذاری معادلات (۲)، خواهیم داشت:

$$\dot{q}_e = \frac{m_{33} - m_{11}}{m_{55}} u_w - f_q(q) - \frac{\rho g \nabla G M_L \sin(\theta)}{m_{55}} + \frac{\tau_q}{m_{55}} - \frac{\tau_{eq}(t)}{m_{55}} - \dot{q}_{cf} + \beta_{1q_c} \gamma_{q_c} |\theta|^{\gamma_{q_c} - 1} \dot{\theta} \quad (22)$$

در رابطه (۱۴)، $f_q(q) = \sigma_{q1} q + \sigma_{q2} q|q| + \sigma_{q3} q^3$ با اندکی ساده سازی می‌توان رابطه (۲۲) را به صورت زیر خلاصه‌نویسی کرد:

$$m_{55} \dot{q}_e = -\mathfrak{R}_q + \tau_q - \tau_{eq}(t) \quad (23)$$

مدل پارامتری برای کنترل کننده تطبیقی به صورت $\mathfrak{R}_q = \Omega_q \Phi_q$ در نظر گرفته می‌شود که در آن Φ_q بردار پارامترها و Ω_q ماتریس رگرسیون شناور در دینامیک خمشی می‌باشد. برای طراحی کنترل کننده زمان-محدود، معادله خطای حلقه‌باز بیان شده در (۲۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$m_{55} \dot{q}_e = -\Omega_q \Phi_q + \tau_q - \tau_{eq}(t) + m_{55} \beta_{1q_c} \gamma_{q_c} |\theta|^{\gamma_{q_c} - 1} \dot{\theta} \quad (24)$$

در نتیجه، با در نظر گرفتن مشتق خطای به دست آمده در رابطه (۲۴)، ورودی کنترلی برای زاویه خمشی به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد. این ورودی کنترلی پایداری زمان-محدود سیستم و همگرایی سریع خطای سرعت خمشی در سطح دینامیک، به ناحیه کوچکی اطراف مبدأ را تضمین می‌نماید.

$$\tau_q = \Omega_q \hat{\Phi}_q - v_{Rq} - m_{55} \beta_{1q_c} \gamma_{q_c} |\theta|^{\gamma_{q_c} - 1} \dot{\theta} - k_{21} q_e - k_{21} \dot{q}_e - k_{22} \text{sig}(q_e)^{\gamma_{q_e}} - \dot{\theta} \cos(\phi) \quad (25)$$

$$u_e = u - u_{cf} + \beta_{1u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{\gamma_{u_c}} \quad (13)$$

که در رابطه (۱۳)، ثابت‌های مثبت $0 < \gamma_{u_c} < 1$ و $\beta_{1u_c} > 0$ ضرایب مثبت قابل تنظیم می‌باشند. با یک بار مشتق‌گیری از روابط (۱۳) و جایگذاری معادلات (۲)، خواهیم داشت:

$$\dot{u}_e = \frac{m_{22}}{m_{11}} v r - \frac{m_{33}}{m_{11}} w q - f_u(u) + \frac{\tau_u}{m_{11}} - \frac{\tau_{eu}(t)}{m_{11}} - \dot{u}_{cf} + \beta_{1u_c} \gamma_{u_c} |(\rho_e - \rho_0)|^{\gamma_{u_c} - 1} \dot{\rho}_e \quad (14)$$

در رابطه (۱۴)، $f_u(u) = \sigma_{u1} u + \sigma_{u2} u|u| + \sigma_{u3} u^3$ ، با اندکی ساده سازی می‌توان رابطه (۱۴) را به صورت زیر خلاصه‌نویسی کرد:

$$m_{11} \dot{u}_e = -\mathfrak{R}_u + \tau_u - \tau_{eu}(t) \quad (15)$$

تخمین پارامترها در کنترل کننده تطبیقی به صورت $\mathfrak{R}_u = \Omega_u \Phi_u$ انجام می‌شود. در رابطه بالا، Ω_u ماتریس رگرسیون شناور می‌باشد. همچنین، Φ_u یک بردار شامل کلیه پارامترهای نامعین موجود در دینامیک شناور است. به منظور دست‌یابی به هدف کنترل زمان-محدود، معادله دینامیک خطای حلقه‌باز بیان شده در (۱۵) به صورت معادله زیر بازنویسی می‌شود:

$$m_{11} \dot{u}_e = -\Omega_u \Phi_u + \tau_u - \tau_{eu}(t) + m_{11} \beta_{1u_c} \gamma_{u_c} |(\rho_e - \rho_0)|^{\gamma_{u_c} - 1} \dot{\rho}_e \quad (16)$$

در نتیجه، با در نظر گرفتن مشتق خطای به دست آمده در رابطه (۱۶)، ورودی کنترلی به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد. این ورودی کنترلی، پایداری زمان-محدود سیستم و همگرایی سریع خطای سرعت طولی در سطح دینامیک به ناحیه کوچکی اطراف مبدأ را تضمین می‌نماید.

$$\tau_u = \Omega_u \hat{\Phi}_u - v_{Ru} - (\rho_e - \rho_0) \cos(\phi) \cos(\theta) - m_{11} \beta_{1u_c} \gamma_{u_c} |(\rho_e - \rho_0)|^{\gamma_{u_c} - 1} \dot{\rho}_e - k_{11} u_e - k_{12} \text{sig}(u_e)^{\gamma_{u_e}} \quad (17)$$

که در این رابطه، ثابت مثبت $0 < \gamma_{u_e} < 1$ ، ضرایب قابل تنظیم $k_{11}, k_{12} > 0$ بهره‌های کنترل کننده می‌باشند. همچنین، $\hat{\Phi}_u$ بیانگر تخمین پارامترهای نامعین است. از طرفی، جمله v_{Ru} ، قانون کنترل مقاوم جهت جبران کران بالای جملات حاوی اغتشاشات خارجی موجود در جمله $\tau_{eu}(t)$ می‌باشد که به صورت $v_{Ru} = \hat{\alpha}_u \text{sat}(s_{u_e})$ پیشنهاد می‌گردد. کران بالای آن به صورت یک کمیت اسکالر به فرم $|\tau_{eu}(t)| \leq \alpha_u$ در نظر گرفته می‌شود.

۳-۲ طراحی کنترل کننده جهت کنترل زاویه خمشی

با در نظر گرفتن (۸)، و با مشتق گرفتن از $\theta = \arctan(z_e/\sqrt{x_e^2 + y_e^2})$ و جایگذاری (۷) در آن، دینامیک خطا در مختصات کروی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\theta} = \cos(\theta)(w + \xi_{3d})/\rho_e + r \tan(\theta) \sin(\phi) + q \cos(\phi) - u \cos(\phi) \sin(\theta)/\rho_e - \xi_{1d} \cos(\phi) \sin(\theta)/\rho_e - \sin(\phi) \sin(\theta)(v + \xi_{2d})/\rho_e \quad (18)$$

^۱ Pitch

مدل پارامتری در کنترل کننده تطبیقی به صورت $\mathfrak{R}_r = \Omega_r \Phi_r$ انتخاب می شود و Ω_r ماتریس رگرسیون شناور و Φ_r یک بردار شامل کلیه پارامترهای نامعین موجود در دینامیک گردش شناور است. برای محقق کردن هدف کنترل زمان-محدود، معادله دینامیک خطای حلقه باز به صورت زیر بیان می شود:

$$m_{66} \dot{r}_e = -\Omega_r \Phi_r + \tau_r - \tau_{er}(t) + m_{66} \beta_{1r_c} Y_{r_c} |\phi|^{Y_{r_c}-1} \phi \quad (32)$$

در نتیجه، با در نظر گرفتن رابطه فوق، ورودی کنترلی برای زاویه گردش به صورت زیر پیشنهاد می گردد تا پایداری زمان-محدود سیستم و همگرایی سریع خطای سرعت گردش به ناحیه کوچکی اطراف مبدأ تضمین شود:

$$\tau_r = \Omega_r \Phi_r - v_{Rr} - m_{66} \beta_{1r_c} Y_{r_c} |\phi|^{Y_{r_c}-1} \phi - k_{31} r_e - k_{32} \text{sig}(r_e)^{Y_{r_c}} - \phi(1 + \cos(\phi) \tan(\vartheta) \tan(\theta)) \quad (33)$$

که در آن ثابت مثبت $0 < Y_{r_e} < 1$ یک ضریب قابل تنظیم، $k_{31}, k_{32} > 0$ بهره های کنترل کننده، و Φ_r تخمین پارامترهای نامعین می باشند. مشابه قبل، جمله $v_{Rr} = \hat{\alpha}_r \text{sat}(s_{r_e})$ جهت جبران کران بالای اغتشاشات خارجی موجود در جمله $\tau_{er}(t)$ پیشنهاد می گردد که کران بالای آنها به صورت یک کمیت اسکالر به فرم $|\tau_{er}(t)| \leq \alpha_r$ در نظر گرفته شده است. مشکل اساسی در استفاده از روش کنترل زمان-محدود، نوسانات فرکانس بالای ورودی های کنترلی است. این نوسانات به دلیل وجود تابع ناپیوسته $\text{sig}(s_k)$ در قانون کنترل ایجاد می گردد. بنابراین، جهت رفع این مشکل و مشتق پذیر شدن آن از تابع $\text{sat}(s_k)$ به صورت یک تابع اشباع به فرم زیر استفاده خواهد شد:

$$\text{sat}(s_k) = \begin{cases} \frac{s_k}{|s_k|} & \text{if } \left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|} \right) \tan h \left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|} \right) \geq 1.5 \\ \left[\left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|} \right) \tan h \left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|} \right) \right] \frac{s_k}{|s_k|} & \text{if } \left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|} \right) \tan h \left(\frac{|s_k|}{\varepsilon_{ak} + |s_k|} \right) < 1.5 \end{cases} \quad (34)$$

این تابع به ازای $s_k = u_e, q_e, r_e$ تکرار می شود و ε_{ak} بیانگر ضخامت لایه مرزی^۲ است. از طرفی، با توجه به اینکه میزان اغتشاشات خارجی مانند باد و امواج اقیانوسی تحت تأثیر عوامل مختلفی قرار دارد، در هر لحظه از زمان مقادیر متفاوتی خواهد داشت و مقدار دقیقی از آن در دسترس نمی باشد. بنابراین، استفاده از کنترل تطبیقی جهت به روز رسانی تخمین کران بالای این نامعینی ها که با $\hat{\alpha}_u, \hat{\alpha}_q, \hat{\alpha}_r$ نشان داده شده اند، راه حلی قابل توجه است. بر این اساس، در ادامه قوانین تطبیق زیر جهت به روز رسانی کران بالای نامعینی و تخمین پارامترهای نامعین تعریف می گردند:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\alpha}}_u = \eta_u |u_e| - \eta_u \sigma_u (\alpha_u - \alpha_o), \\ \dot{\hat{\alpha}}_q = \eta_q |q_e| - \eta_q \sigma_q (\alpha_q - \alpha_o), \\ \dot{\hat{\alpha}}_r = \eta_r |r_e| - \eta_r \sigma_r (\alpha_r - \alpha_o). \end{cases} \quad (35)$$

$$\dot{\hat{\Phi}} = -\Gamma \Omega^T v - \Gamma \delta_{\Phi} \hat{\Phi} \quad (36)$$

که در این معادله، ثابت مثبت $0 < Y_{q_e} < 1$ ، ضرایب قابل تنظیم $k_{21}, k_{22} > 0$ بهره های کنترل کننده می باشند. همچنین، Φ_q بیانگر تخمین پارامترهای نامعین است. از طرفی، عبارت v_{Rq} قانون کنترل مقاوم جهت جبران کران بالای جملات شامل اغتشاشات خارجی موجود در جمله $\tau_{eq}(t)$ می باشد که به صورت $v_{Rq} = \hat{\alpha}_q \text{sat}(s_{q_e})$ پیشنهاد می شود و کران بالای آن به صورت یک کمیت اسکالر به فرم $|\tau_{eq}(t)| \leq \alpha_q$ در نظر گرفته می شود.

