

# کنترل مد لغزشی مبتنی بر رخداد با فیدبک از خروجی برای سیستم‌های خطی در حضور اغتشاش خارجی

مرتضی فیروزآبادی<sup>۱</sup>، احمدرضا ولی<sup>۲\*</sup>، عبدالرضا کاشانی‌نیا<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران [morteza.firouzabadi@gmail.com](mailto:morteza.firouzabadi@gmail.com)

<sup>۲</sup> دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران [ar.vali@mut.ac.ir](mailto:ar.vali@mut.ac.ir)

<sup>۲</sup> استادیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران [akashaninia@mut.ac.ir](mailto:akashaninia@mut.ac.ir)

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۰۸

ویرایش: ۱۴۰۳/۰۸/۱۵

دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۲۳

**چکیده:** رویکرد رخداد-تحریک یک استراتژی زمان‌بندی برای کاهش تعداد به‌روزرسانی سیگنال کنترلی در زمان به‌منظور افزایش بهره‌وری کلی سیستم از نظر انرژی و پهنای باند شبکه با حفظ پایداری و کارایی سیستم کنترلی است. در این مقاله، مساله طراحی کنترل کننده مبتنی بر رخداد برای سیستم‌های خطی غیر متغیر با زمان در حضور اغتشاش خارجی وارد شده در غیر کانال ورودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در طراحی کنترل کننده فرض بر آن است که تنها بخشی از متغیرهای حالت تحت عنوان خروجی‌های سیستم قابل اندازه‌گیری هستند. با بکارگیری رویکرد حالت لیونبرگر، مساله طراحی کنترل کننده مد لغزشی با استفاده از رویکرد برای برآورده‌سازی کارآیی  $H_\infty$  نیز پیشنهاد می‌گردد. کنترل کننده مد لغزشی با استفاده از روش لیاپانوف طراحی گردیده‌است به گونه‌ای که منحنی‌های حالت سیستم در یک زمان محدود بر روی ناحیه‌ای در حوالی سطح لغزشی واقع گردند و هیچ‌گاه آن را ترک نمایند. همچنین، با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی، پارامترهای مجهول سطح لغزشی به‌همراه رویکرد حالت تعیین می‌شود به‌نحوی که دینامیک مد لغزشی پایدار مجانبی به‌همراه کارآیی  $H_\infty$  گردد. در انتها، یک کران پایین برای زمان بین دو رخداد تعیین می‌گردد که از پدیده زنو در پیاده‌سازی کنترل کننده جلوگیری شود. سپس، با انجام دو مثال شبیه‌سازی، کارآیی کنترل کننده پیشنهاد شده مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که علاوه بر هدف پایدارسازی حلقه بسته، فرامین کنترلی ارسال شده از سمت کنترل کننده به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌یابد.

**کلمات کلیدی:** کنترل مد لغزشی، رخداد-تحریک، نامساوی‌های ماتریسی خطی، پدیده زنو، کنترل  $H_\infty$ .

## Output Feedback Event Triggered Sliding Mode Control of Linear Systems in the Presence of External Disturbance

Morteza Firouzabadi, Ahmad Reza Vali, Abdorreza Kashaninia

**Abstract:** The event-triggered approach is a scheduling strategy designed to reduce the frequency of control signal updates over time, aiming to enhance overall system efficiency concerning energy consumption and network bandwidth, while maintaining the stability and performance of the control system. This paper investigates the problem of designing an event-based controller for linear time invariant (LTI) systems in the presence of mismatched external disturbances. It is assumed that certain state variables can be directly measured as outputs. The design of an event trigger sliding mode observer is investigated by incorporating a Luenberger observer to meet the  $H_\infty$  performance requirements. A sliding mode controller is designed using the Lyapunov method to ensure that the system trajectories remain within the predefined sliding surface. Furthermore, the tuning parameters of the sliding surface and the state observer are calculated using linear matrix inequality (LMI) to achieve asymptotic stability of the sliding mode dynamics with a prescribed  $H_\infty$  index. Finally, a non-zero lower bound for the minimum inter-event interval is determined to prevent Zeno phenomena.

Then, two numerical examples are provided to demonstrate the performance of the developed controller. Simulation results indicate that, besides achieving the objective of stabilizing the closed-loop system, the control commands generated by the controller are significantly reduced.

**Keywords:** Sliding mode control, Event triggered control, Linear Matrix Inequality, Zeno phenomena,  $H_\infty$  control.

## ۱- مقدمه

در رویکرد رخداد-تحریک (Event trigger) برخلاف استراتژی رایج زمان-تحریک (Time trigger) که در آن انتقال داده‌های اندازه‌گیری شده توسط سنسورها به سمت کنترل‌کننده به صورت متناوب صورت می‌گیرد، تنها وقتی که شرط تحریک رخداد (شرط قضاوت) برقرار گردد، داده‌های اندازه‌گیری شده به سمت کنترل‌کننده انتقال می‌یابند [۱-۳]. بنابراین، در این رویکرد تنها سیگنال‌های اندازه‌گیری شده ضروری به سمت کنترل‌کننده ارسال می‌گردند. در مقایسه با رویکرد مرسوم زمان-تحریک، روش کنترل مبتنی بر رخداد طبیعتی نزدیک‌تر به رفتار انسان به-عنوان یک کنترل‌کننده دارد [۴]. مزیت دیگر این رویکرد آن است که عملکرد ممتد سنسورها و عملگرها و حجم محاسباتی در بخش کنترل-کننده به مقدار چشم‌گیری کاهش می‌یابد [۵]. در کاربرد سیستم‌های کنترل شبکه شده، گام‌های زمانی‌ای که داده اندازه‌گیری شده توسط سنسور از طریق شبکه مخابراتی به سمت کنترل‌کننده ارسال می‌گردد، به طور محسوسی کاهش می‌یابد؛ بنابراین، پهنای باند کانال مخابراتی به صورت موثرتری مورد استفاده قرار می‌گیرد [۶]. همچنین، استفاده از رویکرد رخداد-تحریک در شبکه‌های بی‌سیم موجب ذخیره انرژی انتقال و افزایش طول عمر باتری می‌گردد [۷].

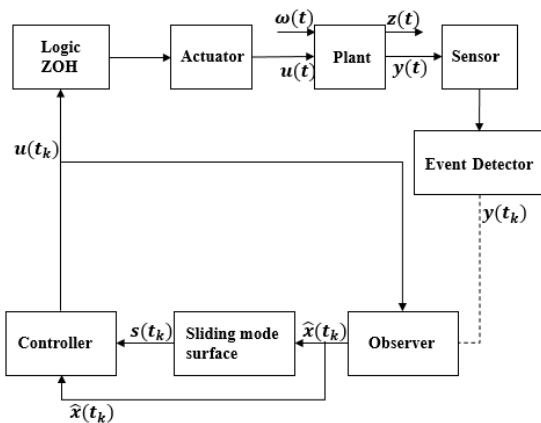
مساله طراحی کنترل‌کننده  $H_\infty$  مبتنی بر رخداد برای سیستم‌های کنترل شبکه شده در مرجع [۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از یک مساله بهینه‌سازی به فرم LMI (Linear matrix inequality)، بهره کنترل‌کننده فیدبک حالت به همراه پارامتر شرط قضاوت به گونه‌ای طراحی شده است که شرط پایداری به همراه کارآیی  $H_\infty$  برای سیستم حلقه بسته برآورده گردد. با این وجود، فرض دسترسی به تمامی متغیرهای حالت در مسائل کاربردی یک فرض محدودکننده است. مساله طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی استاتیکی بر مبنای رویکرد رخداد-تحریک برای سیستم‌های LTI (Linear time invariant) در مرجع [۹] مورد بررسی قرار گرفته است. پارامتر کنترل‌کننده از حل مساله بهینه‌سازی به فرم LMI تعیین گردیده است. با این وجود، دینامیک سیستم مورد بررسی در حالت نامی و بدون حضور اغتشاش در نظر گرفته شده است. مساله طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی مبتنی بر رویکرد برای سیستم‌های LTI با رویکرد رخداد-تحریک در مرجع [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته است. در مرجع مورد بررسی فرض بر آن است که در سمت سنسور محدودیت محاسباتی وجود ندارد و بنابراین، رویکرد پیشنهاد شده پیش از واحد آشکارساز رخداد قرار داده شده است. این موضوع در مسائل کاربردی یک فرض محدودکننده

