

# اجماع سیستم‌های چندعاملی خطی تأخیر دار با رهبر پویا تحت قيود اشباع حالت‌های نسبی

جواد زنگنه<sup>۱</sup>، سید کمال حسینی ثانی<sup>۲</sup>، ناصر پریرز<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری گروه کنترل، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران [ja.zanganeh@mail.um.ac.ir](mailto:ja.zanganeh@mail.um.ac.ir)

<sup>۲</sup> استاد گروه کنترل، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران [hosseini@um.ac.ir](mailto:hosseini@um.ac.ir)

<sup>۳</sup> استاد گروه کنترل، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران [n-pariz@um.ac.ir](mailto:n-pariz@um.ac.ir)

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۰۷

ویرایش: ۱۴۰۳/۰۳/۱۸

دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۲۷

**چکیده:** در این مقاله مساله اجماع سامانه‌های چندعاملی خطی با تأخیر ارتباطی متغیر با زمان و رهبر پویا با در نظر گرفتن اشباع حالت‌های نسبی مورد مطالعه قرار گرفته است. ابتدا با استفاده از ماتریس برخورد و ماتریس لاپلاسین لبه (یال)، اجماع سامانه‌های چندعاملی تأخیر دار تحت اشباع حالت‌های نسبی به مساله پایداری دینامیک لبه‌ها در یک مجموعه بسته تبدیل می‌شود. بدین منظور، با استفاده از تابع اشباع، یک پروتکل کنترل توزیع شده طراحی می‌شود که اجماع عامل‌ها را با وجود قيود اشباع حالت‌های نسبی تضمین می‌کند. در ادامه با تعریف یک تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب، شرایط کافی برای پایداری عامل‌ها به دست می‌آید. با به کارگیری این شرایط، نه تنها اجماع حاصل شده و تمام عوامل پیرو مسیر رهبر پویا را به خوبی دنبال می‌کنند بلکه اشباع حالت‌های نسبی نیز اتفاق نمی‌افتد. در حالی که تأخیر ارتباطی محدود می‌تواند متغیر با زمان و به دلخواه سریع باشد. این پایداری و اجماع با حفظ پیوستگی شبکه ارتباطی به دست می‌آید. در پایان، شبیه‌سازی یک مثال کاربردی، موثر بودن پروتکل کنترل پیشنهادی را نشان می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** اجماع؛ سامانه‌های چندعاملی خطی؛ تأخیر ارتباطی متغیر با زمان؛ رهبر پویا؛ اشباع حالت‌های نسبی؛ پایداری

لیاپانوف-کراسوفسکی

## Consensus of Delayed Linear Multi-Agent Systems with Dynamic Leader Under Saturation Constraints of Relative States

Javad Zanganeh, Seyyed Kamal Hosseini Sani, Naser Pariz

**Abstract:** In this paper, the consensus problem of linear multi-agent systems (MASs) with time-varying communication delay and dynamic leader under saturations of the relative states is studied. First, using the incidence matrix and edge Laplacian matrix, the consensus of delayed MAS with the saturation of relative states is transformed into the problem of edge dynamics stability on the closed sets. For this purpose, using saturation functions, a distributed control protocol is designed, which ensures the consensus of all agents despite the relative state saturation constraints. Then, by providing a proper Lyapunov-Krasovskii functional, sufficient conditions for the stability of the agents are created. By applying these conditions, not only consensus is reached and all agents follow the path of the dynamic leader well, but also saturation of the relative state does not happen. While the limited communication delay can be time-varying and arbitrarily fast. This stability and consensus are obtained by maintaining graph continuity. Finally, the validity of theoretical results is demonstrated by simulating a practical example.

**Keywords:** Consensus, general linear multi-agent systems, time-varying communication delay, dynamic leader, saturation of relative states, Lyapunov-Krasovskii stability

## ۱- مقدمه

در دو دهه اخیر با گسترش استفاده از دستگاه‌های اطلاعاتی و سرعت توسعه فناوری ارتباطات، سامانه‌های چندعامله به دلیل اهمیت تعامل و همکاری بین عامل‌ها بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند [۱-۴]. سامانه چند عامله به سامانه‌ای گفته می‌شود که از چند سامانه یکسان یا غیریکسان که آن را عامل می‌نامند تشکیل شده است. در این نوع سامانه‌ها، هر عامل بخشی از اطلاعات مورد نیاز جهت ساخت سیگنال کنترل را از عامل‌های مجاور می‌گیرد. امروزه سامانه‌های چند عامله به دلیل کاربردهای گسترده خود در مدل سازی رفتار جمعی حیوانات، آرایش هندسی هواپیماها، شناسایی نظامی، عملیات نجات و حتی مدل سازی جوامع انسانی مورد توجه قرار گرفته‌اند. هواپیماهای بدون سرنشین<sup>۱</sup> [۵]، وسایل نقلیه خودکار<sup>۲</sup> [۶]، روبات‌های امدادگر<sup>۳</sup> و مین‌یاب<sup>۴</sup> [۷] و نوسان‌گرهای توزیع شده<sup>۵</sup> [۸]، از جمله سامانه‌های چندعامله است که می‌توان به آن‌ها اشاره کرد. با توجه به نوع گرایش محققان به سامانه‌های چندعامله، اهداف متفاوتی همچون اجماع<sup>۶</sup> [۹]، شکل‌پذیری (شکل‌گیری)<sup>۷</sup> [۶]، حرکت گروهی<sup>۸</sup> [۱۰] و غیره تعریف شده است. ایده‌ی اولیه سامانه‌های چندعامله از حرکت گروهی پرندگان، زنبورهای عسل، مورچه‌ها، ماهی‌ها و غیره گرفته شده است [۱۱].

اجماع یکی از مهمترین مسایل مرتبط با کنترل همکارانه سامانه‌های چندعامله می‌باشد که در بسیاری از سامانه‌های عملی و کاربردی مانند: شبکه حسگرها [۱۲]، شبکه‌های قدرت هوشمند [۱۳، ۱۴] و شبکه‌های هواپیماهای بدون سرنشین [۱۵] مورد توجه قرار گرفته است. در [۹]، نویسندگان یک چارچوب نظری برای مساله اجماع پیشنهاد دادند که از آن زمان پایه و اساس بسیاری از تحقیقات شده است. اکثر الگوریتم‌های اجماع، سامانه‌های چندعامله را بدون رهبر یا فقط با یک رهبر در نظر می‌گیرند [۱۶، ۱۷]. با این حال، در برخی از مسایل عملی، چندین رهبر وجود دارد که هدف آنها انتقال پیروان به داخل بدنه محدب تشکیل شده توسط رهبران است [۱۸].

یک چالش اساسی در طراحی کنترل‌کننده‌های بازخورد که بر روی شبکه‌های ارتباطی اجرا می‌شود، کنار آمدن با تأخیرهای زمانی است. از طرف دیگر، تأخیر زمانی در بسیاری از سامانه‌های عملی پدیده‌ای رایج است که ممکن است باعث عملکرد ضعیف و ناپایداری شود [۱۹]. سامانه‌های تأخیر زمانی به عنوان موارد خاص سامانه‌های پارامتر توزیع شده<sup>۹</sup>، بی‌نهایت بعد<sup>۱۰</sup> هستند. بنابراین مواجهه با آن‌ها هم در ریاضیات و هم در عمل سخت بوده و طراحی کنترل‌کننده برای آن‌ها، چالش‌های زیادی به همراه دارد [۲۰]. از این رو، موضوع کنترل سامانه‌های تأخیر زمانی، توجهات بسیاری را به خود جلب کرده است [۲۱-۲۳]. برای

سامانه‌های چندعامله، سه نوع تأخیر زمانی، یعنی تأخیر در برقراری ارتباط<sup>۱۱</sup>، تأخیر در ورودی‌ها<sup>۱۲</sup> و تأخیرهای خروجی<sup>۱۳</sup>، اغلب باید مورد توجه قرار گیرند. وجود تأخیر زمانی در انتقال اطلاعات بین عوامل به دلیل تراکم داده‌ها و پهنای باند انتقال محدود، اجتناب ناپذیر است. تأخیر ورودی ناشی از زمان لازم برای ورود سیگنال کنترل به هر عامل است. تأخیر ورودی به طور کلی در محرک‌ها وجود دارد که نشان‌دهنده پاسخ زمانی<sup>۱۴</sup> محرک‌ها است. در حالی که تأخیر خروجی ناشی از زمان اندازه‌گیری خروجی سیستم است. این سه نوع تأخیر زمانی ممکن است منجر به تخریب عملکرد سیستم، و حتی ناپایداری شود. بنابراین هنگام طراحی پروتکل‌های اجماع برای سامانه‌های چندعامله باید به آنها توجه شود [۱۹].

