مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۵، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۰، صفحه ۱۱-۱

تحلیل پایداری فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته در محیط تصادفی

حسین بیک زاده [۱]، حمیدرضا تقی‌راد [۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

[۲] دانشیار گروه کنترل و سیستم، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۲/۲۷، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۷/۲۲)

چکیده: تا کنون به کارگیری رؤیت‌گر SDRE و تحلیل پایداری و عملکرد آن در محیط قطعی و بدون نویز مورد توجه محققان قرار گرفته، اما در عمل وجود نامعینی فرآیند و نویز اندازه‌گیری غیر قابل اجتناب است. در این مقاله با توجه به دست‌آوردهای حاصل برای پایداری فیلتر کالمن-باسی و نتایج مربوط به تحلیل پایداری اتفاقی در مسائل تخمین غیرخطی، به تحلیل رفتار خطای تخمین یک فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته پرداخته شده است. در تحلیل پایداری ارائه شده شرایط کافی به منظور کراندار باقی ماندن خطای تخمین این فیلتر با تعبیر میانگین مربعات ارائه شده است. همچنین نشان داده شده است که اگر خطای تخمین اولیه و اندازه ترم‌های نویز مزاحم هر دو به اندازه کافی کوچک باشند، این شرایط محقق می شوند. این یافته‌های تئوری از طریق شبیه‌سازی یک سیستم غیرخطی نمونه راست‌آزمایی شده اند.

کلمات کلیدی: رؤیت گر غیر خطی، رؤیت گر SDRE، پایداری اتفاقی سیستمهای غیر خطی، فیلتر تفاضلی زمان-گسسته، تحلیل پایداری، کرانداری با تعبیر میانگین مربعات.

Stability Analysis of Discrete-Time SDRE Filter in Stochastic Domain

Hossein Beikzadeh, Hamid D. Taghirad

Abstract: Stability of SDRE observers is usually analyzed in a deterministic framework, where the performance of the observer is not perturbed by external noises. However, plant uncertainty and measurement noises are not negligible in real implementations. In this paper based on the stability results developed for Kalman-Bucy filters and stochastic stability analysis of nonlinear systems, the stability of an SDRE filter is analyzed in discrete-time domain. Sufficient conditions are given to limit the estimation errors in sense of mean-squared measure. Furthermore, it is shown that in practical situations there exist feasible regions to satisfy the stability conditions, provided that the initial error and the norm of plant uncertainty and measurement noises are sufficiently small. Finally, the stability conditions are verified through simulation of a typical nonlinear system.

Keywords: Nonlinear observer, SDRE observer, stochastic stability of nonlinear systems, discrete-time nonlinear observer, stability analysis, bound of mean squared error.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، روش‌های طراحی بر پایه حل معادله ریکاتی وابسته به حالت (SDRE[1]) به صورت روزافزونی در دسته وسیعی از مسائل عملی به کار رفته‌اند [۲,۱]. در حقیقت، روش SDRE را می‌توان به عنوان همتای غیرخطی روش طراحی شناخته شده LQR[2] برای سیستم‌های خطی در نظر گرفت [۳]. به طور مشخص، این روش از نمایش مستقیم معادلات غیرخطی در یک ساختار شبه خطی با ماتریس‌های ضرایب وابسته به حالت بهره می‌برد [۴]. بدین ترتیب در حالت چند متغیره، نمایش SDC[3] یکتا نبوده و این نمایش درجات آزادی اضافی را فراهم می‌سازد که می‌تواند برای حل مشکلاتی نظیر عملکرد نامناسب، تکینگی و یا از دست رفتن رؤیت‌پذیری در روش‌های سنتی فیلترکردن همچون فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF)، به کار رود [۵،۶]. رؤیت‌گر SDDRE[4] تفاضلی زمان-گسسته نیز به صورت مجزا در مراجع [۸،۷] مورد مطالعه قرار گرفته و دو دسته شرایط کافی متمایز برای پایداری مجانبی آن بدست آمده است. البته این مجموعه شرایط به طور کامل *وابسته به نتایج شبیه‌سازی* بوده و در ضمن محدود به سیستم‌های بدون ورودی است. بعلاوه، تمامی نتایج تئوری مذکور منحصر به فرآیندهای *قطعی* غیرخطی است و در کلیه نتایج بدست آمده فرض شده است که مدل سیستم کاملاً معلوم است. اعمال رؤیت‌گرهای SDRE مرسوم به سیستم‌های اتفاقی نیزکه در کاربردهای عملی مورد توجه است، نیازمند داشتن اطلاعات دقیق از خصوصیات آماری سیگنال‌های نویز می‌باشد. اما در کاربردهای عملی اغلب اوقات اطلاعات آماری ناقصی از نامعینی مدل و سیگنالهای نویز وجود دارد که به صورت بالقوه می‌تواند سبب ایجاد خطاهای تخمین بیش از اندازه شود.

پیشرفت‌های تئوری قابل توجه‌ای در رابطه با کنترل‌کننده SDRE و خصوصیات پایداری مجانبی سیستم فیدبک با در اختیار داشتن تمام حالت-ها، حاصل شده است [۹، ۱۰]. با این وجود، تلاش‌های بسیار محدود و ناچیزی درباره مطالعه جنبه‌های تئوری رؤیت‌گر SDRE صورت گرفته و مسائلی همچون پایداری و همگرایی فیلتر در حضور نویز و قوام آن در مقابل نامعینی‌ها و ورودی‌های اغتشاش بدون تحلیل باقی مانده است. همچنین معمولاً به کارگیری رؤیت‌گر SDRE و تحلیل پایداری و عملکرد آن در یک محیط قطعی و بدون نویز طرف توجه محققان بوده است و غالب پژوهش‌های نظری در رابطه با این فیلتر و انواع آن فقط در محیط-هایی که بتوان اثر نویز را نادیده گرفت، قابل استفاده است. وجود سیگنال-های نویز چه به صورت نامعینی فرآیند و چه به صورت نویز اندازه‌گیری، در عمل واقعیتی اجتناب ناپذیر است، بنابراین علاوه بر نتایج موجود مطالعه شکل عمومی‌غیرخطی رؤیت‌گر در یک چهارچوب اتفاقی ضروری به نظر می‌رسد. این موضوع در این مقاله با گسترش فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته و به کارگیری تئوری تحلیل پایداری فرآیندهای اتفاقی انجام شده است. در این مقاله با توجه به دست‌آوردهای حاصل برای پایداری فیلتر کالمن-باسی و نتایج مربوط به تحلیل پایداری اتفاقی در مسائل تخمین غیرخطی، به تحلیل رفتار خطای تخمین یک فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته پرداخته شده است. در تحلیل پایداری ارائه شده شرایط کافی به منظور کراندار باقی ماندن خطای تخمین این فیلتر با تعبیر میانگین مربعات ارائه شده و همچنین نشان داده شده است اگر خطای تخمین اولیه و اندازه ترم‌های نویز مزاحم هر دو به اندازه کافی کوچک باشند، این شرایط محقق می شوند. در پایان نیز، این یافته‌های نظری از طریق شبیه‌سازی یک سیستم غیرخطی نمونه راست‌آزمایی شده اند.

۲- مقدمات ریاضی

پیش از بررسی خواص همگرایی فیلتر SDRE در یک محیط تصادفی، ابتدا به مرور مفاهیم و قضایای مورد نیاز از ریاضیات اتفاقی می‌پردازیم.

۲-۱ شرایط شبه لیاپانوف برای پایداری اتفاقی

شرایط لیاپانوف برای پایداری معادلات دیفرانسیل یا تفاضلی اتفاقی توسط افرادی همچون Wonham، Kushner، Zakai و غیره ارائه شده است (به [۱۱] و مقالاتی که در آن ارجاع داده شده رجوع شود). همچنین روش‌های مختلفی برای تعریف پایداری یا همگرایی فرآیندهای اتفاقی وجود دارد، که به منظور جلوگیری از سردرگمی‌میان این تعاریف متعدد، تعاریفی را در ادامه بیان می‌کنیم که در تحلیل پایداری اتفاقی سیستم مورد نظر استفاده خواهد شد. با الهام از معیار مرسوم حداقل میانگین مربعات در نظریه تخمین، پایداری فرآیندهای اتفاقی زمان-پیوسته و زمان-گسسته به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند [12].

