

## آرایش بندی دوبخشی زمان متناهی سیستم‌های چندعاملی غیرخطی ناهمگن

محمد رضا مهرابی کوشکی<sup>۱</sup>، جواد عسکری<sup>۲</sup>، مرضیه کمالی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> فارغ التحصیل کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران، m\_mehrabi@alumni.iut.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان، صندوق پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱، اصفهان، ایران، j-askari@iut.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان، صندوق پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱، اصفهان، ایران، m.kamali@iut.ac.ir

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۱/۲۵

ویرایش: ۱۴۰۲/۱۲/۰۵

دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۱۵

**چکیده:** به دلیل کاربرد گسترده‌ی سیستم‌های چندعاملی، در سال‌های اخیر این سیستم‌ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته‌اند. از جمله مسائلی که در زمینه‌ی سیستم‌های چندعاملی مطرح شده، آرایش بندی دوبخشی در این سیستم‌ها است. از این رو در این تحقیق آرایش بندی توزیع شده‌ی دوبخشی سیستم‌های چندعاملی غیرخطی مرتبه دو، با رویکرد رهبر-پیرو، مورد بررسی قرار گرفته است. در رویکرد ارایه شده، عامل‌ها غیرهمگن در نظر گرفته شده‌اند و گراف ارتباطی بین عامل‌ها نیز جهت دار است. با توجه به عدم ارتباط همه‌ی عامل‌ها با رهبر گروه، به منظور بازسازی اطلاعات رهبر، در هر عامل از یک مشاهده گر زمان متناهی، جهت تخمین دینامیک رهبر استفاده شده است. همچنین با توجه به اینکه استفاده از رویکرد زمان متناهی در بسیاری از کاربردهای عملی منجر به افزایش عملکرد و کارایی سیستم می‌شود، از کنترل کننده مود لغزشی ترمینال استفاده شده که منجر به زمان متناهی بودن آرایش بندی می‌گردد. در انتها، نتایج تئوری با استفاده از شبیه سازی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته تا صحت روابط به دست آمده نیز بررسی شود.

**کلمات کلیدی:** سیستم‌های چندعاملی، آرایش بندی دوبخشی، پایداری زمان متناهی، کنترل مود لغزشی ترمینال.

### Finite-Time Bipartite Formation of Nonlinear Heterogeneous Multi-Agent Systems

Mohammad Reza Mehrabi Koushki, Javad Askari, Marzieh Kamali

**Abstract:** Due to their extended use, nowadays, Multi-Agent Systems have attracted the attention of many researchers. Bipartite formation is one of the interesting fields of Multi-Agent Systems that has been raised within a decade. In this research, the distributed bipartite formation of Multi-Agent Systems was investigated by a leader-follower approach. Heterogeneous agents in this approach have second-order nonlinear dynamics, and the communication graph between the agents is also a structurally balanced signed directed graph. Because of the distributed approach of the controller and the lack of existing communication between the leader and all of the followers, a finite-time observer is used to estimate the leader's dynamic in finite time. Also, because a finite-time approach increases performance and efficiency in many practical applications, a terminal sliding mode controller provides finite-time formation. Finally, the validity of the theoretical results is illustrated by simulation examples.

**Keywords:** Multi-Agent Systems, Bipartite formation, Finite-time stability, Terminal sliding mode control.

## ۱- مقدمه

سیستم‌های چندعاملی<sup>۱</sup> در محدوده‌ی وسیعی از زمینه‌های مهندسی همچون شبکه‌های هوشمند الکتریکی، شبکه‌های کامپیوتری، محیط شهری، سیستم‌های بیولوژیکی و هواپیماهای بدون سرنشین، مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند [۱-۳]. یک سیستم چندعاملی متشکل از چندین عامل هوشمند است و قادر به انجام اهدافی که برای یک عامل و یا حتی یک سیستم یکپارچه امری دشوار و یا غیرممکن است، می‌باشد.

در بین اهداف مرتبط با سیستم‌های چندعاملی، آرایش‌بندی، که در آن گروهی از عامل‌ها برای دستیابی به شکل هندسی مورد نظر اقدام و با یکدیگر همکاری می‌کنند، به دلیل کاربرد گسترده در مواردی کاربردی همچون رباتیک، هوافضا، شبکه‌های سنسوری و حمل و نقل هوشمند، از اهمیت خاصی برخوردار است [۳-۵]. به رغم تلاش‌های فراوان محققین در زمینه‌ی سیستم‌های چند عاملی، چالش‌های فراوانی در کنترل آرایش‌بندی این سیستم‌ها وجود دارد. از جمله‌ی این چالش‌ها می‌توان به زمان لازم برای رسیدن به هدف کنترلی، که در برخی از سیستم‌های کاربردی بایستی در زمان متناهی<sup>۲</sup> انجام شود، اشاره نمود. همچنین همگرایی عامل‌ها به خروجی مطلوب در زمان متناهی، منجر به افزایش هماهنگی در بین عامل‌ها شده و حساسیت سیستم را نیز در برابر اغتشاش کاهش می‌دهد [۶، ۷].

آرایش‌بندی دوبخشی، نوع خاصی از آرایش‌بندی است که در آن عامل‌ها با حفظ ارتباط و پیوستگی، به دو دسته تقسیم شده و هر دسته در نقاطی قرینه نسبت به مرکز مختصات، آرایش از پیش تعیین شده را به خود می‌گیرند. این نوع آرایش‌بندی در مواردی همچون سیستم رای‌گیری دو حزبی، سیستم‌های بیولوژیکی، گشت‌زنی و تقسیم پهپادها در دو گروه و همچنین عدم برخورد با مانع در حرکت عامل‌ها مطرح می‌شود [۸-۱۱].

در بیشتر مراجع جهت تحلیل آرایش‌بندی دوبخشی از نمایش گراف علامت‌دار برای بیان گراف ارتباطی بین عامل‌ها استفاده می‌شود که شرط لازم برای حصول آرایش‌بندی دوبخشی، متعادل بودن ساختار گراف علامت‌دار است [۱۲، ۱۳]. با این شرط آرایش‌بندی دوبخشی زمان‌متناهی برای عامل‌های خطی در [۹] بیان شده است. آرایش‌بندی دوبخشی برای دسته‌ای از عامل‌های چند ورودی چند خروجی غیرخطی و با دینامیک نامعین نیز بررسی شده است [۱۲]. همچنین در [۱۳]، آرایش‌بندی متغیر با زمان دوبخشی برای عامل‌های ناهمگن با دینامیک نامعین غیرخطی بررسی شده است. در [۱۳] از یک کنترل‌کننده تطبیقی تناسبی انتگرال‌گیر استفاده شده تا مقاوم بودن سیستم نسبت به اغتشاش خارجی افزایش یابد. [۱۴] با تخمین دینامیک عامل‌ها، آرایش‌بندی دوبخشی سیستم‌های خطی را برای شرایط در دسترس نبودن حالت‌های سیستم توسعه داده است. در کنترل‌کننده معرفی شده [۱۴]، به علت شیوه تخمین زدن دینامیک رهبر،

از حالت توزیع‌شده خارج می‌شود. در [۱۵] نیز همگرایی مجانبی آرایش‌بندی دوبخشی برای عامل‌های غیرخطی توأم با اغتشاش انجام شده است.

در روش پیشنهاد شده این مطالعه، برخلاف [۸، ۹، ۱۴] که آرایش‌بندی دوبخشی برای سیستم‌های خطی انجام شده است، عامل‌های ناهمگن با دینامیک غیرخطی دارای نامعینی پارامتری در نظر گرفته شده است. همچنین در [۱۲، ۱۳، ۱۵] همگرایی آرایش‌بندی در زمان نامتناهی صورت می‌گیرد که ممکن است در برخی از سیستم‌های عملی کاربردی نباشد. بنابراین، از دستاوردها و یا نوآوری این پژوهش می‌توان به در نظر گرفتن همزمان عامل‌های ناهمگن با دینامیک غیرخطی، آرایش‌بندی دوبخشی، همگرایی زمان‌متناهی سیستم چندعاملی و در نتیجه افزایش هماهنگی در بین عامل‌ها و همچنین جبران اثر اغتشاش در ورودی و نامعینی پارامترهای مدل سیستم اشاره کرد.

تقسیم بندی محتوی مابقی مقاله به این صورت است: در بخش دوم مقدمه‌ای از نظریه‌ی گراف، لم‌های مورد استفاده، فرضیات و صورت مسئله‌ی آرایش‌بندی دوبخشی گفته شده است. نتایج اصلی در بخش سوم بیان شده‌اند که شامل معرفی کنترل‌کننده، مشاهده‌گر و اثبات زمان‌متناهی بودن آرایش دوبخشی می‌شود. در بخش چهارم با استفاده از شبیه‌سازی، صحت نتایج تئوری بررسی شده و در انتها هم به جمع‌بندی و ارائه پیشنهادات برای ادامه کار پرداخته شده است.