تحلیل پایداری سامانه‌های تأخیردار در دو حوزه فرکانس و زمان می‌تواند انجام شود. تحلیل حوزه فرکانس تنها برای تأخیرهای ثابت کاربرد دارد اما برای تأخیرهای متغیر با زمان تحلیل حوزه زمان مفیدتر است [۲۴]. برای تحلیل سامانه‌های تأخیردار در حوزه زمان دو رویکرد اصلی لیاپانوف وجود دارد: رویکرد لیاپانوف-کراسوفسکی (۱۹۵۶) و رویکرد لیاپانوف-رازومیکین (۱۹۵۶). از آنجایی که محافظه‌کاری رویکرد کراسوفسکی کمتر از رویکرد رازومیکین است، می‌توان از آن برای طیف وسیع‌تری از مسایل کنترلی استفاده نمود [۲۵].

با توجه به مطالب فوق تحقیقات زیادی در ارتباط با مساله اجماع سامانه‌های چندعامله تأخیردار انجام شده است. به عنوان یک پیشگام، نویسندگان در [۹]، با استفاده از تئوری گراف و تحلیل حوزه فرکانس، مساله اجماع برای یک سامانه چندعامله با دینامیک مرتبه اول و تأخیر ثابت را حل کردند. در [۲۶]، اجماع سامانه‌های چندعامله مرتبه دوم علی‌رغم تأخیر ارتباطی بررسی شده است. با استفاده از رابطه بین تأخیر زمانی و ریشه‌های معادله مشخصه، یک فرمول صریح برای مقدار تأخیر قابل قبول به‌دست آمده است. تحلیل فرکانسی کنترل محدود نگهدارنده عامل‌های زمان گسسته مرتبه اول در [۱۸] مورد توجه قرار گرفته است. الگوریتم‌های مورد استفاده، در یک پروتکل زمان گسسته به‌دست می‌آیند، به این معنی که دوره نمونه‌گیری (اندازه مرحله) تأثیر مهمی در پایداری سامانه‌های چندعامله دارد. یامچی و همکاران در [۷] کنترل شکل‌پذیری برای یک شبکه از روبات‌ها با وجود تأخیر ارتباطی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. نویسندگان در [۱۳] به مسئله کنترل توزیع شده شبکه‌های قدرت در حضور تأخیر ارتباطی می‌پردازند.

در تمام موارد فوق، تأخیر ارتباطی ثابت در نظر گرفته می‌شود، اما در [۲۷]، اجماع یک سامانه چندعامله در حضور تأخیر ارتباطی متغیر با زمان مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله با حل معادله جبری ریکاتی

<sup>۹</sup> Distributed Parameter Systems<sup>۱۰</sup> Infinite-Dimensional<sup>۱۱</sup> Communication Delays<sup>۱۲</sup> Input Delays<sup>۱۳</sup> Output Delays<sup>۱۴</sup> Time-Response<sup>۱</sup> Unmanned Air Vehicle<sup>۲</sup> Self-Propelled Vehicles<sup>۳</sup> Rescue Robots<sup>۴</sup> Minesweepers<sup>۵</sup> Oscillators<sup>۶</sup> Consensus<sup>۷</sup> Formation<sup>۸</sup> Flocking

اشباع قرار می‌گیرند. به دلیل محدودیت ظرفیت انتقال مواد و منابع، اشباع حالت نسبی ممکن است روی دهد.

۳) علاوه بر این سامانه‌های فیزیکی، حالت‌های نسبی نیز در سامانه‌های سایبری مانند شبکه ارتباطات وجود دارند. در چنین وضعیتی، حالت‌های نسبی می‌توانند بیان‌گر اطلاعات مبادله شده در میان عوامل همسایه باشند. اطلاعات رد و بدل شده به دلیل محدودیت دامنه ارتباطات عوامل سیار، محدود می‌شود.

در [۳۶]، با استفاده از محدودیت‌های تخمین حالت نسبی، اجماع مبتنی بر رویت‌گر سامانه‌های چندعامله غیرخطی مورد بحث قرار گرفته است. برای حل مساله اجماع، پروتکل‌های متناوب و تطبیقی مبتنی بر رویت‌گر طراحی شده‌اند. در مقاله [۳۴]، از کنترل کننده PI تطبیقی برای اجماع سامانه‌های چندعامله با محدودیت‌های اشباع حالت‌های نسبی استفاده شده است. مقاله [۱۶] به بررسی اجماع سامانه‌های چندعامله غیرخطی تحت اشباع حالات نسبی می‌پردازد. به این منظور، پروتکل‌های بازخورد متناوب، پیوسته و تطبیقی معرفی شده‌اند. جناب زاده و همکاران در [۳۲] با ارائه دو پروتکل تخمین و کنترل توزیع شده (DECP)، مساله کنترل ردیابی در سامانه‌های چندعامله را حل می‌کنند. در [۳۵]، محققان به بررسی کنترل اجماع حالت خاصی از سامانه‌های چندعامله غیرخطی با تأخیر ورودی تحت اشباع حالت نسبی می‌پردازند.

علیرغم این واقعیت که پدیده‌های اشباع حالت‌های نسبی و تأخیر عموماً با هم در سامانه‌های عملی\_کاربردی وجود دارند، اما اثرات مشترک آن‌ها بر عملکرد سامانه‌های چندعامله چندان مورد مطالعه قرار نگرفته است. همچنین، از آنجا که تأخیرهای زمانی و محدودیت‌های اشباع مربوط به حوزه‌های مختلف ریاضیات می‌باشند و ماهیت ریاضی آن‌ها کاملاً متفاوت است، ترکیب آن‌ها با هم و بررسی تأثیرات مشترک هر دو در مساله اجماع دشوار است. در این راستا، تنها در [۳۵] و [۳۷]، این موضوع مورد توجه قرار گرفته است. در مقاله [۳۵] به مساله اجماع بدون رهبر سامانه‌های چندعامله غیرخطی لیب\_شیتز مرتبه اول تحت محدودیت اشباع حالت‌های نسبی در حضور تأخیر ورودی پرداخته شده است. در [۳۷]، اجماع سامانه‌های چندعامله خطی با تأخیر ورودی علیرغم وجود قید اشباع حالت‌های نسبی مورد بررسی قرار گرفته است.

ما در این مقاله، اجماع سامانه‌های چندعامله خطی تأخیردار (تأخیر ارتباطی متغیر با زمان) را تحت اشباع حالت‌های نسبی بررسی می‌کنیم که بر خلاف [۳۵] و [۳۷]، یک رهبر پویا دارند. به علاوه به جای تأخیر ورودی، تأخیر ارتباطی مورد توجه قرار گرفته که می‌تواند متغیر با زمان و سریع باشد. همچنین در مثال شبیه سازی شده این مقاله، تنها دو عامل پیرو با عامل رهبر پویا ارتباط دارند در حالی که در مقاله [۳۷] همه عامل‌های پیرو به عامل رهبر ایستا دسترسی دارند. با توجه به مطالب ذکر شده، نوآوری و تفاوت این مقاله شامل موارد زیر می‌باشد:

بدون اطلاع از مقدار دقیق تأخیر، یک پروتکل اجماع معرفی شده است. لی و همکاران در [۲۸] اجماع سامانه‌های چندعامله مرتبه بالا را با تأخیرهای ورودی و ارتباطی همگن در نظر گرفتند. در [۲۹]، محققان در مورد اجماع سامانه‌های چندعامله با وجود تأخیرهای ارتباطی و ورودی ناهمگن بحث کرده‌اند. وجود تأخیر ناهمگن نوشتن دینامیک عامل‌ها را در قالب ضرب کروئکر دشوار می‌کند. کنترل ردیابی اجماع برای سامانه‌های چندعامله خطی عمومی با در نظر گرفتن تأخیر ناهمگن (ورودی و ارتباطی) تحت یک نمودار ارتباطی ثابت در مقاله [۱۷] مورد بررسی قرار گرفته است. در مقاله [۱۹]، اجماع سامانه‌های چندعامله خطی تحت تأخیرهای خروجی، ورودی و ارتباطی بررسی شده است. در [۳۰]، کنترل شکل‌گیری برای یک سامانه چندعامله زمان گسسته با تأخیر زمانی مورد مطالعه قرار گرفته است. به این منظور، یک کنترل کننده تحریک\_رویداد<sup>۱</sup> برای کاهش بار ارتباطی سامانه پیشنهاد شده است. مقاله [۳۱] به بررسی مسایل کنترل شکل‌گیری متغیر با زمان مقاوم برای یک دسته از سامانه‌های چندعامله مرتبه بالاتر می‌پردازد که در معرض تأخیرهای ارتباطی و عدم قطعیت‌های ناهمگن هستند. به این منظور، یک پروتکل کنترل شکل‌پذیری را پیشنهاد می‌کند که شامل یک کنترل کننده برای دستیابی به شکل‌پذیری مورد نظر و یک سیگنال جبران‌ساز برای مهار تأثیر عدم قطعیت‌ها است. به کمک روش لیاپانوف-کراسوفسکی، شرایط کافی برای دستیابی به شکل‌گیری متغیر با زمان مورد نظر بر حسب LMI به دست آمده است.

هدف از اجماع، دستیابی به توافق در مورد مقادیر مورد نظر است. برای این منظور، پروتکل‌های اجماع توزیع شده با استفاده از اطلاعات محلی، به ویژه اطلاعات مبادله شده بین عوامل همسایه (حالت‌های نسبی) طراحی می‌شوند [۱۹، ۲۸، ۳۲، ۳۳].

می‌دانیم که در سامانه‌های عملی، معمولاً اشباع اتفاق می‌افتد. برای سامانه‌های چندعامله، جدا از ورودی، خروجی و حالت، اشباع در حالت‌های نسبی نیز ناگزیر رخ می‌دهد [۳۴]. اگر حالت‌های نسبی از محدوده معینی خارج شوند، ارتباط بین عوامل همسایه قطع می‌شود. بنابراین، برای حفظ اتصال گراف ارتباطی، بایستی از قیود اشباع برای حالت‌های نسبی استفاده شود [۳۵].

به طور کلی نیاز به مد نظر قرار دادن اشباع حالت‌های نسبی را می‌توان از سه جنبه زیر بررسی نمود:

- ۱) حالت‌های نسبی بین عامل‌های همسایه توسط حسگرهای نصب شده بر روی آن‌ها اندازه‌گیری می‌شود و از آن‌جایی که توانایی سنجش<sup>۲</sup> حسگرها محدود است اشباع حالت نسبی به طور حتم رخ می‌دهد.
- ۲) در سامانه‌های مقیاس بزرگ، مانند شبکه برق و شبکه حمل و نقل، حالت‌های نسبی می‌توانند جریان مقدار مشخصی از مواد و منابع را نشان دهند. با این پس‌زمینه، حالات نسبی تحت محدودیت‌های

<sup>2</sup> Sensing Capability<sup>1</sup> Event-Trigger

لاپلاسین دارای اهمیت بسیار زیادی در مطالعه سامانه‌های چندعامله دینامیکی مبتنی بر گراف است [۳۳].  
 اکنون ماتریس برخورد  $E = [e_{im}] \in \mathbb{R}^{N \times M}$  به شکل زیر تعریف می‌شود [۳۵]:

$$e_{im} = \begin{cases} 1 & \text{اگر گره } i \text{ سر یال } m \text{ باشد} \\ -1 & \text{اگر گره } i \text{ دم یال } m \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1)$$

با استفاده از ماتریس برخورد  $E$ ، ماتریس لاپلاسین گراف را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$L = E \cdot E^T \quad (2)$$

گراف بدون جهت  $G$  متصل نامیده می‌شود اگر برای هر جفت از گره‌های متمایز  $i$  و  $j$  یک مسیر بین آن‌ها وجود داشته باشد.  
**فرض ۱:** نمودار بدون جهت  $G$  متصل است.  
 تحت فرض ۱، ماتریس  $L$  دارای یک مقدار ویژه صفر است ( $\lambda_1 = 0$ ). بقیه مقادیر ویژه این ماتریس مثبت هستند که دارای ترتیب افزایشی  $0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$  می‌باشند.

اکنون، ماتریس لاپلاسین یال (لبه) گراف  $G$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{L} = E^T \cdot E \quad (3)$$

لاپلاسین گراف  $L$  و لاپلاسین یال  $\hat{L}$ ، ماتریس‌های حقیقی متقارن هستند و مقادیر ویژه غیر صفر آن‌ها با یکدیگر برابر است.

## ۲-۲- فرمول بندی مساله و تبدیلات

گروهی از عامل‌ها شامل  $N$  عامل پیرو و یک عامل رهبر را بر روی یک گراف ارتباطی متصل و بدون جهت در نظر می‌گیریم که دینامیک عامل‌های پیرو به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t) \quad i \in I[1, N] \quad (4)$$

که در آن  $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت و  $u_i \in \mathbb{R}^p$  بردار ورودی کنترلی برای عامل  $i$  ام می‌باشد. همچنین دینامیک رهبر نیز با  $\dot{x}_L(t) = A_0 x_L(t) + B_0 u_L(t)$  نشان داده می‌شود.

هدف این مقاله طراحی یک قانون کنترل توزیع شده برای دست‌یابی به اجماع است، به طوری که  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$  و  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_L(t)\| = 0$  با این قید که حالت‌های نسبی  $x_i(t) - x_j(t)$  همواره درون ابرمکعب مستطیل<sup>۱</sup> بسته در  $\mathbb{R}^n$  باقی بمانند. به این منظور، ابتدا حالت‌های مطلق را به حالت‌های لبه‌ها تبدیل می‌کنیم سپس به بررسی رفتار حالت‌های لبه‌ها در یک ابرمکعب مستطیل بسته می‌پردازیم.

(۱) برای اجماع سامانه‌های چندعامله خطی عمومی با تأخیر ارتباطی متغیر با زمان و رهبر پویا، یک قانون کنترل توزیع شده با استفاده از توابع اشباع ارائه شده است که اجماع سامانه‌های چندعامله را با وجود قیود اشباع حالت‌های نسبی تضمین می‌کند.

(۲) با ارائه یک تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب، شرایط کافی برای پایداری عامل‌ها به دست می‌آید. با استفاده از این شرایط، تمام عامل‌ها به اجماع رسیده و مسیر رهبر پویا را به خوبی دنبال می‌کنند. درحالی‌که تأخیر ارتباطی محدود می‌تواند متغیر با زمان و به دلخواه سریع باشد. به علاوه، اشباع حالت‌های نسبی نیز روی نمی‌دهد.

ساختار ادامه مقاله به شرح زیر است: در بخش دوم مفاهیمی از نظریه گراف و همچنین فرمول بندی مساله بیان شده است. قانون کنترل پیشنهادی برای اجماع در بخش سوم ارائه گردیده است. در بخش چهارم به تجزیه و تحلیل پایداری سیستم پرداخته شده است. برای ارزیابی کنترل کننده پیشنهادی، در بخش پنجم یک مثال کاربردی شبیه‌سازی شده است. نتیجه‌گیری مقاله نیز در بخش ششم آورده شده است.

## ۲- مفاهیم اولیه، فرمول بندی و تبدیلات

برخی مفاهیم پایه‌ای که در این مقاله از آن‌ها استفاده می‌گردد در ادامه ذکر شده است. بعلاوه، فرمول بندی مساله و تبدیلات لازم برای سامانه‌های خطی با تأخیر ارتباطی متغیر با زمان نیز در این قسمت ذکر می‌شود.

### ۲-۱- نظریه گراف جبری

برای توصیف نحوه تعامل عامل‌ها از گراف بدون جهت  $G = (N, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  استفاده می‌کنیم. در این گراف،  $N \triangleq \{1, 2, \dots, N\}$  نشانگر مجموعه گره‌ها،  $N$  تعداد گره‌ها،  $\mathcal{E} \subseteq N \times N$  مجموعه لبه‌ها و  $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  ماتریس همسایگی گراف می‌باشد. هر لبه  $(i, j)$  نشان‌دهنده یک اتصال بین دو عامل  $i$  و  $j$  است و این دو عامل همسایه می‌باشند. می‌توانیم به هر لبه یک عدد نسبت دهیم به طوری که اگر  $(i, j) \in \mathcal{E}$  آن‌گاه  $a_{ij} = 1$  و در غیر این صورت  $a_{ij} = 0$  خواهد بود. ( $a_{ij}$  عناصر غیر قطر اصلی ماتریس  $\mathcal{A}$  می‌باشند) [۳۷].