تعریف ۱- مبدا سیستم اتفاقی پیوسته $e(t)$ پایدار مجانبی با تعبیر میانگین مربعات نامیده می‌شود، اگر ثابت‌های $\vartheta>0$، $\nu\geq 0$ و $\eta>0$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که

$$E\left\{\|e(t)\|^2\right\}\leq \nu+\eta\|e(0)\|^2 e^{-\vartheta t} \qquad (۱)$$

آنگاه فرایند $e(t)$ کراندار نمایی با تعبیر میانگین مربعات و نمای ϑ خوانده می‌شود.

تعریف ۲- مبدا فرایند اتفاقی گسسته e_k پایدار مجانبی با تعبیر میانگین مربعات گفته می‌شود، اگر ثابت‌های $1\leq\vartheta>0$، $\nu\geq 0$ و $\eta>0$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که رابطه (۲) بر قرار باشد. آنگاه فرایند e_k کراندار نمایی با تعبیر میانگین مربعات و نمای ϑ نامیده می‌شود.

[1] State dependent Ricatti equation
[2] Linear quadratic regulator
[3] State dependent coefficient
[4] State dependent discrete Ricatti equation

$$E\left\{\left\|e_k\right\|^2\right\} \le \nu + \eta \left\|e_0\right\|^2 (1-\vartheta)^k \qquad (۲)$$

نکته ۱: تعریف ۱ یا ۲ لزوما دلالت بر کاهش $E\left\{\left\|e(t)\right\|^2\right\}$ برای همه زمانها را ندارد، بلکه تنها بیان می‌دارد که کران به صورت نمایی کاهش پیدا می‌کند. در ضمن، زمانی که $t \to \infty$، میانگین مربعات فرآیند با مقدار $\nu \le E\left\{\left\|e(\infty)\right\|^2\right\}$ محدود می‌گردد، که ثابت ν به نویزی که عملکرد سیستم را مختل می‌سازد، بستگی دارد.

نکته ۲: اگر $\nu = 0$ باشد و یا به عبارتی اگر

$$E\left\{\left\|e(t)\right\|^2\right\} \le \eta \left\|e(0)\right\|^2 e^{-\alpha t} \qquad \left(or \quad E\left\{\left\|e_k\right\|^2\right\} \le \eta \left\|e_0\right\|^2 (1-\vartheta)^k\right)$$

آنگاه $e(t)$ (یا e_k) با تعبیر میانگین مربعات به سمت صفر میل می‌کند، که این حالت بیانگر همگرایی احتمالی نیز خواهد بود. در تکمیل مفهوم کراندار بودن احتمالی، اشاره به تعریف زیر نیز مفید به نظر می‌رسد.

تعریف ۳- فرآیند اتفاقی گسسته e_k با احتمال واحد کراندار است، اگر شرط (۳) با احتمال واحد برقرار بماند.

$$\sup_{k \ge 0} \left\|e_k\right\| < \infty \qquad (۳)$$

همان‌گونه که مشخص است، تشخیص پایداری یا کراندار بودن یک فرآیند اتفاقی صرفا براساس تعاریف فوق، در حالت کلی کاری دشوار خواهد بود. به همین دلیل، در [۱۲] شرایطی شبه لیاپانوف برای بررسی پایداری اتفاقی با تعبیر میانگین مربعات ارائه شده که این تحلیل را میسر می‌سازد. لم زیر که نتیجه متعارفی درباره کراندار بودن فرآیندهای اتفاقی است، این شرایط را برای سیستم‌های اتفاقی زمان-گسسته بیان می‌کند. این لم اساس تحلیل پایداری انجام شده در [۱۳]، [۱۴] و نیز مبنای تحلیل خطای تخمین در این مقاله می‌باشد. نظیر این لم برای فرآیندهای اتفاقی زمان-پیوسته نیز وجود دارد.

لم ۱- فرض کنید e_k یک فرآیند اتفاقی باشد و تابع لیاپانوف اتفاقی $V_k(e_k)$ و همین‌طور اعداد حقیقی $\overline{v}, \underline{v}, \mu > 0$ و $0 < \lambda \le 1$ وجود داشته باشند به نحوی که

$$\underline{v}\left\|e_k\right\|^2 \le V_k(e_k) \le \overline{v}\left\|e_k\right\|^2 \qquad (۴)$$

$$E\left\{V_{k+1}(e_{k+1}) \middle| e_k\right\} - V_k(e_k) \le \mu - \lambda V_k(e_k) \qquad (۵)$$

همواره برآورده شوند. آنگاه فرآیند اتفاقی e_k کراندار نمایی با تعبیر میانگین مربعات (تعریف ۲) بوده و برای هر $k \ge 0$ داریم:

$$E\left\{\left\|e_k\right\|^2\right\} \le \frac{\overline{v}}{\underline{v}} E\left\{\left\|e_0\right\|^2\right\}(1-\lambda)^k + \frac{\mu}{\underline{v}} \sum_{i=1}^{k-1} (1-\lambda)^i \qquad (۶)$$

بعلاوه، این فرآیند اتفاقی با احتمال واحد کراندار نیز هست.

اثبات- این لم از [۱۵] و [۱۱، قضیه ۲] نتیجه می‌شود. ■

توجه کنید که این لم حاوی شرایطی شبه لیاپانوف برای پایداری اتفاقی است. به لحاظ شهودی می‌توان گفت اگر شرط (۵) تحقق یابد، انرژی سیگنال e_k به طور دلخواه افزایش نخواهد یافت.

نکته ۳: با به کاربردن

$$\sum_{i=1}^{k-1} (1-\lambda)^i \le \sum_{i=1}^{\infty} (1-\lambda)^i = \frac{1}{\lambda} \qquad (۷)$$

نامساوی (۶) به فرم زیر قابل بازنویسی است

$$E\left\{\left\|e_k\right\|^2\right\} \le \frac{\overline{v}}{\underline{v}} E\left\{\left\|e_0\right\|^2\right\}(1-\lambda)^k + \frac{\mu}{\underline{v}\lambda} \qquad (۸)$$

۲-۲ طراحی رؤیت‌گر غیرخطی اتفاقی در حالت کلی

یک سیستم غیرخطی را که با معادله دیفرانسیل اتفاقی زیرتوصیف می‌شود را در نظر بگیرید:

$$dx(t) = f(x(t))dt + \sigma_1(x(t))dw(t) \qquad (۹)$$

که معادله مشاهده آن عبارت است از:

$$dy(t) = h(x(t))dt + \sigma_2(x(t))dv(t) \qquad (۱۰)$$

و در آن $x(t)$ و $f(x(t))$ بردارهای n-بعدی، $y(t)$ و $h(x(t))$ بردارهای m-بعدی و $f(\cdot)$ و $h(\cdot)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر هستند. همچنین، $w(t)$ و $v(t)$ به ترتیب فرآیندهای حرکت براونی استاندارد ناهمبسته با ابعاد q و r بوده، و $\sigma_1(x(t))$ و $\sigma_2(x(t))$ توابع ماتریسی با ابعاد مناسب می‌باشند. هدف طراحی یک تخمین‌گر حالت برای سیستم (۹) با استفاده از خروجی $y(t)$ از (۱۰) است، به گونه‌ای که اختلاف بین خروجی رؤیت‌گر $z(t)$ و حالت سیستم $x(t)$ با تعبیر میانگین مربعات کراندار نمایی باشد. خروجی رؤیت‌گر می‌تواند به عنوان تخمین حالت سیستم به کار رود. در حالت کلی، چنین رؤیت‌گری را می‌توان توسط هر معادله دیفرانسیل اتفاقی به فرم زیر توصیف کرد.

$$dz(t) = g_1(z(t), y(t))dt + g_2(z(t), y(t))dy(t) \qquad (۱۱)$$

Tarn و Rasis در [12]، با در نظر گرفتن حالت خاص زیر از رؤیت‌گر (۱۱) به فرم

$$dz(t) = f(z(t))dt + K\left[dy(t) - h(z(t))dt\right] \qquad (۱۲)$$

که در آن K یک ماتریس $n \times m$ است، با انتخاب تابع لیاپانوف

$V(e(t)) = (x(t) - z(t))^T Q(x(t) - z(t))$ ،

که در آن Q یک ماتریس متقارن مثبت معین است، شرایط کافی برای کراندار نمایی بودن خطای تخمین رؤیت‌گر ($e(t)=x(t)-z(t)$) را استخراج نموده اند. البته این شرایط مابین ماتریس ثابت K و توابع f و h در نمایش (۹) و (۱۰) بدست آمده‌اند و روش سیستماتیکی برای انتخاب K ارائه نمی‌دهد. رؤیت‌گر SDDRE را می‌توان در قالب معادله (۱۱) به فرم زیر نمایش داد:

$$dz(t)=A(z(t))z(t)dt+K(t)\left[dy(t)-C(z(t))z(t)dt\right] \qquad (۱۳)$$

که در این حالت

$$g_1(z(t),y(t))=A(z(t))z(t)-K(t)C(z(t))z(t)$$ و

$g_2(z(t),y(t))=K(t)$ می‌باشد. در این حالت بهره رؤیت‌گر که با معادلات زیر داده می‌شود [۱۱]،

$$L(\hat{x})=\Gamma(\hat{x})C^T(\hat{x})V^{-1},$$
$$\dot{\Gamma}=\Gamma(\hat{x})A^T(\hat{x})+A(\hat{x})\Gamma(\hat{x})-\Gamma(\hat{x})C^T(\hat{x})V^{-1}C^T(\hat{x})\Gamma(\hat{x})+U$$

که برخلاف (۱۲) وابسته به زمان است و لذا بدست آوردن شرایطی که کران‌دار بودن خطای رؤیت‌گر را تضمین کند به سادگی آنچه در [۱۱] صورت گرفته است، نخواهد بود. در بخش آتی با گسترش شکل زمان-گسسته رؤیت‌گر SDDRE فیلتر پیشنهادی را معرفی نموده و شرایط پایداری این رؤیت‌گر در یک محیط اتفاقی را تحلیل خواهیم نمود.