## ۲- مفاهیم اولیه و مسئله تحت بررسی

### ۲-۱- نظریه گراف

گراف جهت‌دار و علامت‌دار  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \xi, A)$ ، از سه‌تایی مجموعه رئوس  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$ ، مجموعه یال‌های  $\xi$  و ماتریس وزن‌های گراف  $A$  تشکیل شده است. در گراف  $\mathcal{G}$ ،  $\forall i, j \in \mathcal{V}$  یعنی یالی از راس  $j$  خارج و به راس  $i$  وارد شده است و بیانگر ارسال اطلاعات از راس  $j$  به راس  $i$  می‌باشد. در گراف مذکور، هر یک از یال‌ها دارای وزن  $a_{ij}$  می‌باشند که برای بیان ارتباط همکاری بین رئوس گراف، یال با وزن مثبت و برای بیان ارتباط رقابتی بین آن‌ها، یال با وزن منفی بین عامل‌ها متصل است. همچنین  $a_{ii} = 0$  می‌باشد. ماتریس لاپلاسیان گراف علامت‌دار  $\mathcal{G}$ ، با  $L = [l_{ij}]$  نمایش داده می‌شود که در آن

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| & \forall i = j \\ -a_{ij} & \forall i \neq j \end{cases} \quad (1)$$

و  $N$  تعداد رئوس گراف می‌باشد.

<sup>۲</sup> Finite time

<sup>۱</sup> Multi-Agent Systems

$$T(x_0) \leq \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{c} V(x_0)^{1-\alpha}\right)}{k(1-\alpha)}, x_0 \in Y, k \neq 0 \quad (8)$$

پیروی می‌کند. به علاوه اگر  $D = \mathbb{R}^n$  و  $V$  بیکران شعاعی باشد آنگاه مبدا پایدار زمان‌متناهی سراسری خواهد بود [۱۸, ۶].

۳-۲- مسئله تحت بررسی

سیستم چندعاملی با  $N + 1$  عامل، شامل یک رهبر و  $N$  پیرو را در نظر بگیرید. رهبر گروه را عامل صفر در نظر می‌گیریم که دینامیک آن به صورت

$$\dot{x}_0 = \begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{v}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ f_0(t) + g_0(x_0)u_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

و دینامیک بقیه عامل‌ها به صورت

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_i \\ \dot{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ f_i(x_i) + f_{d,i}(x_i, t) + g_i(x_i)u_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, N \quad (10)$$

است.  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  بردار حالت رهبر گروه که متشکل از موقعیت  $p_0$  و سرعت  $v_0$ ،  $u_0$  سیگنال ورودی دینامیک رهبر،  $x_i \in \mathbb{R}^2$  نیز بردار حالت عامل‌های پیرو متشکل از موقعیت  $p_i$  و سرعت  $v_i$  و  $u_i$  سیگنال ورودی عامل‌های پیرو می‌باشد. در (۹)،  $f_0(t)$  نامعلوم برای عامل‌ها و مشتق آن در رابطه  $|f_0(t)| \leq f_{max}$  با فرض معلوم بودن  $f_{max}$  صدق می‌کند. همچنین  $g_0(x_0)u_0$  نیز کران‌دار به صورت  $|g_0(x_0)u_0| \leq g_{max}u_{0,max}$  و کران آن معلوم می‌باشد. در (۱۰)،  $f_i(x_i)$  و  $g_i(x_i)$  توابع پیوسته و غیرخطی معلوم در حالت نامی و  $f_{d,i}(x_i, t)$  سیگنال اغتشاش (و یا نامعینی دینامیک) عامل‌ها می‌باشد که کران‌دار به صورت

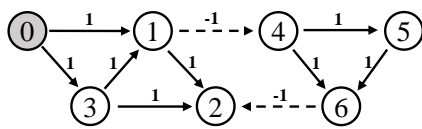
$$|f_{d,i}(x_i, t)| \leq f_{d,max} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (11)$$

با کران مشخص  $f_{d,max}$  می‌باشد.

**تعریف ۲-** برای سیستم چند عاملی با معادلات (۹) و (۱۰)، گوئیم آرایش‌بندی دویخشی به دست آمده است اگر

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i - h_i - d_i x_0 = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (12)$$

که در آن  $h_i = \begin{bmatrix} h_i \\ 0 \end{bmatrix}$  فاصله و سرعت از پیش تعیین شده‌ی آرایش‌بندی و  $d_i$  عناصر قطری ماتریس  $D$  در (۳) است [۸].



شکل ۱- گراف جهت‌دار و علامت‌دار با ساختار متعادل

**تعریف ۱-** گراف  $G$  دارای ساختاری متعادل است هرگاه بتوان رئوس گراف را به دو دسته  $\mathcal{V}_1$  و  $\mathcal{V}_2$  تقسیم کرد که  $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$  و  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$  به نحوی که

$$\begin{cases} a_{ij} \geq 0 & \forall v_i, v_j \in \mathcal{V}_q, q \in \{1,2\} \\ a_{ij} \leq 0 & \forall v_i \in \mathcal{V}_q, v_j \in \mathcal{V}_r, q \neq r, q, r \in \{1,2\} \end{cases} \quad (2)$$

باشد [۱۶].

با تعریف ماتریس قطری  $D$  به صورت

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) \quad (3)$$

که در آن  $d_i = 1$  اگر  $v_i \in \mathcal{V}_1$  و  $d_i = -1$  اگر  $v_i \in \mathcal{V}_2$  می‌توان نشان داد که اگر گراف  $G$  دارای ساختاری متعادل باشد، آنگاه در ماتریس  $DAD$  تمامی عناصر نامنفی و در ماتریس  $DLD$  عناصر قطری نامنفی و عناصر غیرقطری نامثبت هستند [۱۶].

**تذکره ۱:** در این پژوهش، برای اثبات همگرایی زمان‌متناهی آرایش‌بندی، عامل‌های پیرو را با توجه به فاصله‌ی گرافی آن‌ها از رهبر گروه در گراف ارتباطی، به سطوح ۱ تا  $m$  تقسیم می‌کنیم. برای مثال در شکل ۱ رهبر گروه راس شماره صفر، عامل‌های ۱ و ۳ سطح ۱، عامل‌های ۲ و ۴ سطح ۲ و عامل‌های ۵ و ۶ سطح ۳ هستند.

۲-۲- پایدار ی زمان‌متناهی

سیستم دینامیکی

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (4)$$

را در نظر بگیرید که در آن  $f(0) = 0$ . در پایدار ی زمان‌متناهی، زمان‌نشست  $T(x_0)$  برای سیستم تعریف می‌شود که به شرایط اولیه سیستم وابسته است. پایدار ی زمان‌متناهی یعنی حالت‌های سیستم در بازه‌ی زمانی  $[t_0, T(x_0))$  پایدار باشند و در زمان متناهی  $T(x_0)$  به نقطه تعادل سیستم میل کنند [۱۷]. به عبارت دیگر؛

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0 \quad (5)$$

**لم ۱-** گیریم تابع پیوسته و مثبت معین  $V: D \rightarrow \mathbb{R}$  وجود داشته باشد که در شرط

$$\dot{V}(x) + c(V(x))^\alpha + kV(x) \leq 0, x \in Y \setminus \{0\} \quad (6)$$

به ازای اعداد  $c > 0$  و  $k \geq 0$  و  $\alpha \in (0,1)$  و همچنین یک همسایگی باز  $Y \in D$  حول مبدا، صدق کند. در این صورت نقطه تعادل سیستم پایدار زمان‌متناهی است و زمان نشست سیستم از روابط

$$T(x_0) \leq \frac{1}{c(1-\alpha)} V(x_0)^{1-\alpha}, x_0 \in Y, k = 0 \quad (7)$$

**فرض ۲-** رهبر با عامل‌ها فقط به صورت همکاری ارتباط دارد و نه رقابتی. به بیان دیگر  $a_{i0} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$

**فرض ۳-** فواصل از پیش تعیین شده برای آرایش‌بندی، فواصل ثابتی هستند و با زمان تغییر نمی‌کنند. به عبارت دیگر  $\dot{h}_i = 0$