در گراف بدون جهت  $G$  با  $N$  گره و  $M$  لبه، هر لبه آن با یک جهت، از طریق انتخاب تصادفی یکی از دو گره لبه به عنوان سر (راس) و دیگری به عنوان دم (انتها)، مشخص می‌شود. ماتریس لاپلاسین گراف  $G$  نیز به صورت  $l_{ij} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  تعریف می‌شود که در آن  $l_{ij} = -a_{ij}$ ،  $i = j$ ، و  $i \neq j$ ،  $l_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ . توجه کنید که مجموع عناصر هر سطر ماتریس  $L$  برابر با صفر می‌باشد. خصوصیات بسیاری از گراف بر اساس ماتریس لاپلاسین‌اش مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در واقع، ماتریس

<sup>1</sup> Hyper-rectangle

که  $a_{ij}$ ،  $(i, j)$  امین عنصر ماتریس همسایگی  $\mathcal{A}$  مربوط به گراف  $\mathcal{G}$  است. همچنین  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ماتریس بهره بازخورد است که در ادامه به دست می‌آید. به دلیل اهمیت پیوستگی گراف، بهره ثابت  $\mathcal{K} > 0$  را که تنها به مشخصات گراف بستگی دارد به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{K} \geq \max \left\{ \frac{1}{\text{Re}(\lambda_i)} \right\} \quad i \in I[2, N] \quad (10)$$

که  $\lambda_i$  مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان گراف می‌باشند. تأخیر ارتباطی متغیر با زمان  $d(t): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  با یک عدد مثبت محدود شده است ( $0 \leq d(t) \leq D$ ). همچنین حالات اولیه سامانه‌های تأخیردار به صورت  $x_i(\theta) = \phi_i(\theta)$ ،  $\theta \in [-D, 0]$  داده شده است با استفاده از رابطه‌های (۲) و (۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j(t-d) - x_i(t-d)) \\ & + a_{i(N+1)} (x_L(t-d) - x_i(t-d)) = \\ & - \sum_{j=1}^N l_{ij} x_j(t-d) - a_{i(N+1)} (x_L(t-d) - x_i(t-d)) = \\ & - \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{m=1}^M e_{im} e_{jm} x_j(t-d) = - \sum_{m=1}^M e_{im} z_m(t-d) \end{aligned}$$

اکنون قانون کنترل (۹) را بر اساس حالت‌های لبه‌ها بازنویسی می‌کنیم:

$$u_i(t) = -\mathcal{K}F \sum_{m=1}^M e_{im} z_m(t-d(t)) \quad (11)$$

با جایگذاری (۱۱) در (۴) داریم:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) - \mathcal{K}BF \sum_{m=1}^M e_{im} z_m(t-d(t)) \quad (12)$$

با استفاده از (۶) در (۱۲) خواهیم داشت:

$$\dot{z}_m(t) = Az_m(t) - \mathcal{K}BF \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{l=1}^M e_{jm} e_{jl} z_l(t-d(t)) \quad (13)$$

با به کارگیری (۳) می‌توان رابطه (۱۳) را به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\dot{z}_m(t) = Az_m(t) - \mathcal{K}BF \sum_{j=1}^M \hat{l}_{mj} z_j(t-d(t)) \quad (14)$$

که برای تمام  $z_m \in \Omega_m$ ،  $t \geq 0$  می‌باشد. ماتریس لاپلاسیان لبه محدودیت (۸) و برای برآوردن قسمت دوم مساله ۱، دینامیک لبه‌های (۱۴) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{z}_m &= S(\xi_m) \\ \xi_m &= Az_m(t) - \mathcal{K}BF \sum_{j=1}^M \hat{l}_{mj} z_j(t-d(t)) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

در انتهای این بخش، حالت‌های لبه‌ها و ابرمکعب مستطیل دلخواه را تعریف می‌کنیم. اگر عوامل  $i$  و  $j$  با یال  $m$  به هم متصل شوند،  $z_m$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_m = \begin{cases} x_i - x_j & \text{اگر گره } i \text{ سر لبه } m \text{ باشد} \\ x_j - x_i & \text{اگر گره } j \text{ سر لبه } m \text{ باشد} \end{cases} \quad (5)$$

که  $z_m$  حالت‌های نسبی بین عامل‌های  $i$  و  $j$  می‌باشد و حالت لبه  $m$  نامیده می‌شود.

با توجه به (۱) و (۵)، با استفاده از تبدیل زیر می‌توان حالت‌های نسبی  $x_i - x_j$  را برحسب حالت‌های لبه نمایش داد:

$$z_m = \sum_{j=1}^N e_{jm} x_j, \quad m \in I[1, M] \quad (6)$$

که  $e_{jm}$  عنصر  $(j, m)$  ام ماتریس برخورد  $E$  و  $z_m \in \mathbb{R}^n$  می‌باشد. فرم فشرده (۶) به این صورت است:

$$z = (E^T \otimes I_n) x \quad (7)$$

که  $x = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T$  و  $z = [z_1^T, \dots, z_M^T]^T$  فرض می‌کنیم که لبه‌های  $z_m$  در داخل ابرمکعب مستطیل زیر محدود شده‌اند:

$$\Omega_m = \{z_m \in \mathbb{R}^n \mid -\Delta_{m,l} \leq z_{m,l} \leq \Delta_{m,l}, m \in I[1, M], l \in I[1, n]\} \quad (8)$$

$z_m$ ،  $l$  امین عضو  $z_m$  و اسکالر  $\Delta_{m,l}$  یک عدد مثبت است. حالت‌های اولیه لبه‌ها باید در داخل ابرمکعب مستطیل واقع شده باشند یعنی  $z_m(0) \in \Omega_m$ . مرز مجموعه (۸) با  $\partial\Omega_m = \cup_{k=1}^n \partial\Omega_{m,k}$  تعریف می‌شود که:

$$\partial\Omega_{m,l} = \{z_m \in \mathbb{R}^n \mid |z_{m,l}| = \Delta_{m,l}, |z_{m,k}| \leq \Delta_{m,k}, k \in I[1, n] \setminus \{l\}\}$$

### ۳- طراحی پروتکل اجماع

در این بخش، برای رسیدن به اجماع سامانه‌های (۴) با قید (۸)، یک پروتکل اجماع توزیع شده جدید ارائه می‌گردد.

**مساله ۱:** [۳۷] برای سامانه چندعاملی (۴)، قانون کنترل  $u_i(t) = F_i(z_m(t))$  طراحی می‌شود، به طوری که:  
\* اجماع حاصل گردد.

\* برای تمام زمان‌های  $t \geq 0$ ،  $z_m \in \Omega_m$ ، به شرطی که  $z_m(0) \in \Omega_m$  باشد.

با استفاده از حالت‌های نسبی عامل‌ها و در نظر گرفتن تأخیر ارتباطی بین عامل‌های همسایه، یک قانون کنترل توزیع شده به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_i(t) = \mathcal{K}F \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j(t-d(t)) - x_i(t-d(t))) + a_{i(N+1)} (x_L(t-d(t)) - x_i(t-d(t))) \right] \quad (9)$$

$$\begin{cases} z^T (I_M \otimes P)(S(\xi) - \xi) \leq 0 & (1) \\ ((S(\xi) - \xi))^T (I_M \otimes R)\xi \leq 0 & (2) \\ (S(\xi))^T (I_M \otimes R)(S(\xi) - \xi) \leq 0 & (3) \end{cases} \quad (20)$$

که  $\Omega = \prod_1^M \Omega_m$  ضرب کارتین می‌باشد.