است. اغتشاش‌های خارجی، عدم قطعیت در پارامترهای سیستم و دینامیک‌های مرتبه بالای مدل نشده که در این مقاله از مجموع آن‌ها تحت عنوان نامعینی‌های دینامیکی یاد می‌شود، جز جدایی‌ناپذیر سیستم‌های دینامیکی کاربردی است که می‌بایست در طراحی کنترل‌کننده لحاظ گردد. در غیر این صورت، عملکرد سیستم تحت کنترل می‌تواند کاهش قابل توجهی پیدا کند. رویکرد کنترل مد لغزشی، قابلیت طراحی کنترل‌کننده‌ای مقاوم در برابر نامعینی‌های ذکر شده را داراست. اساس این روش بدین گونه است که کنترل‌کننده مد لغزشی به گونه‌ای طراحی می‌شود که منحنی‌های حالت سیستم با گذشت زمان محدود بر روی یک سطح لغزشی مطلوب که عاری از نامعینی‌های دینامیکی است قرار می‌گیرند و هیچ‌گاه نمی‌توانند آنرا ترک نمایند. علی‌رغم تمامی مزایای اشاره شده برای روش طراحی کنترل مد لغزشی، حضور تابع علامت در قانون کنترل مد لغزشی باعث ایجاد ناپیوستگی در کنترل‌کننده طراحی شده می‌گردد که در مراجع تحت عنوان پدیده چترینگ (Chattering phenomena) شناخته می‌شود [۱۱]. با توجه به آن که سیگنال کنترلی در روش طراحی مبتنی بر رخداد به صورت متناوب تولید نمی‌شود، می‌توان ادعا نمود که طراحی کنترل مد لغزشی با رویکرد رخداد-تحریک به طور ذاتی پدیده چترینگ را کاهش می‌دهد [۱۲]. مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی برای سیستم‌های LTI در حضور اغتشاش وارد شده در کانال ورودی در مرجع [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته است. با بکارگیری رویکرد طراحی مبتنی بر لیاپانوف (Lyapunov)، قانون کنترل مد لغزشی به گونه‌ای تعیین شده است که مسیر منحنی‌های حالت سیستم با گذشت زمان محدود در ناحیه‌ای در حوالی سطح لغزشی محدود گردد. به طور مشابه، مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی برای سیستم‌های LTI در مرجع [۱۴] نیز مورد بررسی قرار گرفته است. با بکارگیری معادله ریکاتی به همراه LMI، بهره مجهول سطح لغزشی به گونه‌ای تعیین شده است که با قرارگیری منحنی‌های حالت بر روی سطح لغزشی، هدف پایداری مقاوم متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته تضمین گردد. در انتها، یک کران پایین برای زمان بین دو رخداد محاسبه شده است که از پدیده زنو (Zeno phenomena) در پیاده‌سازی کنترل‌کننده جلوگیری شود. با تعمیم ایده مذکور در مرجع [۱۴]، مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با رویکرد رخداد-تحریک برای سیستم‌های تکین در حضور اغتشاش وارد شده در کانال ورودی در مرجع [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. با این وجود، نتایج بدست آمده در مراجع [۱۳-۱۵] برای وقتی که امکان دسترسی به تمامی متغیرهای حالت وجود ندارد، کارآمد نمی‌باشند. در مرجع [۱۶]، کنترل‌کننده مد لغزشی فیدبک خروجی مبتنی بر رویکرد حالت با رویکرد رخداد-تحریک

نتایج مرتبط با طراحی کنترل کننده مد لغزشی با رویکرد رخداد-تحریک مطرح شده است. در بخش چهارم، نتایج شبیه‌سازی برای نشان دادن کارایی رویکرد پیشنهادی در طراحی کنترل کننده آورده شده است. در انتها، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری صورت گرفته است.

## ۲- بیان مساله

مطابق شکل ۱، سیستم کنترل فیدبک خروجی مبتنی بر رخداد-تحریک در این مطالعه به سه واحد اصلی به صورت (۱) سیستم تحت کنترل (۲) آشکارساز رخداد و (۳) کنترل کننده مبتنی بر رویکرد تقسیم‌بندی شده است که در ادامه هر یک از واحدهای مذکور مورد بررسی قرار می‌گیرند.



شکل ۱: شماتیک سیستم کنترل فیدبک خروجی با استفاده از رویکرد مبتنی بر رخداد-تحریک

### ۲-۱ سیستم تحت کنترل

سیستم تحت کنترل به صورت یک سیستم خطی پیوسته در زمان در حضور اغتشاش با دینامیک ذکر شده در رابطه (۱) در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_o \omega(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ z(t) &= Dx(t) + D_o \omega(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $x(t) \in R^m$  بیانگر بردار ورودی حالت،  $u(t) \in R^m$  بیانگر بردار ورودی کنترلی،  $y(t) \in R^q$  بیانگر بردار خروجی اندازه‌گیری شده،  $z(t) \in R^l$  بیانگر بردار خروجی تحت کنترل و  $\omega(t) \in R^p$  بیانگر سیگنال اغتشاش متعلق به فضای  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$  می‌باشند. فرض بر آن است که ماتریس‌های سیستمی در رابطه (۱) همگی معلوم و دارای ابعاد مناسب هستند. فرض شده است که ماتریس  $B$  دارای رتبه کامل ستونی است، جفت  $(A, B)$  کنترل پذیر و جفت  $(A, C)$  رویت پذیر می‌باشند. همچنین، فرض بر آن است که  $\omega(t)$  دارای کران بالا به صورت  $\|\omega(t)\| \leq \varpi$  است.

### ۲-۲ آشکارساز رخداد

آشکارساز رخداد به صورت پیوسته شرط بروز رخداد را برای تعیین آن که آیا رخدادی پدید آمده است یا خیر، پایش می‌کند. به محض آن که رخدادی پدید آمد، آشکارساز رخداد متغیر خروجی جدید را به سمت کنترل کننده مبتنی بر رخداد

پیشنهاد شده است. پارامترهای مجهول مرتبط با سطح لغزشی و رویتگر حالت از حل مساله بهینه‌سازی به فرم نامساوی‌های ماتریسی تعیین شده است به گونه‌ای که دینامیک سیستم حلقه بسته پایدار به همراه کارایی  $H_\infty$  گردد.

با الهام جستن از مراجع [۱۴] و [۱۶]، مساله طراحی کنترل کننده مد لغزشی مبتنی بر رخداد برای سیستم‌های LTI در حضور اغتشاش خارجی وارد شده در غیر کانال ورودی در مطالعه حاضر مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، فرض بر آن است که تنها بخشی از متغیرهای حالت تحت عنوان خروجی سیستم توسط سنسورها قابل اندازه‌گیری هستند. با بکارگیری رویتگر حالت به همراه کنترل کننده پس از بلوک آشکارساز رخداد، مساله طراحی کنترل کننده مد لغزشی با استفاده از رویتگر برای برآورده‌سازی کارایی  $H_\infty$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا، پارامترهای مجهول سطح لغزشی به همراه رویتگر حالت با استفاده از یک مساله بهینه‌سازی به فرم LMI تعیین می‌گردد به گونه‌ای که دینامیک مد لغزشی (مسیر حرکت منحنی‌های حالت پس از قرارگیری بر روی سطح لغزشی) پایدار مجانبی به همراه کارایی  $H_\infty$  گردد. همچنین، طراحی کنترل کننده مد لغزشی با استفاده از روش لیاپانوف مورد بررسی قرار می‌گیرد. در انتها، یک کران پایین برای زمان بین دو رخداد تعیین می‌گردد به گونه‌ای که از پدیده زانو در پیاده‌سازی کنترل کننده جلوگیری شود.

در مطالعه حاضر برخلاف مرجع [۱۰]، کنترل کننده به همراه رویتگر حالت پس از واحد (بلوک) آشکارساز رخداد پیاده‌سازی گردیده است. این امر منجر به کاهش قابل توجه فرامین صادر شده از کنترل کننده می‌گردد. طراحی کنترل کننده مد لغزشی با رویکرد رخداد-تحریک موجب گردیده است که کنترل کننده مد لغزشی طراحی شده تنها در زمان‌های وقوع رخداد (و نه در هر زمان نمونه‌برداری) عمل نماید و در نتیجه، پدیده چترینگ ناشی از حضور تابع علامت در قانون کنترلی به طور چشم‌گیری کاهش پیدا می‌کند. این امر از نقطه نظر کاربردی حائز اهمیت می‌باشد. نوآوری دیگر مطالعه حاضر این است که تعیین هم‌زمان پارامترهای مجهول سطح لغزشی و رویتگر حالت برای برآورده‌سازی کارایی  $H_\infty$  دینامیک مد لغزشی با استفاده از LMI صورت گرفته است. مزیت این روش در آن است که به راحتی می‌توان توسط جعبه‌ابزارهای حل LMI در نرم‌افزار متلب برای محاسبه این پارامترهای مجهول استفاده نمود. به عنوان نوآوری سوم، در مقایسه با مرجع [۱۶]، در این مطالعه ثابت شده است که پدیده زانو در حین پیاده‌سازی سیستم حلقه بسته به وجود نمی‌آید.

ساختار بندی مقاله بدین صورت است که پس از ارائه مقدمه‌ای بر مفاهیم رخداد-تحریک در کنترل سیستم‌های LTI و مروری بر کارهای انجام شده در این حوزه و همچنین، ارائه اهداف و دستاوردهای این مطالعه در بخش اول، در بخش دوم فرمول‌بندی مساله به همراه اهداف اصلی کنترلی آورده شده است. در بخش سوم که مربوط به نتایج اصلی است،

$B$ ، ماتریس  $G$  به صورت  $G = B^\dagger$  در نظر گرفته شده است و لذا  $GB$  ماتریس همانی خواهد بود.  $\hat{x}(t)$  بیانگر تخمین متغیر حالت  $x(t)$  است. برای این منظور، رویترگر لیونبرگر (Leunberger observer) برای تعیین  $\hat{x}(t)$  پیشنهاد می‌شود:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + \tilde{L}[y(t_k T) - C\hat{x}(t)], \quad t \in [t_k T, t_{k+1} T) \quad (5)$$

که در آن  $\tilde{L} = BL$  است.