۳- پایداری اتفاقی فیلتر SDDRE زمان-گسسته

۳-۱ فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته

سیستم زمان-گسسته غیرخطی اتفاقی زیر را که نسبت به سیگنال ورودی افاین است را در نظر بگیرید

$$x_{k+1}=f(x_k)+g(x_k)u_k+G_kw_k \qquad (۱۴)$$

$$y_k=h(x_k)+D_kv_k \qquad (۱۵)$$

که $x_k\in R^n$ حالت، $u_k\in R^m$ ورودی و $y_k\in R^l$ خروجی سیستم می‌باشد. علاوه بر این، v_k و w_k که به ترتیب نویز اندازه‌گیری و فرآیند نامیده می‌شوند، نویزهای سفید R^q و R^p-بعدی ناهمبسته با میانگین صفر و کوواریانس واحد هستند. D_k و G_k ماتریس‌های متغیر با زمان از مرتبه $l\times q$ و $n\times p$ می‌باشند. برای سادگی حالت اولیه ثابت x_0 با احتمال واحد را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که توابع غیرخطی $f(x_k)$ و $h(x_k)$ متعلق به C^1 بوده و دینامیک غیرخطی (۱۴) و (۱۵) را بتوان در قالب نمایش SDC زیر قرار داد:

$$x_{k+1}=A(x_k)x_k+B(x_k)u_k+G_kw_k \qquad (۱۶)$$

$$y_k=C(x_k)x_k+D_kv_k \qquad (۱۷)$$

که در آن، $A(x_k)$، $B(x_k)$ و $C(x_k)$ به ترتیب توابع ماتریسی گسسته $n\times n$، $n\times m$ و $l\times n$ هستند. برای سیستم دینامیکی داده شده با (۱۶) و (۱۷)، تخمین‌گر حالت زیر را معرفی می‌کنیم

$$\hat{x}_{k+1}=A(\hat{x}_k)\hat{x}_k+B(\hat{x}_k)u_k+L_k\left[y_k-C(\hat{x}_k)\hat{x}_k\right] \qquad (۱۸)$$

که بهره رؤیت‌گر L_k یک فرآیند اتفاقی ماتریسی از مرتبه $n\times l$ و $\hat{x}_k$ معرف بردار حالت تخمین زده شده است. اکنون می‌توان با در نظر گرفتن دوگان تکنیک کنترلی SDRE زمان-گسسته و حذف فرض افق زمان نامحدود، فیلتر SDRE تفاضلی را فرمول‌بندی نمود. بنابراین تابع هزینه

$$J(\tilde{x}_k,\tilde{u}_k)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}(\tilde{x}_k^TQ_k\tilde{x}_k+\tilde{u}_kR_k\tilde{u}_k) \qquad (۱۹)$$

متناظر با سیستم دوگان که با دینامیک حالت زیر توصیف می‌شود

$$\tilde{x}_{k+1}=A^T(\tilde{x}_k)\tilde{x}_k+C^T(\tilde{x}_k)\tilde{u}_k \qquad (۲۰)$$

را در نظر بگیرید. توجه شود که در (۱۹) N افق زمان محدود رؤیت‌گر بوده، و در (۲۰) $Q_k\in R^{n\times n}$ یک ماتریس مثبت معین متقارن متغیر با زمان و $R_k\in R^{l\times l}$ یک ماتریس مثبت معین متغیر با زمان می‌باشد. با الهام گیری از روش طراحی رؤیت‌گر برای سیستم‌های خطی و به منظور حداقل کردن تابع هزینه فوق، بهره رؤیت‌گر، L_k در معادله (۱۸)، را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$L_k=A(\hat{x}_k)P_kC^T(\hat{x}_k)\left[C(\hat{x}_k)P_kC^T(\hat{x}_k)+R_k\right]^{-1} \qquad (۲۱)$$

و P_k از طریق معادله ریکاتی تفاضلی وابسته به حالت زیر به روز می‌شود

$$P_{k+1}=A(\hat{x}_k)P_kA^T(\hat{x}_k)-A(\hat{x}_k)P_kC^T(\hat{x}_k)\left[C(\hat{x}_k)P_kC^T(\hat{x}_k)+R_k\right]^{-1}C(\hat{x}_k)P_kA^T(\hat{x}_k)+Q_k \qquad (۲۲)$$

نکته ۴: مشابه حالت زمان-پیوسته، اگر $A_1(x_k)$ و $A_2(x_k)$ دو نمایش متمایز از $f(x_k)$ باشند، این دو می‌توانند ترکیب شده و یک نمایش جدید را ایجاد کنند.

$$A(x_k,\alpha)=\alpha A_1(x_k)+(1-\alpha)A_2(x_k) \qquad (۲۳)$$

این درجات آزادی اضافی، بیشمار نمایش را ممکن می‌سازد، که می‌تواند برای بهبود عملکرد فیلتر و دوری از رؤیت‌ناپذیری به کار رود [۴].

نکته ۵: مشابه فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF)، دو فرمول‌بندی معمول به نام-های به‌روزرسانی بازگشتی یک مرحله‌ای[1] و به‌روزرسانی بازگشتی دو

[1] One-step recursive update

مرحله‌ای[1]، برای فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته موجود است. ساختار بازگشتی یک مرحله‌ای آن چیزی است که در اینجا ارائه گردید و با معادلات (۱۸)، (۲۱) و (۲۲) داده می‌شود. ساختار بازگشتی دو مرحله‌ای در یک محیط قطعی، در [۶] و نیز در [۸] مورد بحث قرار گرفته است. توجه کنید که اگرچه ممکن است این دو فرمول‌بندی عملکرد و رفتار گذرای متفاوتی داشته باشند، اما خصوصیات همگرایی آنها یکسان خواهد بود.

نکته ۶: یک انتخاب مرسوم برای Q_k و R_k ماتریس‌های کوواریانس نویزهای اندازه‌گیری و نامعینی سیستم در (۱۴) و (۱۵) می‌باشد، به عبارت دیگر

$$Q_k = G_k G_k^T \qquad (۲۴)$$

$$R_k = D_k D_k^T \qquad (۲۵)$$

البته این تنها انتخاب ممکن نیست و هر ماتریس مثبت معین دیگری به عنوان پارامتر طراحی نیز می‌تواند جایگزین شود. به ویژه در تخمین حالت سیستم‌های قطعی بدون نویز، در این مورد $D_k D_k^T = G_k G_k^T = 0$ می‌باشد. اگر خطای تخمین را به صورت زیر تعریف کنیم

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \qquad (۲۶)$$

با کم کردن (۱۸) از (۱۶) دینامیک خطا حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= A(x_k)x_k + B(x_k)u_k + G_k w_k - A(\hat{x}_k)\hat{x}_k - B(\hat{x}_k)u_k \\ &\quad - L_k\left[C(x_k)x_k + D_k v_k - C(\hat{x}_k)\hat{x}_k\right] \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

با اضافه و کم کردن $A(\hat{x}_k)x_k$ به کل معادله و اضافه و کم کردن $C(\hat{x}_k)x_k$ به داخل کروشه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= A(\hat{x}_k)x_k - A(\hat{x}_k)\hat{x}_k + A(x_k)x_k - A(\hat{x}_k)x_k + \\ &\quad \left[B(x_k) - B(\hat{x}_k)\right]u_k + G_k w_k - \\ &\quad L_k\left[C(\hat{x}_k)x_k - C(\hat{x}_k)\hat{x}_k + C(x_k)x_k - C(\hat{x}_k)x_k + D_k v_k\right] \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

