مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۳، صفحه ۵۸-۴۹

یک راه‌کار ابتکاری برای حل مسأله کوتاه‌ترین زمان به عنوان کلاسی از مسائل حساب تغییرات

بهزاد کفاش
استادیار، گروه علوم مهندسی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اردکان، یزد، ایران bkafash@ardakan.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۱۲ ویرایش: ۱۴۰۳/۰۶/۰۲ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۱۷

چکیده: مسأله کوتاه‌ترین زمان یک مسأله قدیمی است که از آن به عنوان منشاء ظهور حساب تغییرات یاد می‌شود. ازطرفی کاربردهای مختلف حساب تغییرات در علوم مختلف از جمله ریاضیات، فیزیک، مهندسی برق، مکانیک و رباتیک این حوزه را به یک زمینه فعال تحقیقاتی برای محققان در حوزه‌ی ریاضیات و مهندسی تبدیل نموده است. در این مقاله، یک روش ابتکاری برای حل مسأله کوتاه‌ترین زمان ارائه شده است. این روش بر پایه تبدیل معادله دیفرانسیل مسأله کوتاه‌ترین زمان، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل استوار است. در استفاده از روش پیشنهادی دو انتخاب غیر بدیهی برای تشکیل دستگاه معادلات ارائه گردیده و شکل کلی جواب عمومی در هر حالت به دست آمده است. در نهایت در بخش مقایسه مسیرهای مختلف حل مسأله کوتاه‌ترین زمان، مشخص گردید که تنها یکی از دو جواب به دست آمده حائز شرایط مسأله کوتاه‌ترین زمان است. لازم به ذکر است، جواب بهینه به‌دست آمده در امتداد مسیر پیشنهادی دقیقاً با مقدار به‌دست آمده در امتداد مسیر بهینه یعنی منحنی چرخ‌زاد برابری می‌کند. همچنین برای فهم بهتر موضوع دو رویه در نرم‌افزار میپل ارائه و خروجی‌های حاصل از آن به نمایش در آمده است.

کلمات کلیدی: مسأله کوتاه‌ترین زمان، حساب تغییرات، منحنی چرخ‌زاد ، معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ.

An Innovative Solution for the Brachistochrone Problem as a Class of the Calculus of Variations

Behzad Kafash

Abstract: The problem of the shortest time is an old problem that is referred to as the origin of the calculus of variation. The various applications of calculus of variations in different fields, including mathematics, physics, electrical engineering, mechanics, and robotics, have transformed this area into an active research field for mathematicians and engineers. In this article, an innovative method for solving the Brachistochrone Problem is proposed. This method is based on transforming the differential equation of the Brachistochrone Problem into a system of differential equations. In the proposed approach, two non-trivial choices for forming the system of equations are presented, and the general form of the solution is obtained in each case. Finally, it is determined that only one of the two obtained solutions satisfies the proposed final condition of the problem. Additionally, the optimal solution obtained from the proposed path exactly matches the value obtained along the optimal path, namely the cycloid. Furthermore, two Maple procedures are presented, and the resulting outputs are displayed.

Keywords: The Brachistochrone Problem, Calculus of variations, cycloid curve, Euler-Lagrange differential equation

۱- مقدمه

بعد از معرفی حساب دیفرانسیل در قرن هفدهم، حساب تغییرات و به تبع آن مسائل کنترل بهینه متولد و توسعه یافتند. در حساب دیفرانسیل با مسائلی سروکار داریم که موضوع آن‌ها دستیابی به مقادیری از متغیرهای مستقل است که مقدار بیشینه یا کمینه توابع وابسته به آن‌ها را نتیجه دهد. اما در حساب تغییرات شناسایی روش‌ها و راه‌کارهایی برای حل مسائلی مطرح می‌شود که مجهول نه یک یا چند مقدار بلکه یک یا چند تابع است. مسأله‌ی بنیادی در حساب تغییرات یافتن تابع یا توابعی مجهولی است که انتگرال معین دربرگیرنده‌ی آن‌ها، بیشینه یا کمینه شود. به‌عبارتی در این حوزه، معمولاً مسائل به صورت یک تابعک هدف تعریف می‌شوند که باید مقدار بهینه‌ی آن‌ها محاسبه شود. این تابعک هدف عمدتاً به‌صورت یک انتگرال از یک یا چند تابع مجهول، تعریف می‌شود. در واقع حساب تغییرات با بهینه‌سازی تابعک‌ها سروکار دارد وگستره‌ی آن بسیاری از شاخه‌های علوم طبیعی و ریاضیات را فراگرفته است. ناگفته نماند که حساب تغییرات در ابتدا برای بررسی مسائل فیزیکی معرفی و به مرور گسترش پیدا کرد و از آن به عنوان عامل اصلی نگرش مدرن به مسائل فیزیکی یاد می‌شود. از طرفی پیشرفت حساب تغییرات خود عاملی جهت پیشرفت شاخه‌های دیگر علم ریاضی نظیر آنالیز و توپولوژی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و کنترل بهینه شده است. این حوزه به صورت گسترده‌ای در علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد، برنامه‌ریزی و سایر حوزه‌های دیگر کاربرد دارد. همچنین حساب تغییرات نقش مهمی در توسعه مسائل کنترل بهینه داشته است. در این نوع مسائل، هدف کنترل کردن سیستم به نحوی است که یک تابع هدف خاص را بیشینه یا کمینه کند. از جمله کاربردهای معروف این حوزه می‌توان به کنترل پرواز هواپیما، کنترل تولید برق و کنترل ربات‌ها اشاره کرد. اگر چه حساب تغییرات به‌عنوان یک شاخه پرکاربرد و مهم از علم، سرشار از یادداشت‌های تاریخی جالبی است ولی فرایند توسعه آن همچنان ادامه داشته و ظهور شگفتی‌های جدید در آن دور از انتظار نیست.