۳-۳ طراحی کنترل کننده جهت کنترل گردش

با مشتق گرفتن از $\phi = \arctan \left(\frac{y_e}{x_e} \right)$ در (۵) و جایگذاری (۷) در آن، دینامیک خطا در مختصات کروی به صورت زیر به دست می آید:

$$\dot{\phi} = -r(1 + \cos(\phi) \tan(\vartheta) \tan(\theta)) + q \sin(\phi) \tan(\vartheta) - u \sin(\phi) / (\rho_e \cos(\vartheta)) - \xi_{1d} \sin(\phi) / (\rho_e \cos(\vartheta)) + \frac{(v + \xi_{2d}) \cos(\phi)}{\rho_e \cos(\vartheta)} \quad (26)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۹)، قانون کنترل مجازی در جهت کنترل زاویه گردش^۱ به صورت زیر انتخاب می گردد:

$$r_c = (1 + \cos(\phi) \tan(\vartheta) \tan(\theta))^{-1} (-q \sin(\phi) \tan(\vartheta) + u \sin(\phi) / (\rho_e \cos(\vartheta)) + \xi_{1d} \sin(\phi) / (\rho_e \cos(\vartheta)) - (v + \xi_{2d}) \cos(\phi) / (\rho_e \cos(\vartheta)) + K_{1r_c} \phi + K_{2r_c} \text{sig}(\phi)^{Y_{r_c}} \quad (27)$$

که در آن $\text{sig}(\vartheta)^{Y_{r_c}} = |\vartheta|^{Y_{r_c}} \text{sig}(\vartheta)$ تعریف می شود. همچنین، $0 < Y_{r_c} < 1$ و $k_{1r_c}, k_{2r_c} > 0$ پارامترهای قابل تنظیم کنترل کننده می باشند. قانون کنترل مجازی (۲۷) از یک فیلتر مرتبه اول به صورت زیر عبور داده می شود:

$$\lambda_u \dot{r}_{cf} + r_{cf} = r_c, r_{cf}(0) = r_c(0) \quad (28)$$

$$r_e = r - r_{cf}$$

که λ_r ضریب مثبت قابل تنظیم است که توسط طراح مشخص می شود. همچنین، خطای خروجی فیلتر برابر $\varepsilon_r = r_{cf} - r_c$ می باشد. در گام دوم، قانون کنترل واقعی جهت کنترل گشتاور عملگر مربوط به زاویه گردش طراحی می گردد. به همین جهت، خطا به صورت زیر تعریف می شود:

$$r_e = r - r_{cf} + \beta_{1r_c} \text{sig}(\phi)^{Y_{r_c}} \quad (29)$$

که ثابت های مثبت $0 < Y_{r_c} < 1$ و $\beta_{1r_c} > 0$ ضرایب مثبت قابل تنظیم می باشند. سپس، با یک بار مشتق گیری از معادله (۲۹) و جایگذاری معادله (۲)، خواهیم داشت:

$$\dot{r}_e = \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{66}} uv - f_r(r) + \frac{\tau_r}{m_{66}} - \frac{\tau_{er}(t)}{m_{66}} - \dot{r}_{cf} + \beta_{1r_c} Y_{r_c} |\phi|^{Y_{r_c}-1} \dot{\phi} \quad (30)$$

با در نظر گرفتن $f_r(r) = \sigma_{r1} r + \sigma_{r2} r^2 + \sigma_{r3} r^3$ ، رابطه (۳۰) را به صورت زیر به دست می آید:

$$m_{66} \dot{r}_e = -\mathfrak{R}_r + \tau_r - \tau_{er}(t) \quad (31)$$

² Boundary layer thickness

¹ Yaw

$$\dot{\rho}_e = w \sin(\vartheta) + \cos(\vartheta) \cos(\phi) \xi_1 + \cos(\vartheta) \sin(\phi) \xi_2 + \sin(\vartheta) \xi_3 + v \cos(\vartheta) \sin(\phi) + (u_e + \varepsilon_u + u_c - \beta_{1u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{Y_{uc}}) \cos(\phi) \cos(\vartheta)$$

$$\dot{\vartheta} = \cos(\vartheta) (w + \xi_3) / \rho_e + r \tan(\vartheta) \sin(\phi) - \xi_1 \cos(\phi) \sin(\vartheta) / \rho_e - u \cos(\phi) \sin(\vartheta) / \rho_e - \sin(\phi) \sin(\vartheta) (v + \xi_2) / \rho_e + (q_e + \varepsilon_q + q_c - \beta_{1q_c} \text{sig}(\vartheta)^{Y_{qc}}) \cos(\phi) \quad (38)$$

$$\dot{\phi} = -(r_e + \varepsilon_r + r_c - \beta_{1r_c} \text{sig}(\phi)^{Y_{rc}}) (1 + \cos(\phi) \tan(\vartheta) \tan(\theta)) + (v + \xi_2) \cos(\phi) / (\rho_e \cos(\vartheta)) + q \sin(\phi) \tan(\vartheta) - u \sin(\phi) / (\rho_e \cos(\vartheta)) - \xi_1 \sin(\phi) / (\rho_e \cos(\vartheta))$$

در نهایت، با جایگذاری (۹)، (۱۸) و (۲۶)، در (۳۸) و اندکی ساده‌سازی، معادلات خطای حلقه بسته در سطح سینماتیک به فرم زیر به دست می‌آیند:

$$\dot{\rho}_e = -k_{1u_c}(\rho_e - \rho_0) - k_{u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{Y_{uc}} + (u_e + \varepsilon_u - \beta_{1u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{Y_{uc}}) \cos(\phi) \cos(\vartheta), \quad (39)$$

$$\dot{\vartheta} = (q_e + \varepsilon_q - \beta_{1q_c} \text{sig}(\vartheta)^{Y_{qc}}) \cos(\phi) - k_{1q_c} \vartheta - k_{2q_c} \text{sig}(\vartheta)^{Y_{qc}}, \quad \dot{\phi} = -(r_e + \varepsilon_r - \beta_{1r_c} \text{sig}(\phi)^{Y_{rc}}) (1 + \cos(\phi) \tan(\vartheta) \tan(\theta)) - k_{1r_c} \phi - k_{2r_c} \text{sig}(\phi)^{Y_{rc}}$$

به همین ترتیب، معادلات دینامیک خطاهای حلقه بسته از جایگذاری قوانین کنترل دینامیکی (۱۷)، (۲۵) و (۳۳) در معادلات (۱۶)، (۲۴) و (۳۲)، به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$m_{11} \dot{u}_e = -\Omega_u \tilde{\Phi}_u - \tau_{eu}(t) - \hat{\alpha}_u \text{sat}(u_e) - k_{11} u_e - k_{12} \text{sig}(u_e)^{Y_{ue}} - (\rho_e - \rho_0) \cos(\phi) \cos(\vartheta), \quad m_{55} \dot{q}_e = -\Omega_q \tilde{\Phi}_q - \tau_{eq}(t) - \hat{\alpha}_q \text{sat}(q_e) - k_{21} q_e - k_{22} \text{sig}(q_e)^{Y_{qe}} - \vartheta \cos(\phi), \quad m_{66} \dot{r}_e = -\Omega_r \tilde{\Phi}_r - \tau_{er}(t) - \hat{\alpha}_r \text{sat}(r_e) - k_{31} r_e - k_{32} \text{sig}(r_e)^{Y_{re}} - \phi (1 + \cos(\phi) \tan(\vartheta) \tan(\theta)). \quad (40)$$

که در این روابط، $\Omega = (\Omega_u^T, \Omega_q^T, \Omega_r^T)^T$ و $w = (u_e, q_e, r_e)^T$ می‌باشد. همچنین، ضرایب مثبت ثابت η_r و η_q و η_u ماتریس مثبت $\Gamma = \text{diag}(\Gamma_{\Phi_u}, \Gamma_{\Phi_q}, \Gamma_{\Phi_r})$ معرف بهره‌های تطبیق می‌باشند. به علاوه، ضرایب کوچک مثبت ثابت σ_r و σ_q و σ_u ماتریس مثبت $\delta_\Phi = \text{diag}(s_{\Phi_u}, s_{\Phi_q}, s_{\Phi_r})$ ، ضرایب اصلاح سیگما می‌باشند.

تذکره ۳: افزودن بخش اصلاح سیگما به قوانین تطبیق، آنها را به گونه‌ای اصلاح می‌نماید که خطای تخمین پارامترها حتی در حضور نامعینی غیرپارامتری کران دار باقی بماند.

تذکره ۴: جمله‌های موجود در قوانین کنترل (۱۱)، (۱۹) و (۲۷)، متضمن پایداری سریع در زمان-محدود هستند. به طوری که جملات $k_{1q_c} \vartheta$ ، $k_{1u_c}(\rho_e - \rho_0)$ و $k_{1r_c} \phi$ هنگامی که حالت‌های سیستم دور از مبدأ قرار داشته باشند و جملات $k_{2u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{Y_{uc}}$ ، $k_{2q_c} \text{sig}(\vartheta)^{Y_{qc}}$ و $k_{2r_c} \text{sig}(\phi)^{Y_{rc}}$ زمانی که حالات در نزدیکی مبدأ قرار دارند، همگرایی سریع آنها به ناحیه کوچکی حول مبدأ را تضمین می‌نمایند.

۴- محاسبه دینامیک خطای حلقه بسته

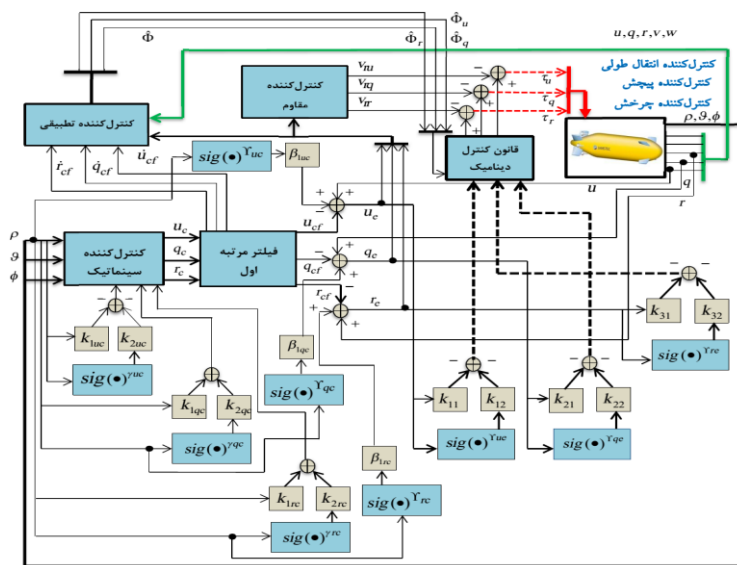
در این بخش، با استفاده از طراحی کنترل کننده ارائه شده در بخش-های قبل، روابط خطای حلقه بسته در سطح دینامیک و سینماتیک محاسبه می‌گردد. برای این منظور، ابتدا معادلات u ، q و r بر حسب قانون کنترل مجازی، خطا و خطای خروجی فیلترها، از معادله‌های (۱۱)، (۱۹) و (۲۷) و رابطه $d = d_c - d_{cf}$ ، $d = u, r, q$ به دست می‌آید.

$$u = u_e + \varepsilon_u + u_c - \beta_{1u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{Y_{uc}} \quad (37)$$

$$q = q_e + \varepsilon_q + q_c - \beta_{1q_c} \text{sig}(\vartheta)^{Y_{qc}}$$

$$r = r_e + \varepsilon_r + r_c - \beta_{1r_c} \text{sig}(\phi)^{Y_{rc}}$$

سیس، از جایگذاری (۳۷) در روابط (۹)، (۱۸) و (۲۶)، معادلات خطا به صورت زیر حاصل می‌شوند:



شکل ۲: دیاگرام بلوکی روش پیشنهادی

در صورتی که بهره‌های کنترلی به شکل $K_{12}, K_{11}, K_{21}, K_{22} > 1$ ، $K_{1q_c}, K_{2q_c}, K_{1u_c}, K_{2u_c} > 0.5$ ، $K_{31}, K_{32} > a$ ، $K_{1r_c}, K_{2r_c} > 0.5a$ ، $a = \max(1 + \tan(\theta) \tan(\vartheta) \cos(\phi))$ و $\lambda_r < 1/(1 + 0.5a)$ ، باشند، قادر هستند اهداف زیر را تضمین نمایند:

- (۱) کران‌داری تمامی سیگنال‌های سیستم حلقه‌بسته؛
 - (۲) همگرایی خطای ردیابی در سطح دینامیک و سینماتیک به ناحیه کوچک $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ حول مبدأ را در زمان-محدود، که در این صورت، $\|v\| \leq \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ خواهد بود و در آن
- $$\delta_1 = \frac{\|\omega\Phi - \omega\hat{\Phi}\| + \|\tilde{\alpha}\|}{\lambda_{\bar{k}_{21}}},$$
- $$\delta_2 = \frac{\|q\|}{\lambda_{\bar{k}_{21}}},$$
- $$\delta_3 = \left(\frac{\|\omega\Phi - \omega\hat{\Phi}\| + \|\tilde{\alpha}\|}{\lambda_{\bar{k}_{22}}} \right)^{1/Y},$$
- $$\delta_4 = \frac{\|q\|}{\lambda_{\bar{k}_{21}}}.$$

اثبات: با توجه به اینکه براساس قضیه ۱ لازم است که خطاها چه در سطح دینامیک و چه در سطح سینماتیک در زمان محدودی به صفر میل نمایند، لازم است که تابع لیاپانوف به صورت تابعی از خطاها در مختصات کروی، خطاها در سطح دینامیک، خطای خروجی فیلترها و خطاهای تخمین پارامترها، انتخاب گردد. لذا، تابع لیاپانوف $V(t)$ به-صورت زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$V(t) = \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2 + \frac{1}{2}\vartheta^2 + \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}m_{11}u_e^2 + \frac{1}{2}m_{55}q_e^2 + \frac{1}{2}m_{66}r_e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_u^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_q^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_r^2 + \frac{\tilde{\alpha}_u^T \Gamma \tilde{\alpha}_u}{2} + \frac{\tilde{\alpha}_q^2}{2\eta_u} + \frac{\tilde{\alpha}_r^2}{2\eta_r} \quad (47)$$

سپس، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{V}(t) = (\rho - \rho_0)\dot{\rho} + \vartheta\dot{\vartheta} + \phi\dot{\phi} + m_{11}u_e\dot{u}_e + m_{55}q_e\dot{q}_e + m_{66}r_e\dot{r}_e + \varepsilon_u\dot{\varepsilon}_u + \varepsilon_q\dot{\varepsilon}_q + \varepsilon_r\dot{\varepsilon}_r + \tilde{\alpha}_u^T \Gamma \tilde{\alpha}_u + \frac{\tilde{\alpha}_u\dot{\tilde{\alpha}}_u}{\eta_u} + \frac{\tilde{\alpha}_q\dot{\tilde{\alpha}}_q}{\eta_q} + \frac{\tilde{\alpha}_r\dot{\tilde{\alpha}}_r}{\eta_r} \quad (48)$$

با جایگذاری معادلات خطای حلقه‌بسته در سطح دینامیکی و سینماتیکی از روابط (۳۹) و (۴۰) در مشتق تابع لیاپانوف، خواهیم داشت:

$$\dot{V}(t) = -k_{1u_c}(\rho_e - \rho_0)^2 - (\rho_e - \rho_0)k_{2u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{Y_{u_c}} + (\rho_e - \rho_0)(u_e + \varepsilon_u - \beta_{1u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{Y_{u_c}}) \cos(\phi) \cos(\vartheta) - k_{1q_c} \vartheta^2 - \vartheta k_{2q_c} \text{sig}(\vartheta)^{Y_{q_c}} - k_{1r_c} \phi^2 - k_{11} u_e^2 + \vartheta(q_e + \varepsilon_q - \beta_{1q_c} \text{sig}(\vartheta)^{Y_{q_c}}) \cos(\phi) - \phi k_{2r_c} \text{sig}(\phi)^{Y_{r_c}} + \phi(r_e + \varepsilon_r - \beta_{1r_c} \text{sig}(\phi)^{Y_{r_c}}) (1 + \tan(\theta) \tan(\vartheta) \cos(\phi)) - u_e k_{12} \text{sig}(u_e)^{Y_{ue}} - u_e \Omega_u \tilde{\Phi}_u - u_e \tilde{\alpha}_u \text{sat}(u_e) - u_e \tau_{eu}(t) - u_e(\rho_e - \rho_0) \cos(\phi) \cos(\vartheta) - k_{21} q_e^2 - q_e k_{22} \text{sig}(q_e)^{Y_{qe}} - q_e \Omega_q \tilde{\Phi}_q - q_e \tilde{\alpha}_q \text{sat}(q_e) - q_e \tau_{eq}(t) - q_e \vartheta \cos(\phi) - k_{31} r_e^2 - r_e k_{32} \text{sig}(r_e)^{Y_{re}} \quad (49)$$

۵- تحلیل پایداری سیستم حلقه‌بسته تحت الگوریتم کنترلی سطح دینامیکی مقاوم تطبیقی زمان-محدود

در این بخش، ابتدا چند لم مفید در روند اثبات پایداری معرفی می‌گردد. سپس، پایداری سیستم توسط تئوری لیاپانوف به اثبات می‌رسد. **لم ۱ [۳۵]:** برای هر عدد مثبت $0 < \beta = \frac{p}{q} < 1$ و هر بردار $x_i \in R$ رابطه زیر برقرار است:

$$\|a^{-\beta}\|^2 = \sum_{i=1}^L (a_i^2)^{\beta} \geq \|\bar{a}\|^{2\beta} = \left(\sum_{i=1}^L a_i^2 \right)^{\beta} \quad (41)$$

که در آن، $\bar{a}^{\beta} = (a_1^{\beta}, \dots, a_L^{\beta})^T$ می‌باشد.

لم ۲ [۳۶]: برای هر $x_i \in R$ و $0 < \beta < 1$ ، نامساوی زیر قابل بیان است:

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i| \right)^{\beta} \leq \sum_{i=1}^m |x_i|^{\beta} \leq m^{1-\beta} \left(\sum_{i=1}^m |x_i| \right)^{\beta} \quad (42)$$

لم ۳ [۳۴]: برای بردارهای $x, y \in \mathbb{R}^n$ و هر ماتریس مثبت معین P نامساوی ریلی-ریتر^۱ به صورت زیر برقرار است:

$$\lambda_{\min}\{P\} \|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}\{P\} \|x\|^2 \quad (43)$$

که در این رابطه، λ_{\max} و λ_{\min} به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس P هستند.

لم ۴ [۳۴]: برای هر ماتریس مثبت معین P ، عدد ثابت k و بردارهای $x, y \in \mathbb{R}^n$ نامساوی زیر برقرار است:

$$x^T P y \leq \frac{1}{2k^2} \lambda_{\max}\{P\} \|x\|^2 + \frac{k^2}{2} \lambda_{\max}\{P\} \|y\|^2 \quad (44)$$

لم ۵ [۳۴]: اگر P, b, a اعداد حقیقی مثبت باشند، به گونه‌ای که $(1/P) + (1/q) = 1$ ، آنگاه نامساوی یانگ^۲ به صورت زیر قابل بیان است:

$$ab \leq (a^p/P) + (b^q/q) \quad (45)$$

لم ۶ [۳۷]: برای اعداد مثبت a_1, a_2, \dots, a_n و $0 < p < 1$ ، نامساوی $(a_1^2, \dots, a_n^2)^p \leq (a_1^p, \dots, a_n^p)^2$ برقرار است.

قضیه ۱: با در نظر گرفتن معادلات سینماتیک و دینامیک ربات متحرک شناور زیر سطح به فرم (۱) و (۲) و با در نظر گرفتن فرض‌های ۱ تا ۵، قانون کنترل سطح دینامیکی مقاوم تطبیقی زمان محدود سینماتیکی ارائه شده در روابط (۱۱)، (۱۹) و (۲۷) و قوانین کنترلی (۱۷)، (۲۵) و (۳۳)

² Young Inequality

¹ Rayleigh-Ritz Inequality

$$0.25\zeta_r^2 + 0.25\zeta_q^2 + 0.25\zeta_u^2 + \tilde{\Phi}_u^T \delta_{\Phi u} \tilde{\Phi}_u + \tilde{\Phi}_q^T \delta_{\Phi q} \tilde{\Phi}_q + \tilde{\Phi}_r^T \delta_{\Phi r} \tilde{\Phi}_r + \tilde{\alpha}_u \sigma_u \tilde{\alpha}_u - \tilde{\alpha}_u \sigma_u \alpha_{u0} + \tilde{\alpha}_q \sigma_q \tilde{\alpha}_q - \tilde{\alpha}_q \sigma_q \alpha_{q0} + \tilde{\alpha}_r \sigma_r \tilde{\alpha}_r - \tilde{\alpha}_r \sigma_r \alpha_{r0}$$

با در نظر گرفتن $\max\{\cos(\phi)\} = b_3$ ، $\max\{\cos(\phi) \cos(\theta)\} = b_1$ و $\max\{(1 + \tan(\theta) \tan(\vartheta) \cos(\phi))\} = b_2$ و استفاده از ناموسای

بانگ می توان مشتق لیاپانوف را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) \leq & -k_{1u_c}(\rho_e - \rho_o)^2 - k_{1q_c} \vartheta^2 - k_{1r_c} \phi^2 - \\ & k_{2u_c} |\rho_e - \rho_o|^{\gamma_{uc+1}} - k_{2q_c} |\vartheta|^{\gamma_{qc+1}} - \\ & k_{2r_c} |\phi|^{\gamma_{rc+1}} - k_{31} r_e^2 - k_{11} u_e^2 - k_{21} q_e^2 - \\ & k_{32} |r_e|^{\gamma_{re+1}} - k_{12} |u_e|^{\gamma_{ue+1}} - k_{22} |q_e|^{\gamma_{qe+1}} + \\ & b_1(\rho_e - \rho_o)^2 + \varepsilon_u^2/4 - \beta_{1u_c} b_1 |\rho_e - \rho_o|^{\gamma_{uc+1}} \\ & + b_2 \vartheta^2 + \varepsilon_q^2/4 - \beta_{1q_c} b_2 |\vartheta|^{\gamma_{qc+1}} + b_3 \phi^2 + \\ & \varepsilon_r^2/4 - \beta_{1r_c} b_3 |\phi|^{\gamma_{rc+1}} - \varepsilon_u^2/\lambda_u - \varepsilon_q^2/\lambda_q - \\ & \varepsilon_r^2/\lambda_r + \varepsilon_u^2 + \varepsilon_q^2 + \varepsilon_r^2 + 0.25\zeta_r^2 + 0.25\zeta_q^2 + \\ & 0.25\zeta_u^2 + \tilde{\Phi}_u^T \delta_{\Phi u} \tilde{\Phi}_u + \tilde{\Phi}_q^T \delta_{\Phi q} \tilde{\Phi}_q + \tilde{\Phi}_r^T \delta_{\Phi r} \tilde{\Phi}_r + \\ & \tilde{\alpha}_u \sigma_u \tilde{\alpha}_u - \tilde{\alpha}_u \sigma_u \alpha_{u0} + \tilde{\alpha}_q \sigma_q \tilde{\alpha}_q - \tilde{\alpha}_q \sigma_q \alpha_{q0} + \\ & \tilde{\alpha}_r \sigma_r \tilde{\alpha}_r - \tilde{\alpha}_r \sigma_r \alpha_{r0} \end{aligned} \quad (56)$$

با فرض اینکه $\Upsilon_{uc} = \gamma_{uc}$ و $\Upsilon_{qc} = \gamma_{qc}$ ، $\Upsilon_{rc} = \gamma_{rc}$ هستند، و در نظر گرفتن تعریف خطای تخمین پارامترها، جملات $\tilde{\Phi}^T \delta_{\Phi} \tilde{\Phi}$ و $\tilde{\alpha}_d \sigma_d \tilde{\alpha}_d$ از $d = u, q, r$ می توان به صورت های $\tilde{\alpha}_d \sigma_d \tilde{\alpha}_d = \tilde{\alpha}_d \sigma_d \alpha_d - \tilde{\alpha}_d \sigma_d \alpha_d$ نوشت. از طرفی، با توجه به لم های ۳، ۴، ۵، روابط زیر برای این جملات قابل بیان است:

$$\begin{aligned} -\tilde{\Phi}_d^T \delta_{\Phi d} \tilde{\Phi}_d & \leq -\lambda_{\min}(\delta_{\Phi d}) \|\tilde{\Phi}_d\|^2 \\ \tilde{\Phi}_d^T \delta_{\Phi d} \tilde{\Phi}_d & \leq \frac{1}{2k^2} \lambda_{\max}(\delta_{\Phi d}) \|\tilde{\Phi}_d\|^2 + \frac{k^2}{2} \lambda_{\max}\{\delta_{\Phi d}\} \|\Phi_d\|^2, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{\alpha}_d \sigma_d \tilde{\alpha}_d & \leq -\sigma_d |\tilde{\alpha}_d|^2 \\ \tilde{\alpha}_d \sigma_d \tilde{\alpha}_d & \leq \frac{1}{2k^2} \sigma_d |\tilde{\alpha}_d|^2 + \frac{k^2}{2} \sigma_d |\alpha_d|^2, \end{aligned} \quad (58)$$