به این ترتیب می‌توان دینامیک خطا را به صورت زیر بازنویسی نمود

$$e_{k+1} = \left[A(\hat{x}_k) - L_k C(\hat{x}_k)\right]e_k + \varphi_k + \chi_k \qquad (۲۹)$$

که φ_k و χ_k به ترتیب ترم‌های آزاد از نویز و دارای نویز در (۲۸) را در بر می‌گیرند

$$\varphi_k = d(x_k, \hat{x}_k, u_k) - L_k s(x_k, \hat{x}_k) \qquad (۳۰)$$

$$\chi_k = G_k w_k - L_k D_k v_k \qquad (۳۱)$$

و توابع غیرخطی $d(x_k, \hat{x}_k, u_k)$ و $s(x_k, \hat{x}_k)$ با معادلات زیر تعیین می‌گردند

$$d(x_k, \hat{x}_k, u_k) = \left[A(x_k) - A(\hat{x}_k)\right]x_k + \left[B(x_k) - B(\hat{x}_k)\right]u_k \qquad (۳۲)$$

$$s(x_k, \hat{x}_k) = \left[C(x_k) - C(\hat{x}_k)\right]x_k \qquad (۳۳)$$

هدف این مقاله تحلیل دینامیک خطا در (۲۹) است. پیش از اقدام به این کار، ابتدا یک بحث مقدماتی در خصوص کران‌های پاسخ معادله ریکاتی (۲۲) ارائه می‌شود.

۳-۲ کران‌های معادله ریکاتی وابسته به حالت

در این بخش نشان می‌دهیم رابطه نزدیکی میان کران‌دار بودن پاسخ معادله ریکاتی (۲۲) با خواص رؤیت‌پذیری و آشکاری‌پذیری سیستم مورد مشاهده وجود دارد. ابتدا نکته زیر را مد نظر قرار دهید.

نکته ۷: در ادامه، ماتریس‌های وابسته به حالتی که در فرمول‌بندی فیلتر ظاهر می‌شوند را با ماتریس‌های وابسته به زمان زیر نمایش می‌دهیم

$$A_k \leftarrow A(\hat{x}_k) \quad B_k \leftarrow B(\hat{x}_k) \quad C_k \leftarrow C(\hat{x}_k) \qquad (۳۴)$$

توجه شود که این نمایش صرفا برای سهولت نشان‌گذاری صورت گرفته و این حقیقت که این ماتریس‌ها با استفاده از بردار حالت $\hat{x}_k$ بدست می‌آیند، مد نظر باقی خواهند ماند.

تعریف ۴- ماتریس‌های متغیر با زمان A_k و C_k را در نظر می‌گیریم. گرامیان رویت‌پذیری با معادله زیر داده می‌شود [۱۶]:

$$M_{k+a,k} = \sum_{i=k}^{k+a} \Phi^{-T}(i,k) C_i^T C_i \Phi(i,k) \qquad (۳۵)$$

برای هر عدد صحیحی همچون $a > 0$ با فرض $\Phi(k,k) = I$ و برای $i > k$

$$\Phi(i,k) = A_{i-1} \dots A_k \qquad (۳۶)$$

ماتریس‌های A_k و C_k، $k \geq 0$، شرط رویت‌پذیری یکنواخت را برآورده می‌کنند در صورتی که اعداد حقیقی $\underline{m}, \overline{m} > 0$ و عدد صحیح $a > 0$ موجود باشند به گونه‌ای که نامساوی زیر تحقق یابد:

$$\underline{m} I \leq M_{k+a,k} \leq \overline{m} I \qquad (۳۷)$$

لم ۲- پاسخ P_k معادله ریکاتی (۲۲) کراندار است، بدین معنی که اعداد حقیقی $\underline{p}, \overline{p} > 0$ موجوداند به نحوی که

$$\underline{p} I \leq P_k \leq \overline{p} I \qquad (۳۸)$$

در صورتی که شرایط زیر برآورده شوند.

۱) اعداد حقیقی $\underline{q}, \overline{q}, \underline{r}, \overline{r} > 0$ وجود دارند به گونه‌ای که $\underline{q} I \leq Q_k \leq \overline{q} I$ و $\underline{r} I \leq R_k \leq \overline{r} I$

۲) ماتریس‌های A_k و C_k شرط رویت‌پذیری یکنواخت را برآورده کنند.

۳) ماتریس حالت اولیه P_0 مثبت معین انتخاب شود.

[1] Two-step recursive update

اثبات- این لم مستقیما از [۱۵] استنباط می‌شود و در [۱۳] نیز، در مورد پاسخ معادله ریکاتی EKF به کار رفته است. ■

توجه شود که اگر ماتریس‌های متغیر با زمان A_k و C_k نظیر آنچه در EKF صورت می‌گیرد از خطی‌سازی معادلات حول حالت تخمینی بدست آمده باشند، آنگاه شرط رؤیت‌پذیری یکنواخت را می‌توان برحسب شرط رتبه رؤیت‌پذیری غیرخطی بیان کرد. اما در این حالت که ماتریس‌های متغیر با زمان A_k و C_k از تبدیل معادلات به فرم SDC حاصل می‌شوند، برقراری این ارتباط به این سادگی نیست. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که کران‌دار بودن P_k با خواص رویت‌پذیری سیستم ارتباط مستقیم پیدا می‌کند. این کرانداری یکی از فرضیات کلیدی است که در بخش بعد برای تحلیل پایداری مورد استفاده قرار گرفته است.

۳-۳- کراندار بودن خطای تخمین

در این بخش تحلیل پایداری فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته ارائه خواهد شد. به منظور تحلیل خطا، ابتدا فرضیات زیر را در نظر بگیرید.

فرض ۱- اعداد حقیقی مثبت $\bar{c},\bar{a}>0$ وجود دارند به گونه‌ای که، برای هر $k\geq 0$ ماتریس‌های A_k و C_k از بالا کراندار باشند

$$\|A_k\|\leq \bar{a} \tag{۳۹}$$

$$\|C_k\|\leq \bar{c} \tag{۴۰}$$

و افزون بر آن، A_k برای هر $k\geq 0$ ناویژه باشد.

فرض ۲- برای هر پاسخ $\hat{x}_k$ از معادله تفاضلی رؤیت‌گر (۱۸)، پاسخ P_k از معادله ریکاتی تفاضلی وابسته به حالت (۲۲) برای هر $k\geq 0$ و اعداد حقیقی مثبت $\underline{p},\bar{p}>0$، با

$$\underline{p}I\leq P_k\leq \bar{p}I \tag{۴۱}$$

کراندار است.

فرض ۳- اعداد حقیقی $\sigma,\rho>0$ موجوداند به نحوی که برای هر $k\geq 0$

$$\|x_k\|\leq\sigma,\|u_k\|\leq\rho \tag{۴۲}$$

فرض ۴- نمایش SDC به گونه‌ای انتخاب شود که برای همه $x_k,\hat{x}_k\in R^n$ و هر $k\geq 0$ نامساوی‌های زیر برآورده شوند:

$$\|A(x_k)-A(\hat{x}_k)\|\leq k_A\|x_k-\hat{x}_k\|^2 \tag{۴۳}$$

$$\|B(x_k)-B(\hat{x}_k)\|\leq k_B\|x_k-\hat{x}_k\|^2 \tag{۴۴}$$

$$\|C(x_k)-C(\hat{x}_k)\|\leq k_C\|x_k-\hat{x}_k\|^2 \tag{۴۵}$$

همچنین فرض کنید $\|x_k-\hat{x}_k\|\leq\varepsilon_A$، $\|x_k-\hat{x}\|_k\leq\varepsilon$ و $\|x_k-\hat{x}_k\|\leq\varepsilon_C$ و $k_A,k_B,k_C>0$. اکنون با این پیش‌نیازها، قادر به بیان قضیه اصلی این مقاله می‌باشیم، که شرایط کافی برای پایداری اتفاقی خطای تخمین را نشان می‌دهد.