ریاضی‌دانان در طول تاریخ با مسائل بهینه‌سازی سروکار داشته و برای حل بسیاری از این دست مسائل راه‌کارهای هوشمندانه‌ای ارائه نموده‌اند. به عنوان نمونه یونیان باستان دریافته بودند که از بین منحنی‌های بسته با محیط معین، دایره بیشترین مساحت را دارد. به عبارتی تاریخچه حساب تغییرات مربوط به یونان باستان است ولی پیشرفت زیاد اروپای غربی در این رشته تا قرن هفدهم میلادی به طول انجامید. می‌توان گفت شعله‌های پیشرفت حساب تغییرات از آن زمان مشتعل شد که یوهان برنولی[1] (ژان اول) در سال ۱۶۹۶ به بررسی و حل مسأله کوتاه‌ترین[2] زمان روی آورد [۱]. البته شواهد تاریخی نشان می‌دهد که گالیله[3] پیش از یوهان برنولی در کتاب «گفتگوهای مربوط به دو علم جدید[4]»، روی این مسأله کار کرده بود [۲]. برنولی با طرح مسأله کوتاه‌ترین زمان ریاضی‌دانان اروپایی را برای زورآزمایی فکری به مبارزه طلبید. در واقع او این مسأله را به‌عنوان چالشی برای تیزترین ریاضی‌دانان جهان مطرح تا برتری ریاضی‌دانان آلمانی-سوئیسی را به رخ جهانیان بکشد. هدف این مسأله پیدا کردن یک منحنی است که دو نقطه A و B را در صفحه‌ای قائم متصل نماید به‌طوری که مهره‌ای لغزان در طول منحنی واصل بین این نقاط، در کوتاه‌ترین زمان تحت تاثیر گرانش حرکت کند. پس از طرح این مسأله راه حل‌های متنوعی برای آن ارایه گردید و به مرور ریاضی‌دانان سعی در طرح مسائل مشابه داشتند. به‌مرور با طرح مسائل مختلف از این دست، حساب تغییرات و مسائل کنترل بهینه گسترش یافت. شواهد تاریخی نشان می‌دهد که در آن زمان مسأله کوتاه‌ترین زمان توسط لایبنیز[5]، نیوتن، هوپیتال[6]، یوهان و ژاکوب برنولی حل شد [۳]. لازم به ذکر است، اگر چه نیوتن مسأله را با تاخیر دریافت نمود ولی سریعاً نسبت به حل آن اقدام نمود که نشان از توانائی بالای فکری این ریاضی‌دان دارد، حال آن‌که یوهان برای حل این مسأله دو هفته وقت گذاشته بود. البته راه‌حل یوهان برنولی ظریف‌تر از راه‌حل دشوار و کلی ژاکوب بود. هرچند نیوتن راه‌حل خود را بدون نام منتشر کرده بود ولی یوهان هنگامی که راه حل مسأله را دید تشخیص داد که مربوط به نیوتن است. او در این باره چنین اظهار داشت: "اگر چه مؤلف با فروتنی نامش را آشکار نکرده، می‌توان بی هیچ شکی مطمئن بود که راه‌حل آقای نیوتن است؛ چون حتی اگر هیچ اطلاع دیگری جز این نمونه هم نداشتم، او را از سبکش می‌شناختم، چنانکه شیر را از رد پنجه‌اش[7](منابع [۴] و [۵]).

شاید بتوان به نوعی پایه‌گذار روش‌های حل مسائل کنترل بهینه را اویلر قلمداد نمود. وی در سال ۱۷۷۴ طی ارایه‌ی مقاله‌ای تحت عنوان "روش‌های یافتن منحنی‌های مسطح که نشان دهنده‌ی خواص بیشینه یا کمینه می‌باشند" روشی اساسی را برای حل مسائل کنترلی ارایه نمود [۶]. این روش دارای یک مبنای تحلیلی می‌باشد که منجر به تبدیل مسأله‌ی حساب تغییرات به معادله‌ی معروف اویلر-لاگرانژ[8] گردید. برخی محققان به مرور تاریخی مسأله کوتاه‌ترین زمان و بیان توسعه حساب تغییرات پرداخته‌اند، مطالعاتی که منشأ آن‌ها از طریق مشارکت‌های برنولی، اویلر، لاگرانژ، ژاکوبی، وایرشتراس، هیلبرت و دیگران ردیابی شده است (نظیر منابع [۷] و [۸]). با توجه به قدمت دیرینه‌ی مسأله کوتاه‌ترین زمان و موضوع حساب تغییرات و از آنجایی که این موضوعات و تعمیم‌های مختلف آن‌ها کاربردهای بسیار متفاوتی دارد، همواره مورد توجه محققین قرار گرفته و تحقیقات متعددی بر روی آن‌ها انجام شده است [۹] و [۱۰]. کوشنر و همکاران در منبع [۱۱] به استفاده از زنجیره مارکوف برای حل مسائل مختلف و از جمله مسائل حساب تغییرات پرداخته و این روش در مقاله [۱۲] برای حل مسائل کنترل مورد استفاده قرار گرفت. در مرجع [۱۳] نویسندگان جواب مسأله کوتاه‌ترین زمان را به عنوان یک منحنی پارامتری

[1] Johann Bernoulli(1667-1748)
[2] The Brachistochrone Problem
[3] Galileo Galilei (1636-1564)
[4] Dialogues Concerning Two New Sciences
[5] Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)
[6] Guillaume de l'Hôpital(1661-1704)
[7] "Ah! I recognize the lion by his paw."
[8] Euler–Lagrange equation

در فضای سه‌بعدی در نظر گرفته و به تجزیه و تحلیل مبنای حاصل از به‌کارگیری روش خود پرداخته‌اند. نویسندگان مقاله [۱۴] یک روش جدید برای حل مسأله کوتاه‌ترین زمان ارائه نمودند که از یک فرآیند فیزیک جامدات برای ساخت شبکه‌ای با یک واحد سلول و عامل تبدیل استفاده شده که خطای کمی نسبت به جواب بهینه دارد. محققان در منبع [۱۵] با گسترش مسأله کوتاه‌ترین زمان، یک کاربرد عملی در نظر گرفتند تا مسیر بهینه‌ای برای یک دوچرخه‌سوار (به عنوان یک ذره متحرک) را در یک پیست دوچرخه‌سواری پیدا کنند. محققان در مقاله [۱۶]، به کاوش در گسترش آتش‌سوزی در امتداد مسیر کوتاه ترین زمان پرداخته و آن را با سایر مسیرهای محتمل مقایسه نموده‌اند. ایجاد یک بسته‌ی آموزشی برای مسأله کوتاه‌ترین زمان، دستاورد محققان در منبع [۱۷] بود که به بررسی تجربی این مدل پرداخته‌اند.

در این مقاله پس از معرفی منحنی چرخزاد و رسم آن با یک رویه در نرم‌افزار میپل، مسأله کوتاه‌ترین زمان با چاشنی حاشیه تاریخی آن معرفی گردیده است. در بخش چهارم پس از بیان شکل کلی مسأله حساب تغییرات، به معرفی معادله‌ی معروف اویلر-لاگرانژ به عنوان شرط لازم برای حل این دسته مسائل پرداخته شده است. یافتن جواب معادله دیفرانسیل کوتاه‌ترین زمان در بخش پنجم مورد بررسی قرار گرفت و علاوه بر روش مستقیم یک روش ابتکاری بر پایه تبدیل معادله دیفرانسیل حاصل به یک دستگاه معادلات ارائه و حل آن با دو انتخاب مختلف انجام گردیده است. در بخش ششم این مقاله، به محاسبه مسیر مناسب گذرا از دو نقطه مفروض از صفحه دکارتی پرداخته شد و مقدار شاخص عملکرد مسأله کوتاه‌ترین زمان در امتداد هر مسیر به‌طور جداگانه محاسبه شده است. نکته قابل توجه اینکه یکی از دو جواب به دست آمده در قالب روش پیشنهادی، دارای جوابی منطبق بر جواب بهینه‌ای است که در امتداد مسیر چرخزاد حاصل می‌شود. این بخش با گزارش مقادیر شاخص عملکرد و خطای نسبی هر مسیر به همراه منحنی حاصل از پیاده‌سازی فرآیند به پایان رسید. لازم به تاکید است که منطبق بودن جواب به دست آمده در امتداد مسیر پیشنهادی و مسیر بهینه هم با استناد به مقدار شاخص عملکرد و هم مسر پیموده شده بین دو نقطه، مورد تائید قرار گرفت. و در نهایت، نتیجه‌گیری بخش پایانی مقاله است که به ارائه گزارش مختصری از کل مراحل مقاله پرداخته شده است.