از روابط بالا می توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_d \sigma_d \tilde{\alpha}_d & \leq -(1 - 0.5/k^2) \sigma_d |\tilde{\alpha}_d|^2 + 0.5k^2 \sigma_d |\alpha_d|^2 \\ \tilde{\Phi}_d^T \delta_{\Phi d} \tilde{\Phi}_d & \leq -(1 - 0.5/k^2) \lambda_{\max}\{\delta_{\Phi d}\} \|\tilde{\Phi}_d\|^2 + \\ & 0.5k^2 \lambda_{\max}\{\delta_{\Phi d}\} \|\Phi_d\|^2 \end{aligned} \quad (59)$$

با توجه به شرایط در نظر گرفته شده جهت تنظیم بهره ها در قضیه ۱، مشتق لیاپانوف با اندکی ساده سازی به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -(k_{1u_c} - 1 - b_1)(\rho_e - \rho_o)^2 - \\ & (k_{1q_c} - 1 - b_2)\vartheta^2 - (k_{1r_c} - a - b_3)\phi^2 - \\ & ((k_{2u_c} - 1 + \beta_{1u_c} b_1) |\rho_e - \rho_o|^{\gamma_{uc+1}} - \\ & (k_{2q_c} - 1 + \beta_{1q_c} b_2) |\vartheta|^{\gamma_{qc+1}} - \\ & (k_{2r_c} - 1 + \beta_{1r_c} b_3) |\phi|^{\gamma_{rc+1}} - (k_{31} - 0.5 a) r_e^2 \\ & - (k_{11} - 0.5) u_e^2 - (k_{21} - 0.5) q_e^2 - \\ & (k_{32} - 0.5 a) |r_e|^{\gamma_{re+1}} - (k_{12} - 0.5) |u_e|^{\gamma_{ue+1}} - \\ & (k_{22} - 0.5) |q_e|^{\gamma_{qe+1}} - (1/\lambda_q - 1.5 - 1/4) \varepsilon_u^2 - \\ & (1/\lambda_q - 1.5 - 1/4) \varepsilon_q^2 + 0.25\zeta_q^2 - \\ & (1/\lambda_r - 1 - 1.5 a - 1/4) \varepsilon_r^2 + 0.25\zeta_r^2 + \\ & 0.25\zeta_u^2 - (1 - 0.5/k^2) \sigma_u |\tilde{\alpha}_u|^2 + \end{aligned} \quad (60)$$

از طرفی، با توجه به قوانین تطبیق (۳۵) و (۳۶) و تعریف خطاهای تخمین به صورت های $a = u, q, r$ ، $\tilde{\Phi} = \Phi - \hat{\Phi}$ و $\tilde{\alpha}_c = \alpha_c - \hat{\alpha}_c$ ، روابط زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_u & = \alpha_u - \hat{\alpha}_u \\ \rightarrow \dot{\tilde{\alpha}}_u & = -\dot{\hat{\alpha}}_u = -\eta_u |u_e| + \eta_u \sigma_u (\alpha_u - \alpha_o), \\ \tilde{\alpha}_q & = \alpha_q - \hat{\alpha}_q \\ \rightarrow \dot{\tilde{\alpha}}_q & = -\dot{\hat{\alpha}}_q = -\eta_q |q_e| + \eta_q \sigma_q (\alpha_q - \alpha_{q0}), \\ \tilde{\alpha}_r & = \alpha_r - \hat{\alpha}_r \\ \rightarrow \dot{\tilde{\alpha}}_r & = -\dot{\hat{\alpha}}_r = -\eta_r |r_e| + \eta_r \sigma_r (\alpha_r - \alpha_{r0}), \\ \tilde{\Phi} & = -\hat{\Phi} + \Gamma \Omega^T S + \Gamma \delta_{\Phi} \tilde{\Phi}. \end{aligned} \quad (50)$$

بنابراین، با جایگذاری روابط (۵۰) در معادله (۴۹) و همچنین، با در نظر گرفتن رابطه اول از توابع اشباع دو وضعیتی (۳۴) به صورت های $\text{sat}(r_e) = r_e/|r_e|$ و $\text{sat}(q_e) = q_e/|q_e|$ ، $\text{sat}(u_e) = u_e/|u_e|$ برابر بودن جملات اسکالر $\tilde{\Phi}_q^T \Omega_q q_e = \tilde{\Phi}_u^T \Omega_u u_e = u_e \Omega_u \tilde{\Phi}_u$ و $\tilde{\Phi}_r^T \Omega_r r_e = r_e \Omega_r \tilde{\Phi}_r$ و $q_e \Omega_q \tilde{\Phi}_q$ بازنویسی می گردد:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -k_{1u_c}(\rho_e - \rho_o)^2 - (\rho_e - \rho_o) k_{2u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_o)^{\gamma_{uc}} \\ & + (\rho_e - \rho_o) (\varepsilon_u - \beta_{1u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_o)^{\gamma_{uc}}) \cos(\phi) \cos(\vartheta) - \\ & k_{1q_c} \vartheta^2 - k_{1r_c} \phi^2 - \phi k_{2r_c} \text{sig}(\phi)^{\gamma_{rc}} - \vartheta k_{2q_c} \text{sig}(\vartheta)^{\gamma_{qc}} + \\ & \vartheta (\varepsilon_q - \beta_{1q_c} \text{sig}(\vartheta)^{\gamma_{qc}}) \cos(\phi) k_{21} q_e^2 - q_e k_{22} \text{sig}(q_e)^{\gamma_{qe}} \\ & - k_{31} r_e^2 - r_e k_{32} \text{sig}(r_e)^{\gamma_{re}} + \varepsilon_u \dot{\varepsilon}_u + \varepsilon_q \dot{\varepsilon}_q + \varepsilon_r \dot{\varepsilon}_r \\ & + \tilde{\Phi}_u^T \delta_{\Phi u} \tilde{\Phi}_u + \tilde{\Phi}_q^T \delta_{\Phi q} \tilde{\Phi}_q + \tilde{\Phi}_r^T \delta_{\Phi r} \tilde{\Phi}_r + \tilde{\alpha}_u \sigma_u (\hat{\alpha}_u - \alpha_{u0}) \\ & + \tilde{\alpha}_q \sigma_q (\hat{\alpha}_q - \alpha_{q0}) + \tilde{\alpha}_r \sigma_r (\hat{\alpha}_r - \alpha_{r0}) \end{aligned} \quad (51)$$

از طرفی، با توجه به روابط (۱۱)، (۱۹) و (۲۷)، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_u & = -\varepsilon_u/\lambda_u + du_c/dt \\ \dot{\varepsilon}_q & = -\varepsilon_q/\lambda_q + dq_c/dt \\ \dot{\varepsilon}_r & = -\varepsilon_r/\lambda_r + dr/dt \end{aligned} \quad (52)$$

$$|df_c/dt| \leq \zeta_d, \quad f = u, q, r \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_f \dot{\varepsilon}_f & = -\varepsilon_f^2/\lambda_f + \varepsilon_f (df_c/dt) \\ \rightarrow \varepsilon_f \dot{\varepsilon}_f & \leq -\varepsilon_f^2/\lambda_f + |\varepsilon_f| \zeta_f \quad f = u, q, r \end{aligned}$$

$$ab \leq a^2 + b^2/4 \rightarrow \varepsilon_f \dot{\varepsilon}_f \leq -\varepsilon_f^2/\lambda_f + \varepsilon_f^2 + 0.25\zeta_f^2$$

که ζ_d تابعی پیوسته از سیگنال های حلقه بسته می باشد. از طرفی، عبارت $x \text{sig}(x)^a$ به ازای $x = (\rho_e - \rho_o), \phi, \vartheta, u_e, q_e, r_e$ به صورت زیر قابل ساده سازی است:

$$\begin{aligned} x \text{sig}(x)^a & = x |x|^a \text{sign}(x) = |x|^a \left(x \frac{x}{|x|} \right) \\ & = |x| |x|^a = |x|^{a+1} \end{aligned} \quad (54)$$

در نتیجه، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -k_{1u_c}(\rho_e - \rho_o)^2 - k_{1q_c} \vartheta^2 - k_{1r_c} \phi^2 - \\ & k_{2u_c} |\rho_e - \rho_o|^{\gamma_{uc+1}} - k_{2q_c} |\vartheta|^{\gamma_{qc+1}} - \\ & k_{2r_c} |\phi|^{\gamma_{rc+1}} - k_{31} r_e^2 - k_{11} u_e^2 - k_{21} q_e^2 - \\ & k_{32} |r_e|^{\gamma_{re+1}} - k_{12} |u_e|^{\gamma_{ue+1}} - k_{22} |q_e|^{\gamma_{qe+1}} + \\ & (\rho_e - \rho_o) (\varepsilon_u - \beta_{1u_c} \text{sig}(\rho_e - \rho_o)^{\gamma_{uc}}) \cos(\phi) \cos(\vartheta) + \vartheta (\varepsilon_q - \\ & \beta_{1q_c} \text{sig}(\vartheta)^{\gamma_{qc}}) \cos(\phi) + \phi (\varepsilon_r - \\ & \beta_{1r_c} \text{sig}(\phi)^{\gamma_{rc}}) (1 + \tan(\theta) \tan(\vartheta) \cos(\phi)) - \\ & \varepsilon_u^2/\lambda_u - \varepsilon_q^2/\lambda_q - \varepsilon_r^2/\lambda_r + \varepsilon_u^2 + \varepsilon_q^2 + \varepsilon_r^2 + \end{aligned} \quad (55)$$

با توجه به اینکه پارامتر μ دارای مقدار مثبت می‌باشد، مشتق تابع لیاپانوف تنها در صورتی منفی خواهد بود که رابطه $\|X(t)\| \leq \sqrt{\mu/c_{min}}$ برقرار باشد. در این صورت، منفی شدن مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی، در خارج از ناحیه کوچک $\Omega_0 = \{X(t) | 0 < \|X(t)\| \leq \sqrt{\mu/c_{min}}\}$ تضمین خواهد شد. همچنین، از منفی شدن مشتق تابع لیاپانوف می‌توان نتیجه گرفت که $V(t)$ در خارج از ناحیه فشرده Ω_0 نزولی است و با گذشت زمان به صفر میل می‌نماید. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که سیستم پایدار یکنواخت است و $\|X(t)\|$ به طور یکنواخت نهایتاً کران‌دار می‌باشد، تمامی حالات سیستم کران‌دار هستند و خطاهای تخمین پارامترها، خطاهای در مختصات کروی و خطاهای ردیابی در سطح دینامیک در نهایت، به ناحیه کوچکی اطراف صفر همگرا خواهند شد.