### ۳-۲ فرمول بندی دینامیک مد لغزشی

از ادبیات کنترل مد لغزشی استنباط می‌شود که قانون کنترل می‌بایست به گونه‌ای تعیین گردد که با قرار گرفتن منحنی‌های حالت سیستم رابطه (۱) بر روی سطح لغزشی، دینامیک سیستم همواره در محدوده به اندازه کافی نزدیک به سطح لغزشی باقی بماند و نتواند از این محدوده خارج شود. دینامیک سیستم واقع بر روی سطح لغزشی تحت عنوان دینامیک مد لغزشی شناخته می‌شود. یک رویکرد مرسوم برای تعیین دینامیک مد لغزشی، تعیین قانون کنترلی معادل با صفر قرار دادن مشتق سطح لغزشی است [۱۷]. برای این منظور، با گرفتن مشتق زمانی از رابطه (۴) و مساوی صفر قرار دادن آن بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= G\dot{\hat{x}}(t) - G(A+BK)\hat{x}(t) = 0 \\ &\rightarrow GBu_{eq} + G\tilde{L}(y(t_k T) - C\hat{x}(t)) - GBK\hat{x}(t) = 0 \quad t \in [t_k T, t_{k+1} T) \end{aligned} \quad (6)$$

با توجه به آن که  $GB$  در رابطه (۶) ماتریس همانی است، قانون کنترل معادل به فرم رابطه (۷) تعیین می‌گردد:

$$u_{eq} = K\hat{x}(t) - L(y(t_k T) - C\hat{x}(t)) \quad t \in [t_k T, t_{k+1} T) \quad (7)$$

با جای گذاری قانون کنترل معادل رابطه (۷) در دینامیک رویترگر رابطه (۵)، دینامیک مد لغزشی به صورت رابطه (۸) تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B(K\hat{x}(t) - L(y(t_k T) - C\hat{x}(t))) + BL(y(t_k T) - C\hat{x}(t)) \\ &\rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = (A+BK)\hat{x}(t) \quad t \in [t_k T, t_{k+1} T) \end{aligned} \quad (8)$$

از طرفی، با تعریف خطای تخمین متغیر حالت به صورت  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  و بهره جستن از رابطه (۱)، معادله دینامیکی خطای تخمین به صورت رابطه (۹) بیان می‌گردد:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (Ax(t) + Bu_{eq}(t) + B_o \omega(t)) - (A\hat{x}(t) + Bu_{eq}(t) + \tilde{L}(y(t_k T) - C\hat{x}(t))) \quad t \in [t_k T, t_{k+1} T) \quad (9)$$

با تعریف خطای تحریک به صورت  $e_y(t) = y(t) - y(t_k)$ ، رابطه (۹) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) - \tilde{L}[Cx(t) - e_y(t) - C\hat{x}(t)] + B_o \omega(t) \\ &\rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = (A - \tilde{L}C)\tilde{x}(t) + \tilde{L}e_y(t) + B_o \omega(t) \quad t \in [t_k T, t_{k+1} T) \end{aligned} \quad (10)$$

با تعریف متغیر حالت افزونه شده به صورت  $\tilde{\xi}(t) = [\tilde{x}^T(t) \quad \tilde{x}^T(t)]^T$  و بهره جستن از روابط (۱)، (۸) و (۱۰)، دینامیک مد لغزشی در فرم افزونه به صورت رابطه (۱۱) بیان می‌گردد:

ارسال می‌نماید. گام‌های زمانی که رخداد در آن‌ها اتفاق می‌افتد به صورت  $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$  نمایش داده می‌شود که در آن  $t_k < t_{k+1}$  است. بدون از دست دادن کلیت مطلب، فرض می‌شود که  $t_0 = 0$  است و اولین رخداد در زمان  $t_0$  پدید می‌آید. با توجه به خروجی  $y(t_k)$  که در گام زمانی  $t_k$  در بافر کنترل کننده قرار می‌گیرد، گام زمانی  $t_{k+1}$  به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$t_{k+1} = \inf \{t > t_k \mid \|e_y(t)\| \geq \eta\} \quad \forall k \in N \quad (2)$$

که در آن  $e_y(t) = y(t) - y(t_k)$  است.

### ۳-۳ کنترل کننده مبتنی بر رویترگر

بر مبنای خروجی واقع در بافر کنترل کننده در آخرین رخداد، مساله طراحی کنترل کننده مبتنی بر رویترگر در این مطالعه مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف، طراحی کنترل کننده برای برآورده‌سازی شروط ذکر شده در ادامه است:

(الف) سیستم رابطه (۱) با  $\omega(t) = 0$  پایدار مجانبی گردد.

(ب) با فرض  $\gamma > 0$ ، شرط کارآیی  $H_\infty$  با شاخص  $\gamma$  مطابق رابطه (۳) برآورده گردد:

$$\int_0^\infty z(t)^T z(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \omega(t)^T \omega(t) dt \quad (3)$$

همانطور که از شکل ۱ پیداست، برای برآورده‌سازی هدف کنترلی ذکر شده در بالا، کنترل کننده مد لغزشی مبتنی بر رویترگر حالت با رویکرد رخداد-تحریک طراحی می‌گردد.

### ۳- طراحی کنترل کننده

در این بخش، پنج گام اصلی در طراحی کنترل کننده مد لغزشی رخداد-تحریک مورد بررسی قرار می‌گیرند. در اولین گام، سطح لغزشی مبتنی بر رویترگر حالت پیشنهاد می‌شود. در گام دوم، با تعیین قانون کنترلی معادل، فرمول بندی تعیین هم‌زمان پارامتر مجهول سطح لغزشی و پارامتر مجهول رویترگر حالت به فرم یک سیستم فضای حالت افزونه صورت می‌گیرد. در گام سوم، تعیین پارامترهای مجهول سیستم افزونه اشاره شده در گام دوم با استفاده از LMI ها صورت می‌پذیرد. در گام چهارم، مساله طراحی کنترل کننده مد لغزشی با روش لیاپانوف مورد بررسی قرار می‌گیرد. در گام آخر، یک کران پایین برای زمان بین دو رخداد تعیین می‌گردد به گونه‌ای که از پدیده زانو در پیاده‌سازی کنترل کننده پیشنهاد شده در گام چهارم جلوگیری شود.

### ۳-۱ سطح لغزشی مبتنی بر رویترگر حالت

سطح لغزشی پیشنهاد شده در این مطالعه به صورت رابطه (۴) است:

$$s(t) = G\hat{x}(t) - \int_0^t G(A+BK)\hat{x}(\theta) d\theta \quad t \in [t_k T, t_{k+1} T) \quad (4)$$

که در آن  $G \in R^{m \times n}$  و  $K \in R^{n \times n}$  ماتریس‌های حقیقی مربوط به سطح لغزشی هستند. به طور خاص، ماتریس  $G$  به گونه‌ای تعیین می‌شود که  $GB$  ناکتین گردد. در اینجا، با توجه به فرض رتبه ستونی کامل ماتریس

که در آن  $\dot{s}(t)$  طبق رابطه (۶) به صورت  $\dot{s}(t) = GBu(t) + \bar{G}\bar{L}(y(t_k T) - C\hat{x}(t)) - GBK\hat{x}(t)$  است. با جای گذاری  $\dot{s}(t)$  در رابطه (۱۵) بدست می‌آید:

$$\dot{V}_s(t) = s^T(t)(u(t) + L(y(t_k T) - C\hat{x}(t)) - K\hat{x}(t)) \quad (۱۶)$$

با جای گذاری  $u(t)$  از رابطه (۱۳) در رابطه (۱۶) بدست می‌آید:

$$\dot{V}_s(t) = s^T(t)(-\rho + \kappa(t))\text{sat}(s(t)) + Ly(t_k T) \quad (۱۷)$$

با جای گذاری  $\kappa(t)$  از رابطه (۱۳)، برای  $\|s(t)\| \geq \delta$  بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}_s(t) &= s^T(t) \left( -(\rho + \kappa(t)) \frac{s(t)}{\|s(t)\|} + Ly(t_k T) \right) \\ &= -(\rho + \kappa(t))\|s(t)\| + s^T(t)Ly(t_k T) \\ &\leq -\rho\|s(t)\| - \kappa(t)\|s(t)\| + \|s(t)\|\|L\|y(t_k T) \\ &\leq -\rho\|s(t)\| \end{aligned} \quad (۱۸)$$

از رابطه (۱۸) می‌توان نتیجه گرفت که  $\dot{V}_s(t)$  منفی است. بنابراین، با گذشت زمان محدود، منحنی‌های حالت سیستم درون ناحیه  $\|s(t)\| < \delta$  قرار خواهند گرفت. برای  $\|s(t)\| < \delta$  با توجه به کنترل کننده پیشنهاد شده در رابطه (۱۳) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}_s(t) &\leq -(\rho + \kappa(t)) \frac{\|s(t)\|^2}{\delta} + \|L\|y(t_k T)\|s(t)\| \\ &\leq -\rho \frac{\|s(t)\|^2}{\delta} + \frac{\kappa(t)}{\delta} (\|s(t)\|\delta - \|s(t)\|^2) \end{aligned} \quad (۱۹)$$

با انتخاب  $\rho$  به اندازه کافی بزرگ می‌توان نتیجه گرفت که  $\dot{V}_s(t) < 0$  است. بنابراین، منحنی‌های حالت سیستم با گذشت زمان بر روی سطح لغزشی  $s(t) = 0$  قرار خواهند گرفت. همچنین، پس از قرارگیری این منحنی‌های مسیر بر روی  $s(t) = 0$ ، تضمین خواهد شد که آن‌ها هیچ‌گاه نمی‌توانند از این سطح لغزشی خارج شوند و اثبات تمام می‌گردد.

### ۳-۴ تحلیل پایداری به همراه کارایی $H_\infty$

در این بخش، هدف تعیین پارامترهای مجهول دینامیک مد لغزشی در رابطه (۱۲) است به گونه‌ای که پایداری به همراه کارایی  $H_\infty$  برای دینامیک مد لغزشی تضمین گردد. برای دستیابی به این مقصود، هدف ارائه یک شرط کافی به فرم LMI برای تعیین پارامترهای  $L$  و  $K$  در رابطه (۱۲) است. نتایج مربوطه در ادامه آورده شده‌است.