### ۳- طراحی کنترل‌کننده و مشاهده‌گر

با توجه به تعریف ۲، خطای آرایش‌بندی دوبخشی عامل‌ها را به صورت

$$r_i = x_i - h_i - d_i x_0 \quad (۱۷)$$

تعریف می‌کنیم. به دلیل اینکه همه‌ی عامل‌ها با رهبر گروه در ارتباط نیستند، مسئله نیازمند رابطه‌ای می‌باشد که هم بیانگر خطای آرایش‌بندی باشد و هم رویکرد توزیع‌شده در مسئله حفظ شود. بنابراین با استفاده از (۱۷) خطای توزیع‌شده‌ی آرایش‌بندی دوبخشی را می‌توان به صورت

$$\varepsilon_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,i} \\ \varepsilon_{2,i} \end{bmatrix} = d_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \left( (r_i) - \text{sgn}(a_{ij})(r_j) \right) + d_i a_{i0}(r_i) \quad (۱۸)$$

تعریف نمود [۸]. با توجه به متعادل بودن ساختار گراف و در صورت غیر صفر بودن  $a_{ij}$

$$d_j = \text{sgn}(a_{ij}) d_i. \quad (۱۹)$$

پس شکل برداری (۱۸) برای تمام عامل‌ها را می‌توان به صورت

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} = (D\mathcal{L}_{22} \otimes I_2) r \quad (۲۰)$$

نوشت که در آن  $r = [r_1 \quad \dots \quad r_N]^T$  است. به دلیل وجود درخت فراگیر در گراف ارتباطی،  $\mathcal{L}_{22}$  غیرتکین بوده [۸] و در صورت میل  $\varepsilon$  به صفر،  $r$  نیز به صفر میل کرده و خطای آرایش‌بندی دوبخشی صفر می‌شود.

با توجه به تحلیل انجام شده، در ادامه به معرفی کنترل‌کننده و مشاهده‌گر  $f_0$  می‌پردازیم. با استفاده از سطح لغزشی

$$S_i = \varepsilon_{1,i} + \frac{1}{\beta} \varepsilon_{2,i}^{p/q} \quad (۲۱)$$

که در آن  $\beta > 0$  و  $p$  و  $q$  اعداد فرد و مثبتی با شرط  $1 < p/q < 1.5$  هستند؛ نشان خواهیم داد که با فرض صفر بودن  $f_{d,i}(x_i, t)$  کنترل‌کننده مود لغزشی برای حصول آرایش‌بندی دوبخشی به صورت

در این پژوهش می‌خواهیم عامل‌های ۱ تا  $N$  را به نحوی کنترل کنیم که در زمان‌متناهی آرایش‌بندی دوبخشی را به خود بگیرند. در شکل ۲ موقعیت اولیه و پس از آرایش‌بندی دوبخشی دسته‌ای از عامل‌ها نمایش داده شده که در آن سه عامل که رابطه آن‌ها با رهبر به صورت همکاری است، رهبر گروه را و مابقی عامل‌ها قرینه رهبر گروه را نسبت به مبدا مختصات، با آرایشی از پیش تعیین شده دنبال می‌کنند.

**فرض ۱-** گراف مورد استفاده یک گراف جهت‌دار و علامت‌دار با ساختاری متعادل است و همچنین شامل یک درخت فراگیر ریشه‌دار نیز هست که رهبر گروه، ریشه درخت می‌باشد.

به دلیل ساختار گراف ارتباطی، ماتریس لاپلاسیان گراف ارتباطی به صورت

$$L = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_N^T \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

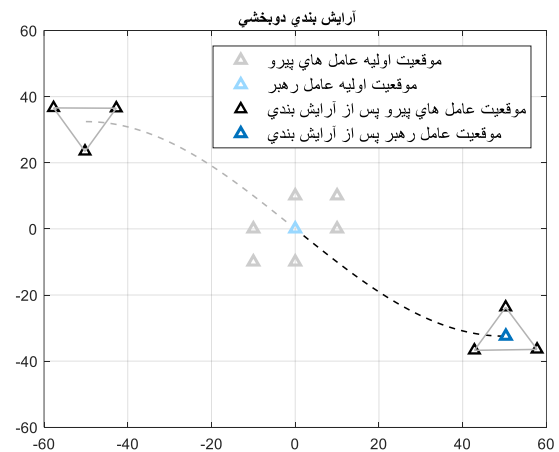
نوشته می‌شود که به دلیل عدم وجود ارتباط از عامل‌های پیرو به رهبر، سطر اول ماتریس لاپلاسیان صفر است. همچنین زیر ماتریس  $\mathcal{L}_{22} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  بیانگر ارتباط توام عامل‌های پیرو با یکدیگر و بردار  $\mathcal{L}_{21} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  بیانگر ارتباط رهبر گروه با هر یک از عامل‌های پیرو می‌باشد. با توجه به متعادل بودن ساختار گراف ارتباطی، ماتریس قطری و مثبت معین  $W$  یافت می‌شود آن چنان که [۸]

$$w\hat{L} + \hat{L}^T w \geq 0, \hat{L} = D\mathcal{L}_{22}D. \quad (۱۴)$$

**لم ۲-** بردار  $x \in \mathbb{R}^n$  را در نظر بگیرید. نامساوی‌های نرمی زیر برای آن صادق هستند [۱۹]

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \quad (۱۵)$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty. \quad (۱۶)$$



شکل ۲- آرایش‌بندی دوبخشی سیستم چندعاملی

$$\tilde{f}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{0,1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{0,N} \end{bmatrix} = \hat{L} \begin{bmatrix} f_0(t) - \hat{f}_{0,1} \\ \vdots \\ f_0(t) - \hat{f}_{0,N} \end{bmatrix} \quad (30)$$

تعریف می شود. با مشتق گیری از  $V_1$  و جایگذاری (۲۹)، پس از ساده سازی خواهیم داشت

$$\dot{V}_1 \leq -a_4 \lambda_1 \|\tilde{f}_0\|^2. \quad (31)$$

بنابر این مطابق با قضیه ۴-۱۰ در [۲۰]،  $\tilde{f}_0$  پایدار نمایی سراسری است. به عبارت دیگر؛ با استفاده از لم ۲

$$\|\tilde{f}_0(t)\|_\infty \leq \|\tilde{f}_0(t_0)\| \leq \left(\frac{w_{max}}{w_{min}}\right)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{f}_0(t_0)\| e^{-\left(\frac{\lambda_1 a_4}{2w_{max}}\right)(t-t_0)}. \quad (32)$$

اکنون با استفاده از تابع لیاپانوف  $\tilde{f}_{0,i} = V_{1,i}$  و با توجه به

$$2a_{i0}\tilde{f}_{0,i}\dot{\tilde{f}}_0(t) - 2\dot{f}_{max}\tilde{f}_{0,i} \left( a_{i0} \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,i}) + \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \left( \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,i}) - \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,j}) \right) \right) \leq 0 \quad (33)$$

خواهیم داشت

$$\dot{V}_{1,i} \leq -2a_{3,2}\tilde{f}_{0,i} \left( a_{i0} \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,i}) + \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \left( \operatorname{sign}(\tilde{f}_{0,i}) - \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,j}) \right) \right) - 2a_4\tilde{f}_{0,i} \left( a_{i0} \tilde{f}_{0,i} + \sum_{j=1}^N |a_{ij}| (\tilde{f}_{0,i} - \tilde{f}_{0,j}) \right). \quad (34)$$

برای تکمیل اثبات، ادامه روند اثبات پایداری را به سه مرحله تقسیم می کنیم.