۲- منحنی چرخزاد

منحنی چرخزاد [1] یا سیکلوئید را چه از نظر زیبایی شکل ظاهری، چه به‌واسطه خواص ساده، جذاب و درخور توجه و چه از لحاظ مبارزات خستگی‌ناپذیری که بین ریاضی‌دانان بر پا کرد (تا یکدیگر را برای حل ویژگی‌هایی که کشف می‌کردند به مبارزه بطلبند)، هلن هندسه [2] نامیده‌اند [۴] و [۱۸]. وجه تسمیه آن نیز یکی از مشاهیر یونانی به نام هلن است که علاوه بر زیبایی، موجب منازعات و جنگ‌های فراوانی گردید. شواهد تاریخی نشان می‌دهد که برای اولین بار نام چرخزاد برای این منحنی در سال ۱۵۰۱ در مقاله‌ای با موضوع تربیع دایره توسط شارل بوول [3] مطرح گردیده است [۴]. دلیل این نام‌گذاری آن است که منحنی چرخزاد از حرکت یک چرخ یا دایره، به‌دست می‌آید. باید توجه داشت که نمودار این منحنی را می‌توان مسیر حرکت سنگ‌ریزه‌ای تصور کرد که به شیار لاستیک یک اتومبیل در حال حرکت، چسبیده است. معمولاً چرخزاد با یک سری معادلات پارامتری نمایش داده می‌شود.

گزاره ۱: منحنی چرخزاد به عنوان مکان هندسی نقاطی از صفحه که از حرکت یک چرخ یا دایره به شعاع a، به‌دست می‌آید، دارای معادله‌ی پارامتری به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi a. \tag{۱}$$

اثبات: فرض کنیم دایره‌ای به شعاع a مطابق شکل (۱) در امتداد خط مستقیم افقی بدون لغزش می‌غلتد. منحنی پیموده شده توسط نقطه‌ای بر روی محیط دایره، نظیر $P(x,y)$ به عنوان مکان هندسی منحنی چرخزاد به دست آورده می‌شود. خط مستقیم افقی را محور x در نظر گرفته و t را زاویه‌ی $\widehat{PA'O'}$ در نظر گرفته که نقطه P روی دایره انتقال‌یافته از موضع منطبق بر مبدا O به موقعیت جدیدِ نمایش داده شده در شکل (۱)، رسیده است. بدین ترتیب می‌توان طول نقطه P را به ترتیب زیر به‌دست آورد:

$$x = |OQ| = |OO'| - |QO'| = |OO'| - |PP'| \tag{۲}$$

با توجه به شکل (۱) تساوی $|PP'| = a\,sint$ برقرار و با توجه به اینکه دایره بدون لغزش غلتیده است، اندازه $|OO'|$ برابر با طول قوس کمان $O'P$ یعنی $|O\acute{O}| = at$ است. حال با جایگذاری مقدار $|O\acute{O}|$ و $|PP'|$ در رابطه (۲)، مختصات طول نقطه P را می‌توان به ترتیب زیر به‌دست آورد:

$$x = at - asint = a(t - sint), \tag{۳}$$

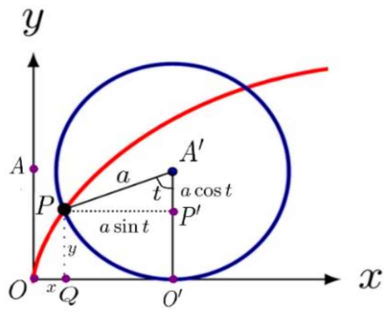
به طور مشابه مختصات عرض نقطه P به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} y = |A'O'| - |A'P'| &= a - a\,cost \\ &= a(1 - cost) \end{aligned} \tag{۴}$$

که روابط (۳) و (۴) همان معادله پارامتری منحنی چرخزاد (۱) در طول یک دوره تناوب است.

در ادامه با فرض اینکه شعاع دایره غلتان در امتداد خط محور x در حرکت است به رسم نمودار منحنی چرخزاد با استفاده از قابلیت متحرک‌سازی نرم‌افزار میپل پرداخته شده که تحت رویه (۱) صورت گرفته است. با اجرای *Cycloid(3, 4 Pi, 12)* رویه (۱) با به‌کارگیری دایره مولدی به شعاع $a = 3$ در بازه $t \in [0, 4\pi]$ به ایجاد ۱۲ نقطه از منحنی چرخزاد می‌پردازد. در واقع در اجرای این رویه دایره‌ای با یک نقطه انتخاب شده روی محیط خود در امتداد محور x حرکت و موقعیت آن نقطه ردیابی شده است. در این صورت مکان هندسی شکل حاصل، همانطور که در شکل (۲) قابل مشاهده است، منحنی یک چرخزاد است.

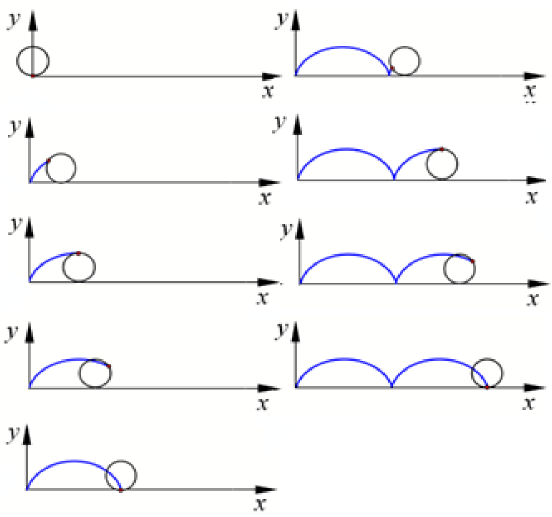
[1] *Cycloid*
[2] *Helen of Geometry*
[3] *Carolus Bovillus(1475-1566)*