**اثبات:** ابتدا حالت‌های لبه‌ها اشباع را توسط مجموعه  $T$  و حالت‌های

لبه‌ها غیراشباع را با مجموعه  $T^C$  نشان می‌دهیم:

$$T = \{(m, l) | z_m \in \partial\Omega_{m,l}, \xi_{m,l}, z_{m,l}, m \in I[1, M], l \in I[1, n]\}$$

$$T^C = \{(m, l) | (m, l) \notin U\}$$

سپس از رابطه (۱۵) خواهیم داشت:

$$S(\xi_{m,l}) = \begin{cases} 0 & \text{if } (m, l) \in U \\ \xi_{m,l} & \text{if } (m, l) \in U^C \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$(1) [37]: z^T (I_M \otimes P)(S(\xi) - \xi)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^M z_m^T P(S(\xi_m) - \xi_m) \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n z_{m,k} P_{kl} (S(\xi_{m,l}) - \xi_{m,l}) \\ &= \sum_{(m,l) \in T} \left( P_{ll} z_{m,l} + \sum_{k=1, k \neq l}^n P_{lk} z_{m,k} \right) (S(\xi_{m,l}) - \xi_{m,l}) \\ &+ \sum_{(m,l) \in T^C} \left( P_{ll} z_{m,l} + \sum_{k=1, k \neq l}^n P_{lk} z_{m,k} \right) (S(\xi_{m,l}) - \xi_{m,l}) \\ &= - \sum_{(m,l) \in T} \left( P_{ll} z_{m,l} + \sum_{k=1, k \neq l}^n P_{lk} z_{m,k} \right) (\xi_{m,l}) \\ &= - \sum_{(m,l) \in T} \left( P_{ll} + \sum_{k=1, k \neq l}^n P_{lk} \frac{z_{m,k}}{z_{m,l}} \right) (z_{m,l} \cdot \xi_{m,l}) \\ &= \sum_{m=1}^M (S(\xi_m) - \xi_m)^T R \xi_m \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (S(\xi_{m,l}) - \xi_{m,l})^T r_{kl} \xi_{m,l} \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^n \left( (S(\xi_{m,l}) - \xi_{m,l})^T (r_{ll} + \sum_{k=1, k \neq l}^n r_{lk}) \right) \xi_{m,l} \\ &+ \sum_{(m,l) \in H^C} (S(\xi_{m,l}) - \xi_{m,l})^T (r_{ll} + \sum_{k=1, k \neq l}^n r_{lk}) \xi_{m,l} \\ &= \sum_{(m,l) \in H} (S(\xi_{m,l}) - \xi_{m,l})^T (r_{ll} + \sum_{k=1, k \neq l}^n r_{lk}) \xi_{m,l} \\ &= - \sum_{(m,l) \in H} (\xi_{m,l})^T (r_{ll} + \sum_{k=1, k \neq l}^n r_{lk}) \xi_{m,l} \leq 0 \end{aligned}$$

بنابراین

$$(S(\xi) - \xi)^T (I_M \otimes R)\xi \leq 0$$

$$(3) : (S(\xi))^T (I_M \otimes R)(S(\xi) - \xi)$$

$$= \sum_{m=1}^M S(\xi_m)^T R(S(\xi_m) - \xi_m)$$

$$= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n S(\xi_{m,l})^T r_{kl} (S(\xi_{m,l}) - \xi_{m,l})$$

$S(\cdot)$  نیز تابع اشباع نامیده می‌شود که برای محدود کردن حالت‌های

نسی در یک مجموعه بسته مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$S(\xi_m) = [s(\xi_{m,1}), \dots, s(\xi_{m,n})]^T$$

برای  $l \in I[1, n]$  داریم [۱۶]:

$$S(\xi_m) = \begin{cases} 0 & \text{if } z_m \in \partial\Omega_{m,l}, \xi_{m,l}, z_{m,l} > 0 \\ \xi_{m,l} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

اکنون می‌توانیم برای سادگی، روابط (۱۴) و (۱۵) را به فرم ماتریسی

زیر بازنویسی کنیم:

$$\dot{z}(t) = (I_M \otimes A)z(t) - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BF)z(t - d(t)) \quad (17)$$

$$\begin{cases} \dot{z} = S(\xi) & (1) \\ \xi = (I_M \otimes A)z(t) - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BF)z(t - d(t)) & (2) \end{cases} \quad (18)$$

## ۴- تحلیل پایداری

**لم ۱:** ابتدا ماتریس‌های مثبت معین متقارن  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و

$R = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} p_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |p_{ij}|, i \in I[1, N] \\ r_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |r_{ij}|, i \in I[1, N] \end{cases} \quad (19)$$

اکنون با توجه به قید (۸)، برای هر  $z \in \Omega$  و  $\xi \in \mathbb{R}^{n \times M}$ ، روابط

زیر برقرار خواهد بود:

در ادامه، شرایط کافی برای پایداری دینامیک لبه‌های (۱۵) را با

استفاده از لم و قضیه زیر به دست می‌آوریم:

از آن جا که برای  $(m, l) \in T$ ،  $|z_{m,k}| \leq |z_{m,l}| = \Delta_{m,l}$  و

$\Delta_{m,l}$ ، بنابراین  $|z_{m,k}/z_{m,l}| \leq 1$  با استفاده از (۱۹) داریم:

$$\begin{aligned} p_{ll} + \sum_{k=1, k \neq l}^n P_{lk} \frac{z_{m,k}}{z_{m,l}} &\geq p_{ll} - \sum_{k=1, k \neq l}^n P_{lk} \frac{z_{m,k}}{z_{m,l}} \\ &\geq p_{ll} - \sum_{k=1, k \neq l}^n |p_{lk}| \geq 0 \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، برای  $(m, l) \in T$ ،  $z_{m,l} \cdot \xi_{m,l} > 0$ ، بنابراین

$$\sum_{(m,l) \in T} \left( P_{ll} + \sum_{k=1, k \neq l}^n P_{lk} \frac{z_{m,k}}{z_{m,l}} \right) (z_{m,l} \cdot \xi_{m,l}) \geq 0$$

و در نتیجه:

$$z^T (I_M \otimes P)(S(\xi) - \xi) \leq 0$$

$$(2) : (S(\xi) - \xi)^T (I_M \otimes R)\xi$$

ماتریس‌های مثبت معین متقارن  $R = [r_{lk}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $P = [p_{lk}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  به شکل زیر وجود داشته باشند:

$$p_{ll} \geq \sum_{k=1, k \neq l}^n |p_{lk}|, l \in I[1, N]$$

$$r_{ll} \geq \sum_{k=1, k \neq l}^n |r_{lk}|, l \in I[1, N]$$

و

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^n \left( S(\xi_{m,l})^T (r_{ll} + \sum_{k=1, k \neq l}^n r_{lk}) (S(\xi_{m,l}) - \xi_{m,l}) \right) \\ &= \sum_{(m,l) \in H} S(\xi_{m,l})^T (r_{ll} + \sum_{k=1, k \neq l}^n r_{lk}) (S(\xi_{m,l}) - \xi_{m,l}) \\ &= - \sum_{(m,l) \in H} S(\xi_{m,l})^T (r_{ll} + \sum_{k=1, k \neq l}^n r_{lk}) (\xi_{m,l}) = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$(S(\xi))^T (I_M \otimes R) (S(\xi) - \xi) \leq 0$$

بنابراین رابطه (۲۰) برقرار می‌باشد.

**قضیه ۱:** با توجه به فرض‌های ۱ و ۲، پروتکل (۹) اجماع سامانه چندعاملی (۱۴) را تحت قید (۸) برای تمام  $z_m(0) \in \Omega_m$  تضمین می‌کند، اگر

$$\left[ \begin{array}{l} I_M \otimes (PA + A^T P) + D(I_M \otimes A^T R A) - \frac{1}{D}(I_M \otimes R) - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes B P F) - D\mathcal{K}(\hat{L} \otimes A^T R B F) + \frac{1}{D}(I_M \otimes R) \\ -\mathcal{K}(\hat{L}^T \otimes F^T P B^T) - D\mathcal{K}(\hat{L}^T \otimes F^T B^T R A) + \frac{1}{D}(I_M \otimes R) \quad D\mathcal{K}^2(\hat{L}^T \hat{L} \otimes F^T B^T R B F) - \frac{1}{D}(I_M \otimes R) \end{array} \right] < 0$$

$$\geq d(t) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds$$

$$\begin{aligned} &D \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds \\ &\geq \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) ds (I_M \otimes R) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}(s) ds \\ &\quad - D \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds \\ &\leq - \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) ds (I_M \otimes R) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}(s) ds \end{aligned} \quad (26)$$