**قضیه ۲:** دینامیک مد لغزشی در رابطه (۱۲) در نظر گرفته شود. این دینامیک مد لغزشی پایدار UUB به همراه کارایی  $H_\infty$  در کاهش  $\gamma$  اثر اغتشاش است، اگر ماتریس مثبت معین  $P$  یافت شود به گونه‌ای که:

$$\begin{bmatrix} A_\xi^T P + PA_\xi & PB_{\omega\xi} + C_\xi^T D_{\omega\xi} & PB_\xi & C_\xi^T \\ * & D_{\omega\xi}^T D_{\omega\xi} - \gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۲۰)$$

محدوده‌ای که سیستم به آن همگرا می‌شود عبارت است از:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \begin{bmatrix} A+BK & 0 \\ 0 & A-\bar{L}C \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{L} \end{bmatrix} e_y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\omega\xi} \end{bmatrix} \omega(t) \quad t \in [t_k T, t_{k+1} T) \\ z(t) &= [D \quad D] \xi(t) + D_{\omega\xi} \omega(t) \end{aligned} \quad (۱۱)$$

با تعریف:

$$\begin{aligned} A_\xi &\triangleq \begin{bmatrix} A+BK & 0 \\ 0 & A-\bar{L}C \end{bmatrix}, B_\xi \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{L} \end{bmatrix}, B_{\omega\xi} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\omega\xi} \end{bmatrix}, \\ C_\xi &\triangleq [D \quad D], D_{\omega\xi} \triangleq D_{\omega\xi} \end{aligned}$$

رابطه (۱۱) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_\xi \xi(t) + B_\xi e_y(t) + B_{\omega\xi} \omega(t) \quad t \in [t_k T, t_{k+1} T) \\ z(t) &= C_\xi \xi(t) + D_{\omega\xi} \omega(t) \end{aligned} \quad (۱۲)$$

هدف طراحی پارامترهای مجهول  $L$  و  $K$  در رابطه (۱۲) به گونه‌ای است که دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۱) پایدار از نوع UUB (Uniformly ultimately boundedness) به همراه کارایی  $H_\infty$  با شاخص  $\gamma$  گردد. پیش از تعیین این پارامترهای مجهول، قانون کنترل مد لغزشی برای تضمین همگرایی منحنی‌های حالت سیستم بر روی سطح لغزشی رابطه (۴) تعیین می‌گردد. نتایج در بخش ۳-۳ آورده شده‌است.

### ۳-۳ قانون کنترل مد لغزشی

در این بخش، مساله طراحی قانون کنترل مد لغزشی برای تضمین رسیدن منحنی‌های حالت سیستم به صورت فراگیر بر روی سطح لغزشی رابطه (۴) مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، فرض شود که پارامترهای  $L$  و  $K$  در رابطه (۱۲) معلوم هستند. نتایج در قضیه ۱ آورده شده‌است.

**قضیه ۱:** فرض شود که پارامترهای  $L$  و  $K$  در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) معلوم باشند. با طراحی کنترل کننده مد لغزشی به صورت رابطه (۱۳) تضمین می‌شود که منحنی‌های حالت سیستم به صورت مجانبی فراگیر بر روی سطح لغزشی رابطه (۴) قرار خواهند گرفت و هیچ‌گاه نمی‌توانند از آن خارج گردند.

$$\begin{cases} u(t) = (K + LC)\hat{x}(t) - (\rho + \kappa(t))\text{sat}(s(t)), \\ \text{sat}(s(t)) = \begin{cases} \frac{s(t)}{\delta}, & \|s(t)\| < \delta \\ \frac{s(t)}{\|s(t)\|}, & \|s(t)\| \geq \delta \end{cases} \end{cases} \quad t \in [t_k T, t_{k+1} T) \quad (۱۳)$$

که در آن  $\kappa(t) = \|L\|y(t_k T)$ .

**اثبات:** با انتخاب تابع لیاپانوف به صورت

$$V_s(t) = \frac{1}{2} s^T(t)(GB)^{-1} s(t) \quad (۱۴)$$

و اعمال اپراتور مشتق گیری نسبت به زمان بر روی آن بدست می‌آید:

$$\dot{V}_s(t) = s^T(t)(GB)^{-1} \dot{s}(t) \quad (۱۵)$$

$$J_{T_j} = \int_0^{T_j} (z^T(s)z(s) - \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s) + \dot{V}(\xi(s))) ds - \int_0^{T_j} \dot{V}(\xi(s)) ds \quad (28)$$

$$= \int_0^{T_j} (z^T(s)z(s) - \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s) + \dot{V}(\xi(s))) ds - V(\xi(T_j))$$

با توجه به آن که  $V(\xi(T_j))$  تابعی مثبت است، بنابراین می‌توان از رابطه (۲۸) نتیجه گرفت که:

$$J_{T_j} \leq \int_0^{T_j} (z^T(s)z(s) - \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s) + \dot{V}(\xi(s))) ds \quad (29)$$

شرط کافی برای منفی بودن  $J_{T_j}$  آن است که عبارت داخل انتگرال در رابطه (۲۹) منفی گردد. به عبارتی:

$$J'(t) = z^T(t)z(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(\xi(t)) < 0 \quad (30)$$

با جای گذاری  $z(t)$  از رابطه (۱۲) و  $\dot{V}(t)$  از رابطه (۲۳) در رابطه (۳۰) بدست می‌آید:

$$J'(t) = \xi^T (A_\xi^T P + PA_\xi + PB_\xi B_\xi^T P + C_\xi^T C_\xi) \xi + \text{Sym}(\xi^T C_\xi^T D_{\omega\xi} \omega(t)) + \text{Sym}(\xi^T PB_{\omega\xi} \omega(t)) + \omega^T(t) D_{\omega\xi}^T D_{\omega\xi} \omega(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) - \|e_y(t) - (31) B_\xi^T P \xi\|^2 + \|e_y(t)\|^2$$

با تعریف  $\bar{\xi}(t) = [\xi^T(t) \quad \omega^T(t)]^T$  و:

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} A_\xi^T P + PA_\xi + PB_\xi B_\xi^T P + C_\xi^T C_\xi & PB_{\omega\xi} + C_\xi^T D_{\omega\xi} \\ * & D_{\omega\xi}^T D_{\omega\xi} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (32)$$

از رابطه (۳۱) نتیجه می‌شود که:

$$J'(t) \leq -\lambda_{\min}(-Q) \|\bar{\xi}(t)\|^2 + \|e_y(t)\|^2 \quad (33)$$

اگر  $Q < 0$  باشد، یا به طور معادل نامساوی ماتریسی رابطه (۲۰) برقرار باشد، مشابه روند ذکر شده در روابط (۲۴)–(۲۶)، دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) پایدار UUB به همراه کارآیی  $H_\infty$  در کاهش  $\gamma$  اثر اغتشاش است. محدوده‌ای که سیستم به آن همگرا می‌شود با رابطه (۲۱) بیان می‌گردد و اثبات تمام می‌شود.

در ادامه، بر مبنای نامساوی ماتریسی استخراج شده در رابطه (۲۰)، یک نامساوی ماتریسی به فرم LMI برای تعیین پارامترهای  $K$  و  $L$  در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) پیشنهاد می‌گردد به گونه‌ای که با قرار گرفتن منحنی‌های حالت بر روی دینامیک مد لغزشی، پایداری UUB به همراه کارآیی  $H_\infty$  در کاهش  $\gamma$  اثر اغتشاش سیستم حلقه بسته تضمین گردد. نتایج در قضیه ۳ آورده شده است. برای اثبات قضیه ۳ نیاز به تعریف ۱ و لم ۱ است که در ادامه آورده شده است.

**تعریف ۱ [۱۹]:** فرض شود که ماتریس  $B \in R^{n \times m}$  دارای رتبه کامل ستونی باشد. همواره دو ماتریس اورتاگونال (Orthogonal matrix)  $V \in R^{m \times m}$  و  $U \in R^{n \times n}$  یافت می‌شوند به گونه‌ای که:

$$\tilde{B} = UB = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} BV = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\beta(\eta) = \left\{ \xi(t) \mid \|\xi(t)\| \leq \eta(t) \sqrt{\frac{1}{\delta \lambda_{\min}(P)}} \right\} \quad (21)$$

**اثبات:** ابتدا، با دو بار بکارگیری لم مکمل شور (Schur complement lemma) [۱۹] بر روی نامساوی ماتریسی رابطه (۲۰)، این نامساوی ماتریسی به طور معادل به صورت (۲۲) بیان می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} A_\xi^T P + PA_\xi + PB_\xi B_\xi^T P + C_\xi^T C_\xi & PB_{\omega\xi} + C_\xi^T D_{\omega\xi} \\ * & D_{\omega\xi}^T D_{\omega\xi} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