شکل (۱). مکان هندسی نقطه نقطه P برای تشکیل منحنی چرخزاد

رویه (۱):

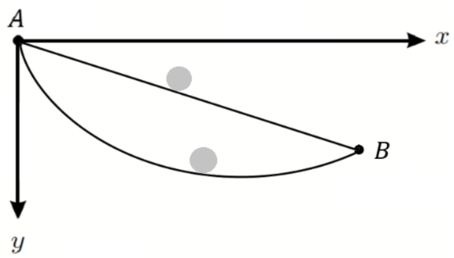
```
restart;
with(plots);
with(plottools);
Procedures1:=proc(a, b, N)
local x, y, t, Δt, Point, Cycloid, RollingCircle;
   x:= t -> a*(t - sin(t));
   y:= t -> a*(1 - cos(t));
   Δt:=b/N;
Point:=display(seq(pointplot([x(Δt*i),y(Δt*i)
],color=red),i=0..N),insequence=  true);
Cycloid:=animatecurve([x(t),y(t),t=0..b],fra
mes=N+1,color=blue);
RollingCircle:=display(seq(circle([r*Δt*i,r],r
),i=0..N),insequence= true);
   display(Point, Cycloid, RollingCircle);
end proc;
```



شکل (۲). اجرای رویه (۱) برای تشکیل منحنی چرخزاد

۳- مسأله کوتاه‌ترین زمان

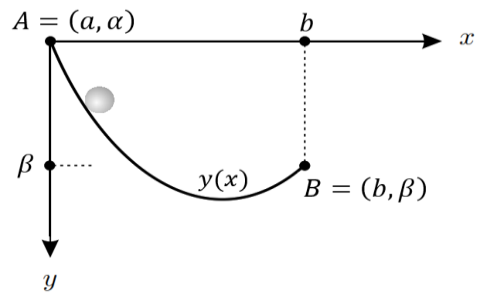
مسأله کوتاه‌ترین زمان گذشته از این که به خودی خود مسأله جالبی است بیشتر از این نظر اهمیت دارد که منشاء تاریخی حساب تغییرات بوده است. موضوعی که خود شاخه‌ای از آنالیز ریاضی است و در زمان حاضر عمیقاً به درون سادگی‌های پنهان در قلب جهان فیزیکی نفوذ کرده است. مطابق شکل (۳) فرض شده است که نقطه A به‌وسیله دو مسیر یکی در امتداد خط مستقیم و دیگری روی قوس دایره‌ای به نقطه پایین‌تر B متصل باشد و مهره‌ای بتواند بدون اصطکاک از A تا B روی این دو مسیر بلغزد. همانطور که در شکل (۳) ملاحظه می‌شود در این نمودار، جهت مثبت محور y ها در امتداد نیروی جاذبه و به سمت پائین در نظر گرفته شده است. سوالی که مطرح می‌شود به این صورت است که در امتداد کدامیک از این دو مسیر، مهره کم‌ترین زمان را برای طی نمودن مسیر بین این دو نقطه لازم دارد؟ در نگاه اول، شاید اینگونه به‌نظر برسد که خط مستقیم واصل بین این دو نقطه (که فاصله کمتری بین این دو نقطه دارد) مسیر کوتاه‌ترین زمان طی‌شدن بین نقاط ابتدایی و انتهایی است. یک رویکرد دیگر این است که شاید بهتر *باشد* ابتدا مهره به‌صورت عمودی سقوط کند تا سرعت گرفته و با این سرعت بیشتر مسیر طولانی‌تری را در زمان کمتری بپیماید و زودتر به نقطه پایانی برسد [۱۹]. شواهد تاریخی نشان می‌دهد که گالیله به این اعتقاد بود که مهره در امتداد مسیر دایره‌ای سریع‌تر پایین خواهد آمد یعنی مسیر بهینه در مسأله کوتاه‌ترین زمان، در امتداد مسیر دایره گذرا از نقاط مورد نظر است. لازم به ذکر است، با محاسباتی که در این مقاله انجام شده است نشان داده می‌شود که جواب گالیله اختلاف اندکی نسبت به جواب بهینه دارد [۲۰].



شکل (۳). دو مسیر در امتداد خط مستقیم و روی دایره‌ای بین نقاط A و B

مسأله‌ی عمومی‌تری که توسط برنولی مطرح گردید و از آن به عنوان مسأله کوتاه‌ترین زمان یاد می‌شود، به شرح زیر است [۳] و [۲۱]:

مسأله کوتاه‌ترین زمان: فرض کنید یک مهره مطابق شکل (۴)، تحت نیروی جاذبه با شتاب g در امتداد مسیر یک منحنی دلخواه از نقطه $A(a,\alpha)$ با سرعت v_a به نقطه $B(b,\beta)$ منتقل شود. سوال این است که معادله مسیر چگونه باشد تا انتقال مهره در کوتاه‌ترین زمان صورت گیرد. با فرض اینکه جهت مثبت محور y ها در امتداد نیروی جاذبه و به سمت پائین باشد، برای حرکت گلوله از نقطه A به نقطه B باید $a < b$ و $\alpha <$ β باشند. برای مدل‌سازی مسأله کوتاه‌ترین زمان، معادله مسیر حرکت مهره به صورت $y(x)$ در نظر گرفته شده است.



شکل (۴). مسیری در امتداد منحنی دلخواه $y(x)$ بین نقاط A و B

در نقطه ابتدائی، انرژی کل از مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$E_a = \frac{1}{2}mv_a^2 - mgy(a), \tag{۵}$$

همچنین انرژی کل در یک نقطه دلخواه به طول $a < x < b$ از منحنی، به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$E_x = \frac{1}{2}mv^2(x) - mgy(x), \tag{۶}$$

از طرفی با توجه به قانون بقای انرژی و ثابت ماندن انرژی کل می‌توان با برقراری تساوی روابط (۵) و (۶) نتیجه زیر را به دست آورد:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - mgy(a) = \frac{1}{2}mv^2(x) - mgy(x), \tag{۷}$$

حال می‌توان از تساوی (۷) رابطه مربوط به سرعت لحظه‌ای مهره در نقطه‌ای به طول x را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$v(x) = \sqrt{v_a^2 + 2g(y(x) - y(a))}, \tag{۸}$$

از طرفی با توجه به این رابطه که سرعت در طول یک منحنی برابر $v = \frac{ds}{dt}$ است می‌توان کل زمان طی شده روی این منحنی را با استفاده از رابطه (۸) به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} T[y] &= \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{۱ + (y')^2}}{\sqrt{v_a^2 + 2g(y(x) - \alpha)}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{۱ + (y')^2}}{\sqrt{y(x) - \left(\alpha - \frac{v_a^2}{2g}\right)}}dx, \end{aligned} \tag{۹}$$