مرحله ی اول: پایداری زمان متناهی عامل های سطح ۱. به دلیل

$$-2a_{3,2}\tilde{f}_{0,i} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \left( \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,i}) - \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,j}) \right) \leq 0 \quad (35)$$

و با توجه به (۳۲)، با ساده سازی (۳۴) خواهیم داشت

$$\dot{V}_{1,i} \leq -2a_{3,2}a_{i0}V_{2,i}^{0.5} - 2a_4 \left( a_{i0} + \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right) V_{2,i} + \left( 2a_4 \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right) \|\tilde{f}_0(t)\|_\infty V_{2,i}^{0.5} \quad (36)$$

لذا به ازای زمان های

$$t > \frac{\lambda_1 a_4}{2w_{max}} \ln \left( \frac{(2a_4 \sum_{j=1}^N |a_{ij}|) \left(\frac{w_{max}}{w_{min}}\right)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{f}_0(t_0)\|}{2a_{3,2}a_{i0}} \right) + t_0 \quad (37)$$

شرایط لم ۱ برآورده شده و در نتیجه برای عامل های سطح ۱

$$u_i = \frac{1}{g_i(x_i)} \left( -f_i(x_i) + d_i \left( -a_1 \operatorname{sgn}(S_i) - a_2 \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} S_i + \hat{f}_{0,i} \right) \right), \quad i = 1, \dots, N \quad (22)$$

خواهد بود که در آن

$$a_1 = g_{max} u_{0,max} + a_{1,2}, \quad a_2 = \frac{1}{\lambda_1} \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} + a_{2,2} \quad (23)$$

و  $\lambda_1$  کوچکترین مقدار ویژه ی ماتریس  $\hat{L}^T W + W \hat{L}$  می باشد.  $a_{1,2}$  و  $a_{2,2}$  نیز مقادیر مثبتی هستند که باید به نحوی انتخاب شوند تا نامساوی های

$$a_{1,2} > \max \left( 0.5 \frac{q}{p} \frac{\beta}{a_{i0,min}} a_6^{2-\frac{p}{q}} a_6^{2-\frac{p}{q}} + 0.5 \frac{1}{a_{i0,min}} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_7, \frac{1}{a_{i0,min}} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_7 \right) \quad (24)$$

$$a_1 > \max \left( \frac{q}{p} \frac{\beta}{a_{ij,min}} a_6^{2-\frac{p}{q}} + \frac{1}{a_{ij,min}} a_2 a_{ij,max}, \frac{1}{a_{ij,min}} a_2 a_{ij,max} a_7 \sqrt{N} \right) \quad (25)$$

برقرار باشد. در (۲۴) و (۲۵)،  $a_{ij,min}$ ،  $a_{ij,max}$ ،  $a_{i0,min}$ ،  $a_6$  و  $a_7$  کوچکترین اندازه وزن یال های متصل به رهبر گروه، بزرگترین اندازه و کوچکترین اندازه وزن یال ها در گراف ارتباطی هستند. همچنین

$$a_6 = \left( N \frac{4-2p}{p+q} + \frac{4-2p}{4q-2p} \frac{4w_{max}^2}{\lambda_1} \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} a_{2,2} w_{min} \right)^{\frac{q}{3p-3q}} \quad (26)$$

$$a_7 = \frac{2w_{max} a_6^{2-\frac{p}{q}} \sqrt{N}}{\lambda_1 \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} a_{2,2}}. \quad (27)$$

مشاهده گر مورد استفاده برای تخمین دینامیک رهبر گروه  $f_0(t)$  توسط عامل  $i$ -ام به صورت

$$\dot{\hat{f}}_{0,i} = a_3 \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,i}) + a_4 \tilde{f}_{0,i} \quad (28)$$

$$a_3 = \dot{f}_{max} + a_{3,2}, \quad a_4 = \frac{1}{\lambda_1} w_{max}^2 + a_{4,2} \quad (29)$$

می باشد که در آن  $a_{3,2}$ ،  $a_{4,2} > 0$ . در ادامه ثابت می شود که همگرایی مشاهده گر زمان متناهی است.

**قضیه ۱-** مشاهده گر (۲۸) در زمان متناهی به  $f_0(t)$  در (۹) میل می کند.

**اثبات-** تابع لیاپانوف  $V_1 = \tilde{f}_0^T W \tilde{f}_0$  را در نظر بگیرید که  $W$  به گونه ای انتخاب می شود که (۱۴) برقرار باشد و  $\tilde{f}_0$  نیز بردار خطای توزیع شده ی مشاهده گر می باشد و به صورت

$$\bar{\mathbf{E}}_1 = [\mathbf{E}_{1,1}, \dots, \mathbf{E}_{1,N}]^T, \bar{\mathbf{E}}_2 = [\mathbf{E}_{2,1}, \dots, \mathbf{E}_{2,N}]^T \quad (44)$$

تعریف می شود. با مشتق گیری از (۴۲) و جایگذاری مقادیر کنترل کننده و مشاهده گر و همچنین یا استفاده از نامساوی یانگ [۲۰] و با توجه به

$$\bar{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{S} - \frac{1}{\beta} \bar{\mathbf{E}}_2^q \quad (45)$$

$$\dot{V}_2 \leq - \left\| \sqrt{\lambda_1 \frac{p-1}{q} a_{2,2}} \text{diag} \left( \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) \mathbf{S} - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1 \frac{p-1}{q} a_{2,2}}} w \bar{\mathbf{E}}_2^{2-\frac{p}{q}} \right\|^2 + \frac{4w_{max}^2}{\lambda_1 \frac{p-1}{q} a_{2,2}} \|\bar{\mathbf{E}}_2\|_{4-\frac{2p}{q}} - \frac{w_{min}}{\beta} \|\bar{\mathbf{E}}_2\|_{\frac{p+1}{q}}$$

لذا اگر بخواهد

$$\|\bar{\mathbf{E}}_2\|_{\frac{p+1}{q}} > a_5^{\frac{q}{3p-3q}}, \quad (46)$$

$$a_5 = N^{\frac{4-2p}{p+q} + \frac{4-2p}{4q-2p}} \frac{4w_{max}^2}{\lambda_1 \frac{p-1}{q} a_{2,2}} \frac{\beta}{w_{min}}$$

برقرار باشد، با توجه به نامساوی (۴۵) تابع  $V_2$  کاهش می یابد و لذا  $\bar{\mathbf{E}}_2$  کراندار و محدود به کران

$$\|\bar{\mathbf{E}}_2\|_{\infty} = \|\bar{\mathbf{E}}_2\|_{\frac{p+1}{q}} \leq a_5^{\frac{q}{3p-3q}} \quad (47)$$

می باشد. ■

**لم ۴-** سیستم چند عاملی (۹) و (۱۰) را با فرض های ۱ تا ۳ و فرض صفر بودن  $f_{d,i}(\mathbf{x}_i, t)$  در نظر بگیرید. با اعمال کنترل کننده (۲۲) و مشاهده گر  $f_0$  (۲۸) به سیستم، سیگنال  $\text{diag} \left( \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p-1}{q}} \right) \mathbf{S}$  کراندار است.

**اثبات-** با مشتق گیری از تابع

$$V_3(\mathbf{S}, \bar{\mathbf{f}}_0) = \mathbf{S}^T w \mathbf{S} + \bar{\mathbf{f}}_0^T w \bar{\mathbf{f}}_0 \quad (48)$$

و ساده سازی خواهیم داشت

$$\dot{V}_3 \leq 2\mathbf{S}^T w \bar{\mathbf{E}}_2 - \lambda_1 \frac{p-1}{q} a_{2,2} \left\| \text{diag} \left( \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) \mathbf{S} \right\|^2 \quad (49)$$

پس از ورود  $\bar{\mathbf{E}}_2$  به کران ذکر شده در لم ۳ و استفاده از لم ۲ داریم

$$\dot{V}_3 \leq 2w_{max} a_6^{2-\frac{p}{q}} \sqrt{N} \left\| \text{diag} \left( \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) \mathbf{S} \right\| - \lambda_1 \frac{p-1}{q} a_{2,2} \left\| \text{diag} \left( \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) \mathbf{S} \right\|^2 \quad (50)$$

که در آن  $a_6 = a_5^{\frac{q}{3p-3q}}$  با توجه به (۵۰)، اگر بخواهد رابطه

$$\exists 0 \leq T_1 < \infty: \lim_{t \rightarrow T_1} \bar{f}_{0,i} = 0 \quad (38)$$

مرحله دوم: پایداری زمان متناهی عامل های سطح ۲. در این حالت (۳۴) برای عامل های سطح ۲ و در زمان های بزرگتر از  $T_1$  به صورت

$$\dot{V}_{1,i} \leq -2a_{3,2} \left( \sum_{v_j \in level1} |a_{ij}| \right) V_{2,i}^{0.5} - 2a_4 \left( \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right) V_{2,i} + \left( 2a_4 \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right) \|\bar{\mathbf{f}}_0(t)\|_{\infty} V_{2,i}^{0.5} \quad (39)$$

ساده سازی می شود که در (۳۹) منظور از  $v_j \in level1$ ، عامل های سطح ۱ است. در این مرحله نیز مانند مرحله قبل، عامل های سطح ۲ در شرایط پایداری زمان متناهی لم ۱ صدق کرده و لذا

$$\exists 0 \leq T_2 < \infty: \lim_{t \rightarrow T_1+T_2} \bar{f}_{0,i,level2} = 0 \quad (40)$$

مرحله سوم: پایداری زمان متناهی عامل های سطح ۳ و بالاتر. در این مرحله نیز مانند مراحل قبل، پس از پایداری عامل های سطح ۱، شرایط برای پایداری زمان متناهی عامل های سطح  $(1+i)$  فراهم می شود. به این ترتیب، برای همه عامل های گراف با  $m$  سطح، مشاهده گر  $f_0$  پایدار زمان متناهی سراسری با زمان نشست

$$T_{m_0} = T_1 + T_2 + \dots + T_m \quad (41)$$

است. ■

در ادامه کران هایی برای حالت های سیستم و خطای آرایش بندی عامل ها به دست می آوریم که در اثبات پایداری زمان متناهی خطای آرایش بندی دویخشی مورد استفاده قرار می گیرند.