برای شروع فرض شود که اغتشاش خارجی  $\omega(t)$  برابر صفر در نظر گرفته شود. با تعریف تابع لیاپانوف به صورت  $V(\xi(t)) = \xi^T(t) P \xi(t)$  مشتق گیری از آن بدست می‌آید:

$$\dot{V}(t) = \xi^T(t) P \dot{\xi}(t) + \dot{\xi}^T(t) P \xi(t) \quad (23)$$

با جای گذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۲۳) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (A_\xi \xi(t) + B_\xi e_y(t))^T P \xi(t) \\ &+ \xi^T(t) P (A_\xi \xi(t) + B_\xi e_y(t)) \\ &= \xi^T(t) (A_\xi^T P + PA_\xi) \xi(t) + e_y^T(t) B_\xi^T P \xi(t) \\ &+ \xi^T(t) P B_\xi e_y(t) \\ &= \xi^T(t) (A_\xi^T P + PA_\xi + PB_\xi B_\xi^T P) \xi(t) \\ &- \|e_y(t) - B_\xi^T P \xi(t)\|^2 + \|e_y(t)\|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن ماتریس  $Q$  به صورت  $Q \triangleq A_\xi^T P + PA_\xi + PB_\xi B_\xi^T P$  تعریف شده است. از درایه (1,1) نامساوی ماتریسی رابطه (۲۲) نتیجه می‌شود که  $Q$  منفی معین است. از طرفی، از شرط رخداد-تحریک رابطه (۲) نتیجه می‌شود که برای بازه  $t \in [t_k T, t_{k+1} T)$  رابطه  $\|e(t)\| < \eta$  برقرار است. بنابراین، برای بازه  $t \in [t_k T, t_{k+1} T)$  از رابطه (۲۴) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\lambda_{\min}(-Q) \|\xi(t)\|^2 + \|e_y(t)\|^2 \leq -\frac{\lambda_{\min}(-Q)}{\lambda_{\max}(P)} \xi^T(t) P \xi(t) + \eta^2 \\ &= -\delta V(t) + \eta^2 \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن  $\delta$  به صورت  $\delta \triangleq \frac{\lambda_{\min}(-Q)}{\lambda_{\max}(P)}$  تعریف شده است. محدوده‌ای که سیستم به آن همگرا می‌شود عبارت است از:

$$\beta(\eta) = \left\{ \xi(t) \mid \|\xi(t)\| \leq \eta(t) \sqrt{\frac{1}{\delta \lambda_{\min}(P)}} \right\} \quad (26)$$

در ادامه، کارآیی  $H_\infty$  دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) برای  $\omega(t) \neq 0$  و شرایط اولیه صفر مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، تابع هزینه به صورت رابطه زیر در نظر گرفته شود:

$$J_{T_j} = \int_0^{T_j} (z^T(s)z(s) - \gamma^2 \omega^T(s)\omega(s)) ds \quad (27)$$

رابطه (۲۷) به فرم معادل زیر بازنویسی می‌گردد:

با جای‌گذاری  $P_2 = U_1^T P_{11} U_1 + U_2^T P_{22} U_2$  در رابطه (۳۹) بدست می‌آید:

$$U \left( U^T \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} U \right) U^T \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \rightarrow \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \bar{P}_2 \quad (۴۰)$$

با انجام عملیات ساده ماتریسی بر روی رابطه (۴۰) بدست می‌آید:

$$P_{11} \Sigma V^T = \Sigma V^T \bar{P}_2 \rightarrow \bar{P}_2 = V \Sigma^{-1} P_{11} \Sigma V^T \quad (۴۱)$$

تغییر متغیر  $N = K \bar{P}_1$  در نامساوی ماتریسی رابطه (۳۸) اعمال می‌گردد. همچنین، با استناد به لم ۱، ماتریس  $P_2 B$  در نامساوی ماتریسی رابطه (۳۸) با ماتریس  $B \bar{P}_2$  جای‌گذاری می‌گردد که در آن  $\bar{P}_2$  از رابطه (۴۱) محاسبه شده‌است. نتیجه می‌شود که:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 A^T + A \bar{P}_1 + \bar{P}_1 N^T + BN & 0 & \bar{P}_1 D^T D_o & 0 & \bar{P}_1 D^T \\ * & A^T P_2 + P_2 A - B \bar{P}_2 L C - C^T \bar{L} \bar{P}_2 B^T & P_2 B_o + D^T D_o & B \bar{P}_2 L & D^T \\ * & * & D_o^T D_o - \gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۴۲)$$

با تغییر متغیر  $M = \bar{P}_2 L$ ، LMI رابطه (۳۶) بدست می‌آید و اثبات تمام می‌شود. همچنین، بر مبنای تغییر متغیرهای ذکر شده، در صورتی که LMI رابطه (۳۶) دارای جواب شدنی باشد، پارامترهای  $L$  و  $K$  در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) به‌صورت رابطه (۳۷) تعیین می‌گردند.

### ۳-۵ حداقل فاصله زمانی بین رخدادها

برای از بین بردن پدیده زنون، نیاز است که یک حد پایین غیر صفر برای حداقل فاصله زمانی بین رخدادها تعیین گردد. نتایج مربوطه در قضیه ۱ آورده شده‌است. از لم ۲ آورده شده در ادامه در اثبات قضیه ۴ استفاده می‌شود.

**لم ۲ [۲۱]:** فرض شود که ماتریس  $Q$  هرویتز (Hurwitz) باشد. آن‌گاه همواره یک اسکالر مثبت  $c$  وجود دارد به‌گونه‌ای که:

$$\|e^{Qt}\| \leq ce^{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{2}t}$$

که در آن  $\lambda_{\max}(Q) = \max_i [\text{Re}\{\lambda_i(Q)\}]$  است.

**قضیه ۴:** بر مبنای گام‌های زمانی تعریف شده در رابطه (۲) که رخداد در آن‌ها اتفاق می‌افتد، حداقل فاصله زمانی بین دو رخداد دارای یک کران پایین مثبت است.

**اثبات:** فرض شود که برای هر  $k \in \mathbb{N}$  بیانگر گام زمانی وقوع رخداد باشد. آن‌گاه، در هر یک از زمان‌های واقع در بازه زمانی  $[t_k T, t_{k+1} T)$ ،  $\hat{x}(t_k)$  مقداری ثابت است. با استفاده از تعریف خطای تحریک به‌صورت  $e_x(t) = y(t) - y(t_k T)$ ، برای  $[t_k T, t_{k+1} T)$  بدست می‌آید:

$$\dot{e}_x(t) = \dot{y}(t) = C \dot{e}_x(t) \quad (۴۳)$$

که در آن  $e_x(t) = x(t) - x(t_k T)$  است.  $\dot{e}_x(t)$  برای  $[t_k T, t_{k+1} T)$  برابر خواهد بود با:

که در آن  $U_1 \in R^{m \times n}$ ،  $U_2 \in R^{(n-m) \times n}$  و  $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  مقادیر استثنایی ماتریس  $B_2$  هستند می‌باشند.

لم ۱ [۲۰]: فرض شود که  $B \in R^{n \times m}$  دارای رتبه کامل ستونی باشد و ماتریس  $\bar{P}_1$  دارای ساختار زیر باشد:

$$P_1 = U^T \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} U = U_1^T P_{11} U_1 + U_2^T P_{22} U_2 \quad (۳۵)$$

که در آن  $P_{22} \in R^{(n-m) \times (n-m)}$  و  $P_{11} \in R^{m \times m}$  دو ماتریس مثبت معین دلخواه هستند. ماتریس‌های  $U_1$  و  $U_2$  نیز در رابطه (۳۴) تعریف شده‌است. آن‌گاه، همواره ماتریس نانتکین  $\mathcal{P} \in R^{m \times m}$  وجود دارد به‌گونه‌ای که  $B \mathcal{P} = P_1 B$  برقرار است.

**قضیه ۳:** فرض شود که اسکالر مثبت  $\gamma$  معلوم باشد. دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) پایدار UUB به همراه کارآیی  $H_\infty$  در کاهش  $\gamma$  اثر اغتشاش است، اگر ماتریس‌های مثبت معین  $P_{11} \in R^{m \times m}$ ،  $P_{22} \in R^{(n-m) \times (n-m)}$  و  $\bar{P}_1 \in R^{n \times n}$  و ماتریس‌های حقیقی  $M \in R^{m \times q}$  و  $N \in R^{m \times n}$  یافت شوند به‌گونه‌ای که LMI رابطه (۳۶) برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 A^T + A \bar{P}_1 + N^T B^T + BN & 0 & \bar{P}_1 D^T D_o & 0 & \bar{P}_1 D^T \\ * & A^T P_2 + P_2 A - B M C - C^T M^T B^T & P_2 B_o + D^T D_o & B M & D^T \\ * & * & D_o^T D_o - \gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۳۶)$$

که در آن  $P_2 = U_1^T P_{11} U_1 + U_2^T P_{22} U_2$  است و  $U_1$  و  $U_2$  در رابطه (۳۴) تعریف شده‌است. علاوه بر آن، در صورتی که LMI رابطه (۳۶) دارای جواب شدنی باشد، پارامترهای مجهول در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) به‌صورت رابطه (۳۷) تعیین می‌گردند.

$$K = N \bar{P}_1^{-1}, \quad L = V \Sigma^{-1} P_{11}^{-1} \Sigma V^T M \quad (۳۷)$$

**اثبات:** فرض شود که نامساوی ماتریسی رابطه (۲۰) برقرار باشد. ماتریس‌های  $A_\xi$ ،  $B_\xi$ ،  $B_{\omega\xi}$ ،  $C_\xi$  و  $D_{\omega\xi}$  از رابطه (۱۱) در رابطه (۲۰) جای‌گذاری می‌گردند و  $P = \text{diag}\{P_1, P_2\}$  قرار داده می‌شود. در ادامه، با ضرب طرفین نامساوی حاصل شده از سمت چپ و سمت راست در ماتریس  $\text{diag}\{P_1^{-1}, I, I, I\}$  و تعریف  $\bar{P}_1 \triangleq P_1^{-1}$  بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 A^T + A \bar{P}_1 + \bar{P}_1 K^T B^T + B K \bar{P}_1 & 0 & \bar{P}_1 D^T D_o & 0 & \bar{P}_1 D^T \\ * & A^T P_2 + P_2 A - P_2 B L C - C^T \bar{L} B^T P_2 & P_2 B_o + D^T D_o & P_2 B L & D^T \\ * & * & D_o^T D_o - \gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۳۸)$$