قضیه ۱- سیستم غیرخطی اتفاقی داده شده با (۱۶) و (۱۷) را به همراه فیلتر SDRE تفاضلی تعریف شده با (۱۸)-(۲۲) و ماتریس‌های مثبت معین Q_k و R_k در نظر بگیرید. فرض کنید شرایط ۱ تا ۴ برقرار باشند. آنگاه خطای تخمین داده شده با (۲۹) با تعبیر میانگین مربعات کراندار نمایی و نیز با احتمال واحد کراندار است، مشروط برآنکه خطای تخمین اولیه شرط

$$\|e_0\|\leq\varepsilon \tag{۴۶}$$

را برآورده سازد و ماتریس‌های کوواریانس ترم‌های نویز توسط

$$G_kG_k^T\leq\delta I \tag{۴۷}$$

$$D_kD_k^T\leq\delta I \tag{۴۸}$$

کراندار باشند، که در آن $\varepsilon,\delta>0$ اعداد حقیقی مثبت هستند.

نکته ۸: با توجه به لم ۲، درصورتیکه سیستم خاصیت رؤیت‌پذیری معینی را برآورده کند، آنگاه فرض ۲ تحقق یافته و می‌توان برقراری نامساوی (۴۱) را از پیش تصدیق کرد.

نکته ۹: می‌توان نامساوی‌های (۴۳) تا (۴۵) را به صورت شرایط لیپ‌شیتز محلی با توان دو تعبیر نمود. تحقق این نامساوی‌ها در حالت کلی کار دشواری خواهد بود. البته، درجات آزادی اضافی که بواسطه یکتا نبودن نمایش SDC فراهم می‌گردد، می‌تواند در برآورده کردن فرض ۴ مفید واقع شود.

اثبات قضیه ۱- تابع لیاپانوف مرسوم زیر را انتخاب می‌کنیم

$$V_k(e_k)=e_k^T\Pi_ke_k \tag{۴۹}$$

با فرض $\Pi_k=P_k^{-1}$، به خاطر مثبت معین بودن P_k (فرض ۲) این ماتریس حتما وجود دارد. از نامساوی (۴۱) داریم

$$\frac{1}{\bar{p}}\|e_k\|^2\leq V_k(e_k)\leq\frac{1}{\underline{p}}\|e_k\|^2 \tag{۵۰}$$

به عبارت دیگر (۴) با $\underline{v}=1/\bar{p}$ و $\bar{v}=1/\underline{p}$ برقرار است. برای اثبات کراندار بودن خطای تخمین با استفاده از لم ۱، نیازمند محاسبه یک حد بالا مشابه (۵) برای $E\{V_{k+1}(e_{k+1})|e_k\}$ هستیم. با توجه به (۲۹) داریم

$$\begin{aligned} V_{k+1}(e_{k+1}) &= \left[e_k^T(A_k - L_kC_k)^T + \varphi_k^T + \chi_k^T\right]\Pi_{k+1} \\ &\quad \left[(A_k - L_kC_k)e_k + \varphi_k + \chi_k\right] \\ &= e_k^T(A_k - L_kC_k)^T\Pi_{k+1}(A_k - L_kC_k)e_k + \\ &\quad \varphi_k^T\Pi_{k+1}\left[2(A_k - L_kC_k)e_k + \varphi_k\right] \\ &\quad + 2\chi_k^T\Pi_{k+1}\left[(A_k - L_kC_k)e_k + \varphi_k\right] + \chi_k^T\Pi_{k+1}\chi_k \end{aligned} \tag{۵۱}$$

در بسط تساوی فوق از متقارن بودن ماتریس Π_{k+1} بهره برده‌ایم. با گرفتن امید ریاضی شرطی $E\{V_{k+1}(e_{k+1})|e_k\}$ از طرفین (۵۱) و در نظر گرفتن خاصیت نویز سفید، مشاهده می‌شود که ترم

$$E\left\{\chi_k^T\Pi_{k+1}\left[(A_k - L_kC_k)e_k + \varphi_k\right]\middle| e_k\right\}$$

صفر است. علت این امر آن است که نه $\Pi_{k+1} = P_{k+1}^{-1}$ و نه A_k، C_k، L_k، φ_k و e_k هیچ‌کدام به v_k یا w_k بستگی ندارند. به این ترتیب برای دست‌یابی به هدف خود، نیازمند محاسبه سه ترم باقی‌مانده $E\{\chi_k^T\Pi_{k+1}\chi_k\}$، $\varphi_k^T\Pi_{k+1}\left[2(A_k - F_kC_k)e_k + \varphi_k\right]$ و $(A_k - L_kC_k)^T\Pi_{k+1}(A_k - L_kC_k)$ هستیم. این محاسبات در لم‌های ۳ تا ۵ انجام شده اند.

لم ۳- تحت شرایط قضیه ۱، عدد حقیقی $0 < \lambda < 1$ وجود دارد به گونه‌ای که $\Pi_k = P_k^{-1}$ برای $k \geq 0$ و L_k داده شده با معادله (۲۱)، نامساوی زیر را ارضا کنند:

$$(A_k - L_kC_k)^T\Pi_{k+1}(A_k - L_kC_k) \leq (1-\lambda)\Pi_k \tag{۵۲}$$

اثبات- از (۲۱) و (۲۲) داریم

$$P_{k+1} = A_kP_kA_k^T + Q_k - A_kP_kC_k^TL_k^T \tag{۵۳}$$

مرتب‌سازی دوباره جملات نتیجه می‌دهد

$$P_{k+1} = (A_k - L_kC_k)P_k(A_k - L_kC_k)^T + Q_k + L_kC_kP_k(A_k - L_kC_k)^T \tag{۵۴}$$

اکنون توجه خود را به عبارت $L_kC_kP_k(A_k - L_kC_k)^T$ در سمت راست (۵۴) معطوف می‌کنیم. با در نظرگرفتن (۲۱) می‌توان نشان داد که

$$A_k^{-1}(A_k - L_kC_k)P_k = P_k - P_kC_k^T(C_kP_kC_k^T + R_k)^{-1}C_kP_k \tag{۵۵}$$

یک ماتریس متقارن است، و با به کاربردن لم معکوس‌سازی ماتریس نتیجه می‌گیریم

$$A_k^{-1}(A_k - L_kC_k)P_k = (P_k^{-1} + C_k^TR_k^{-1}C_k)^{-1} > 0 \tag{۵۶}$$

چرا که $P_k^{-1} > 0$ است. بعلاوه، با توجه به (۲۱) و دانستن این‌که $P_k > 0$ و $R_k > 0$ هستند داریم

$$A_k^{-1}L_kC_k = P_kC_k^T(C_kP_kC_k^T + R_k)^{-1}C_k \geq 0 \tag{۵۷}$$

با ترکیب (۵۶) و (۵۷) و استفاده از $P_k = P_k^T$، ثابت می‌شود که

$$\begin{aligned} L_kC_kP_k(A_k - L_kC_k)^T &= A_k\left[A_k^{-1}L_kC_k\right]\cdot \\ &\left[A_k^{-1}(A_k - L_kC_k)P_k\right]^T; \quad A_k^T \geq 0 \end{aligned} \tag{۵۸}$$

برقرار است. جایگزینی (۵۸) در (۵۴) منجر می‌شود به

$$P_{k+1} \geq (A_k - L_kC_k)P_k(A_k - L_kC_k)^T + Q_k \tag{۵۹}$$

نامساوی (۵۶) بیانگر آن است که $(A_k - L_kC_k)^{-1}$ وجود دارد و لذا می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P_{k+1} &\geq (A_k - L_kC_k)\cdot \\ &\left[P_k + (A_k - L_kC_k)^{-1}Q_k(A_k - L_kC_k)^{-T}\right](A_k - L_kC_k)^T \end{aligned} \tag{۶۰}$$

با استناد به مثبت معین بودن ماتریس‌های Q_k و R_k، $\underline{q}I \leq Q_k$ و $\underline{r}I \leq R_k$، و با توجه به (۱۸) و نامساوی‌های (۳۹) تا (۴۱) و همچنین $C_kP_kC_k^T \geq 0$ داریم

$$\|L_k\| \leq \overline{apc}\,\frac{1}{\underline{r}} \tag{۶۱}$$

به این ترتیب نامساوی زیر از (۶۰) بدست می‌آید

$$P_{k+1} \geq (A_k - L_kC_k)\left[P_k + \frac{\underline{q}}{(\bar{a} + \overline{apc}^2/\underline{r})^2}I\right](A_k - L_kC_k)^T \tag{۶۲}$$

با معکوس گرفتن از طرفین نامساوی فوق (از آنجا که $P_k \geq \underline{p}I$ و $(A_k - L_kC_k)$ ناویژه هستند این عمل مجاز است)، سپس ضرب از چپ و راست به ترتیب در $(A_k - L_kC_k)^T$ و $(A_k - L_kC_k)$، و با به کاربردن نامساوی (۴۱) و قرار دادن $\Pi_k = P_k^{-1}$ نهایتا خواهیم داشت

$$(A_k - L_kC_k)^T\Pi_{k+1}(A_k - L_kC_k) \leq \left(1 + \frac{\underline{q}}{\bar{p}(\bar{a} + \overline{apc}^2/\underline{r})^2}\right)^{-1}\Pi_k \tag{۶۳}$$