در ادامه، همگرایی خطاهای در مختصات کروی و همگرایی خطاهای ردیابی دینامیکی در زمان-محدود، به ناحیه کوچکی حول مبدأ و پایداری زمان-محدود سیستم حلقه‌بسته در حضور نامعینی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. بنابراین، با حذف جملات مربوط به خطای تخمین پارامترها و خطای خروجی فیلترها از تابع لیاپانوف ارائه شده در رابطه (۴۸)، تابع به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود. سپس، با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف و جایگذاری خطاهای حلقه‌بسته ارائه شده در رابطه (۳۹) و (۴۰)، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$V(t) = \frac{1}{2}(\rho_e - \rho_0)^2 + \frac{1}{2}\vartheta^2 + \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}m_{11}u_e^2 + \frac{1}{2}m_{55}q_e^2 + \frac{1}{2}m_{66}r_e^2 \quad (۶۶)$$

$$\dot{V}(t) = (\rho_e - \rho_0)\dot{\rho} + \vartheta\dot{\vartheta} + \phi\dot{\phi} + m_{11}u_e\dot{u}_e + m_{55}q_e\dot{q}_e + m_{66}r_e\dot{r}_e \quad (۶۷)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -k_{1u_c}(\rho_e - \rho_0)^2 - (\rho_e - \rho_0)k_{2u_c}\text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{\gamma_{u_c}} \\ & (\rho_e - \rho_0)(u_e + \varepsilon_u - \beta_{1u_c}\text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{\gamma_{u_c}})\cos\phi \cos\vartheta \\ & - k_{1q_c}\vartheta^2 - \vartheta k_{2q_c}\text{sig}(\vartheta)^{\gamma_{q_c}} - k_{1r_c}\phi^2 + \\ & \vartheta(q_e + \varepsilon_q - \beta_{1q_c}\text{sig}(\vartheta)^{\gamma_{q_c}})\cos(\phi) - \phi k_{2r_c}\text{sig}(\phi)^{\gamma_{r_c}} \\ & + \phi(r_e + \varepsilon_r - \beta_{1r_c}\text{sig}(\phi)^{\gamma_{r_c}})(1 + \tan(\theta)\tan(\vartheta)\cos(\phi)) \\ & - k_{11}u_e^2 - u_e k_{12}\text{sig}(u_e)^{\gamma_{u_e}} - u_e \Omega_u \tilde{\Phi}_u - u_e \hat{\alpha}_u \text{sat}(u_e) \\ & - u_e \tau_{eu}(t) - u_e(\rho_e - \rho_0)\cos(\phi)\cos(\vartheta) - k_{21}q_e^2 - \\ & q_e k_{22}\text{sig}(q_e)^{\gamma_{q_e}} - q_e \Omega_q \tilde{\Phi}_q - q_e \hat{\alpha}_q \text{sat}(q_e) - q_e \tau_{eq}(t) - \\ & q_e \vartheta \cos(\phi) - k_{31}r_e^2 - r_e k_{32}\text{sig}(r_e)^{\gamma_{r_e}} - r_e \Omega_r \tilde{\Phi}_r - \\ & r_e \hat{\alpha}_r \text{sat}(r_e) - r_e \tau_{er}(t) - r_e \phi(1 + \tan(\theta)\tan(\vartheta)\cos(\phi)) \end{aligned} \quad (۶۸)$$

با در نظر گرفتن توابع اشباع به صورت‌های $\text{sat}(u_e) = u_e/|u_e|$ و $\text{sat}(r_e) = r_e/|r_e|$ و $\text{sat}(q_e) = q_e/|q_e|$ اغتشاشات خارجی، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -(\rho_e - \rho_0)k_{2u_c}\text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{\gamma_{u_c}} + \\ & (\rho_e - \rho_0)\varepsilon_u b_1 - k_{1u_c}(\rho_e - \rho_0)^2 - k_{1q_c}\vartheta^2 - \\ & (\rho_e - \rho_0)b_1\beta_{1u_c}\text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{\gamma_{u_c}} - \\ & \vartheta k_{2q_c}\text{sig}(\vartheta)^{\gamma_{q_c}} + \vartheta \varepsilon_q b_2 - k_{1r_c}\phi^2 + \phi \varepsilon_r b_3 \\ & - \vartheta \beta_{1q_c} b_2 \text{sig}(\vartheta)^{\gamma_{q_c}} - \phi k_{2r_c} \text{sig}(\phi)^{\gamma_{r_c}} \\ & - \phi b_3 \beta_{1r_c} \text{sig}(\phi)^{\gamma_{r_c}} - k_{11}u_e^2 - u_e k_{12}\text{sig}(u_e)^{\gamma_{u_e}} \\ & + \hat{\alpha}_u |u_e| - u_e \Omega_u \tilde{\Phi}_u - k_{21}q_e^2 - q_e k_{22}\text{sig}(q_e)^{\gamma_{q_e}} \\ & + \hat{\alpha}_q |q_e| - q_e \Omega_q \tilde{\Phi}_q - k_{31}r_e^2 - r_e k_{32}\text{sig}(r_e)^{\gamma_{r_e}} \\ & + \hat{\alpha}_r |r_e| - r_e \Omega_r \tilde{\Phi}_r \end{aligned} \quad (۶۹)$$

$$\begin{aligned} & 0.5k^2\sigma_u|\alpha_u|^2 - (1 - 0.5/k^2)\lambda_{\max}\{\delta_u\}\|\tilde{\Phi}_u\|^2 + \\ & 0.5k^2\lambda_{\max}\{\delta_u\}\|\Phi_u\|^2 - (1 - 0.5/k^2)\sigma_r|\tilde{\alpha}_r|^2 + \\ & 0.5k^2\sigma_r|\alpha_r|^2 - (1 - 0.5/k^2)\lambda_{\max}\{\delta_r\}\|\tilde{\Phi}_r\|^2 + \\ & 0.5k^2\lambda_{\max}\{\delta_r\}\|\Phi_r\|^2 - (1 - 0.5/k^2)\sigma_q|\tilde{\alpha}_q|^2 + \\ & 0.5k^2\sigma_q|\alpha_q|^2 - (1 - 0.5/k^2)\lambda_{\max}\{\delta_q\}\|\tilde{\Phi}_q\|^2 + \\ & 0.5k^2\lambda_{\max}\{\delta_q\}\|\Phi_q\|^2 \end{aligned}$$

تذکره ۵: از لم ۱ و ۲ به ازای $i = 1$ برای u_e, q_e, r_e می‌توان اثبات نمود که

$$\begin{aligned} |s_b^{\hat{\rho}_b}|^2 &= (s_i^{\hat{\rho}_i})^2 \leq (1 - \hat{\rho}_b)^2 (s_b^{\hat{\rho}_b})^2 \\ \rightarrow -\left(1/(1 - \hat{\rho}_b)^2\right) |s_b^{\hat{\rho}_b}|^2 &\geq -(s_b^{\hat{\rho}_b})^2 \end{aligned} \quad (۶۱)$$

که در این رابطه، به ازای $b = u_e, q_e, r_e$ به ازای $i = 1$ می‌باشد. از طرفی، از رابطه معرفی شده در لم ۱ به ازای $i = 1$ نتیجه می‌شود که عبارت $-(s_b^{\hat{\rho}_b})^2 \leq -|s_b|^{\hat{\rho}_b \times 2} \leq -|s_b|^{r_b+1}$ برقرار است. بنابراین،

$$-|s_b|^{r_b+1} \leq -\left(1/(1 - \hat{\rho}_b)^2\right) |s_b^{\hat{\rho}_b}|^2 \quad (۶۲)$$

در نهایت، با در نظر گرفتن تذکره ۵ در ساده‌سازی رابطه (۶۲)، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{V}(t) \leq -C_{min}\|X(t)\|^2 + \mu \quad (۶۳)$$

که در این رابطه، به صورت $C_{min} = \min\{C_1, \dots, C_{21}\}$ بیان می‌شود. این پارامتر ایجاد کننده بیشترین مقدار منفی در مشتق تابع لیاپانوف است. با توجه به رابطه (۶۰)، هر یک از ثابت‌های C_1, \dots, C_{21} به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} C_1 &= (k_{1u_c} - 1 - b_1), & C_{10} &= (k_{12} - 0.5)d_{ue}, \\ C_2 &= (k_{1q_c} - 1 - b_2), & C_{11} &= (k_{22} - 0.5)d_{qe}, \\ C_3 &= (k_{1r_c} - a - b_3), & C_{12} &= (k_{32} - 0.5a)d_{re}, \\ C_4 &= (k_{2u_c} - 1 + \beta_{1u_c}b_1)d_{uc}, & C_{13} &= (1 - 0.5/k^2)\sigma_q, \\ C_6 &= (k_{2r_c} - a + \beta_{1r_c}b_3)d_{rc}, & C_{14} &= (1 - 0.5/k^2)\sigma_u, \\ C_7 &= (k_{11} - 0.5), & C_{15} &= (1 - 0.5/k^2)\sigma_r, \\ C_8 &= (k_{21} - 0.5), & C_{16} &= (1/\lambda_u - 1.5 - 1/4), \\ C_9 &= (k_{31} - 0.5a), & C_{17} &= (1/\lambda_q - 1.5 - 1/4), \\ & & C_{18} &= (1/\lambda_r - 0.75 - 0.5a), \\ & & C_{19} &= (1 - 0.5/k^2)\lambda_{\max}\{\delta_u\}, \\ & & C_{20} &= (1 - 0.5/k^2)\lambda_{\max}\{\delta_q\}, \\ & & C_{21} &= (1 - 0.5/k^2)\lambda_{\max}\{\delta_r\}, \\ & & d_{ke} &= \left(1/(1 - (\gamma_{ke} + 1/2))^2\right) \end{aligned} \quad (۶۴)$$

همچنین، بردار X و پارامتر μ ، به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} X(t) &= [\rho, \vartheta, \phi, \rho^{\hat{\rho}_1}, \vartheta^{\hat{\rho}_2}, \phi^{\hat{\rho}_3}, u_e, q_e, r_e, u_e^{\hat{\rho}_4}, \\ & q_e^{\hat{\rho}_5}, r_e^{\hat{\rho}_6}, \hat{\alpha}_u, \hat{\alpha}_q, \hat{\alpha}_r, \varepsilon_u, \varepsilon_q, \varepsilon_r, \tilde{\Phi}_1 \dots \tilde{\Phi}_{15}] \\ \mu &= 0.25\zeta_r^2 + 0.25\zeta_q^2 + 0.25\zeta_u^2 + 0.5k^2\sigma_u|\alpha_u|^2 + \\ & 0.5k^2\sigma_r|\alpha_r|^2 + \mu_u 0.5k^2\sigma_q|\alpha_q|^2 + 0.5k^2\lambda_{\max}\{\delta_q\}\|\Phi_q\|^2 \\ & 0.5k^2\lambda_{\max}\{\delta_u\}\|\Phi_u\|^2 + 0.5k^2\lambda_{\max}\{\delta_r\}\|\Phi_r\|^2 \end{aligned} \quad (۶۵)$$

با در نظر گرفتن عبارت اول از رابطه (۷۴)، باید $\lambda_{K_{11}} - |f_k|/|E_k|^\gamma > 0$ و $|S_k|^\gamma \leq |\tilde{f}_k|/\lambda_{K_{21}}$ باشد که در این صورت ناحیه $\lambda_{K_{21}} - \frac{|f_k|}{|S_k|^\gamma} > 0$ و $|S_k|^\gamma \leq |\tilde{f}_k|/\lambda_{K_{21}}$ برای هر کدام از درایه‌های $S = (u_e, q_e, r_e)^T$ و $E = ((\rho_e - \rho_0)^2, \vartheta^2, \phi^2)^T$ همچنین، برای کل بردار S و E ، همگرایی به ناحیه δ_1 و δ_2 در زمان محدود تضمین خواهد شد:

$$\begin{aligned} \|S\|^2 &= (u_e^2 + q_e^2 + r_e^2) \leq \frac{\tilde{f}_1^2 + \tilde{f}_2^2 + \tilde{f}_3^2}{\lambda_{K_{21}}^2} \\ &= \frac{\|\omega\Phi - \omega\hat{\Phi} - \tilde{\alpha}S\|^2}{\lambda_{K_{21}}^2} \\ \rightarrow \|S\| &\leq \frac{\|\omega\Phi - \omega\hat{\Phi}\| + \|\tilde{\alpha}\|}{\lambda_{K_{21}}} = \delta_1 \quad (۷۶) \\ \|E\|^2 &= ((\rho_e - \rho_0)^2 + \vartheta^2 + \phi^2) \leq \frac{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}{\lambda_{K_{11}}^2} = \frac{\|e\|^2}{\lambda_{K_{11}}^2} \\ \rightarrow \|E\| &\leq \frac{\|e\|}{\lambda_{K_{11}}} = \delta_2 \end{aligned}$$