در نهایت، منحنی $y(x)$ باید به گونه‌ای انتخاب شود که به غیر از اینکه از نقاط A و B می‌گذرد، تابعک (۹) را نیز کمینه نماید. به عبارتی مسأله کوتاه‌ترین زمان به شکل زیر بیان می‌گردد [۲۱]:

$$\begin{aligned} &\min_y T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{۱ + (y')^2}}{\sqrt{y(x) - \left(\alpha - \frac{v_a^2}{2g}\right)}}dx, \\ &y(a) = \alpha, \ \ y(b) = \beta. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

در حالت خاص اگر گلوله از حالت سکون و از مبداء به مقصد (b, β) رها شود، مدل زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} &\min_y T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{۱ + (y')^2}}{\sqrt{y(x)}}dx, \\ &y(0) = 0, \ \ y(b) = \beta. \end{aligned} \tag{۱۱}$$

٤- حساب تغییرات

تاریخچه حساب تغییرات با بیان مسأله کوتاه‌ترین زمان گره خورده است. از این مسأله به‌عنوان یکی از اولین مسائل حساب تغییرات یاد می‌شود که شامل کمینه کردن یک انتگرال است و حاشیه‌ی تاریخی جالبی دارد. در حساب دیفرانسیل به مطالعه‌ی توابعی پرداخته می‌شود که متغیر مستقل درآن‌ها متغیر عددی است در حالی که حساب تغییرات شامل مینیمم‌سازی تابعک‌ها یا به نوعی توابعی بر حسب تابع یا توابعی به عنوان متغیر مستقل هستند. از عمده‌ترین انگیزه‌های ابداع و گسترش حساب تغییرات را می‌توان نیازهای تدریجی مکانیک کلاسیک به رفع مشکلات محاسباتی از حوزه‌ی مشتق و حل معادلات دیفرانسیل به حوزه انتگرال و بهینه‌سازی ذکر نمود. در حالت کلی، یک مسأله حساب تغییرات را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۲۲]:

مطلوب است محاسبه‌ی منحنی $y(.)$ که تحت شرایط خاصی روی $y(x_0)$ و $y(x_1)$ به تابعک رابطه (۱۲) کمترین مقدار را نسبت دهد:

$$\begin{aligned} &J[y] \\ &= \phi(y(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x))dx, \end{aligned} \tag{۱۲}$$

فرض کنید x_0، x_1 و $y \in \mathbb{R}^n$ دارای مقادیر ثابت و $\mathcal{M}$ یک زیر مجموعه بسته از فضای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد که $y(x_0) = y_0$ و $y(x_1) \in \mathcal{M}$. حال اگر $\mathcal{M} = \{y_1\}$، نقطه انتهایی نیز به صورت نقطه‌ی ثابت (x_1, y_1) ظاهر خواهد شد، که ساده‌ترین مسأله در حساب تغییرات نامیده می‌شود. در مقابل اگر $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ یعنی هیچ شرطی روی $y(x_1)$ وجود نداشته باشد، با یک مسأله بسیار کلی سروکار داریم [۲۳].

نتیجه ۱: مسأله کوتاه‌ترین زمان (۱۰) و (۱۱)، به شکل یک مسأله حساب تغییرات با نقاط مرزی ثابت هستند و تابع انتگرالده تغییراتی مسأله (۱۱) مستقل از x و به صورت $L(y, y') = \frac{\sqrt{۱+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}$ است.

برای اینکه $y = y^*(x)$ جوابی از ساده‌ترین مسأله در حساب تغییرات باشد، لازم است که در هر نقطه از این منحنی شرط زیر برقرار باشد [۳] و [۲۱]:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0, \tag{۱۳}$$

این معادله دیفرانسیل، معادله اویلر-لاگرانژ[۱] نامیده می‌شود که شرطی لازم برای اکسترمم نسبی است و جواب‌های این معادله، اکسترمال[۲] نامیده می‌شود. این معادله را می‌توان به صورت‌های دیگری که با شکل اصلی معادل هستند، بازنویسی نمود. در گزاره ۲ به یکی از این انواع اشاره شده است.

گزاره ۲: اگر تابع انتگرالده تغییراتی L در رابطه (۱۲) مستقل از متغیر x و به شکل $L(y, y')$ باشد، شرط اکسترمال بودن منحنی زیر است:

$$L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} = C \ \text{مقدار ثابت} \tag{۱۴}$$

اثبات: در حالت کلی معادله‌ی اویلر-لاگرانژ (۱۳) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود [۳]:

$$\frac{d}{dx}\left(L - y'\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \tag{۱۵}$$

[1] Euler–Lagrange equation

[2] Extermal

حال اگر تابع انتگرالده L مستقل از متغیر x و به شکل $L(y,y')$ باشد، رابطه (۱۵) به‌صورت زیر قابل نمایش است:

$$\frac{d}{dx}\left(L - y'\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0, \qquad (۱۶)$$

که معادل با رابطه (۱۴) به عنوان یک شکل خاص از معادله اویلر–لاگرانژ است.

۵- جواب معادله دیفرانسیل کوتاه‌ترین زمان

همانطور که پیش از این نیز اشاره گردید، افراد مختلفی برای حل مسأله کوتاه‌ترین زمان پرداختند و روش‌های متعددی برای این مسأله وجود دارد. در این بخش ابتدا معادله اویلر–لاگرانژ برای مسأله کوتاه‌ترین زمان به دست آمده است. در ادامه علاوه بر حل این معادله به روش‌های معمول یک روش ابتکاری برای حل این معادله ارائه گردیده است. این روش بر پایه تبدیل معادله دیفرانسیل مسأله کوتاه‌ترین زمان، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل استوار است. در استفاده از روش پیشنهادی دو انتخاب غیر بدیهی برای تشکیل دستگاه معادلات ارئه گردیده و شکل کلی جواب عمومی در هر حالت به دست آمده است. در نهایت در بخش مقایسه مسیرهای مختلف حل مسأله کوتاه‌ترین زمان، مشخص گردید که تنها یکی از دو جواب به دست آمده می‌تواند حائز شرط پایانی مسأله کوتاه‌ترین زمان باشد. لازم به ذکر است که در قسمت ۶ نشان داده می‌شود که جواب بهینه به‌دست آمده در امتداد مسیر پیشنهادی دقیقاً با مقدار به‌دست آمده در امتداد مسیر بهینه یعنی منحنی چرخزاد برابری می کند.