به عبارت دیگر نامساوی (۴۹) با

$$1 - \lambda = \left[1 + \frac{\underline{q}}{\bar{p}(\bar{a} + \overline{apc}^2/\underline{r})^2}\right]^{-1} \tag{۶۴}$$

محقق می‌شود. ■

لم ۴- اگر فرضیات قضیه ۱ برآورده شوند و L_k و φ_k به ترتیب با (۲۱) و (۳۰) داده شوند، آنگاه اعداد حقیقی $\varepsilon', \kappa_\varphi > 0$ وجود دارند به نحوی که برای $\|e_k\| \leq \varepsilon'$

$$\varphi_k^T\Pi_{k+1}\left[2(A_k - L_kC_k)e_k + \varphi_k\right] \leq \kappa_\varphi\|e_k\|^3 \tag{۶۵}$$

اثبات- از (۲۱)، (۳۹) تا (۴۱)، و $C_kP_kC_k^T > 0$ داریم

$$\|L_k\| \leq \overline{apc}\,\frac{1}{\underline{r}} \tag{۶۶}$$

جایگزینی در (۳۰) نتیجه می‌دهد

$$\|\varphi_k\| \le \|d(x_k,\hat{x}_k,u_k)\| + \overline{apc}\,\frac{1}{\underline{r}}\|s(x_k,\hat{x}_k)\| \tag{۶۷}$$

توابع غیرخطی $d(x_k,\hat{x}_k,u_k)$ و $s(x_k,\hat{x}_k)$ در (۳۲) و (۳۳) را در نظر بگیرید. اکنون با توجه به فرض ۴ و با استفاده از نامساوی‌های (۴۲) داریم

$$\begin{aligned}&\|d(x_k,\hat{x}_k,u_k)\| \le \|[A(x_k)-A(\hat{x}_k)]x_k\| + \\ &\|[B(x_k)-B(\hat{x}_k)]u_k\| \le (k_A\sigma + k_B\rho)\|x_k-\hat{x}_k\|^2\end{aligned} \tag{۶۸}$$

$$\|s(x_k,\hat{x}_k)\| = \|[C(x_k)-C(\hat{x}_k)]x_k\| \le k_C\sigma\|x_k-\hat{x}_k\|^2 \tag{۶۹}$$

با انتخاب $\varepsilon' = \min(\varepsilon_A,\varepsilon_B,\varepsilon_C)$ و به کمک (۶۸) و (۶۹)، می‌توان نامساوی (۶۷) را به صورت زیر بازنویسی نمود

$$\|\varphi_k\| \le (k_A\sigma + k_B\rho)\|e_k\|^2 + \overline{apc}\,\frac{1}{\underline{r}}k_C\sigma\|e_k\|^2 \tag{۷۰}$$

به ازای $\|e_k\| \le \varepsilon'$. به عبارت دیگر

$$\|\varphi_k\| \le \kappa'\|e_k\|^2 \tag{۷۱}$$

با

$$\kappa' = (k_A\sigma + k_B\rho) + \overline{apc}\,\frac{1}{\underline{r}}k_C\sigma \tag{۷۲}$$

دقت کنید که در (۷۰) از تعریف خطای تخمین (۲۶) استفاده شده است. به این ترتیب از (۷۰)، فرضیات ۱ و ۲، و همچنین مثبت معین بودن ماتریس R_k نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}&\varphi_k^T\Pi_{k+1}[2(A_k-L_kC_k)e_k+\varphi_k] \le \\ &\kappa'\|e_k\|^2\frac{1}{\underline{p}}\left[2\left(\overline{a}+\overline{apc}\,\frac{1}{\underline{r}}\overline{c}\right)\|e_k\| + \kappa'\varepsilon'\|e_k\|\right]\end{aligned} \tag{۷۳}$$

با $\Pi_k = P_k^{-1}$ و برای $\|e_k\| \le \varepsilon'$. به عبارت دیگر نامساوی (۶۵) با

$$\kappa_\varphi = \kappa'\frac{1}{\underline{p}}\left[2\left(\overline{a}+\overline{apc}\,\frac{1}{\underline{r}}\overline{c}\right)+\kappa'\varepsilon'\right] \tag{۷۴}$$

برآورده می‌شود. ■

لم ۵- اگر فرضیات قضیه ۱ برقرار باشند و L_k و χ_k به ترتیب با (۲۱) و (۳۱) داده شوند، آنگاه عدد حقیقی مثبت $\kappa_\chi > 0$ مستقل از δ وجود دارد به شکلی که

$$E\left\{\chi_k^T\Pi_{k+1}\chi_k\right\} \le k_\chi\delta \tag{۷۵}$$

از آنجا که v_k و w_k ناهمبسته هستند، امید ریاضی جمله‌هایی که v_k و w_k را با هم شامل می‌شوند صفر خواهد بود و لذا روی ترم‌های زیر از $\chi_k^T\Pi_{k+1}\chi_k$ متمرکز می‌شویم

$$g_k = w_k^TG_k^T\Pi_{k+1}G_kw_k + v_k^TD_k^TL_k^T\Pi_{k+1}L_kD_kv_k \tag{۷۶}$$

از (۲۱)، فرضیات قضیه و $C_kP_kC_k^T > 0$ داریم:

$$\|L_k\| \le \overline{apc}\,\frac{1}{\underline{r}} \tag{۷۷}$$

در نتیجه با توجه به نامساوی فوق، رابطه (۴۲) و فرض $\Pi_k = P_k^{-1}$ می‌توان نوشت

$$g_k \le \frac{1}{\underline{p}}w_k^TG_k^TG_kw_k + \frac{\overline{a}^2\overline{c}^2\overline{p}^2}{\underline{p}\underline{r}^2}v_k^TD_k^TD_kv_k \tag{۷۸}$$

از آنجا که هر دو طرف (۷۸) اسکالر هستند، می‌توان از سمت راست (۷۸) بدون تغییر مقدار آن trace گرفت:

$$g_k \le \frac{1}{\underline{p}}tr\left(w_k^TG_k^TG_kw_k\right) + \frac{\overline{a}^2\overline{c}^2\overline{p}^2}{\underline{p}\underline{r}^2}tr\left(v_k^TD_k^TD_kv_k\right) \tag{۷۹}$$

به موجب معادله ماتریسی شناخته شده

$$tr(\Gamma\Delta) = tr(\Delta\Gamma) \tag{۸۰}$$

که Γ و Δ چنان ماتریس‌هایی هستند که به ضرب ماتریسی و عملیات trace فوق معنی می‌دهند، داریم

$$g_k \le \frac{1}{\underline{p}}tr\left(G_kw_kw_k^TG_k^T\right) + \frac{\overline{a}^2\overline{c}^2\overline{p}^2}{\underline{p}\underline{r}^2}tr\left(D_kv_kv_k^TD_k^T\right) \tag{۸۱}$$

و محاسبه مقدار میانگین منجر می‌شود به

$$\begin{aligned}&E\{g_k\} \le \frac{1}{\underline{p}}tr\left(G_kE\left\{w_kw_k^T\right\}G_k^T\right) + \\ &\frac{\overline{a}^2\overline{c}^2\overline{p}^2}{\underline{p}\underline{r}^2}tr\left(D_kE\left\{v_kv_k^T\right\}D_k^T\right)\end{aligned} \tag{۸۲}$$

در رابطه فوق از این واقعیت که G_k و D_k ماتریس‌هایی معین هستند استفاده شده است. چون v_k و w_k نویزهای سفید استاندارد فرض شده‌اند، داریم

$$\begin{aligned}E\left\{w_kw_k^T\right\} = I \\ E\left\{v_kv_k^T\right\} = I\end{aligned} \tag{۸۳}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$E\left\{s_k^T\Pi_{k+1}s_k\right\} = E\{g_k\} \le \frac{1}{\underline{p}}tr\left(G_kG_k^T\right) + \frac{\overline{a}^2\overline{c}^2\overline{p}^2}{\underline{p}\underline{r}^2}tr\left(D_kD_k^T\right) \tag{۸۴}$$

با توجه به شرایط (۴۷) و (۴۸) در قضیه ۱ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}tr\left(G_kG_k^T\right) \le \delta tr(I_n) = n\delta \\ tr\left(D_kD_k^T\right) \le \delta tr(I_m) = l\delta\end{aligned} \tag{۸۵}$$

که l و n به ترتیب تعداد سطرهای G_k و D_k می‌باشند. به این ترتیب با تعریف

$$\kappa_\chi = \frac{n}{\underline{p}} + \frac{\bar{a}^2 \bar{c}^2 \bar{p}^2 m}{\underline{p}\underline{r}^2} \tag{۸۶}$$

و با (۸۴) خواهیم داشت

$$E\left\{ \chi_k^T \Pi_{k+1} \chi_k \right\} \le k_\chi \delta \tag{۸۷}$$

که همان نامساوی (۷۵) مطلوب است. ■

اکنون با توجه به نتایجی که در لم‌های فوق حاصل شد، می‌توان به ادامه اثبات قضیه ۱ پرداخت.