به همین صورت، در عبارت دوم از رابطه (۷۴)، لازم است $\lambda_{K_{22}} - |f_k|/|E_k|^\gamma > 0$ و $|\tilde{f}_k|/|S_k|^\gamma > 0$ باشد که در این صورت ناحیه $\lambda_{K_{22}} - |f_k|/|E_k|^\gamma > 0$ و $|\tilde{f}_k|/|S_k|^\gamma > 0$ برای هر کدام از درایه‌های بردار $S = (u_e, q_e, r_e)^T$ و $E = ((\rho_e - \rho_0)^2, \vartheta^2, \phi^2)^T$ حاصل خواهد شد. در نتیجه، برای کل بردار S با توجه به لم ۶، همگرایی به ناحیه δ_3 و δ_4 در زمان محدود تضمین می‌شود:

$$\begin{aligned} \|S\|^{4\gamma} &= (u_e^2 + q_e^2 + r_e^2)^{2\gamma} \leq (u_e^{2\gamma} + q_e^{2\gamma} + r_e^{2\gamma})^2 \leq \left(\frac{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}{\lambda_{K_{22}}^2}\right)^2 = \frac{\|\omega\Phi - \omega\hat{\Phi} - \tilde{\alpha}S\|^4}{\lambda_{K_{22}}^4} \\ \rightarrow \|S\| &\leq \left(\frac{\|\omega\Phi - \omega\hat{\Phi} - \tilde{\alpha}S\|}{\lambda_{K_{22}}}\right)^{1/\gamma} = \delta_3 \\ \|E\|^{4\gamma} &= ((\rho_e - \rho_0)^2 + \vartheta^2 + \phi^2)^{2\gamma} \leq ((\rho_e - \rho_0)^{2\gamma} + \vartheta^{2\gamma} + \phi^{2\gamma})^2 \leq \left(\frac{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}{\lambda_{K_{12}}^2}\right)^2 = \frac{\|e\|^4}{\lambda_{K_{12}}^4} \\ \rightarrow \|E\| &\leq \left(\frac{\|e\|}{\lambda_{K_{12}}}\right)^{1/\gamma} = \delta_4 \quad (۷۷) \end{aligned}$$

که در این روابط، $\lambda_{K_{11}} = \min\{k_{1u_c}, k_{1q_c}, k_{1r_c}\}$ ، $\lambda_{K_{21}} = \min\{\tilde{k}_{21}, \tilde{k}_{22}, \tilde{k}_{23}\}$ ، $\lambda_{K_{12}} = \min\{\tilde{k}_{2u_c}, \tilde{k}_{2q_c}, \tilde{k}_{2r_c}\}$ و $\lambda_{K_{22}} = \min\{k_{12}, k_{22}, k_{32}\}$ در این صورت، هر یک از عبارات رابطه (۷۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -S^T \tilde{k}_{21} S - S^T \tilde{k}_{22} \text{sig}(S)^\gamma - E^T \tilde{k}_{11} E - E^T \tilde{k}_{12} \text{sig}(E)^\gamma \\ \dot{V} &\leq -S^T \tilde{k}_{21} S - S^T \tilde{k}_{22} \text{sig}(S)^\gamma - E^T \tilde{k}_{11} E - E^T \tilde{k}_{12} \text{sig}(E)^\gamma \quad (۷۸) \end{aligned}$$

که می‌توانند با توجه به لم ۳ به فرم زیر نوشته شوند:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}\{\tilde{k}_{21}\}\|S\|^2 - \lambda_{\min}\{\tilde{k}_{22}\}\|S\|^{\gamma+1} - \lambda_{\min}\{\tilde{k}_{11}\}\|E\|^2 - \lambda_{\min}\{\tilde{k}_{12}\}\|S\|^{\gamma+1}, \quad (۷۹) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}\{\tilde{k}_{21}\}\|S\|^2 - \lambda_{\min}\{\tilde{k}_{22}\}\|S\|^{\gamma+1} - \lambda_{\min}\{\tilde{k}_{11}\}\|E\|^2 - \lambda_{\min}\{\tilde{k}_{12}\}\|S\|^{\gamma+1}. \end{aligned}$$

برای عبارت اول از رابطه (۷۹)، می‌توان نوشت:

تذکره ۶: در قسمت قبل اثبات شد که تمامی سیگنال‌های سیستم، خطای حالات و خطای خروجی فیلترها کراندار هستند. بنابراین می‌توان گفت که شرط $|\varepsilon_u b_1| < Q_1$ ، $|\varepsilon_u b_2| < Q_2$ ، $|\varepsilon_q b_2| < Q_3$ و $|\varepsilon_r b_3| < Q_3$ برقرار است.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -(\rho_e - \rho_0) \frac{(k_{2u_c} + \beta_{1u_c} b_1)}{\tilde{k}_{2u_c}} \text{sig}(\rho_e - \rho_0)^{\gamma_{uc}} - \vartheta \frac{(k_{2q_c} + \beta_{1q_c} b_2)}{\tilde{k}_{2q_c}} \text{sig}(\vartheta)^{\gamma_{qc}} - \phi \frac{(k_{2r_c} + \beta_{1r_c} b_2)}{\tilde{k}_{2r_c}} \text{sig}(\phi)^{\gamma_{rc}} - k_{1u_c}(\rho_e - \rho_0)^2 - k_{1q_c}\vartheta^2 - k_{1r_c}\phi^2 - u_e k_{12} \text{sig}(u_e)^{\gamma_{ue}} + |u_e| \tilde{\alpha}_u - u_e \Omega_u \tilde{\Phi}_u - k_{21} q_e^2 - q_e k_{22} \text{sig}(q_e)^\gamma + |q_e| \tilde{\alpha}_q - q_e \Omega_q \tilde{\Phi}_q - k_{31} r_e^2 - r_e k_{32} \text{sig}(r_e)^{\gamma_{re}} + |r_e| \tilde{\alpha}_r - r_e \Omega_r \tilde{\Phi}_r \quad (۷۰) \end{aligned}$$

با توجه به روابط بالا و $\gamma_{uc} = \gamma_{uc}$ ، $\gamma_{qc} = \gamma_{qc}$ ، $\gamma_{rc} = \gamma_{rc}$ رابطه (۶۹) را می‌توان به فرم مختصر زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -S^T \tilde{K}_{21} S - S^T \tilde{K}_{22} \text{sig}(S)^\gamma - E^T \tilde{K}_{11} E - E^T \tilde{K}_{12} \text{sig}(E)^\gamma + S^T \omega \tilde{\Phi} - S^T \tilde{\alpha} \frac{S}{\|S\|} + E^T \varrho \quad (۷۱) \end{aligned}$$

که در این رابطه،

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{11} &= \text{diag}(k_{1u_c}, k_{1q_c}, k_{1r_c}), \\ \tilde{K}_{21} &= \text{diag}(k_{11}, k_{21}, k_{31}), \\ \tilde{K}_{12} &= \text{diag}(\tilde{k}_{2u_c}, \tilde{k}_{2q_c}, \tilde{k}_{2r_c}), \\ \tilde{K}_{22} &= \text{diag}(k_{12}, k_{22}, k_{32}), \\ \tilde{\alpha} &= (\tilde{\alpha}_u, \tilde{\alpha}_q, \tilde{\alpha}_r), \\ \omega &= (\Omega_u, \Omega_q, \Omega_r), E = ((\rho_e - \rho_0)^2, \vartheta^2, \phi^2)^T \\ Y &= (Y_{ue}, Y_{qe}, Y_{re}), \gamma = (\gamma_{ue}, \gamma_{qe}, \gamma_{re}), \\ S &= (u_e, q_e, r_e)^T \\ \text{sig}(S)^\gamma &= [|u_e|^{\gamma_{ue}} \text{sign}(u_e), |q_e|^{\gamma_{qe}} \text{sign}(q_e), |r_e|^{\gamma_{re}} \text{sign}(r_e)]^T \\ \text{sig}(E)^\gamma &= [|\rho_e - \rho_0|^{\gamma_{uc}} \text{sign}(\rho_e - \rho_0), |\vartheta|^{\gamma_{qc}} \text{sign}(\vartheta), |\phi|^{\gamma_{rc}} \text{sign}(\phi)]^T \\ \varrho &= [\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3] \quad (۷۳) \end{aligned}$$

نامساوی (۷۳) را می‌توان به یکی از دو صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -S^T \left(\tilde{K}_{21} - \text{diag} \left((\omega\Phi - \omega\hat{\Phi} - \frac{\tilde{\alpha}S}{\|S\|}) \times \text{diag}^{-1}(S) \right) \right) S - S^T \tilde{K}_{22} \text{sig}(S)^\gamma - E^T (\tilde{K}_{11} - \text{dig}(\varrho) \text{dig}^{-1}(E)) E - E^T \tilde{K}_{12} \text{sig}(E)^\gamma \\ \dot{V} &\leq -S^T \tilde{K}_{21} S - S^T \left(\tilde{K}_{22} - \text{diag} \left((\omega\Phi - \omega\hat{\Phi} - \frac{\tilde{\alpha}S}{\|S\|}) \times \text{diag}^{-1}(\text{sig}(S)^\gamma) \right) \text{sig}(S)^\gamma \right) \text{sig}(S)^\gamma - E^T \tilde{K}_{11} E - E^T (\tilde{K}_{12} - \text{dig}(\varrho) \text{dig}^{-1}(\text{sig}(E)^\gamma)) \text{sig}(E)^\gamma \quad (۷۴) \end{aligned}$$

با این وجود، اگر $\tilde{F} = (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \tilde{f}_3)^T$ ، $F = (f_1 + f_2 + f_3)^T$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (\omega\Phi - \omega\hat{\Phi} - \frac{\tilde{\alpha}S}{\|S\|}) &= \tilde{F} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)^T \\ \varrho = F &= (f_1, f_2, f_3) \quad (۷۵) \end{aligned}$$

ذکر است که مقادیر کلیه پارامترها به دلیل عدم دقت کافی در اندازه-گیری، در کلیه مراحل طراحی و شبیه سازی نامعین در نظر گرفته می شوند. پارامترهای مربوط به جرم، لختی و ضرایب میرایی برای یک زیر دریایی تحریک ناقص خودگردان عبارتند از:

$$\begin{aligned} m_{11} &= 25kg, m_{22} = 17.5kg, m_{33} = 30kg, \\ m_{55} &= 22.5kgm^2, m_{66} = 15kgm^2, d_{11} = 30kgs^{-1}, \\ d_{22} &= 30kgs^{-1}, d_{33} = 30kgs^{-1}, d_{55} = 20kgs^{-1}, \\ d_{66} &= 20kgs^{-1}, \rho g \nabla GM_L = 5. \end{aligned}$$

معادلات دینامیکی مدل نشده $f_k(k)$ به صورت زیر در نظر گرفته می-شوند

$$f_k(k) = \sigma_{k1}k + \sigma_{k2}k|k| + \sigma_{k3}k^3, \quad k = u, v, w, q, r$$

که در آن ضرایب به صورت $\sigma_{k1} = 0.5$ و $\sigma_{k2} = 0.25$, $\sigma_{k3} = 0.15$ انتخاب می شوند. همچنین، اغتشاشات خارجی مانند امواج و جریان های اقیانوسی به صورت سیگنال $\tau_{ek}(k)$ در شبیه سازی انتخاب می گردد. اولیه سمت گیری و موقعیت ربات شناور واقعی و شناور هدف مجازی به صورت جدول ۲ در نظر گرفته می شود. همچنین، ورودی های کنترلی حلقه باز $\tau_d = (5N, 0.5Nm, 1Nm)^T$ جهت تولید مسیر مرجع مجازی به یک شناور مجازی اعمال می گردد.

جدول ۲: شرایط اولیه

یکا	شرایط اولیه ربات هدف مجازی	شرایط اولیه ربات واقعی
متر رادیان	$x_d(0) = 0,$ $y_d(0) = 0,$ $z_d(0) = -10$ $\theta_d(0) = \pi/180,$ $\Psi_d(0) = \pi/180,$	$x(0) = -5,$ $y(0) = 5, z(0) = 0$ $\theta(0) = 0, \Psi(0) = 0,$

با در نظر گرفتن سیستم معرفی شده با شرایط مذکور، شبیه سازی در دو حالت زیر مورد بررسی قرار می گیرد:

- حالت (۱): شبیه سازی با کنترل کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم به کار رفته شده در مرجع [۲۹];
 - حالت (۲): شبیه سازی با کنترل کننده سطح دینامیکی عصبی تطبیقی مقاوم زمان-محدود.
- شبیه سازی تحت شرایط یکسان برای الگوریتم کنترل ارائه شده در مرجع [۲۹] و الگوریتم پیشنهادی انجام شده است و نتایج حاصل از آن با هم مقایسه خواهد شد.