۵-۱- جواب معادله اویلر–لاگرانژ مسأله کوتاه‌ترین زمان

طبق نتیجه (۱) تابع انتگرالده تغییراتی مربوط به مسأله کوتاه‌ترین زمان به‌صورت $L(y,y')$ است و معادله اویلر–لاگرانژ طبق گزاره ۲ به شکل تساوی زیر قابل بازنویسی است:

$$L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}}\right) = C \text{ مقدار ثابت}, \qquad (۱۷)$$

با ساده کردن رابطه فوق، معادله دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

$$y(1+(y')^2) = c, \qquad (۱۸)$$

که در آن $c = \frac{1}{2gC^2}$ و به آن معادله دیفرانسیل مسأله کوتاه‌ترین زمان گفته می‌شود. در ادامه با حل این معادله، مشخص خواهد شد که منحنی کوتاه‌ترین زمان دارای چه شکلی است. بدین منظور با استفاده از تعویض متغیر $y' = \cot\theta$ و جایگذاری در (۱۸) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$y = \frac{c}{1+\cot^2\theta} = c\sin^2\theta = \frac{c}{2}(1-\cos 2\theta), \qquad (۱۹)$$

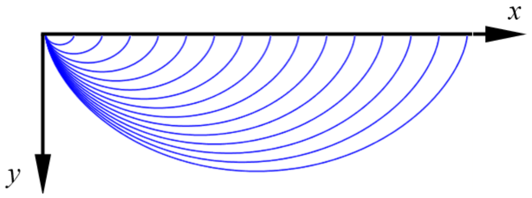
حال با توجه به تساوی $y' = \frac{dy}{dx}$ می‌توان dx را با استفاده از رابطه (۱۹) به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2c\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\cot\theta} = 2c\sin^2\theta\, d\theta = c(1-\cos 2\theta)d\theta, \qquad (۲۰)$$

بنابراین با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۲۰) و با توجه به شرط اولیه $x(0) = 0$ داریم:

$$x = \frac{c}{2}(2\theta - \sin 2\theta), \qquad (۲۱)$$

در نتیجه با توجه به روابط (۱۹) و (۲۱) با تعویض متغیرهای $t = 2\theta$ و $a = \frac{c}{2}$ معادله پارامتری معرفی‌شده در رابطه (۱) حاصل می‌شود. در واقع معادله حاصل، نمایش پارامتری منحنی چرخزاد است، به عبارتی بهترین مسیر جهت رسیدن از نقطه A به نقطه B در کوتاه‌ترین زمان ممکن، پیمودن مسیر در امتداد منحنی چرخزاد است. با تبعیت از قسمت‌های قبل مجدداً جهت مثبت محور y را امتداد نیروی جاذبه و با استفاده از رویه (۲)، در شکل (۵) چرخزاد های مختلف با شروع از مبداء رسم شده است.



شکل (۵). اجرای رویه (۲) و رسم چرخزادهای مختلف با شروع از مبداء به منظور یافتن چرخزاد گذرا از نقطه B

رویه (۲):

```
restart;
with(plots);
with(plottools);
Procedures2:=proc(N)
  local  x, y, t, r, P;
  x:=t->r*(t-sin(t));
  y:=t->r*(1-cos(t));
     for r from 1 to N do
       P[r]:=plot([r*(t-sin(t)),r*(1-cos(t)),
t=0..2*Pi],scaling=constrained);
     od:
  display({seq(P[i],i=1..N)});
end proc:
```

لازم به ذکر است که مقدار واحدی از a وجود دارد که اولین کمان این چرخزاد را وادار به عبور از نقطه انتهایی B می‌نماید. باید توجه نمود که اگر مقدار a بتواند از صفر تا بینهایت تغییر نماید، یک قوس از کمان چرخزاد بزرگ و بزرگ‌تر شده و سراسر ربع اول را مطابق شکل (۵) می‌پوشاند. همچنین از این نمودار که با اجرای رویه ۲ و فرض $N = 15$ رسم شده است، می‌توان مقدار مناسب برای a را با تعیین نمود که منحنی چرخزاد از نقطه B بگذرد.

گزاره ۳: مدت زمانی که طول می‌کشد تا مهره‌ی که از مبدا مختصات رها شده و بدون اصطکاک بر روی مسیری به شکل چرخزاد به طرف پایین می‌لغزد به نقطه زیرین $(\pi a, 2a)$ برسد برابر با $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ است.

اثبات: حل را با جایگذاری (۱) در رابطه (۱۱) به عنوان تابعکی که می‌بایست تحت شرایط مرزی $y(0) = 0$ و $y(\pi a) = 2a$ کمینه شود، آغاز می‌کنیم. با توجه به اینکه از تقسیم $\frac{dy}{dt}$ بر $\frac{dx}{dt}$ حاصل $\frac{dy}{dx} = \frac{sint}{1-cost}$ به‌دست می‌آید، داریم:

$$T\left[\text{چرخزاد}\right]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{a\pi}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{\frac{2}{1-cost}}}{\sqrt{a(1-cost)}}\ a(1-cost)\,dt=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

نتیجه ۲: منحنی چرخزاد ، خم کوتاه‌ترین زمان بین دو نقطه است و زمان مورد نیاز برای طی نمودن مهره مورد بحث برابر با $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ است.

۲-۵- جواب معادله دیفرانسیل کوتاه‌ترین زمان با روش پیشنهادی

در این روش ابتدا فرمول مشتق $\frac{dy}{dx}$ بر اساس فرمول مشتق‌گیری زنجیره‌ای به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$ (۲۲)

سپس با جایگذاری (۲۲) در معادله دیفرانسیل مسأله کوتاه‌ترین زمان (۱۸) رابطه‌ای به‌صورت زیر به دست می‌آید که در آن $c=\alpha^2$ فرض شده است:

$$\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sqrt{\alpha^2-y}}{\sqrt{y}},$$ (۲۳)

در ادامه با دو انتخاب دلخواه و محتمل، رابطه‌ی (۲۳) را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تبدیل نموده و به حل آن‌ها می‌پردازیم.

۱-۲-۵- روش اول: با انتخاب جملات نظیر در صورت و مخرج طرفین تساوی (۲۳) یک دستگاه معادلات به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{y}, & x(0)=0,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\sqrt{\alpha^2-y}, & y(0)=0.\end{cases}$$ (۲۴-آ)، (۲۴-ب)

از حل معادله (۲۴-ب) به‌عنوان یک مسأله مقدار اولیه، جواب مربوط به منحنی $y(t)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y(t)=-\frac{1}{4}t^2+\alpha t,$$ (۲۵)

در ادامه با جایگذاری (۲۵) در معادله (۲۴-آ) می‌توان مسأله مقدار اولیه زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{-\dfrac{1}{4}t^2+\alpha t},\\ x(0)=0,\end{cases}$$ (۲۶)

که جواب مربوط به $x(t)$ را می‌توان به‌ترتیب زیر به‌دست آورد:

$$x(t)=-\frac{4\,\alpha-2\,t}{8}\sqrt{4\alpha t-t^2}-\alpha^2 arcsin\left(1-\frac{t}{2\alpha}\right)+\frac{\alpha^2\pi}{2},$$ (۲۷)