**لم ۳-** سیستم چند عاملی (۹) و (۱۰) را با فرض های ۱ تا ۳ و فرض صفر بودن  $f_{d,i}(\mathbf{x}_i, t)$  در نظر بگیرید. با اعمال کنترل کننده (۲۲) و مشاهده گر  $f_0$  (۲۸) به سیستم، سیگنال  $\bar{\mathbf{E}}_2$  کراندار است.

**اثبات-** تابع لیاپانوف

$$V_2(\mathbf{S}, \bar{\mathbf{f}}_0, \bar{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{S}^T w \mathbf{S} + \bar{\mathbf{f}}_0^T w \bar{\mathbf{f}}_0 + \bar{\mathbf{E}}_1^T w \bar{\mathbf{E}}_1 \quad (42)$$

را در نظر بگیرید که  $\mathbf{S}$  بردار سطوح لغزش عامل ها به صورت

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{E}}_1 + \frac{1}{\beta} \bar{\mathbf{E}}_2^{p/q} \quad (43)$$

و  $\bar{\mathbf{E}}_1$  و  $\bar{\mathbf{E}}_2$  به ترتیب خطای توزیع شده آرایش بندی موقعیت و سرعت عامل ها است و به صورت

$$\dot{V}_{2,i} \leq \left( 2a_6^{2-\frac{p}{q}} + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_7 - 4\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_{i0} a_{1,2} \right) \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} |S_i| \quad (55)$$

بازنویسی می کنیم. اکنون اگر  $a_{1,2}$  را آنچنان انتخاب کنیم که شرط (۲۴) برقرار شود، خواهیم داشت

$$\dot{V}_{2,i_{level1}} \leq -\rho_1(\varepsilon_{2,i})|S_i| = -\rho_1(\varepsilon_{2,i})V_{2,i}^{0.5} \quad (56)$$

که در (۵۶)

$$\rho_1(\varepsilon_{2,i}) = \left( 2a_6^{2-\frac{p}{q}} + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_7 - 4\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_{i0} a_{1,2} \right) \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \geq 0 \quad (57)$$

می باشد. با به کار گیری رویه ای مانند [۲۱] و با برقراری شرط (۲۴) پایداری زمان متاهی در (۵۶) برقرار می شود و در نتیجه عامل های سطح ۱ در زمان محدود  $0 \leq T_{m_1} < \infty$  به سطح لغزش میل می کنند.

مرحله ی دوم: پایداری زمان متاهی عامل های سطح ۲. به دلیل عدم ارتباط عامل های سطح ۲ با رهبر گروه، با توجه به اینکه  $a_{i0} = 0$  در نتیجه (۵۴) را می توان به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2,i} &\leq 2a_6^{2-\frac{p}{q}} \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} |S_i| \\ &+ 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} S_i \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \sum_{v_j \in level1} |a_{ij}| (-a_1 sgn(S_i) + a_1 sgn(S_j)) \\ &+ 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} S_i \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \sum_{v_j \notin level1} |a_{ij}| (-a_1 sgn(S_i) + a_1 sgn(S_j)) + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_7 |S_i| \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \end{aligned} \quad (58)$$

بازنویسی نمود. پس از همگرایی عامل های سطح ۱ در زمان متاهی  $T_{m_1}$  با برقراری شرط (۲۵)، (۵۸) را می توان به صورت

$$\dot{V}_{2,i_{level2}} \leq -\rho_2(\varepsilon_{2,i})|S_i| = -\rho_2(\varepsilon_{2,i})V_{2,i}^{0.5} \quad (59)$$

ساده سازی نمود که

$$\rho_2(\varepsilon_{2,i}) = \left( 2a_6^{2-\frac{p}{q}} - 2a_1 \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} |a_{ij}| \right)_{min} + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_7 \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \quad (60)$$

می باشد. در این مرحله نیز به کمک روشی که در مرحله ی قبل انجام شد، پایداری زمان متاهی عامل های سطح ۲ نیز برقرار شده و این عامل ها در زمان محدود  $0 \leq T_{m_2} < \infty$  به سطح لغزش میل می کنند.

مرحله ی سوم: پایداری زمان متاهی عامل های سطح ۳ و بالاتر. بررسی پایداری زمان متاهی این عامل ها نیز فرایندی مشابه عامل های سطح ۲ دارد.

$$\left\| diag \left( \frac{p-q}{\bar{\varepsilon}_2^q} \right) S \right\| > a_7 \quad (51)$$

برقرار باشد که در آن  $a_7 = \frac{2w_{max} a_6^{2-\frac{p}{q}} \sqrt{N}}{\lambda_1 \frac{p}{q} \beta a_{2,2}}$  است، تابع  $V_3$  کاهش می یابد لذا  $diag \left( \frac{p-q}{\bar{\varepsilon}_2^q} \right) S$  کران دار و محدود به کران  $a_7$  می باشد. ■

**قضیه ۲-** سیستم چند عاملی (۹) و (۱۰)، با فرض های ۱ تا ۳ و فرض صفر بودن  $f_{a,i}(x_i, t)$ ، با اعمال کنترل کننده (۲۲) و مشاهده گر  $f_0$  (۲۸)، به طوری که نامساوی های (۲۴) و (۲۵) برقرار باشند، تمامی عامل ها بعد از ورود به کران به دست آمده در لم های ۳ و ۴، در زمان متاهی به سطح لغزش  $S_i$  میل می کنند. پس از آن روی سطح لغزیده و در زمان متاهی خطای آرایش بندی دویخشی صفر می شود.

**اثبات-** با مشتق گیری از تابع  $V_{2,i} = S_i^2$  پس از زمان  $T_{m_0}$  (۴۱) و همگرایی مشاهده گر  $f_0$ ، با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} &2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} S_i \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| a_2 \varepsilon_{2,j}^{\frac{p-q}{q}} S_j \\ &\leq 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} |S_i| \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \left\| diag \left( \frac{p-q}{\bar{\varepsilon}_2^q} \right) S \right\|_1 \end{aligned} \quad (52)$$

و ساده سازی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2,i} &\leq 2S_i \varepsilon_{2,i} + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} S_i \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| (-a_1 sgn(S_i) + a_1 sgn(S_j)) + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} |S_i| \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \left\| diag \left( \frac{p-q}{\bar{\varepsilon}_2^q} \right) S \right\|_1 + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} (-2a_{i0} a_{1,2} S_i sgn(S_i)). \end{aligned} \quad (53)$$

پس از برقراری  $\|\bar{\varepsilon}_2\|_{\infty} \leq a_6$  و  $\left\| diag \left( \frac{p-q}{\bar{\varepsilon}_2^q} \right) S \right\| \leq a_7$  و همچنین با استفاده لم ۲، (۵۳) را به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2,i} &\leq 2a_6^{2-\frac{p}{q}} \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} |S_i| + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} S_i \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| (-a_1 sgn(S_i) + a_1 sgn(S_j)) + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_7 \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} |S_i| - 4\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_{i0} a_{1,2} \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} |S_i| \end{aligned} \quad (54)$$

بازنویسی می کنیم و برای ادامه، روند اثبات را به سه مرحله تقسیم خواهیم کرد.