بنابراین، مشتق  $V(z_t, \dot{z}_t)$  را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_t, \dot{z}_t) &\leq 2z^T(t) (I_M \otimes P) \dot{z}(t) + D\dot{z}^T(t) (I_M \otimes R) \dot{z}(t) \\ &\quad - \frac{1}{D} \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) ds (I_M \otimes R) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}(s) ds \end{aligned} \quad (27)$$

با جایگذاری رابطه (۱۸-۱) در (۲۷) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_t, \dot{z}_t) &\leq 2z^T(t) (I_M \otimes P) \dot{z}(t) + D\dot{z}^T(t) (I_M \otimes R) \dot{z}(t) \\ &\quad - \frac{1}{D} \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) ds (I_M \otimes R) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}(s) ds \\ &= 2z^T(t) (I_M \otimes P) \xi + 2z^T(t) (I_M \otimes P) (S(\xi) - \xi) \\ &\quad + DS(\xi)^T (I_M \otimes R) \xi \\ &\quad + DS(\xi)^T (I_M \otimes R) (S(\xi) - \xi) \\ &\quad - \frac{1}{D} \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) ds (I_M \otimes R) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}(s) ds \\ &= 2z^T(t) (I_M \otimes P) \xi + 2z^T(t) (I_M \otimes P) (S(\xi) - \xi) \\ &\quad + D(S(\xi) - \xi)^T (I_M \otimes R) \xi \end{aligned} \quad (28)$$

با استفاده از لم ۱، داریم:

**اثبات:** یک تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی برای سامانه (۱۴) به

صورت زیر معرفی می‌کنیم: [۳۸]

$$V(z_t, \dot{z}_t) = V_1(z_t) + V_2(\dot{z}_t) \quad (22)$$

$$V_1(z_t) = z^T(t) (I_M \otimes P) z(t) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} V_2(\dot{z}_t) &= \int_{-D}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds d\theta \\ &= \int_{t-D}^t (D+s-t) \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds \end{aligned} \quad (24)$$

که  $z(t)$  حالت‌های نسبی،  $\dot{z}(s)$  مشتق حالت‌های نسبی و  $\dot{z}_t(s)$  به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{z}_t: [-D, 0] \rightarrow \mathbb{R} \quad \dot{z}_t(s) = \dot{z}(t+s), \quad s \in [-D, 0]$$

مشتق  $V_2(\dot{z}_t)$  به این صورت خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\dot{z}_t) &= D\dot{z}^T(t) (I_M \otimes R) \dot{z}(t) - \int_{t-D}^t \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds \\ \dot{V}_2(\dot{z}_t) &= D\dot{z}^T(t) (I_M \otimes R) \dot{z}(t) \\ &\quad - \int_{t-D}^{t-d(t)} \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds \\ &\quad - \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds \\ &\leq D\dot{z}^T(t) (I_M \otimes R) \dot{z}(t) \\ &\quad - \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds \end{aligned} \quad (25)$$

با استفاده از نامساوی ینسن داریم:

$$\begin{aligned} &d(t) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds \\ &\geq \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) ds (I_M \otimes R) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}(s) ds \\ &\quad D \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) (I_M \otimes R) \dot{z}(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +D \left( (I_M \otimes A)z(t) - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BF)\bar{z}(t) \right)^T (I_M \otimes R) \left( (I_M \otimes A)z(t) - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BF)\bar{z}(t) \right) \\
 & - \frac{1}{D} \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) ds (I_M \otimes R) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}(s) ds \\
 & \dot{V}(z_t, \dot{z}_t) \leq z^T (I_M \otimes (PA + A^T P)) z \\
 & - z^T \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BPF) \bar{z} - \bar{z}^T \mathcal{K}(\hat{L} \otimes F^T B^T RA) z \\
 & + D [z^T (I_M \otimes A^T RA) z - z^T \mathcal{K}(\hat{L} \otimes A^T RBF) \bar{z} \\
 & - \bar{z}^T \mathcal{K}(\hat{L} \otimes F^T B^T RA) z \\
 & + \bar{z}^T \mathcal{K}^2(\hat{L}^T \hat{L} \otimes F^T B^T RBF) \bar{z}] \\
 & - \frac{1}{D} \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) ds (I_M \otimes R) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}(s) ds
 \end{aligned} \tag{۲۹}$$

با به کارگیری (۱۸-۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(z_t, \dot{z}_t) & \leq 2z^T(t)(I_M \otimes P)((I_M \otimes A)z(t) \\
 & - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BF)\bar{z}(t)) \\
 & + D((I_M \otimes A)z(t) - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BF)\bar{z}(t-d(t)))^T \\
 & (I_M \otimes R)((I_M \otimes A)z(t) \\
 & - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BF)\bar{z}(t-d(t))) \\
 & - \frac{1}{D} \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) ds (I_M \otimes R) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}(s) ds \\
 & \dot{V}(z_t, \dot{z}_t) \leq 2z^T(t)(I_M \otimes P)((I_M \otimes A)z(t) \\
 & - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BF)\bar{z}(t)) \\
 & + D((I_M \otimes A)z(t) - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BF)\bar{z}(t))^T \\
 & (I_M \otimes R)((I_M \otimes A)z(t) - \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BF)\bar{z}(t)) \\
 & - \frac{1}{D} \int_{t-d(t)}^t \dot{z}^T(s) ds (I_M \otimes R) \int_{t-d(t)}^t \dot{z}(s) ds \\
 & \dot{V}(z_t, \dot{z}_t) \leq z^T (I_M \otimes (PA + A^T P)) z - z^T \mathcal{K}(\hat{L} \otimes BPF) \bar{z} \\
 & - \bar{z}^T \mathcal{K}(\hat{L} \otimes F^T B^T RA) z
 \end{aligned} \tag{۳۰}$$

با تعریف متغیر  $\bar{z}(t) = z(t-d(t))$  رابطه (۳۰) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}
 & \text{اکنون می‌توانیم رابطه فوق را به صورت زیر بنویسیم:} \\
 & \dot{V}(z_t, \dot{z}_t) \leq \begin{bmatrix} z^T & \bar{z}^T \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} z \\ \bar{z} \end{bmatrix} \tag{۳۲}
 \end{aligned}$$

با توجه به قضیه پایداری لیاپانوف-کراسوفسکی [۲۲] شرط پایداری سامانه‌های (۱۵)، برقراری ناتساوی ماتریسی زیر می‌باشد:

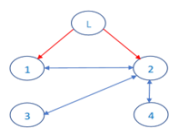
$$V = \begin{bmatrix} I_M \otimes (PA + A^T P) + D(I_M \otimes A^T RA) - \frac{1}{D}(I_M \otimes R) & -\mathcal{K}(\hat{L} \otimes BPF) - D\mathcal{K}(\hat{L} \otimes A^T RBF) + \frac{1}{D}(I_M \otimes R) \\ -\mathcal{K}(\hat{L}^T \otimes F^T PB^T) - D\mathcal{K}(\hat{L}^T \otimes F^T B^T RA) + \frac{1}{D}(I_M \otimes R) & D\mathcal{K}^2(\hat{L}^T \hat{L} \otimes F^T B^T RBF) - \frac{1}{D}(I_M \otimes R) \end{bmatrix} < 0$$

**ملاحظه ۱:** به دلیل این که روابط (۴) و (۱۴) معادل هستند پایداری (۱۴) پایداری و اجماع سامانه‌های (۴) را تضمین می‌نماید:  
 اگر  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_m(t)\| = 0$  باشد، آن‌گاه  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$  و  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_L(t)\| = 0$  نیز برقرار خواهد بود.  
 اکنون نامساوی ماتریسی (۲۱) را به شرط ماکزیمم کردن  $D$  حل می‌کنیم.

**ملاحظه ۲:** هدف از حل ناتساوی ماتریسی (۲۱) پیدا کردن ماتریس فیدبک  $F$  و حداکثر مقدار تأخیر قابل قبول ( $D_{max}$ ) می‌باشد.