با این روش و با انتخاب‌های به‌کار رفته در رابطه (۲۴) می‌توان معادله مسیر مربوط به مسأله کوتاه‌ترین زمان را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\begin{cases}x(t)=-\dfrac{4\,\alpha-2\,t}{8}\sqrt{4\alpha t-t^2}-\alpha^2 arcsin\left(1-\dfrac{t}{2\alpha}\right)+\dfrac{\alpha^2\pi}{2},\\[3mm] y(t)=-\dfrac{1}{4}t^2+\alpha t, \qquad 0<t<t_1.\end{cases}$$

(۲۸)

۲-۲-۵- روش دوم: با انتخاب دیگری به شرح زیر می‌توان دستگاه معادلاتی به شکل زیر نتیجه گرفت:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-y}}, & x(0)=0,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{y}}, & y(0)=0,\end{cases}$$ (۲۹-آ)، (۲۹-ب)

از حل مسأله مقدار اولیه (۲۹-ب)، جواب مربوط به منحنی $y(t)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y(t)=\sqrt[3]{\frac{9t^2}{4}},$$ (۳۰)

در ادامه با جایگذاری (۳۰) در معادله (۲۹-آ) می‌توان مسأله مقدار اولیه زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-\sqrt[3]{\dfrac{9t^2}{4}}}},\\ x(0)=0,\end{cases}$$ (۳۱)

که جواب مربوط به $x(t)$ را می‌توان به‌ترتیب زیر به‌دست آورد:

$$x(t)=-\frac{\sqrt[3]{12t}}{4}\sqrt{4\alpha^2-2\sqrt[3]{18t^2}}+\alpha^2 arctan\left(\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{2}t}}{2\alpha^2-\sqrt[3]{18t^2}}\right),$$ (۳۲)

روش پیشنهادی با انتخاب به‌کار رفته در رابطه (۲۹) می‌توان معادله مسیر مربوط به مسأله کوتاه‌ترین زمان را در این حالت به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases}x(t)=-\dfrac{\sqrt[3]{12t}}{4}\sqrt{4\alpha^2-2\sqrt[3]{18t^2}}+\alpha^2 arctan(\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt{2}t}}{2\alpha^2-\sqrt[3]{18t^2}}),\\[3mm] y(t)=\sqrt[3]{\dfrac{9t^2}{4}}, \qquad 0<t<t_1.\end{cases}$$

(۳۳)

٦- بررسی مسأله کوتاه‌ترین زمان در امتداد مسیرهای مختلف

برای پیاده‌سازی و مقایسه زمان در مسأله کوتاه‌ترین زمان، شرایطی که در آن نقطه‌ی ابتدائی، مبداء مختصات یعنی $O(0,0)$ و مقصد گلوله نقطه $A(3,1)$ است، در نظر گرفته شده است. بدین منظور مسیرهای مختلف واصل بین این دو نقطه شامل خط مستقیم، مسیر در امتداد کمان دایره و بیضی گذرا از این نقاط، مسیرهای پارامتری پیشنهادی (۲۸) و (۳۳)، همچنین مسیر چرخزاد مورد مطالعه قرار گرفته است.

۱-۶- حرکت در امتداد مسیر خط گذرا از نقاط $\boldsymbol{O}$ و $\boldsymbol{A}$

معادله‌ی پارامتری خط گذرا از نقاط O و A به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ \qquad\qquad 0 \le t \le 3. \\ y(t) = \dfrac{t}{3}, \end{cases} \tag{۳۴}$$

به‌عبارتی رابطه (۳۴) خط واصل بین نقاط O و A است که مقدار شاخص عملکرد (۱۱) در امتداد این مسیر به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &T[x(t), y(t)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \\ &= \sqrt{\frac{5}{3g}} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{20}{g}} \approx 1.428571428. \end{aligned} \tag{۳۵}$$

۲-۶- حرکت در امتداد مسیر دایره گذرا از نقاط $\boldsymbol{O}$ و $\boldsymbol{A}$

در این قسمت منحنی گذرا از مبداء مختصات O را دایره‌ای به مرکز $(\alpha, 0)$ و شعاع α به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha(1 - cos(t)), \\ \qquad\qquad 0 \le t \le t_1, \\ y(t) = \alpha sin(t), \end{cases} \tag{۳۶}$$

با توجه به اینکه دایره (۳۶) می‌بایست متناظر با $t = t_1$ از نقطه $A(3,1)$بگذرد دستگاه معادلاتی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} x(t_1) = \alpha(1 - cos(t_1)) = 3, \\ y(t_1) = \alpha(sin(t_1)) = 1, \end{cases} \tag{۳۷}$$

جواب دستگاه معادلات (۳۷) به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{5}{3}, \\ t_1 = \pi - arccos(\dfrac{4}{5}), \end{cases} \tag{۳۸}$$

به‌عبارتی با جایگذاری (۳۸) در (۳۶) مسیر دایره‌ای واصل بین نقاط Oو A به دست می‌آید که مقدار شاخص عملکرد (۱۱) در امتداد این مسیر به ترتیب زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} &T[x(t), y(t)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi - arccos(\frac{4}{5})} \frac{\sqrt{2a(1 - cos(t))}}{\sqrt{asin(t)}} dt \\ &\approx 1.058085217. \end{aligned} \tag{۳۹}$$

۳-۶- حرکت در امتداد مسیر بیضی گذرا از نقاط $\boldsymbol{O}$ و $\boldsymbol{A}$

معادله بیضی گذرا از مبداء مختصات O به مرکز $(\pi\alpha, 0)$ و شعاع‌های $\pi\alpha$ و 2α به ترتیب در امتداد محور x و y به‌صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{cases} x(t) = \pi\alpha(1 + cos(t)), \\ \qquad\qquad 0 \le t \le t_1. \\ y(t) = 2\alpha sin(t), \end{cases} \tag{۴۰}$$

با توجه به اینکه بیضی (۴۰) می‌بایست متناظر با $t = t_1$ از نقطه $A(3,1)$بگذرد دستگاه معادلاتی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x(t_1) = \pi\alpha(1 + cos(t_1)) = 3, \\ y(t_1) = 2\alpha(sin(t_1)) = 1, \end{cases} \tag{۴۱}$$

با حل دستگاه معادلات (۴۱) می‌توان مقادیر مجهول α و t_1 را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{13979}{22978}, \\ t_1 = \dfrac{138492}{63619}, \end{cases} \tag{۴۲}$$

حال با جایگذاری (۴۲) در (۴۰) مسیری در امتداد بیضی واصل بین نقاط O و A به دست می‌آید که مقدار شاخص عملکرد (۱۱) در امتداد آن به ترتیب زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} &T[x(t), y(t)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{138492}{63619}} \frac{\sqrt{\alpha^2(\pi^2 sin^2(t) + 4 cos^2(t))}}{\sqrt{2\alpha sin(t)}} dt \\ &\approx 1.021892992. \end{aligned} \tag{۴۳}$$