مرحله ی اول: پایداری زمان متاهی عامل های سطح ۱. به دلیل منفی نیمه معین بودن دومین عبارت سمت راست نامساوی (۵۴)، آن را به صورت

**اثبات - با مشتق گیری از تابع**

$$V_2(S, \bar{f}_0, \bar{e}_1) = S^T w S + \bar{f}_0^T w \bar{f}_0 + \bar{e}_1^T w \bar{e}_1 \quad (67)$$

و ساده سازی، مانند آنچه در لم ۳ صورت گرفت

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq 2S^T w \bar{e}_2 \\ &- \lambda_1 \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} \bar{a}_{2,2} S^T \text{diag} \left( \bar{e}_{2,2}^{\frac{p-q}{q}} \right) \text{diag} \left( \bar{e}_{2,2}^{\frac{p-q}{q}} \right) S \\ &+ 2\bar{e}_1^T w \bar{e}_2 + 2 \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} S^T w \text{diag} \left( \bar{e}_{2,2}^{\frac{p-q}{q}} \right) D L_{22} f_d \end{aligned} \quad (68)$$

و یا

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\frac{w_{min}}{\beta} \|\bar{e}_2\|_{\frac{p}{q+1}}^{\frac{p}{q+1}} + \frac{8w_{max}^2}{\lambda_1 \frac{p}{q} \bar{a}_{2,2}} \|\bar{e}_2\|_{\frac{p}{q}}^{4-2\frac{p}{q}} \\ &+ 8 \frac{\frac{p}{q} \frac{1}{\beta} (N_{i,max} f_{d,max} |a_{ij}|_{max})^2 w_{max}^2 N}{\lambda_1 \bar{a}_{2,2}} \end{aligned} \quad (69)$$

اکنون با استفاده از نامساوی هلدر [۲۰]، (۶۹) را به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\frac{w_{min}}{\beta} \|\bar{e}_2\|_{\frac{p}{q+1}}^{\frac{p}{q+1}} + \\ &\frac{8w_{max}^2}{\lambda_1 \frac{p}{q} \bar{a}_{2,2}} N^{-\frac{4q-2p}{p+q} + \frac{4q-2p}{4q-2p}} \|\bar{e}_2\|_{\frac{p}{q}}^{4-2\frac{p}{q}} + \\ &\frac{p}{q} \frac{1}{\beta} (N_{i,max} f_{d,max} |a_{ij}|_{max})^2 w_{max}^2 N \end{aligned} \quad (70)$$

بازنویسی می کنیم. برای بررسی منفی شدن سمت راست نامساوی (۷۰)، با انتخاب  $p/q = 7/5$  و با توجه به

$$\frac{p}{q} + 1 = \frac{12}{5} = 2 \frac{6}{5} = 2(4 - 2 \frac{p}{q}) \quad (71)$$

ریشه های سمت راست (۷۰) را می توان با حل یک نامعادله ی درجه ۲ به دست آورد. مابقی اثبات همانند لم های ۳ و ۴ و قضیه ۲ قابل بررسی است. ■

**۴- نتایج شبیه سازی**

۴-۱- سیستم بدون اغتشاش و عدم قطعیت

سیستم چندعاملی دکوپله با عامل رهبر

$$\dot{x}_0 = \begin{bmatrix} \dot{p}_{0x} \\ \dot{v}_{0x} \\ \dot{p}_{0y} \\ \dot{v}_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ u_{0x} + 0.01 \cos(0.5t) \\ v_{0y} \\ u_{0y} + 0.01 \sin(0.5t) \end{bmatrix} \quad (72)$$

و عامل های پیرو غیرهمگن

لذا پایداری زمان متناهی عامل های سطح ۳ پس از پایداری عامل های سطح ۲ و در حالت کلی پایداری عامل های سطح  $m (m > 3)$  پس از پایداری عامل های سطح  $(m - 1)$  اتفاق می افتد.

با همگرایی زمان متناهی عامل ها بر روی سطح لغزش تساوی

$$-\beta \varepsilon_{1,i}^{q/p} = \varepsilon_{2,i} \quad (61)$$

برقرار شده و با توجه به

$$\dot{\varepsilon}_{1,i} = \varepsilon_{2,i} \quad (62)$$

با مشتق گیری از تابع

$$V_{3,i} = \frac{1}{2} \varepsilon_{1,i}^2 \quad (63)$$

و جایگذاری (۶۱) خواهیم داشت

$$\dot{V}_{3,i} = -\beta \varepsilon_{1,i}^{\frac{q+1}{p}} = -\beta V_{3,i}^{\frac{p+q}{2p}} \quad (64)$$

لذا بنا به لم ۱ مبدا برای  $\varepsilon_{1,i}$  پایدار زمان متناهی است. همچنین با توجه به (۶۱)، همزمان با همگرایی  $\varepsilon_{1,i}$  به مبدا،  $\varepsilon_{2,i}$  نیز به مبدا همگرا شده و در نتیجه آرایش بندی دوبخشی در زمان متناهی حاصل می شود. ■

**تذکره ۲-** نتایج به دست آمده به سیستم توام با اغتشاش و یا دارای نامعینی پارامتری در  $f_i(x_i)$  برای حالتی که  $p/q = 7/5$  می باشد، نیز قابل تعمیم است. با رویکردی مشابه می توان نشان داد که با اعمال کنترل کننده (۲۲) و با در نظر گرفتن شرایط

$$\begin{aligned} a_{1,2} &> \max \left( \frac{q}{p} \frac{1}{a_{i0,min}} \beta a_9 \right. \\ &+ \frac{1}{a_{i0,min}} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_{11} \\ &+ \frac{3}{a_{i0}} N_{i,max} f_{d,max} a_{ij,max}, \end{aligned} \quad (65)$$

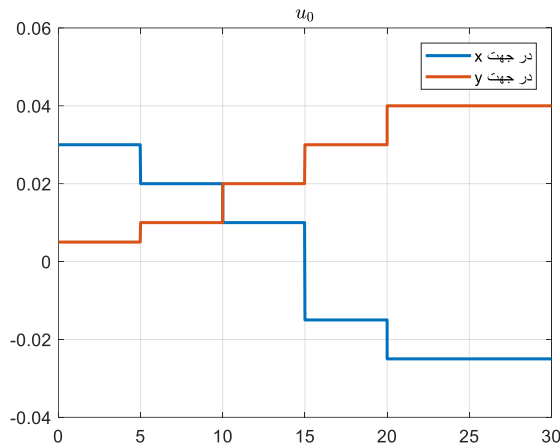
$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_{i0,min}} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_{11} \\ &+ \frac{2}{a_{i0,min}} a_{ij,max} f_{d,max} N_{i,max} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &> \max \left( \frac{1}{a_{ij,min} N_{i,min}} \left( \frac{q}{p} \beta a_9 \right. \right. \\ &+ \left. \left. a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_{11} + 3 N_{i,max} f_{d,max} a_{ij,max} \right), \end{aligned} \quad (66)$$

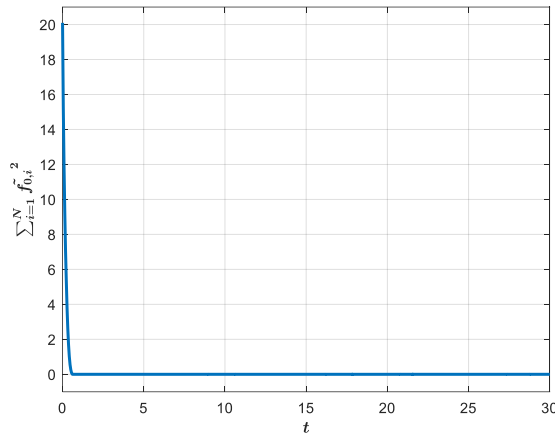
$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_{ij,min} N_{i,min}} \left( a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_{11} \right. \\ &+ \left. 2 a_{ij,max} f_{d,max} N_{i,max} \right) \end{aligned}$$

برای مقادیر کنترل کننده و مشاهده گر  $f_0(t)$  عامل ها در زمان متناهی آرایش دوبخشی به خود گرفته و رهبر گروه را دنبال می کنند.

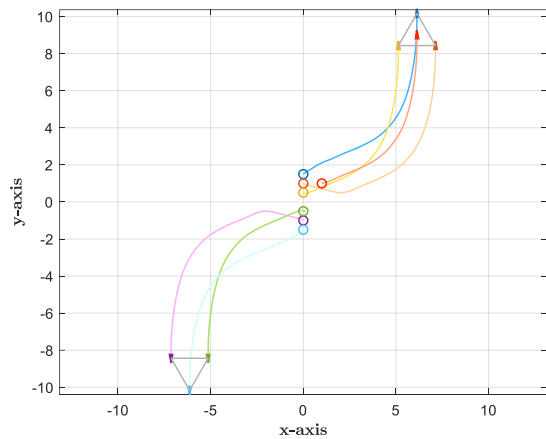
شکل ۷ تا شکل ۱۰ به ترتیب موقعیت عامل‌ها در جهت  $x$ ، موقعیت عامل‌ها در جهت  $y$ ، سرعت عامل‌ها در جهت  $x$  و سرعت عامل‌ها در جهت  $y$  را در بازه شبیه‌سازی نمایش می‌دهد.