ادامه اثبات قضیه ۱- معادله (۵۱) و کران‌های بدست آمده در لم‌های ۳ تا ۵ را در نظر بگیرید، به این ترتیب داریم

$$E\left\{ V_{k+1}(e_{k+1}) \middle| e_k \right\} \le (1-\lambda) V_k(e_k) + \kappa_\varphi \|e_k\|^3 + \kappa_\chi \delta \tag{۸۸}$$

برای $\|e_k\| \le \varepsilon'$ با تعریف

$$\varepsilon = \min(\varepsilon', \frac{\lambda}{2\bar{p}\kappa_\varphi}) \tag{۸۹}$$

و با توجه به (۴۹) و (۵۰)، برای $\|e_k\| \le \varepsilon$ خواهیم داشت

$$\kappa_\varphi \|e_k\| \|e_k\|^2 \le \frac{\lambda}{2\bar{p}} \|e_k\|^2 \le \frac{\lambda}{2} V_k(e_k) \tag{۹۰}$$

جایگزینی (۹۰) در (۸۸) برای $\|e_k\| \le \varepsilon$ نتیجه می‌دهد.

$$E\left\{ V_{k+1}(e_{k+1}) \,|\, e_k \right\} - V_k(e_k) \le -\frac{\lambda}{2} V_k(e_k) + \kappa_\chi \delta \tag{۹۱}$$

بنابراین، با داشتن (۵۰) و (۹۱) می‌توان لم ۱ را به ازای $\|e_0\| \le \varepsilon$، $\underline{v} = 1/\bar{p}$، $\bar{v} = 1/\underline{p}$ و $\mu = \kappa_\chi \delta$ به کار برد، و استنتاج نمود که خطای تخمین e_k در معادله (۲۹) با تعبیر میانگین مربعات کراندار نمایی بوده و با احتمال واحد کراندار است. ■

نکته ۱۰: قضیه ۱ شرایط کافی برای تضمین کراندار نمایی بودن خطای تخمین را فراهم می‌کند. بعلاوه، از آنجایی که کران‌ها با استفاده از عملگرهای نُرم بدست می‌آیند، این شرایط محافظه‌کارانه نیز خواهند بود. البته، اثبات این قضیه یک روش سودمند برای تعیین کران خطای تخمین براساس نامساوی (۶) و با پارامترهای $\|e_0\| \le \varepsilon$، $\underline{v} = 1/\bar{p}$، $\bar{v} = 1/\underline{p}$ و $\mu = \kappa_\chi \delta$ ارائه می‌دهد.

نکته ۱۱: می‌توان نشان داد که، نامساوی‌های (۴۳) تا (۴۵) در فرض ۴ می‌توانند به شرایط لیپ‌شیتز استاندارد با توان واحد کاهش یابند، مادامی‌که خطای تخمین همچنان کراندار باقی می‌ماند، مشروط بر آنکه علاوه بر فرضیات قضیه ۱ داشته باشیم

$$\bar{p} + 1 \Big/ \left(1 + \underline{q} \big/ \bar{p}(\bar{a} + \overline{a}\overline{p}\overline{c}^2 / \underline{r})^2 \right) < 1 \tag{۹۲}$$

اثبات قضیه ۱ را می‌توان برای این حالت تغییر داد.

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، برای نشان دادن اهمیت شرایطی که در بخش قبلی برای پایداری فیلتر بدست آمد، فیلتر SDRE تفاضلی را به یک سیستم نمونه اعمال کرده و به کمک شبیه‌سازی عددی به بررسی رفتار خطای تخمین می‌پردازیم. برای این منظور یک سیستم غیرخطی اتفاقی و بدون ورودی، $u_k \equiv 0$، که با (۱۴) و (۱۵) داده می‌شود را به ازای

$$f(x_k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} + \tau x_{2,k} \\ (1-\tau)x_{2,k} + \tau(x_{1,k}^2 x_{2,k} + x_{2,k}^3 - x_{1,k}) \end{bmatrix} \tag{۹۳}$$

$$h(x_k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} + x_{2,k} \\ x_{1,k} x_{2,k} \end{bmatrix} \tag{۹۴}$$

در نظر بگیرید. دقت شود که $\tau = 10^{-2}$ زمان نمونه‌برداری است. از میان انتخاب‌های ممکن متفاوت، $f(x_k)$ را به شکل زیر نمایش می دهیم

$$f(x_k) = A(x_k)x_k = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 + \tau(x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 - 1) \end{bmatrix} x_k \tag{۹۵}$$

می‌توان نشان داد که، سیستم مورد نظر برای $\hat{x}_{1,k} = \hat{x}_{2,k}$ نسبت به الگوریتم EKF رؤیت‌ناپذیر بوده و در چنین وضعیتی هیچ کاری در قبال این مشکل نمی‌توان انجام داد. حال آنکه با به کاربردن فیلتر SDRE، دو نمایش SDC متمایز برای تابع مشاهده غیرخطی $h(x_k)$ خواهیم داشت:

$$C_1(x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x_{1,k} \end{bmatrix} \qquad C_2(x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_{2,k} & 0 \end{bmatrix} \tag{۹۶}$$

که این دو نمایش می‌توانند ترکیب شده و ماتریس اندازه‌گیری وابسته به حالت زیر را شکل دهند

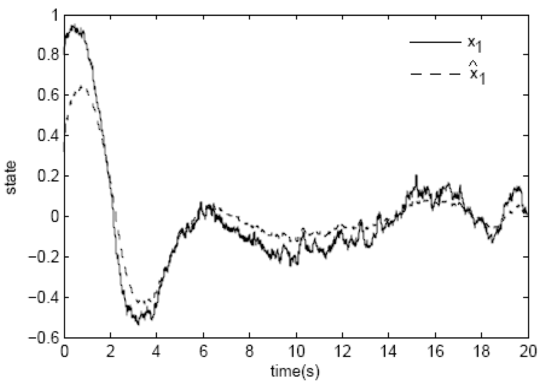
$$C(x_k, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha x_{2,k} & (1-\alpha)x_{1,k} \end{bmatrix} \tag{۹۷}$$

در این نمایش جدید، می‌توان مقدار α را به گونه‌ای انتخاب نمود که از رؤیت‌ناپذیری ممانعت به عمل آید. در واقع، ماتریس‌های $A(x_k)$ و $C(x_k, \alpha)$ مفروض در (۹۴) و (۹۶) شرط رؤیت‌پذیری یکنواخت را تضمین کرده و لذا بنا به لم ۲، پاسخ معادله ریکاتی تفاضلی (۲۲) کراندار و مثبت معین خواهد بود. گذشته از این، به سادگی می‌توان نشان داد که فرض ۴ با این نمایش SDC تحقق می‌یابد.

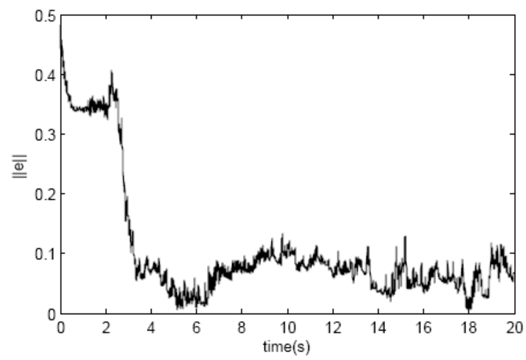
برای انجام شبیه‌سازی‌های عددی، یک وضعیت با خطای تخمین کراندار و دو وضعیت با خطای تخمین واگرا در نظر گرفته شده است. در تمامی‌حالات، فیلتر SDRE تفاضلی با استفاده از پارامترهای طراحی داده شده در جدول ۱ و ماتریس‌های وابسته به حالت (۹۴) و (۹۶) پیاده شده است. علاوه بر این، حالت اولیه واقعی به صورت $x_0=[0.8 \quad 0.4]^T$ و کوواریانس نویز فرآیند $G_k=\sqrt{10^{-3}}I_2$ فرض شده است. ماتریس باقی‌مانده D_k و نیز حالت اولیه تخمینی $\hat{x}_0$، برای هر یک از این سه وضعیت به طور مشخص انتخاب شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۱ تا ۴ به تصویر کشیده شده اند. برای خطای اولیه و نویز کوچک، کران‌های $\bar{a}=1.0001$، $\bar{c}=1.4$، $\underline{p}=0.6806$، $\bar{p}=1.0$ و $\sigma=0.9746$ از نتایج شبیه‌سازی بدست می‌آیند. این حدود برقراری نامساوی‌های (۳۹) تا (۴۲) را تصدیق می کنند.