بنابر شبیه سازی های انجام شده، بهره های کنترل کننده مطابق با مقادیر جدول ۳ قابل تنظیم هستند. همچنین، بهره های تطبیقی پارامترها و کران بالای اغتشاش در حالت (۲)، مطابق جدول ۴ در نظر گرفته می شوند.

$$\dot{V} \leq C_{m1}(-\|S\|^2 - \|E\|^2) + C_{m2}(-\|S\|^{\lambda+1} - \|E\|^{\lambda+1}) \quad (۸۰)$$

در این رابطه، $C_{m1} = \min\{\lambda_{\min}\{\bar{K}_{21}\}, \lambda_{\min}\{\bar{K}_{11}\}\}$ ، $C_{m2} = \min\{\lambda_{\min}\{\bar{K}_{22}\}, \lambda_{\min}\{\bar{K}_{12}\}\}$ و $A = \min\{\gamma, \gamma\}$ می باشد. از طرفی، تابع لیاپانوف (۴۷) را نیز می توان به فرم برداری زیر بازنویسی نمود:

$$V(t) = \frac{1}{2}\|S\|^2 + \frac{1}{2}\|E\|^2. \quad (۸۱)$$

در نهایت، از مقایسه رابطه (۸۰) و (۸۱) نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\dot{V}_1 \leq -\psi_1 V - \psi_2 V^{(\lambda+1)/2} \quad (۸۲)$$

که در این رابطه $\psi_1 = 2C_{m1}$ و $\psi_2 = 2^{(\lambda+1)/2}C_{m2}$ می باشد. بنابراین، طبق تعریف ۲، سیستم تحت اعمال کنترل کننده پیشنهادی، در زمان محدود به پایداری رسیده و خطاهای موقعیت و سرعت در زمان محدودی به ناحیه کوچکی اطراف صفر همگرا خواهند شد. در این صورت، زمان نشست به صورت زیر حاصل می شود:

$$T_s \leq \frac{1}{2C_{m1}(1 - (\lambda+1)/2)} \ln \frac{2C_{m1}V(x(0))^{1-(\lambda+1)/2} + 2^{(\lambda+1)/2}C_{m2}}{2^{(\lambda+1)/2}C_{m2}} \quad (۸۳)$$

تذکره ۷: از آنجایی که اثبات پایداری تنها با در نظر گرفتن رابطه دوم از تابع اشباع دو وضعیتی (۳۴) صورت گرفت، لازم به ذکر است که در عبارت دوم از تابع اشباع $\text{sat}(S_k)$ شرط $1.5 < |S_k|/|\varepsilon_{ak} + |S_k| \tanh(|S_k|/|\varepsilon_{ak} + |S_k|) < 1.5$ برقرار است. بنابراین، اگر عدد ثابت μ طوری در نظر گرفته شود که

$$1.5 \leq \mu \leq \left(\frac{|S_k|}{\varepsilon_{ak} + |S_k|} \tanh \left(\frac{|S_k|}{\varepsilon_{ak} + |S_k|} \right) \right). \quad (۸۴)$$

آنگاه، می توان گفت که رابطه زیر برقرار است:

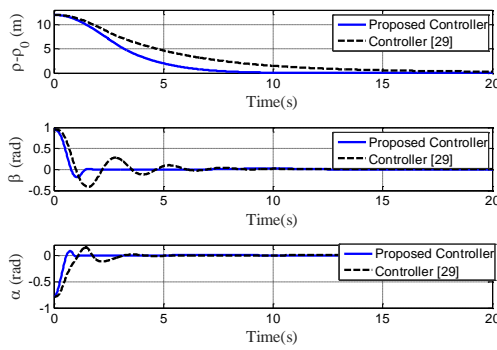
$$\begin{aligned} S_k^T \alpha_k - |S_k| \left(\frac{|S_k|}{\varepsilon_{ak} + |S_k|} \tanh \left(\frac{|S_k|}{\varepsilon_{ak} + |S_k|} \right) \right) \hat{\alpha}_k &\leq \\ \mu S_k^T \hat{\alpha}_k - \|S_k\| \mu \alpha_k &\leq \mu \|S_k\| \hat{\alpha}_k \end{aligned} \quad (۸۵)$$

بنابراین، با اصلاح قوانین تطبیق به صورت زیر، تمامی مراحل اثبات پایداری مطابق روند مذکور قابل انجام است.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_u &= \eta_u \mu |u_e| - \eta_u \sigma_u (\alpha_u - \alpha_0), \\ \hat{\alpha}_q &= \eta_q \mu |q_e| - \eta_q \sigma_q (\alpha_q - \alpha_{q0}), \\ \hat{\alpha}_r &= \eta_r \mu |r_e| - \eta_r \sigma_r (\alpha_r - \alpha_{r0}). \end{aligned} \quad (۸۶)$$

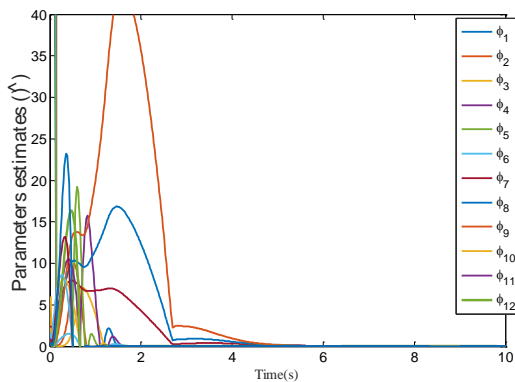
۶- شبیه سازی های عددی

در این بخش، میزان اثربخشی الگوریتم های کنترلی پیشنهاد شده در حل مسئله ردیابی مسیر مرجع و سرعت همگرایی خطای ردیابی با بهره-گیری از شبیه سازی در نرم افزار متلب مورد ارزیابی قرار می گیرد. برای این منظور، نتایج حاصل از شبیه سازی های انجام شده بر اساس پارامترهای یک زیر دریایی واقعی، ارائه شده و مورد بررسی قرار می گیرند. لازم به

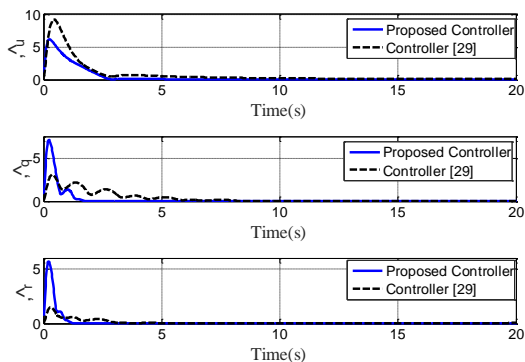


شکل ۴: خطای ردیابی در سطح سینماتیک

شکل ۵ همگرایی تخمین پارامترهای نامعین و شکل ۶ همگرایی تخمین کران بالای اغتشاش به مقدری ثابت را نمایش می‌دهد. لازم به ذکر است که با توجه به عدم برقراری شرط تحریک پایا و غنی نبودن ورودی‌های کنترلی ناشی از فیدبک، عدم همگرایی تخمین پارامترها به مقادیر واقعیشان، امری دور از انتظار نیست.



شکل ۵: تخمین پارامترهای نامعین در حالت (۲)



شکل ۶: تخمین کران بالای اغتشاش در حالت (۲)

در شکل ۷، ورودی‌های کنترلی نمایش داده شده است که در آن تأثیرگذاری تابع اشباع پیشنهاد شده در این مقاله در حذف نوسانات فرکانس بالا و هموارسازی سیگنال‌های کنترلی به خوبی مشهود است.

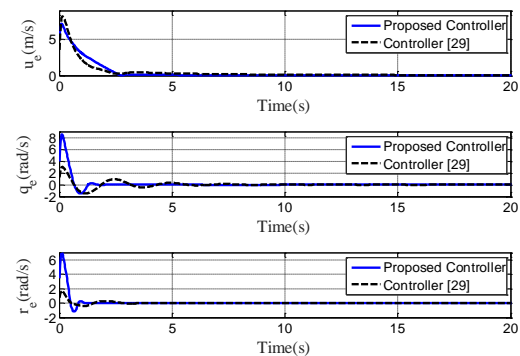
جدول ۳: بهره‌های کنترل کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم

مقدار	توصیف	پارامتر
$10diag\{0.1,0.6,0.9\}$	بهره کنترل-کننده مجازی	$\bar{K}_{11} = diag(K_{1u_c}, K_{1q_c}, K_{1r_c})$
$3diag\{0.1,0.4,0.4\}$	بهره کنترل-کننده مجازی	$\bar{K}_{12} = diag(K_{2u_c}, K_{2q_c}, K_{2r_c})$
$diag\{5,5,5\}$	بهره کنترل-کننده واقعی	$\bar{K}_{21} = diag(K_{11}, K_{21}, K_{31})$
$diag\{40,40,40\}$	بهره کنترل-کننده واقعی	$\bar{K}_{22} = diag(K_{12}, K_{22}, K_{32})$
$5diag\{0.1,0.1,0.1\}$	ضرایب کنترل کننده واقعی	$\beta_{ue}, \beta_{qe}, \beta_{re}$
10	ضخامت لایه مرزی	ε_{ak}

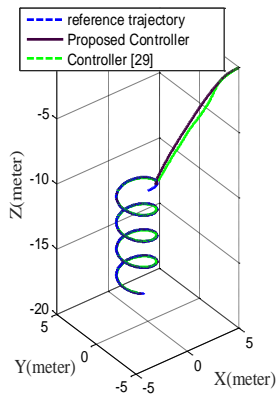
جدول ۴: بهره‌های تطبیق در کنترل کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم

مقدار	توصیف	پارامتر
$20diag\{1,1,1\}$	بهره تطبیق	$\Gamma = diag(\Gamma_{\Phi u}, \Gamma_{\Phi q}, \Gamma_{\Phi r})$
$0.8diag\{1,1,1\}$	ضرایب اصلاح سیگما	$\delta_{\Phi} = diag(\delta_{\Phi u}, \delta_{\Phi q}, \delta_{\Phi r})$
10,10,10	بهره تطبیق	$\eta_q, \eta_u, \eta_{rr}$
0.1,0.1,0.1	ضرایب اصلاح سیگما	$\sigma_r, \sigma_q, \sigma_u$

در شکل ۳، خطوط آبی شبیه سازی بدون احتساب کنترل کننده زمان محدود است. با اعمال کنترل کننده زمان محدود سیگنال خطای ردیابی با دقت و سرعت بهتری در زمان محدودی به صفر میل نموده است و به ازای تمامی زمان‌های پس از آن، در شعاع بسیار کوچکی حول مبدأ باقی مانده است.



شکل ۳: خطای ردیابی در سطح دینامیک



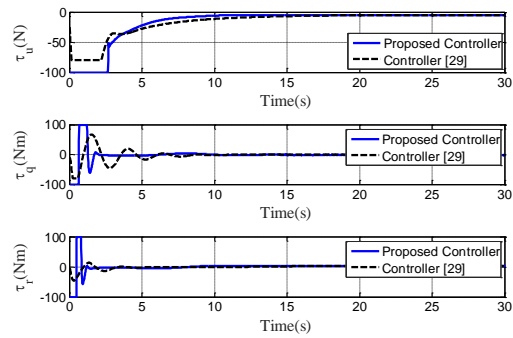
شکل ۱۰: حرکت سه بعدی شناور

از مقایسه نتایج شبیه‌سازی در مرجع [۲۹] و الگوریتم کنترلی پیشنهاد شده، می‌توان دریافت که در روش سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم در مقایسه با روش پیشنهاد شده در مقاله حاضر، خطاهای ردیابی در مدت زمان بیشتری به مبدأ همگرا شده‌اند. این در حالی است که دامنه ورودی‌های کنترلی در مقایسه با روش کنترل زمان-محدود، در محدوده کمتری قرار گرفته و این امر از آسیب و اشباع عملگرها جلوگیری خواهد کرد. همچنین، مسیر حرکت شناور در محیط نشان می‌دهد که با اضافه شدن کنترل زمان محدود، عملکرد کنترل زمان-محدود در افزایش دقت و سرعت ردیابی سیستم به‌وضوح قابل درک است.

تذکره ۸: با مقایسه نتایج شبیه‌سازی کنترل کننده پیشنهاد شده با کارهای گذشته می‌توان به عملکرد سریع و دقیق کنترل زمان محدود رسید. شبیه‌سازی انجام شده در مقایسه با مرجع [۱۹] در ردیابی عملکرد سریع‌تری دارد.