با فرض آن‌که  $P_{11} > 0$  و  $P_{22} > 0$  وجود دارد به‌گونه‌ای که  $P_2 = U_1^T P_{11} U_1 + U_2^T P_{22} U_2$  برقرار باشد، آن‌گاه می‌توان از لم ۱ نتیجه گرفت که همواره ماتریس نانتکین  $\bar{P}_2 \in R^{m \times m}$  وجود دارد به‌گونه‌ای که  $B \bar{P}_2 = P_2 B$  برقرار است. در ادامه، با بهره جستن از تعریف ۱، ماتریس  $\bar{P}_2$  از رابطه  $B \bar{P}_2 = P_2 B$  به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

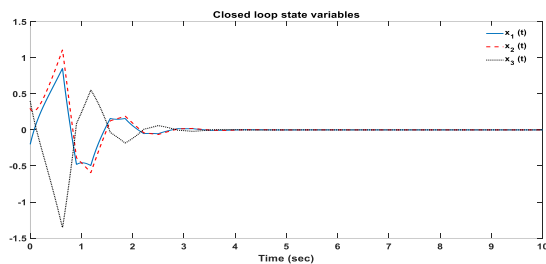
$$U^T \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \bar{P}_2 = P_2 U^T \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \rightarrow U P_2 U^T \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \bar{P}_2 \quad (۳۹)$$

$$A = \begin{bmatrix} -5.1 & 2.2 & -1.1 \\ 3.1 & -5.0 & -2.3 \\ 2.1 & -4.1 & -1.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \\ C = [0.1 \ 0 \ 0.2], D = [0.1 \ 0 \ 0.2], D_w = 0.2.$$

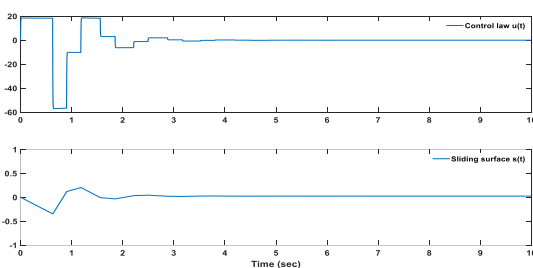
با حل LMI رابطه (۳۶) از قضیه ۳ با سطح کارایی  $\gamma = 3$  پارامترهای مجهول  $K$  و  $L$  در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) به صورت زیر بدست آمده‌است:

$$K = [-916.31 \ -933.53 \ 874.62], L = [321.34]$$

برای پیاده‌سازی کنترل‌کننده پیشنهاد شده در رابطه (۱۳)، پارامترهای آن به صورت  $\rho = 0.6$  و  $\kappa = 0.7$  در نظر گرفته شده‌است. در شبیه‌سازی، اغتشاش خارجی به صورت  $w(t) = 0.1 \sin(0.2\pi t) / (t+1)^2$  در نظر گرفته شده‌است. متغیرهای حالت سیستم از شرایط اولیه  $x_0 = [-0.2 \ 0.3 \ 0.4]^T$  و متغیرهای حالت رویکر از شرایط اولیه  $\hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$  رها می‌گردند. در شکل ۲، نمایی از پاسخ متغیرهای حالت حلقه بسته مشاهده می‌شود. همانطور که از شکل ۲ پیداست، پس از گذشت زمان محدود ۴ ثانیه، پاسخ حالت‌های حلقه بسته به مقدار صفر میل کرده‌است و بنابراین، هدف پایدارسازی حلقه بسته در حضور اغتشاش خارجی برآورده می‌گردد. در شکل ۳، نمایی از قانون کنترل مد لغزشی به همراه تابع سطح لغزشی  $s(t)$  مشاهده می‌شود. همانطور که از این شکل پیداست، قانون کنترلی عاری از پدیده چترینگ است. این مساله از نقطه نظر عملی حائز اهمیت است. همچنین، سطح لغزشی  $s(t)$  با گذشت زمان محدود به مقدار صفر میل نموده‌است.



شکل ۲: نمایی از رفتار متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته رها شده از شرایط اولیه  $x_0$



شکل ۳: (بالا) قانون کنترل مد لغزشی، (پایین) سطح لغزشی

در شکل ۴، گام‌های زمانی وقوع رخداد نمایش داده شده‌است. با توجه به آن که در شبیه‌سازی، دینامیک سیستم با گام زمانی گسسته‌سازی گردیده‌است، پیاده‌سازی روش کنترل مد لغزشی مرسوم در طول بازه

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w \omega(t) = \\ &= Ax(t) - B((K+LC)\hat{x}(t) - (\rho + \kappa(t))\text{sgn}(s(t))) + B_w \omega(t) \\ &= Ae_x(t) - B((K+LC)\hat{x}(t) - (\rho + \kappa(t))\text{sgn}(s(t))) + Ax(t_k T) + B_w \omega(t) \end{aligned} \quad (44)$$

پاسخ معادله دیفرانسیل بالا برای  $t \in [t_k T, t_{k+1} T)$  برابر است با:

$$e_x(t) = e^{A(t-t_k T)} e_x(t_k T) + \int_{t_k T}^t e^{A(t-\eta)} (B((K+LC)\hat{x}(\eta) - (\rho + \kappa(\eta))\text{sgn}(s(\eta))) + Ax(t_k T) + B_w \omega(\eta)) d\eta \quad (45)$$

که در آن  $e_x(t_k T)$  برابر صفر است. همچنین، از رابطه (۸) استنباط می‌شود که:

$$\hat{x}(t) = e^{(A+BK)t} \hat{x}(0) \quad (46)$$

با توجه به آن که بهره  $K$  به گونه‌ای تعیین گردیده‌است که ماتریس  $A+BK$  هرویتز باشد، برای شرایط اولیه  $\hat{x}(0)$  حاصل عبارت  $\|\hat{x}(0)\|$  کراندار است. بنابراین، از رابطه (۴۵) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned} \|e_x(t)\| &\leq \int_{t_k T}^t e^{A(t-\eta)} (\|B\| \|K+LC\| \|e^{(A+BK)\eta}\| \|\hat{x}(0)\| + \|B\| \rho + \kappa(\eta)) \sqrt{m} + \|A\| \|x(t_k)\| + \|B_w\| \|\omega\| d\eta \\ &\leq \int_{t_k T}^t e^{A(t-\eta)} (c \|B\| \|K+LC\| \|\hat{x}(0)\| e^{\frac{\lambda_{\max}(A+BK)}{2} \eta} + \|B\| \rho + \kappa(\eta)) \sqrt{m} + \|A\| \|x(t_k)\| + \|B_w\| \|\omega\| d\eta \\ &\leq \left( c \|B\| \|K+LC\| \|\hat{x}(0)\| e^{\frac{\lambda_{\max}(A+BK)}{2} t_k T} + \rho \|B\| \sqrt{m} + \|B_w\| \|\omega\| \right) \int_{t_k T}^t e^{A(t-\eta)} (\|A\| + \|L\| \|C\|) \|x(t_k)\| d\eta \end{aligned} \quad (47)$$

با تعریف

$$\Phi(t_k T) = (\|A\| + \|L\| \|C\|) \|x(t_k)\| + c \|B\| \|K+LC\| \|\hat{x}(0)\| e^{\frac{\lambda_{\max}(A+BK)}{2} t_k T} + \rho \|B\| \sqrt{m} + \|B_w\| \|\omega\|$$

و با فرض آن که  $\|A\| \neq 0$  باشد، از رابطه (۴۷) بدست می‌آید:

$$\|e_x(t)\| \leq \frac{\Phi(t_k T)}{\|A\|} (e^{\|A\|(t-t_k T)} - 1) \quad (48)$$

با توجه به رابطه  $e_y(t) = y(t) - y(t_k T)$  نتیجه می‌شود که  $e_y(t) = C e_x(t)$ . بنابراین، می‌توان از رابطه (۴۸) نتیجه گرفت که:

$$\|e_y(t)\| \leq \frac{\|C\| \Phi(t_k T)}{\|A\|} (e^{\|A\|(t-t_k T)} - 1) \quad (49)$$

با تعریف  $\bar{T} = t - t_k T$  و از رابطه (۲) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\|C\| \Phi(t_k T)}{\|A\|} (e^{\|A\| \bar{T}} - 1) \geq \eta \rightarrow \bar{T} \geq \frac{1}{\|A\|} \ln(1 + \frac{\eta \|A\|}{\|C\| \Phi(t_k T)}) \quad (50)$$

و اثبات تمام می‌شود.

## ۴- نتایج شبیه‌سازی

به منظور نشان دادن کارایی روش طراحی پیشنهاد شده در بخش ۳، در این بخش دو مثال شبیه‌سازی عددی آورده شده‌است. به طور خاص، مثال شماره ۲ مرتبط با دینامیک سیستم تعلیق فعال خودرو با دو درجه آزادی است که در مرجع [۲۳] مورد بررسی قرار گرفته‌است.

**مثال شماره ۱)** یک سیستم از مرتبه سه با ماتریس‌های سیستمی زیر را در نظر بگیرید:

با تعریف متغیرهای حالت به صورت  $x_1 = z_s - z_u$ ،  $x_2 = \dot{z}_s$ ،  $x_3 = z_u - z_r$  و  $x_4 = \dot{z}_u$ ، دینامیک سیستم در فرم فضای حالت به صورت رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$(52)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_\omega \omega(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

که در آن  $\omega(t)$  بیانگر سرعت رخداد ناشی از ناهمواری‌های جاده است.