شکل ۳- سیگنال ورودی رهبر گروه در بازه شبیه‌سازی



شکل ۴- مجذور نرم خطای مشاهده‌گر عامل‌های پیرو



شکل ۵- مسیر حرکت عامل‌ها در صفحه

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ix} \\ \dot{v}_{ix} \\ \dot{p}_{iy} \\ \dot{v}_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ u_{ix} + 2\cos(0.1p_{ix}) + v_{ix}^3 \\ v_{iy} \\ u_{iy} + 2\sin(0.1p_{iy}) + v_{iy}^3 \end{bmatrix}, \quad (۷۳)$$

$\forall i = 1, 2, 3$

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ix} \\ \dot{v}_{ix} \\ \dot{p}_{iy} \\ \dot{v}_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ u_{ix} + 2\cos(0.1p_{ix}) + \ln(v_{ix}^2 + 1)\text{sgn}(v_{ix}) \\ v_{iy} \\ u_{iy} + 2\sin(0.1p_{iy}) + \ln(v_{iy}^2 + 1)\text{sgn}(v_{iy}) \end{bmatrix}, \quad (۷۴)$$

$\forall i = 4, 5, 6$

و گراف ارتباطی شکل ۱ که در آن عامل صفر، رهبر گروه است را در نظر بگیرد. بردار حالت رهبر و بردار ورودی  $u_0 = [u_{0x} \quad u_{0y}]^T$  و بردار ورودی رهبر می‌باشد که در آن موقعیت رهبر در جهت  $x$ ،  $v_{0x}$  سرعت رهبر در جهت  $x$ ،  $p_{0y}$  موقعیت رهبر در جهت  $y$ ،  $v_{0y}$  سرعت رهبر در جهت  $y$ ،  $u_{0x}$  سیگنال ورودی رهبر در جهت  $x$  و  $u_{0y}$  سیگنال ورودی رهبر در جهت  $y$  است. همچنین بردار حالت و بردار ورودی عامل‌های پیرو می‌باشد که در آن موقعیت پیرو در جهت  $x$ ،  $v_{ix}$  سرعت پیرو در جهت  $x$ ،  $p_{iy}$  موقعیت پیرو در جهت  $y$ ،  $v_{iy}$  سرعت پیرو در جهت  $y$ ،  $u_{ix}$  سیگنال ورودی پیرو در جهت  $x$  و  $u_{iy}$  سیگنال ورودی پیرو در جهت  $y$  می‌باشد. همچنین شکل ۳ بیانگر سیگنال ورودی رهبر،  $u_0$ ، در بازه شبیه‌سازی است. در ادامه و با در نظر گرفتن (۲۴) و (۲۵) پارامترهای کنترل‌کننده و مقادیر دلخواه آرایش‌بندی به ترتیب در جدول ۱ و جدول ۲ بیان شده است.

جدول ۱- پارامترهای کنترل‌کننده برای سیستم در حالت بدون اغتشاش

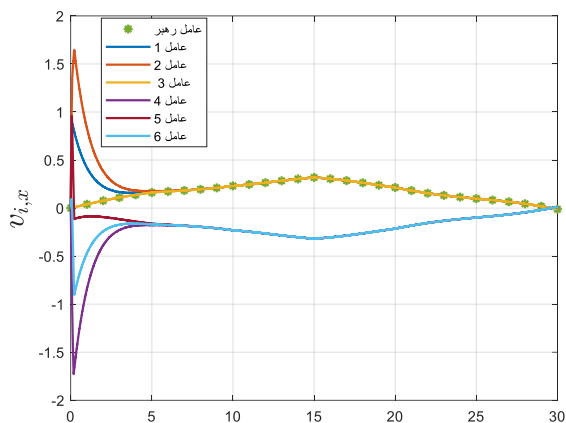
$p$	$q$	$\beta$	$w$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
101	69	1	$7.61I_6$	15.7	15.4	2	2

جدول ۲- مقادیر آرایش‌بندی عامل‌ها

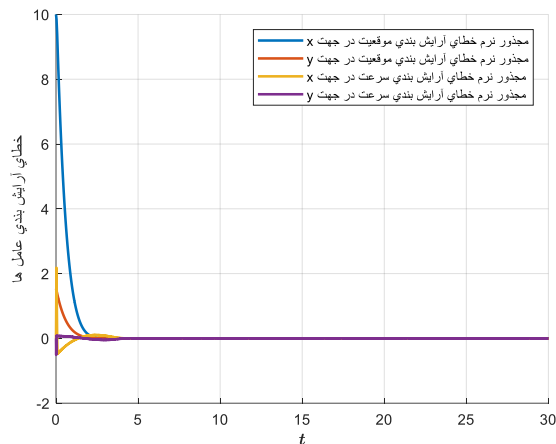
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
$h_{ix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$h_{iy}$	$\begin{bmatrix} 1.15 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.58 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.58 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.15 \\ 0 \end{bmatrix}$

شکل ۴ مجذور نرم خطای مشاهده‌گر عامل‌ها را در بازه شبیه‌سازی نمایش می‌دهد. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، خطای مشاهده‌گر  $f_0$  در کسری از ثانیه به صفر میل می‌کند. شکل ۵ نیز نمایش مسیر حرکت عامل‌ها در صفحه می‌باشد. همچنین

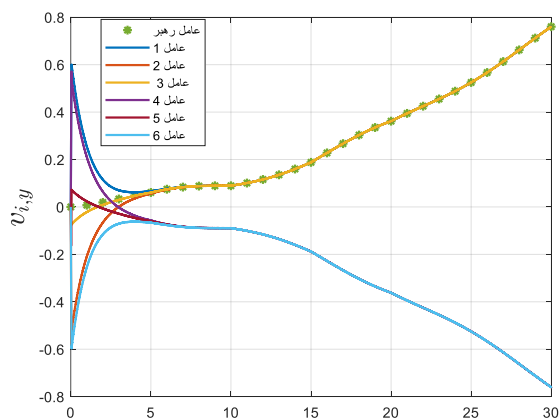
شکل ۶ نمایش مجذور نرم خطای آرایش‌بندی دویخشی سرعت و موقعیت عامل‌ها هم در جهت  $x$  و هم در جهت  $y$  می‌باشد. همانطور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود خطای آرایش‌بندی عامل‌ها در زمان محدود و متناهی به مبدا همگرا می‌شود. به منظور نمایش دقیق رفتار عامل‌ها پس از اعمال کنترل‌کننده،



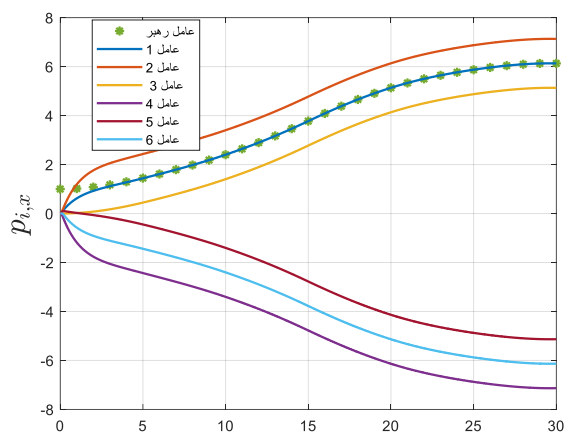
شکل ۹- نمایش سرعت عامل ها در جهت  $x$



شکل ۶- نمایش خطای آرایش بندی دویخشی عامل ها



شکل ۱۰- نمایش سرعت عامل ها در جهت  $y$



شکل ۷- نمایش موقعیت عامل ها در جهت  $x$

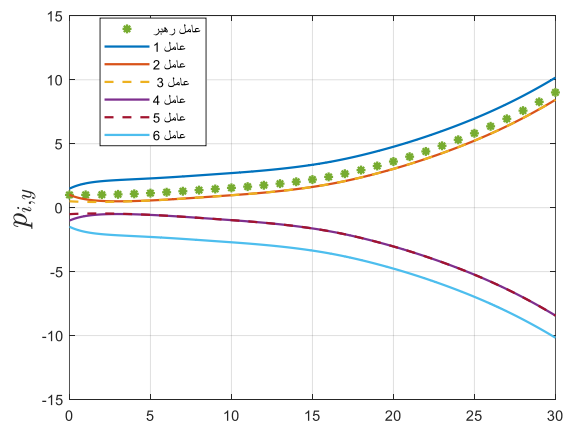
۴-۲- سیستم در معرض اغتشاش و دارای نامعینی

سیستم چند عاملی شبیه سازی قبل را در نظر بگیرید که این بار عامل های پیرو در معرض اغتشاش سینوسی با دامنه و فرکانس متغیر با زمان به صورت شکل ۱۱ می باشد. همچنین در این مثال برای عامل های ۱ تا ۳ نامعینی پارامتری متغیر با زمان به صورت

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} v_{i,x} \\ u_{i,x} + 2\cos(0.1p_{i,x}) + 0.2\cos(t)\cos(0.1p_{i,y}) + v_{i,x}^3 \\ v_{i,y} \\ u_{i,y} + 2\sin(0.1p_{i,y}) - 0.2\cos(2t)\sin(0.1p_{i,x}) + v_{i,y}^3 \end{bmatrix} \quad (۷۵)$$

در نظر می گیریم. در ادامه و با استفاده از نامساوی های (۶۵) و (۶۶) مقادیر پارامترهای کنترل کننده را به صورت جدول ۳ انتخاب می کنیم. همچنین سیگنال ورودی رهبر گروه و مقادیر آرایش بندی را مثل حالت بدون اغتشاش می گیریم. شکل ۱۲ خطای آرایش بندی عامل ها را در حالت سیستم توأم با اغتشاش نشان می دهد.