### ۵- شبیه‌سازی

در این بخش ما برای نشان دادن درستی نتایج تئوری بخش قبل و کاربرد آن‌ها، یک مثال کاربردی را شبیه‌سازی نموده‌ایم. برای این منظور، یک گراف بدون جهت شامل چهار عامل پیرو و یک رهبر، در نظر گرفته شده‌اند. بهره‌های اتصال و وزن لبه‌ها برابر یک می‌باشند. (شکل ۱)



شکل ۱: گراف ارتباطی

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i(t) & = Ax_i(t) + Bu_i(t) \quad i \in \mathbf{I}[1, N] \\
 A & = [-1.175 \quad 0.9871; -8.458 \quad -0.8776] \\
 B & = [-0.194 \quad -0.03593; -19.29 \quad -3.803]
 \end{aligned}$$

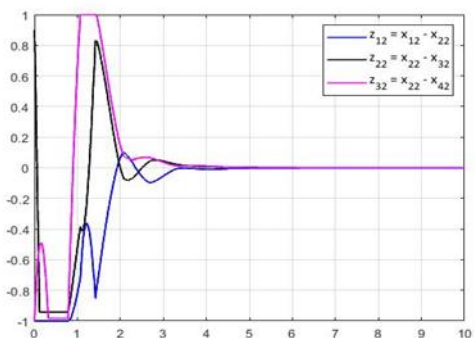
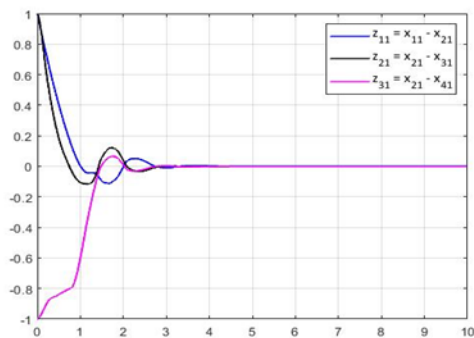
که  $x_{i,1}$  و  $x_{i,2}$  به ترتیب زاویه حمله و نرخ فراز می‌باشند. دینامیک عامل رهبر و تأخیر ارتباطی به شکل زیر انتخاب شده‌اند:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_L(t) & = Ax_L(t) + Bu_L(t) \\
 u_L(t) & = [1; 1] \\
 d(t) & = 0.4 + 0.4 \sin(10t)
 \end{aligned}$$

واضح است که تأخیر ارتباطی سرعت تغییرات بالایی دارد. حداکثر مقدار تأخیر ( $D$ ) نیز ۰.۸ ثانیه می‌باشد.

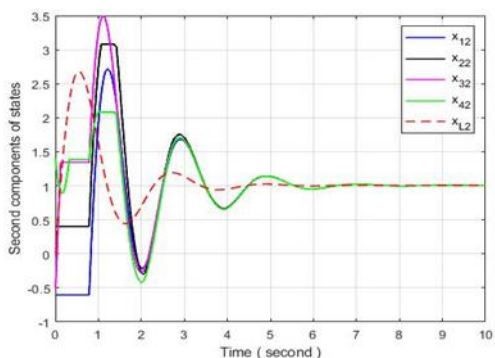
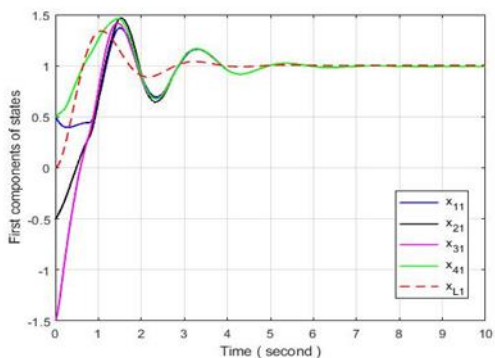
مقدار  $\mathcal{K}$  را با توجه به رابطه (۱۰)، یک در نظر می‌گیریم. همچنین با حل نامعادله ماتریسی (۲۱) مقادیر  $F$  و  $D_{max}$  را به دست می‌آوریم:

$$D_{max} = 1 \text{ s}$$



شکل ۴: حالت‌های نسبی عامل‌ها (حالت‌های لبه‌ها)

به علاوه، عامل‌های پیرو تحت شرایط قضیه ۱ به سرعت به اجماع رسیده و به حالت‌های رهبر پویا همگرا می‌شوند (شکل ۵).



شکل ۵: حالت‌های عامل‌ها

$$F = [0.45 \quad -0.18; -0.18 \quad 9.51]$$

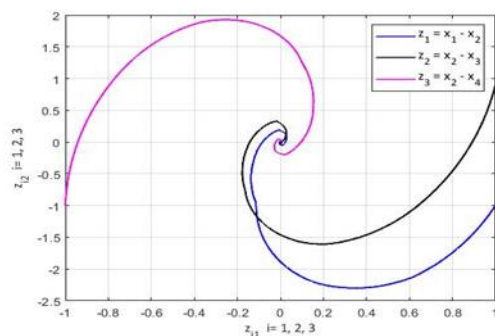
مقادیر اولیه هر عامل پیرو در بازه  $\theta \in (-D, 0)$  با توجه به قید (۸)

به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

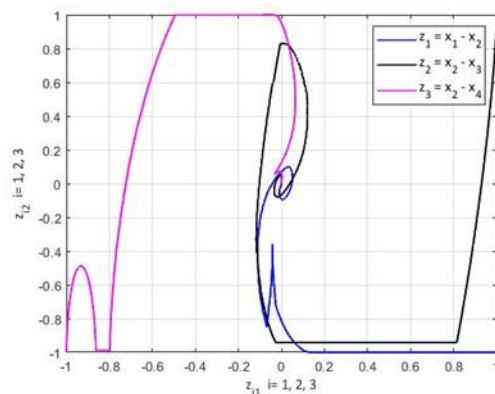
$$\begin{aligned} x_1(0) &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.6 \end{bmatrix} \\ x_2(0) &= \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix} \\ x_3(0) &= \begin{bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \\ x_4(0) &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

هدف ما این است که حالت‌های نسبی (حالت‌های لبه‌ها) درون یک مربع به طول یک، محدود باشند ( $\Delta_{m,l} = 1$ ) به طوری که  $-1 \leq z_{m,l} \leq 1$  به همین دلیل، حالت‌های اولیه را به گونه ای انتخاب می‌کنیم که حالت‌های لبه‌ها درون یا بر روی مرز مربع فوق واقع شوند، یعنی:  $\|z_m(0)\| \in \Omega_m \leq \sqrt{2}$ .

ابتدا، مثال با استفاده از قانون کنترل (۱۱) و بدون قيود اشباع شبیه‌سازی می‌شود که منجر به خروج قسمتی از حالت‌های لبه‌ها از مربع مورد نظر می‌گردد (شکل ۲). در نتیجه ارتباط بین عوامل همسایه قطع شده و اشباع حالت‌های نسبی اتفاق می‌افتد. سپس شبیه‌سازی با در نظر گرفتن قيود اشباع به کمک قانون کنترل (۱۱) و معادلات (۱۵) تکرار می‌شود. با توجه به شکل‌های ۳ و ۴ مشخص است که حالت‌های نسبی از محدوده مربع واحد خارج نمی‌شوند و ارتباط بین عوامل همسایه قطع نمی‌شود (اشباع روی نمی‌دهد). همچنین حالت‌های نسبی پس از مدت زمانی صفرشده در نتیجه، عامل‌های پیرو به اجماع می‌رسند (شکل ۴).