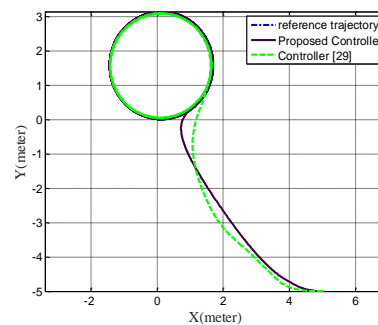
۷- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله، با استفاده از یک مدل مطالعاتی پنج درجه آزادی و استفاده از متغیرهای موجود در این مدل یک کنترل کننده سطح دینامیکی تطبیقی مقاوم زمان-محدود برای یک زیردریایی تحریک ناقص خودگردان طراحی شده است. مسئله کنترل ردیابی هدف یک زیردریایی خودگردان تحریک ناقص در حضور نامعینی‌های پارامتری و غیرپارامتری نظیر پارامترهای نامعلوم، دینامیک‌های مدل نشده، امواج و جریان‌های اقیانوسی در فضای سه بعدی با تبدیل خطاهای موقعیت و سمت‌گیری به فاصله و زاویه نسبی حل گردید. با تئوری پایداری لیاپانوف نشان داده شده که سیستم کنترل حلقه بسته پایدار است و تحت روش کنترل زمان-محدود خطاهای موقعیت و سرعت با مقاومت در برابر نامعینی‌ها در زمان محدودی به ناحیه کوچکی اطراف صفر همگرا شده‌اند. به منظور به روز رسانی تخمین کران بالای نامعینی‌ها و کنترل مقاوم جهت جبران کران بالای جملات دارای اغتشاشات خارجی پیشنهاد شده است. در نهایت، با توجه به شبیه‌سازی‌ها و مطالعات مقایسه‌ای عملکرد

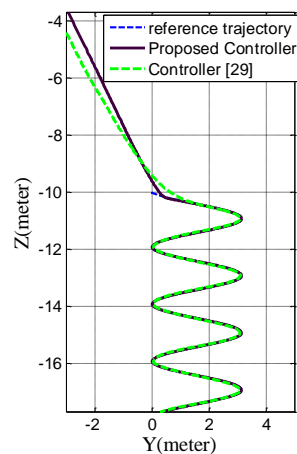


شکل ۷: ورودی‌های کنترلی برای هر دو الگوریتم

شکل‌های ۸ تا ۱۰ مسیر حرکت زیردریایی را در محیط، در ابعاد مختلف نمایش می‌دهند. با توجه به این شکل‌ها می‌توان دریافت که با وجود اینکه زیردریایی در فاصله دور و پیکربندی متفاوتی نسبت به شناور هدف قرار داشته است، با افزودن عبارت کنترل کننده زمان محدود با دقت و سرعت مطلوب‌تری آن را دنبال می‌نماید. این نشان می‌دهد که هر سه حرکت گردش، خمش و انتقال طولی شناور توسط گشتاورها، به خوبی کنترل می‌شود.



شکل ۸: حرکت دو بعدی شناور در صفحه x-y



شکل ۹: حرکت دو بعدی شناور در صفحه y-z

- [8] Sun. B., Zhu. D., Yang. S. X., "A bioinspired filtered backstepping tracking control of 7000-m manned submarine vehicle", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 7, pp. 3682-3693, 2014.
- [9] Harun N., Zain. Z. Md., "A Backstepping based PID controller for stabilizing an underactuated X4-AUV", *ARNP Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 10, no. 21, pp. 9819-9824, 2015.
- [10] Qi, X., "Adaptive coordinated tracking control of multiple autonomous underwater vehicles", *Ocean Engineering*, vol. 91, pp. 84-90, 2014.
- [11] Xiang. X., Chen. D., Yu. C., Ma L., "Coordinated 3D Path Following for Autonomous Underwater Vehicles via Classic PID Controller", *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 20, pp. 327-332, 2013.
- [12] Farhan. M., Bhatti. A. I., Kamal. W. A., Yousafzai. I. K., "Sliding Mode Based MIMO Control of Underwater Vehicle", *11th Asian Control Conference (ASCC)*, Gold Coast, pp. 2899-2904, 2017.
- [13] Suarez. A. E. Z., et. al, "Depth control of an underwater vehicle using robust PD controller: real-time experiments", *IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicle Workshop (AUV)*, Portugal, pp. 1-6, 2018.
- [14] Chen, Y., Yan, Y., Wang, K., Liu, S., "An adaptive fuzzy sliding mode controller for the depth control of an underactuated underwater vehicle", *International Journal of Advanced Robotic Systems*, DOI: 10.1177/1729881419840213, 2019.
- [15] Li, J., Du, J., "Robust adaptive formation control of underactuated autonomous underwater vehicles under input saturation", *Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, Shenyang, pp. 5798-5803, 2018.
- [16] Wang. C., Zhang. F., Cheng. C., He. Y., "Robust AUV Localization Based on Switchable Constraints", *OCEANS-MTS/IEEE Kobe Techno-Oceans (OTO)*, Kobe, pp. 1-5, 2018.
- [17] Li. S., Liu. L., Liu. M., Zhang. S., Yang. Y., Wang. X., "Robust Trajectory Tracking Control for AUV System Based on Fractional-Order PD Controller", *OCEANS MTS/IEEE Charleston*, Charleston, pp. 1-6, 2018.
- [18] Kamal. O., "Robust Heading Stabilization and Control for a class of Autonomous Underwater Vehicles using Nonlinear State Estimators", *16th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology (IBCAST)*, Pakistan, pp. 830-836, 2019.
- مطلوب کنترل کننده پیشنهادی نشان داده شد. با مروری بر نتایج حاصل از شبیه سازی با اعمال کنترل کننده زمان محدود، پیشنهاداتی برای تحقیقات در زمینه کنترل و هدایت زیردریایی ها در آینده مطرح می-گردد:
- با توجه به مزیت های به کارگیری کنترل کننده زمان محدود می توان با ترکیب روش پیشنهادی طرح حاضر با تکنیک عملکرد از پیش تعیین شده در مراجع [۳۸]-[۴۰]، به بهبود پاسخ گذرای سیستم دست یافت.
 - در این مقاله، ردیابی مسیر تنها برای یک زیردریایی خودگردان مطرح شده است. تعمیم روش پیشنهادی به کنترل هماهنگ چندین شناور همکار به گونه ای که عدم برخورد بین آن ها تضمین شود، موضوع تحقیقات آینده خواهد بود.
 - می توان با اضافه کردن رژیترگر اغتشاش، تأثیرات تمام اغتشاشات خارجی را حذف نمود. به علاوه، استفاده از رژیترگر در مقایسه با کنترل مقاوم به دلیل نداشتن تابع علامت، نوسانات سیستم را حذف می نماید. همچنین، نیاز به تابع اشباع و در نظر گرفتن ضخامت لایه مرزی که باعث کاهش دقت ردیابی نهایی می شود، را نیز در بر ندارد.

مراجع

- [1] Spong, M. W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M., "Robot Modeling and Control", John Wiley and Sons, 2006.
- [2] Mukherjee. K., Kar. I. N., Bhatt. R. K. P., "Region tracking based control of an autonomous underwater vehicle with input delay", *Ocean Engineering*, vol. 99, pp. 107-114, 2015.
- [3] Xing. W., Zhao. Y., Karimi. H. R. "Convergence Analysis on Multi-AUV Systems with Leader-Follower Architecture", *IEEE Access*, vol. 5, pp. 853-868, 2017.
- [4] Li, J., Du, J., "Robust adaptive formation control of underactuated autonomous underwater vehicles under input saturation", *Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, Shenyang, China, IEEE, pp. 5798-5803, 2018.
- [5] Park. B. S., "Adaptive formation control of underactuated autonomous underwater vehicles", *Ocean Engineering*, vol. 96, pp. 1-7, 2015.
- [6] Yan. Z., Yu. H., Zhang. W., Li. B., Zhou. J., "Globally finite-time stable tracking control of underactuated UUVs", *Ocean Engineering*, vol. 107, pp. 132-146, 2015.
- [7] Wang, J., Wang, C., Wei, Y., Zhang, C., "Command filter based adaptive neural trajectory tracking control of an underactuated underwater vehicle in three-dimensional space", *Ocean Engineering*, vol. 180, pp. 175-186, 2019.

- underwater vehicles", *Ocean Engineering*, vol. 133, pp. 244-252, 2017.
- [30] SNAME, "The society of naval architects and marine engineering", *Nomenclature for Treating the Motion of a submerged Body through a Fluid in Technical and research Bulletin*, vol. 1, 1950.
- [31] Do, Khac Duc; Pan, Jie, "Control of ships and underwater vehicles: design for underactuated and nonlinear marine systems", Springer, London, 2009.
- [32] Fossen, Thor Inge "Marine control systems: guidance, navigation and control of ships, rigs and underwater vehicles", *Marine Cybernetics*, Trondheim, 2002.
- [33] Polycarpou, M, "Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems", *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 447-451, 1996.
- [34] Khalil, H., *Nonlinear Systems*, Englewood Cliffs, Third Edition, Prentice Hall, 2002.
- [35] Galicki, M, "Finite-time control of robotic manipulators", *Automatica*, vol. 51, no. 2, pp. 49-54, 2015.
- [36] Cai, M., Xiang, Z., Guo, J., "Adaptive finite-time consensus protocols for multi-agent systems by using neural networks", *IET Control Theory & Applications*, vol. 10, no. 4, pp. 371-380, 2016.
- [37] Zhao, D., Li, S., Gao, F., "A new terminal sliding mode control for robotic manipulators", *International Journal of Control*, vol. 82, no. 10, pp. 1804-1813, 2009.
- [38] Elhaki, O., Shojaei, K., "Neural network-based target tracking control of underactuated autonomous underwater vehicles with a prescribed performance", *Ocean Engineering*, vol. 167, pp. 239-256, 2018.
- [39] Bechlioulis C. P., Rovithakis G. A., "Robust Adaptive Control of Feedback Linearizable MIMO Nonlinear Systems With Prescribed Performance", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 9, pp. 2090-2099, 2008.
- [40] Elhaki, O., Shojaei, K., "A robust neural network approximation-based prescribed performance output-feedback controller for autonomous underwater vehicles with actuators saturation", *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 88, pp. 103382, 2020.
- [۱۹] فقیه. س، شجاعی. خ، "کنترل فیدبک حالت جزئی برای ردیابی مسیر شناور زیرسطح خودگردان تحریک ناقص با استفاده از کنترل سطح دینامیکی تطبیقی- عصبی"، *مجله کنترل*، جلد ۱۱، شماره ۲، صفحات ۴۳-۵۴، ۱۳۹۶.
- [20] Wang, J., Wang, C., Wei, Y., Zhang, C, "Command filter based adaptive neural trajectory tracking control of an underactuated underwater vehicle in three-dimensional space", *Ocean Engineering*, vol. 180, pp. 175-186, 2019.
- [21] Guerrero, J., Torres, J., Creuze, V., Chemori, A., "Trajectory tracking for autonomous underwater vehicle: An adaptive approach", *Ocean Engineering*, vol. 172, pp. 511-522, 2019.
- [22] Wang, H., Wang, D., Peng, Z., Yan, L., Diao, L, "Robust adaptive dynamic surface control for synchronized path following of multiple underactuated autonomous underwater vehicles", *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*, Nanjing, pp. 1949-1954, 2014.
- [23] Han, S. I., Ha, H., Lee, J. M., 2016 "Fuzzy finite-time dynamic surface control for nonlinear large-scale systems", *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 18, pp. 570-584.
- [24] Liu, H, Zhang, T. "Adaptive Neural Network Finite-Time Control for Uncertain Robotic Manipulators", *Intelligent and Robotic Systems*, vol. 75, pp. 363-377, 2014.
- [25] Fu, C., Tian, Y., Huang, H., Zhang, L., Peng, C., "Finite-time trajectory tracking control for a 12-rotor unmanned aerial vehicle with input saturation", *ISA transactions*, vol. 81, pp. 52-62, 2018.
- [۲۶] فاضلی. م، مختاری. م، ایمانی. ک، "طراحی کنترل کننده‌ی مد لغزشی زمان محدود به همراه تخمین تأخیر زمانی برای هلیکوپتر سه درجه آزادی"، *هجدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران*، تهران، دانشکده مهندسی هوافضای دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۹۸.
- [27] Xu, J., Wang, M., Qiao, L, "Dynamical sliding mode control for the trajectory tracking of underactuated unmanned underwater vehicles", *Ocean Engineering*, vol. 105, pp. 54-63, 2015.
- [28] Zhou, J., Ye, D., Zhao, J., He, D, "Three-dimensional trajectory tracking for underactuated AUVs with bio-inspired velocity regulation", *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, vol. 10, pp. 282-293, 2018.
- [29] Shojaei, K., Dolatshahi, M., "Line-of-sight target tracking control of underactuated autonomous