همانطور که در شکل ۱۲ مشاهده می شود با استفاده از کنترل کننده ی معرفی شده، حتی در حضور اغتشاش نیز اهداف کنترلی برآورده شده و خطای آرایش بندی در زمان متناهی به صفر میل کرده است.



شکل ۸- نمایش موقعیت عامل ها در جهت  $y$

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases} \quad \text{تابع علامت}$$

$$\text{diag}(x_1, \dots, x_N) \quad \text{ماتریس قطری با درایه‌های قطری } x_1 \text{ تا } x_N$$

$$\|x\| \quad \text{نرم (اقلیدسی) بردار } x$$

$$\|x\|_a \quad \text{نرم } a \text{ بردار } x$$

$$x^\alpha = [x_1^\alpha, \dots, x_N^\alpha]^T \quad \text{به توان رسیدن درایه‌های بردار } x \text{ به توان } a$$

$$\otimes \quad \text{ضرب کرونگر}$$

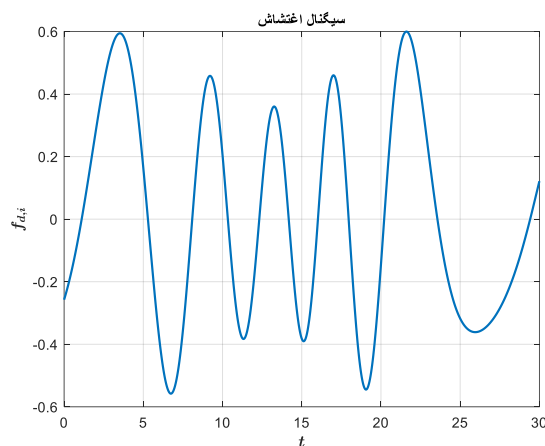
$$X \leq 0 \quad \text{ماتریس منفی نیمه‌معین}$$

## مراجع

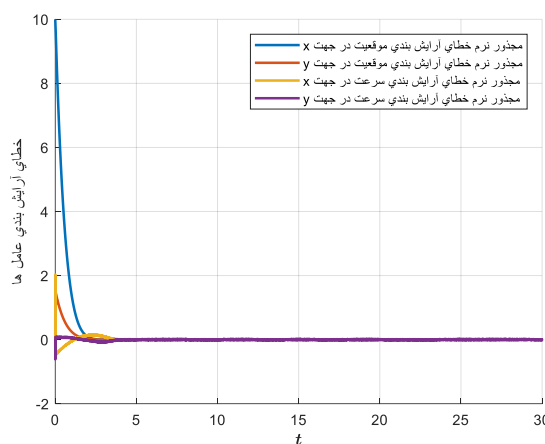
- [1] A. Dorri, S. S. Kanhere, and R. Jurdak, "Multi-agent systems: a survey," IEEE Access, vol. 6, pp. 28573-28593, 2018.
- [2] X. Dong, Y. Zhou, Z. Ren, and Y. Zhong, "Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 64, no. 6, pp. 5014-5024, 2016.
- [3] M. De Queiroz, X. Cai, and M. Feemster, "Formation control of multi-agent systems: a graph rigidity approach," John Wiley & Sons, 2019.
- [4] H. S. Ahn, Formation Control, Springer, 2020.
- [5] J. Zhang, Y. Yao, J. A. Wang, Z. Li, P. Feng, and W. Bai, "Distributed bipartite output formation control for heterogeneous discrete-time linear multi-agent systems," IEEE Access, Vol. 12, pp. 18901-18912, 2024.
- [6] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 38, no. 3, pp. 751-766, 2000.
- [7] S. Ding, S. Li, and Q. Li, "Stability analysis for a second-order continuous finite-time control system subject to a disturbance," Journal of Control Theory and Applications, vol. 7, no. 3, pp. 271-276, 2009.
- [8] C. Yan, W. Zhang, H. Su, and X. Li, "Adaptive bipartite time-varying output formation control for multiagent systems on signed directed graphs," IEEE Transactions on Cybernetics, vol. 52, no. 9, pp. 8987-9000, 2021.
- [9] X. Gong, J. J. R. Liu, Y. Wang, and Y. Cui, "Distributed finite-time bipartite consensus of multi-agent systems on directed graphs: Theory and experiment in nanoquadcopters formation,"

جدول ۳- پارامترهای کنترل‌کننده برای سیستم توام با اغتشاش

$p$	$q$	$\beta$	$w$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
7	5	1	$I_6$	110	70	2	2



شکل ۱۱- اغتشاش اعمال شده به عامل‌ها در طول شبیه‌سازی



شکل ۱۲- نمایش خطای آرایش‌بندی عامل‌ها در حضور اغتشاش

## ۸- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با استفاده از کنترل مود لغزشی ترمینال، روشی نو برای پایداری زمان‌متناهی عامل ناهمگن و غیرخطی، هم برای سیستم در شرایط ایده‌آل و هم برای سیستم توام با اغتشاش برآورده شد. همچنین در صورت وجود نامعینی در متغیر  $f_i(x_i)$ ، می‌توان با آن مانند اغتشاش برخورد کرد و با استفاده از کنترل‌کننده معرفی شده در این پژوهش، آرایش‌بندی دوبخشی را برای سیستم دارای نامعینی نیز برآورده کرد. لاکن بررسی اثر نامعینی در متغیر  $g_i(x_i)$  که در این پژوهش به آن پرداخته نشد برای ادامه کار پیشنهاد می‌شود. همچنین رویکرد زمان‌ثابت<sup>۱</sup> در آرایش‌بندی دوبخشی برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود.

## نمادها

<sup>۱</sup> Fixed-time

manipulators,” *Automatica*, vol. 38, no. 12, pp. 2159-2167, 2002.

*Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 16, pp. 11953-11973, 2020.

- [10] Y. Cai, H. Zhang, J. Zhang, R. Xi, and Q. He, “Fully distributed bipartite time-varying formation control for uncertain linear multi-agent systems under event-triggered mechanism,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 31, no. 11, pp. 5165-5187, 2021.
- [11] G. A. Pavlopoulos, P. I. Kontou, A. Pavlopoulou, C. Bouyioukos, E. Markou, and P. G. Bagos, “Bipartite graphs in systems biology and medicine: a survey of methods and applications,” *GigaScience*, vol. 7, no. 4, pp. 1-31, 2018.
- [12] J. Liang, X. Bu, L. Cui, and Z. Hou, “Data-driven bipartite formation for a class of nonlinear MIMO multiagent systems,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 34, no. 6, pp. 3161-3173, 2021.
- [13] W. Wang, W. Zhang, C. Yan, and Y. Fang, “Distributed adaptive bipartite time-varying formation control for heterogeneous unknown nonlinear multi-agent systems,” *IEEE Access*, Vol. 9, pp. 52698-52707, 2021.
- [14] X. Zhang, J. Wu, X. Zhan, T. Han, and H. Yan, “Observer-based adaptive bipartite time-varying formation tracking of multi-agent system with bounded unknown input,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 20, No. 12, pp. 3969-3978, 2022.
- [15] Y. Yang, D. Chen, Q. Liu, S. Gorbachev, and V. Kuzin, “Bipartite time-varying prescribed range formation control for a class of nonlinear multiagent systems with unknown disturbances,” *IEEE Systems Journal*, Vol. 17, No. 2, pp. 1899-1908, 2023.
- [16] C. Altafini, “Consensus problems on networks with antagonistic interactions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 4, pp. 935-946, 2012.
- [17] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 5, pp. 678-682, 1998.
- [18] Y. Shen and Y. Huang, “Uniformly observable and globally lipschitzian nonlinear systems admit global finite-time observers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 11, pp. 2621-2625, 2009.
- [19] W. Ford, *Numerical Linear Algebra With Applications: Using MATLAB*, Academic Press, 2014.
- [20] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed., Patience Hall, 2002.
- [21] Y. Feng, X. Yu, and Z. Man, “Non-singular terminal sliding mode control of rigid