ماتریس‌های سیستم عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_u}{m_u} & \frac{c_u}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s + c_u}{m_u} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}, B_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{c_u}{m_u} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \omega(t) = \dot{z}_r.$$

از آنجا که شتاب عمودی کوچک خودرو بیانگر راحتی در رانندگی است، مهم‌ترین هدف سیستم تعلیق کمینه نمودن این شتاب عمودی است. بنابراین، یکی از مشخصه‌های کارآیی در طراحی کننده برای سیستم تعلیق عبارت است از:

$$z_1(t) = \ddot{z}_s \quad (54)$$

از طرفی، انحراف سیستم تعلیق می‌بایست در یک بازه امن محدود گردد تا از آسیب‌های ساختاری جلوگیری شود. همچنین، برای تضمین پایداری مطلوب در حرکت در طول جاده نیاز است که بار دینامیکی چرخ کم‌تر از بار استاتیکی آن باشد. فرم ریاضی دو هدف ذکر شده به صورت زیر است:

$$\begin{cases} |z_s - z_u| \leq z_{\max} \\ |k_u(z_u - z_r)| \leq (m_s + m_u)g \end{cases} \quad (55)$$

که در آن  $z_{\max}$  بیانگر بیشینه انحراف سیستم تعلیق است. مشخصه‌های طراحی ذکر شده در رابطه (54) به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$z_2(t) = \begin{bmatrix} z_s - z_u & k_u(z_u - z_r) \\ z_{\max} & (m_s + m_u)g \end{bmatrix}^T \quad (56)$$

با زیر هم‌نویسی روابط (54) و (56)، خروجی‌های تحت کنترل با رابطه زیر بیان می‌گردند:

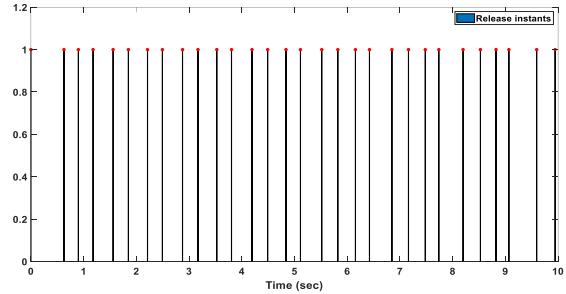
$$z(t) = Dx(t) + D_\omega \omega(t) \quad (57)$$

که در آن:

$$(58)$$

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ \frac{1}{z_{\max}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_u}{(m_s + m_u)g} & 0 \end{bmatrix}, D_\omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_s} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

زمانی ۱۰ ثانیه نیازمند ارسال ۳۰۰۰۰ فرمان کنترلی از سمت کنترل کننده است. با این وجود، همانطور که از شکل ۴ پیداست، در روش طراحی با رویکرد رخداد-تحریک، در بازه زمانی شبیه‌سازی ۱۰ ثانیه، تنها ۳۰ فرمان از سمت کنترل کننده صادر گردیده‌است. این موضوع حاکی از کاهش چشم‌گیر فرامین کنترلی و در نتیجه کاهش عملکرد ممتد عملگرها و همچنین، کاهش حجم محاسباتی در بخش کنترل کننده است.

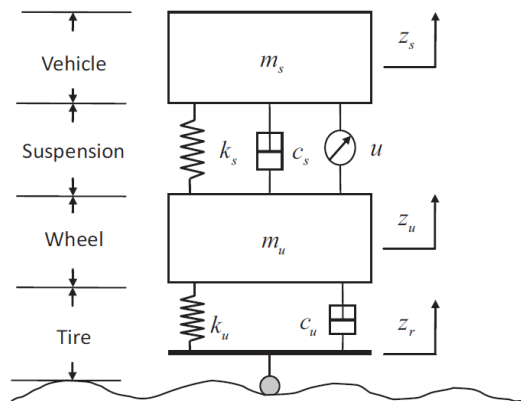


شکل ۴: گام‌های زمانی وقوع رخداد

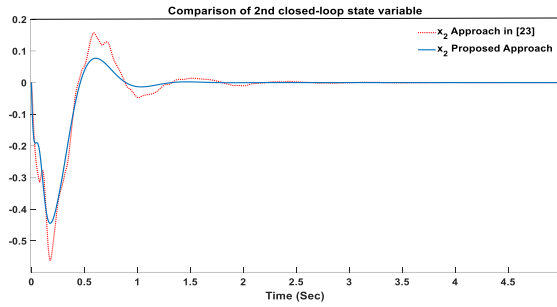
**مثال شماره ۲)** مساله طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی استاتیکی دارای خاصیت  $H_\infty$  با استفاده از رویکرد رخداد-تحریک برای سیستم تعلیق مغناطیسی فعال خودرو با دو درجه آزادی در مرجع [۲۳] مورد مطالعه قرار گرفته‌است. در شکل ۵، نمایی از این سیستم آورده شده‌است. دینامیک سیستم با رابطه زیر توصیف می‌گردد:

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s = -c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - k_s(z_s - z_u) + u(t) \\ m_u \ddot{z}_u = c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_s(z_s - z_u) - c_u(\dot{z}_u - \dot{z}_r) - k_u(z_u - z_r) - u(t) \end{cases} \quad (51)$$

که در آن  $z_s(t)$  و  $z_u(t)$  به ترتیب بیانگر جابه‌جایی جرم فنری و جرم غیرفنری،  $m_s$  و  $m_u$  به ترتیب جرم خودرو و جرم چرخ،  $k_s$  و  $k_u$  به ترتیب ضریب سختی تعلیق و ضریب سختی چرخ،  $c_s$  و  $c_u$  به ترتیب بیانگر ضریب میرایی تعلیق و ضریب میرایی چرخ،  $u(t)$  قانون کنترل فعال و  $z_r$  بیانگر جابه‌جایی عمودی چرخ بر اثر دست‌اندازهای جاده‌ای می‌باشند.

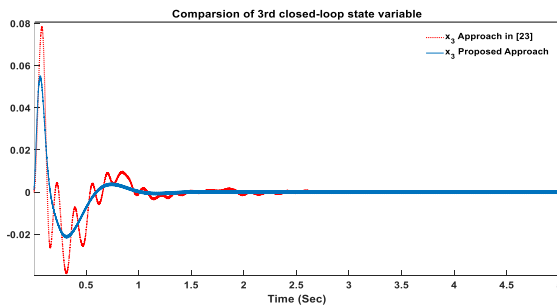


شکل ۵: نمایی از سیستم تعلیق مغناطیسی فعال خودرو با دو درجه آزادی [۲۳]



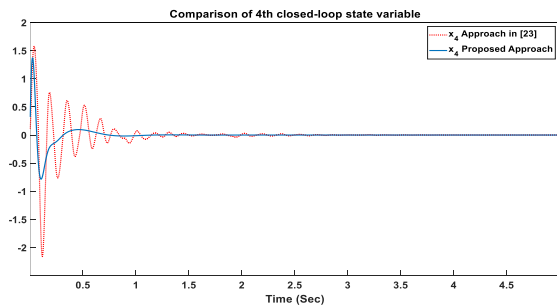
شکل ۷: مقایسه پاسخ متغیر حالت دوم در روش

پیشنهادی ما و مرجع [۲۳]



شکل ۸: مقایسه پاسخ متغیر حالت سوم در روش

پیشنهادی ما و مرجع [۲۳]



شکل ۹: مقایسه پاسخ متغیر حالت چهارم در روش

پیشنهادی ما و مرجع [۲۳]

در شکل ۱۰، نمایی از مقایسه قانون کنترل پیشنهادی در رابطه (۱۳) و قانون کنترل بدست آمده در مرجع [۲۳] مشاهده می‌شود. با توجه به آن که در شبیه‌سازی، دینامیک سیستم با گام زمانی  $T = 0.001$  گسسته‌سازی گردیده‌است، پیاده‌سازی هر یک از روش‌های کنترلی در طول بازه زمانی ۵ ثانیه نیازمند ارسال ۵۰۰۰ فرمان کنترلی از سمت کنترل‌کننده است. با این وجود، در روش طراحی کنترل مد لغزشی پیشنهاد شده توسط ما در رابطه (۱۳)، تعداد ۱۵۵ فرمان از سمت کنترل‌کننده ارسال می‌گردد. همچنین، در روش پیشنهاد شده در مرجع [۲۳]، تعداد این فرامین کنترلی برابر ۳۸۹ است.