جدول ۱: پارامترهای طراحی فیلتر SDRE تفاضلی

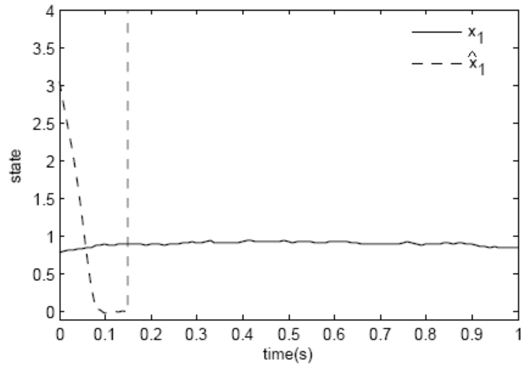
Design Parameters	Q_k	R_k	P_0	α
Value	diag(0.05,0.1)	$100I_2$	I_2	0.8



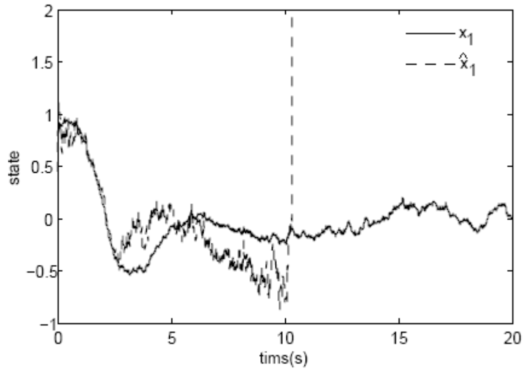
شکل ۱: مقدار واقعی و تخمینی اولین مولفه بردار حالت به ازای خطای تخمین اولیه و نویز اندازه‌گیری کوچک، $D_k=I_2$ و $\hat{x}_0=[0.3 \quad 0.3]^T$



شکل ۲: نُرم خطای تخمین به ازای خطای تخمین اولیه و نویز اندازه‌گیری کوچک



شکل ۳: مقدار واقعی و تخمینی اولین مولفه بردار حالت به ازای خطای تخمین اولیه بزرگ $D_k=I_2$ و $\hat{x}_0=[3 \quad 3]^T$



شکل ۴: مقدار واقعی و تخمینی اولین مولفه بردار حالت به ازای نویز اندازه‌گیری بزرگ $D_k=\sqrt{200}I$ و $\hat{x}_0=[0.3 \quad 0.3]^T$

به این ترتیب تمام شرایط قضیه ۱ برآورده شده و لذا انتظار خطای تخمین کراندار را خواهیم داشت همان‌گونه که اشکال ۱ و ۲ نیز تأیید می‌کنند، به ازای خطای تخمین اولیه و نویز کوچک (نامساوی‌های (۴۶) تا (۴۸)) خطای تخمین کراندار باقی می‌ماند. اما به دلیل غیرخطی‌گری شدید موجود در سیستم نمونه مفروض، در صورتی که هر کدام از خطای تخمین اولیه یا سیگنال نویز مزاحم بزرگ باشند، به عبارت دیگر نامساوی‌های (۴۶) تا (۴۸) نقض شوند، آنگاه خطای تخمین دیگر کراندار نخواهد بود و شکل‌های ۳ و ۴ واگرایی تخمین را در این حالت نشان می‌دهند.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک فیلتر SDRE تفاضلی زمان-گسسته برای حل مسائل تخمین حالت غیرخطی عمومی‌در یک محیط تصادفی در نظر گرفته شده و رفتار خطای آن تحلیل شده است. همچنین نشان داده شده است که خطای تخمین تحت قیود مشخصی با تعبیر میانگین مربعات کراندار نمایی و با احتمال واحد کراندار است. این شرایط عبارتند از آن‌که نمایش SDC یک شرط لیپ‌شیتز معین را ارضا کند، پاسخ معادله ریکاتی تفاضلی وابسته به حالت مثبت معین و کراندار باقی بماند، و علاوه بر آن خطای تخمین اولیه و همین‌طور سیگنال‌های نویز مخرب به اندازه کافی کوچک باشند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که اگر هر یک از خطای تخمین اولیه یا ترم‌های

نویز بزرگ باشند، واگرایی خطای تخمین محتمل خواهد بود. از آنجا که تاکنون تحلیل پایداری و همگرایی فیلتر SDRE فقط در محیط‌های قطعی (فاقد نویز) با ساختاری خاص صورت گرفته است این چهارچوب ارائه شده می‌تواند تأثیر قابل توجهی در توسعه فیلترهای SDRE در کاربردهای واقعی بگذارد. نکته چشمگیر آن است که در مقایسه با نتایج موجود، هیچ شرط محدود کننده قابل توجه‌ای بر روی معادلات غیرخطی سیستم و نمایش SDC آن تحمیل نشده است.

مراجع

[1] H. T. Banks, Hae-Dae Kwon, J. A. Toivanen, and H. T. Tran, “A state-dependent Riccati equation-based estimator approach for HIV feedback control,” *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 27, no. 2, pp. 93-121, Feb. 2006.

[2] A. Nemra, and N. Aouf, “Robust INS/GPS Sensor Fusion for UAV Localization Using SDRE Nonlinear Filtering,” *IEEE Sensors Journal*, vol. 10, no. 4, pp. 789 - 798, 2010.

[3] A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, 2001.

[4] C. P. Mracek, J. R. Cloutier, and C. A. D’Souza, “A new technique for nonlinear estimation,” Proc. of the 1996 IEEE Int. Conf. on Control Applications, Dearborn, MI, pp. 338-343, 1996.

[5] J. R. Cloutier, C. A. D’Souza, and C. P. Mracek, “Nonlinear regulation and H∞ control via the state-dependent Riccati equation technique; part 1, theory; part 2, examples,” In Proc. of the 1st Int. Conf. on Nonlinear problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, FL, 1996

[۶] حسین بیک زاده و حمید رضا تقی راد، طراحی رویت‌گر نمایی برای سیستم‌های غیر خطی بر اساس معادله ریکاتی وابسته به حالت SDRE، مجله کنترل، جلد ۴، شماره ۴، صفحات ۱۴-۲۳، زمستان ۱۳۹۰.

[7] C. M. Ewing, “An analysis of the state-dependent Riccati equation nonlinear estimation technique,” In Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Denver, CO, 2000.

[8] C. Jaganath, A. Ridley, and D. S. Bernstein, “A SDRE-based asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems,” Proc. of the 2005 American Control Conference, Portland, OR, pp. 3630-3635, 2005

[9] H. T. Banks, B. M. Lewis, and H. T. Tran, “Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equation approach”, *Computational Optimization and Applications*, vol. 37, no. 2, pp. 177-218, March 2007.

[10] Tayfun Çimen, “Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method,” *Annual Reviews in Control*, Vol. 34, Issue 1, pp. 32-51, April 2010.

[11] E. Wong, *Stochastic processes in information and dynamical systems*, McGraw-Hill, New York, 1971.

[12] T. J Tarn and Y. Rasis, “Observers for nonlinear stochastic systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-21, pp. 441-448, 1976

[13] K. Reif, S. Gunther, E. Yaz and R. Unbehauen, “Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pp. 714-728, 1999.

[14] J. Xu, G.M. Dimirovski, Y. Jinx and C. Shen, “UKF design and stability for nonlinear stochastic systems with correlated noises,” In Proc. of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, 2007.

[15] T. Morozan, “Stability of stochastic discrete systems,” *Journal of Mathematics Analysis and Application*, vol. 23, pp. 1-9, 1968

[16] I. C. Baik, K. H. Kim and M. J. Youn, “Robust nonlinear speed control of PM synchronous motor using boundary layer integral sliding mode control technique,” *IEEE Transactions on Control System Technology*, vol. 8, no. 1, Jan. 2000.