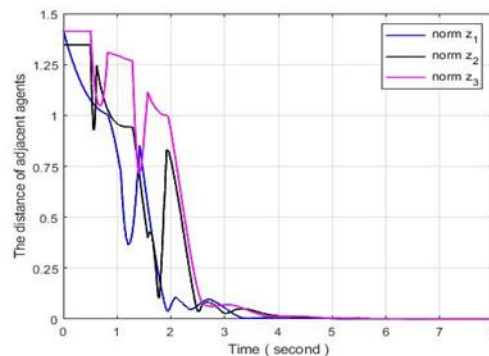


شکل ۲: صفحه فاز حالت‌های لبه‌ها بدون قيود اشباع



شکل ۳: صفحه فاز حالت‌های لبه‌ها با قيود اشباع

- [3] Ge, X. and Q.-L. Han, *Consensus of multiagent systems subject to partially accessible and overlapping Markovian network topologies*. IEEE transactions on cybernetics, 2016. **47**(8): p. 1807-1819.
- [4] Wen, G., et al., *Pinning a complex network to follow a target system with predesigned control inputs*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018. **50**(6): p. 2293-2304.
- [5] Esmailifar, S.M. and F. Saghafi, *Cooperative localization of marine targets by UAVs*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017. **87**: p. 23-42.
- [6] González, A., et al., *Predictor-feedback synthesis in coordinate-free formation control under time-varying delays*. Automatica, 2020. **113**: p. 108811.
- [7] Yamchi, M.H. and R.M. Efsanjani, *Distributed predictive formation control of networked mobile robots subject to communication delay*. Robotics and Autonomous Systems, 2017. **91**: p. 194-207.
- [8] Jiang, H., Q. Bi, and S. Zheng, *Impulsive consensus in directed networks of identical nonlinear oscillators with switching topologies*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012. **17**(1): p. 378-387.
- [9] Olfati-Saber, R. and R.M. Murray, *Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays*. IEEE Transactions on automatic control, 2004. **49**(9): p. 1520-1533.
- [10] Wellman, B.J. and J.B. Hoagg, *A flocking algorithm with individual agent destinations and without a centralized leader*. Systems & Control Letters, 2017. **102**: p. 57-67.
- [11] Toner, J. and Y. Tu, *Flocks, herds, and schools: A quantitative theory of flocking*. Physical review E, 1998. **58**(4): p. 4828.
- [12] Kar, S. and J.M. Moura, *Distributed consensus algorithms in sensor networks with imperfect communication: Link failures and channel noise*. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008. **57**(1): p. 355-369.
- [13] Ding, L., Q.-L. Han, and E. Sindi, *Distributed cooperative optimal control of DC microgrids with communication delays*. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2018. **14**(9): p. 3924-3935.
- [14] Chen, J., et al., *Fusion state estimation for power systems under DoS attacks: A switched system approach*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019. **49**(8): p. 1679-1687.
- [15] Wan, Y., et al., *On the structural perspective of computational effectiveness for quantized consensus in layered UAV networks*. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2018. **6**(1): p. 276-288.
- [16] Chu, H., et al., *Consensus of multiagent systems with relative state saturations*. IEEE Transactions



شکل ۶: نرم حالت‌های لبه‌ها (فاصله عامل‌های همسایه)

## ۶- نتیجه‌گیری

اجماع با رهبر سامانه‌های چندعامله خطی با تأخیر ارتباطی متغیر با زمان و رهبر پویا، تحت قیود اشباع حالت‌های نسبی را در این مقاله مورد بررسی قرار دادیم. ابتدا مساله اجماع سامانه‌های چندعامله تأخیردار با وجود اشباع حالت‌های نسبی را به کمک ماتریس برخورد و ماتریس لاپلاسین لبه، به مساله پایداری دینامیک لبه‌ها که در یک مجموعه بسته کار می‌کنند، تبدیل کردیم. سپس به کمک توابع اشباع یک قانون کنترل توزیع شده طراحی نمودیم که اجماع عامل‌ها را با وجود قیود اشباع حالت‌های نسبی تضمین می‌کند. در ادامه، یک تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب معرفی شد که با کمک آن، شرایط کافی برای اجماع عامل‌ها به دست آمد. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که نه تنها عامل‌ها همگرا شده و مسیر رهبر پویا را به خوبی دنبال می‌کنند بلکه اشباع حالت‌های نسبی نیز اتفاق نمی‌افتد. این در حالی است که تأخیر ارتباطی متغیر با زمان و سریع می‌باشد. به علاوه، شبکه ارتباطی با توجه به محدودیت رنج ارتباطی، متصل باقی می‌ماند. از زمینه‌های تحقیقاتی آینده می‌توان به اضافه نمودن اشباع ورودی یا استفاده از کنترل پیش‌بین اشاره نمود. به علاوه، اجماع زمان محدود یا طراحی کنترل کننده تحریک-رویداد از مواردی می‌باشند که می‌توانیم در کنار اشباع حالت‌های نسبی و تأخیر مورد توجه قرار دهیم. امروزه اشکال دیگر کنترل همکارانه سامانه‌های چندعامله از جمله شکل‌پذیری مورد توجه محققان قرار گرفته است. در همین راستا می‌توان آرایش (شکل‌پذیری) سامانه‌های چندعامله تأخیر زمانی را با وجود اشباع حالت‌های نسبی مورد مطالعه قرار داد.

## مراجع

- [1] Abouheaf, M.I., et al., *Multi-agent discrete-time graphical games and reinforcement learning solutions*. Automatica, 2014. **50**(12): p. 3038-3053.
- [2] Wang, X., Y. Hong, and H. Ji, *Distributed optimization for a class of nonlinear multiagent systems with disturbance rejection*. IEEE transactions on Cybernetics, 2015. **46**(7): p. 1655-1666.

- Robust and Nonlinear Control, 2024. **34**(1): p. 147-166.
- [32] Jenabzadeh, A. and W. Zhang, *Tracking control problem in general linear and Lipschitz nonlinear multi-agent systems with jointly connected topology*. Journal of the Franklin Institute, 2020. **357**(10): p. 6121-6136.
- [33] Wang, J., et al., *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: An Optimal and Robust Perspective*. 2020: Academic Press.
- [34] Chu, H., et al., *Adaptive PI control for consensus of multiagent systems with relative state saturation constraints*. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019. **51**(4): p. 2296-2302.
- [35] Chu, H., et al., *Consensus of multiagent systems with time-varying input delay and relative state saturation constraints*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020. **51**(11): p. 6938-6944.
- [36] Chu, H., et al., *Observer-based consensus of nonlinear multiagent systems with relative state estimate constraints*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018. **50**(7): p. 2456-2465.
- [37] Zanganeh, J., S.K. Hosseini Sani, and N. Pariz, *Consensus tracking control for time-varying delayed linear multi-agent systems under relative state saturation constraints*. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2023: p. 01423312231162970.
- [38] Fridman, E., *Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems*. European Journal of Control, 2014. **20**(6): p. 271-283.
- [39] Adams, R.J., et al., *Robust multivariable flight control*. 2012: Springer Science & Business Media.
- on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019. **51**(4): p. 2391-2402.
- [17] Jiang, W., Y. Chen, and T. Charalambous, *Consensus of general linear multi-agent systems with heterogeneous input and communication delays*. IEEE Control Systems Letters, 2020. **5**(3): p. 851-856.
- [18] Wang, D. and W. Wang, *Necessary and sufficient conditions for containment control of multi-agent systems with time delay*. Automatica, 2019. **103**: p. 418-423.
- [19] Luo, S., et al., *Output consensus of heterogeneous linear multi-agent systems with communication, input and output time-delays*. Journal of the Franklin Institute, 2020. **357**(17): p. 12825-12839.
- [20] Zhou, B., *Truncated predictor feedback for time-delay systems*. 2014: Springer.
- [21] Krstic, M., *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. 2009.
- [22] Kharitonov, V.L., *Lyapunov functionals and matrices*. Annual reviews in control, 2010. **34**(1): p. 13-20.
- [23] Gao, Q. and H.R. Karimi, *Stability, control and application of time-delay systems*. 2019: Butterworth-Heinemann.
- [24] Kharitonov, V.L. and D. Melchor-Aguilar, *On delay-dependent stability conditions*. Systems & Control Letters, 2000. **40**(1): p. 71-76.
- [25] Fridman, E., *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. 2014: Springer.
- [26] Hou, W., et al., *Consensus conditions for general second-order multi-agent systems with communication delay*. Automatica, 2017. **75**: p. 293-298.
- [27] Wang, Z., J. Xu, and H. Zhang, *Consensusability of multi-agent systems with time-varying communication delay*. Systems & Control Letters, 2014. **65**: p. 37-42.
- [28] Li, Y., C. Wang, and D. Liang, *Truncated prediction-based distributed consensus control of linear multi-agent systems with discontinuous communication and input delay*. Neurocomputing, 2020. **409**: p. 217-230.
- [29] Ahmed, Z., et al., *Consensus control of multi-agent systems with input and communication delay: A frequency domain perspective*. ISA transactions, 2020. **101**: p. 69-77.
- [30] Yan, Z., et al., *Event-triggered formation control for time-delayed discrete-time multi-agent system applied to multi-UAV formation flying*. Journal of the Franklin Institute, 2023. **360**(5): p. 3677-3699.
- [31] Yang, W., Z. Shi, and Y. Zhong, *Robust time-varying formation control for uncertain multi-agent systems with communication delays and nonlinear couplings*. International Journal of