به‌منظور شبیه‌سازی، مقادیر پارامترهای مدل بیان شده با رابطه (۵۲) و (۵۷) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$m_s = 973 \text{ Kg}, k_s = 42720 \text{ N/m}, c_s = 1095 \text{ Ns/m},$$

$$m_u = 114 \text{ Kg}, k_u = 101115 \text{ N/m}, c_u = 14.6 \text{ Ns/m}, z_{\max} = 0.1 \text{ m}.$$

اغتشاش  $\omega(t)$  مرتبط با ناهمواری‌های جاده‌ای یک سیگنال سینوسی به-صورت رابطه (۵۹) در نظر گرفته شده‌است:

(۵۹)

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{2h\pi v}{l} \sin\left(\frac{2\pi v}{l} t\right), & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{2l}{v} \\ 0, & \text{if } t > \frac{2l}{v} \end{cases}$$

که در آن  $l = 5 \text{ m}$  و  $v = 25 \text{ km/h}$ ،  $h = 0.06 \text{ m}$  فرض شده‌است. رابطه (۵۹) در واقع یک سیگنال سینوسی با دامنه  $0.52 \text{ m/s}$  و فرکانس  $1.39 \text{ Hz}$  است. LMI رابطه (۳۶) از قضیه ۳ با سطح کارایی  $\gamma = 0.6$  حل می‌گردد. پارامترهای مجهول  $K$  و  $L$  در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

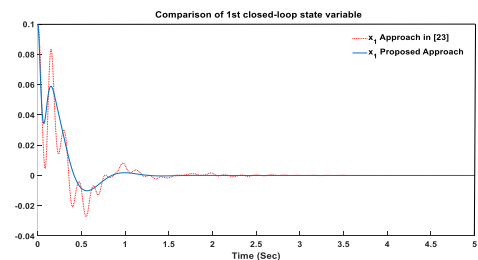
$$K = [0.4272 \quad 0.0109 \quad -1.0055 \quad -0.0069] \times 10^5$$

$$L = [0.965 \quad 0.185 \quad -0.025] \times 10^5$$

همچنین، با حل LMI بدست آمده در مرجع [۲۳]، پارامتر بهره فیدبک استاتیکی به‌صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$K = [0.97 \quad 0.415 \quad -3.75] \times 10^4$$

در شبیه‌سازی‌ها، دینامیک سیستم با گام زمانی  $T = 0.001$  گسسته‌سازی گردیده‌است. پارامترهای کنترل‌کننده رابطه (۱۳) به‌صورت  $\rho = 0.3$  و  $K = 0.1$  در نظر گرفته شده‌است. متغیرهای حالت سیستم از شرایط اولیه  $x_0 = [0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  و متغیرهای حالت روی‌تگر از شرایط اولیه  $\hat{x}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  رها می‌گردند. در شکل‌های ۶، ۷، ۸ و ۹ مقایسه پاسخ متغیرهای حالت حلقه بسته مشاهده می‌شود. با توجه به شکل‌های مذکور پیداست که در حضور اغتشاش مرتبط با ناهمواری‌های جاده‌ای، متغیرهای حالت حلقه بسته در روش پیشنهادی ما در مقایسه با مرجع [۲۳] سریع‌تر و ملایم‌تر به صفر میل می‌کنند. این امر مزیت عمده روش طراحی کنترل مد لغزشی پیشنهاد شده توسط ما می‌باشد.



شکل ۶: مقایسه پاسخ متغیر حالت اول در روش پیشنهادی ما و مرجع [۲۳]

[۳] رهنما معرفان پور و مهدیان دهکردی، "طراحی قانون کنترل تحریک-رویداد برای اجماع سیستم‌های چندعاملی فازی با تاخیر زمانی در ورودی"، "مجله کنترل"، جلد ۱۵، صفحه ۲۲-۱۱، ۱۴۰۰.

[4] W. P. Heemels, K. H. Johansson, and P. Tabuada, "An introduction to event-triggered and self-triggered control," IEEE conference on decision and control (CDC), pp. 3270-3285, 2012.

[5] A. Sahoo, H. Xu, and S. Jagannathan, "Adaptive neural network-based event-triggered control of single-input single-output nonlinear discrete-time systems," IEEE transactions on neural networks and learning systems, vol. 27, pp. 151-164, 2015.

[6] X. M. Zhang, Q. L. Han, X. Ge, D. Ding, L. Ding, D. Yue, and C. Peng, "Networked control systems: A survey of trends and techniques," IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, vol. 7, pp. 1-17, 2019.

[7] Y. Iino, T. Hatanaka, and M. Fujita, "Event-predictive control for energy saving of wireless networked control system," American Control Conference (ACC), pp. 2236-2242, 2009.

[8] D. Yue, E. Tian, and Q. L. Han, "A delay system method for designing event-triggered controllers of networked control systems," IEEE Transactions on automatic control, vol. 58, pp. 475-481, 2012.

[9] X. M. Zhang and Q. L. Han, "Event-triggered dynamic output feedback control for networked control systems," IET Control Theory & Applications, vol. 8, pp. 226-234, 2014.

[10] J. Zhang and G. Feng, "Event-driven observer-based output feedback control for linear systems," Automatica, vol. 50, pp. 1852-1859, 2014.

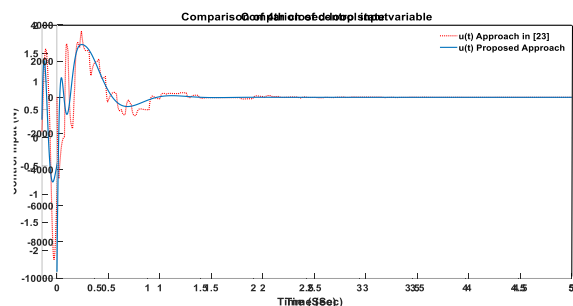
[11] S. J. Gambhire, D. R. Kishore, P. S. Londhe, and S. N. Pawar, "Review of sliding mode based control techniques for control system applications," International Journal of dynamics and control, vol. 9, pp. 363-378, 2021.

[۱۲] فرزاد زارعی، محمد حسین شفیع، اکبر رهیده، "کنترل مد لغزشی مبتنی بر روش تحریک-رویداد در سیستم‌های خطی دارای اغتشاش و نایقینی"، "مجله کنترل"، جلد ۱۱، صفحه ۲۴-۱۳، ۱۳۹۶.

[13] A. K. Behera and B. Bandyopadhyay, "Robust sliding mode control: An event-triggering approach," IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, vol. 64, pp. 146-150, 2016.

[14] X. Fan and Z. Wang, "Event-triggered integral sliding mode control for linear systems with disturbance," Systems & control letters, vol. 138, pp. 104669, 2020.

[15] X. Fan and Z. Wang, "Event-triggered sliding mode control for singular systems with disturbance," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 40, pp. 101011, 2021.



شکل ۱۰: مقایسه قانون کنترل در روش پیشنهادی ما و مرجع [۲۳]

## ۵- نتیجه گیری

در مطالعه حاضر، طراحی کنترل مد لغزشی مبتنی بر رخداد برای سیستم‌های LTI مورد بررسی قرار گرفت. از جمله موارد حائز اهمیت در نظر گرفته شده در این مطالعه: (۱) اغتشاش خارجی وارد شده در غیر از کانال ورودی (۲) فیدبک از خروجی و (۳) قرار دادن بلوک رویتگر حالت لیونبرگر پس از شرط وقوع رخداد می‌باشد. همچنین، در روند طراحی کنترل‌کننده مواردی چون (۱) تعیین پارامترهای مجهول سطح لغزشی به همراه رویتگر حالت با استفاده از LMI ها (۲) طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با استفاده از روش لیاپانوف و (۳) تعیین یک کران پایین برای زمان بین دو رخداد برای جلوگیری از پدیده زنون در پیاده‌سازی کنترل‌کننده دارای اهمیت کاربردی می‌باشند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که هدف پایدارسازی حلقه بسته در رویکرد رخداد-تحریک با تعداد فرامین کنترلی بسیار کم‌تری در مقایسه با روش‌های مرسوم طراحی زمان-تحریک صورت گرفته‌است. به‌عنوان یک پیشنهاد برای کارهای آتی، پیاده‌سازی کنترل‌کننده طراحی شده در حضور شبکه مخابراتی است که از نقطه نظر کاربردی حائز اهمیت خواهد بود. یکی از موضوعات تحقیقاتی ارزشمند در حوزه رخداد-تحریک، طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر رویتگر اغتشاش است [۲۲]. بنابراین، تعمیم نتایج بدست آمده به مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی مبتنی بر رویتگر اغتشاش در حضور رخداد-تحریک پیشنهادی دیگر برای کارهای آتی می‌باشد.

## مراجع

- [1] C. Peng and F. Li, "A survey on recent advances in event-triggered communication and control," Information Sciences, vol. 457, pp. 113-125, 2018.
- [2] J. Wu, M. Lu, F. Deng, and J. Chen, "Robust Output Regulation of Linear Uncertain Systems by Dynamic Event-Triggered Output Feedback Control," IEEE Transactions on Cybernetics, vol. 53, pp. 7333-7341, 2023.

- [16] X. Liu, X. Su, P. Shi, C. Shen, and Y. Peng, "Event-triggered sliding mode control of nonlinear dynamic systems," *Automatica*, vol. 112, pp. 108738, 2020.
- [17] Y. Pan, C. Yang, L. Pan, and H. Yu, "Integral sliding mode control: performance, modification, and improvement," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 14, pp. 3087-3096, 2017.
- [18] E. Fridman and L. Shaikhet, "Stabilization by using artificial delays: An LMI approach," *Automatica*, vol. 81, pp. 429-437, 2017.
- [19] Z. Wang, F. Yang, D. W. Ho, and X. Liu, "Robust  $H_\infty$  control for networked systems with random packet losses," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 37, pp. 916-924, 2007.
- [20] D. W. Ho and G. Lu, "Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback: the unified LMI approach," *International Journal of Control*, vol. 76, pp. 105-115, 2003.
- [21] J. Zhang, X. Liu, Y. Xia, Z. Zuo, and Y. Wang, "Disturbance observer-based integral sliding-mode control for systems with mismatched disturbances," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, pp. 7040-7048, 2016.
- [22] L.G. Moreira, S. Tarbouriech, A. Seuret, and J.G. da Silva Jr, "Observer-based event-triggered control in the presence of cone-bounded nonlinear inputs," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 33, pp.17-32, 2019.
- [23] G. Wang, M. Chadli, H. Chen, and Z. Zhou, "Event-triggered control for active vehicle suspension systems with network-induced delays," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, pp.147-172, 2019.