۴-۶- حرکت در امتداد مسیرهای پیشنهادی

۱-۴-۶- حالت اول

در این قسمت منحنی پارامتری (۲۸) گذرا از مبداء مختصات که می‌بایست متناظر با $t = t_1$ از نقطه $A(3,1)$ بگذرد را در نظر گرفته که با توجه به $\big(x(t_1), y(t_1)\big) = (3,1)$ دستگاه معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} -\dfrac{4\alpha - 2t_1}{8}\sqrt{4\alpha t + 1 - \alpha^2} - \alpha^2 arcsin(1 - \dfrac{t_1}{2\alpha}) + \dfrac{\alpha^2\pi}{2} = 3, \\ -\dfrac{1}{4}t_1^2 + \alpha t_1 = 1. \end{cases} \tag{۴۴}$$

جواب دستگاه معادلات (۴۴) به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{23873}{21444}, \\ t_1 = \dfrac{81822}{25529}, \end{cases} \tag{۴۵}$$

به‌عبارتی با جایگذاری (۴۵) در (۲۸)، مسیر پیشنهادی واصل بین نقاط O و A به دست می‌آید که مقدار شاخص عملکرد (۱۱) در امتداد این مسیر به ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &T[x(t), y(t)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{81822}{25529}} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \\ &\approx 1.018832360. \end{aligned} \tag{۴۶}$$

۲-۴-۶- حالت دوم

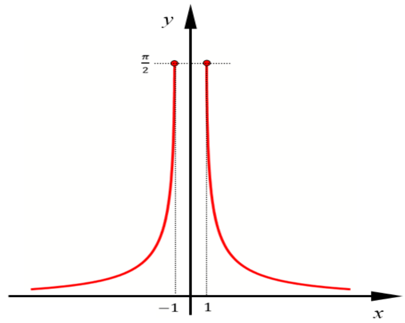
در این قسمت منحنی پارامتری (۳۳) گذرا از مبداء مختصات که می‌بایست متناظر با $t = t_1$ از نقطه A نیز بگذرد را در نظر گرفته که با توجه به $\big(x(t_1), y(t_1)\big) = (3,1)$ دستگاه معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt[3]{12t_1}}{4}\sqrt{4\alpha^2 - 2\sqrt[3]{18t_1^2}} + \alpha^2 arctan\left(\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt{2}t_1}}{2\alpha^2 - \sqrt[3]{18t_1^2}}\right) = 3, & (\text{۴۷} - \text{آ}) \\ \sqrt[3]{\dfrac{9t_1^2}{4}} = 1, & (\text{۴۷} - \text{ب}) \end{cases}$$

با حل معادله (۴۷-ب)، جواب $t_1 = \frac{2}{3}$ به‌دست می‌آید که با جایگذاری در معادله (۴۷-آ)، معادله جبری زیر حاصل خواهد شد:

$$\sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha^2\, arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\right) = 3, \tag{۴۸}$$

با بررسی تابع $f(\alpha) = \sqrt{\alpha^2-1} + \alpha^2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right)$ دامنه این تابع به‌صورت $D_f = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ و برد آن به‌صورت $R_f = (0,\frac{\pi}{2}]$ بوده و همانطور که شکل (۶) مشخص است، معادله (۴۸) فاقد جواب است. بدین ترتیب، این انتخاب برای تشکیل دستگاه معادلات دیفرانسیل، بر خلاف حالت قبل فاقد جواب است. به‌عبارتی مسیر پارامتری در این حالت، منحنی واصل بین نقاط O و A را تشکیل نمی‌دهد و در نتیجه امکان تخمین مقدار شاخص عملکرد فراهم نیست.



شکل (۶). منحنی $f(\alpha)$ به منظور نمایش عدم وجود جواب در معادله (۴۸) به صورت $f(\alpha) = 0$

۶-۵- حرکت در امتداد منحنی چرخزاد گذرا از نقاط O و A

در این قسمت منحنی چرخزاد گذرا از مبداء مختصات O با دایره‌ی مولدی به شعاع α را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha(t - sin(t)), \\ y(t) = \alpha(1 - cos(t)), \end{cases} \quad 0 \le t \le t_1. \tag{۴۹}$$

در این قسمت منحنی پارامتری (۴۹) گذرا از مبداء مختصات که می‌بایست متناظر با $t = t_1$ از نقطه $A(3,1)$ بگذرد را در نظر گرفته که دستگاه معادلاتی را به صورت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} x(t_1) = \alpha(t_1 - sin(t_1)) = 3, \\ y(t_1) = \alpha(1 - cos(t_1)) = 1, \end{cases} \tag{۵۰}$$

با حل دستگاه معادلات (۵۰) می‌توان مقادیر مجهول α و t_1 را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{6138}{9905}, \\ t_1 = \dfrac{63959}{15786}, \end{cases} \tag{۵۱}$$

حال با جایگذاری (۵۱) در (۴۹) مسیری در امتداد چرخزاد واصل بین نقاط O و A به دست می‌آید که مقدار شاخص عملکرد (۱۱) در امتداد این مسیر به ترتیب زیر قابل محاسبه است:

$$T[x(t), y(t)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{63959}{15786}} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \approx 1.018832360. \tag{۵۲}$$

این مقدار، همان مقدار مورد انتظار به دست آمده در گزاره (۳) و برابر با $t_1\sqrt{\frac{a}{g}} \approx 1.018832360$ است.

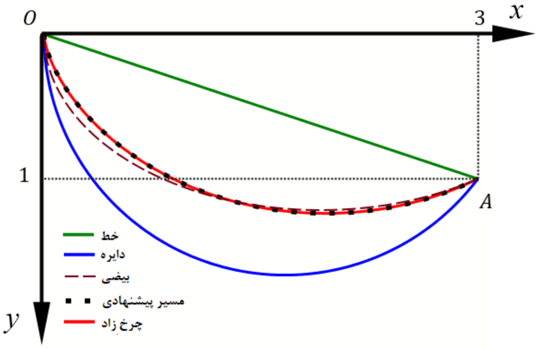
۶-۶- مقایسه جواب‌های به‌دست آمده در امتداد مسیرهای مختلف برای مسأله کوتاه‌ترین زمان

مقایسه جواب به دست آمده در امتداد مسیرهای مختلف در جدول (۱) آمده است و در هر مورد خطای نسبی تقریب نیز محاسبه گردیده است.

جدول (۱): شاخص عملکرد مسأله کوتاه‌ترین زمان امتداد مسیرهای مختلف

مسیر	مقدار شاخص عملکرد	خطای نسبی
خط مستقیم	1.428571428	$4.0E-1$
دایره	1.058085217	$3.9E-2$
بیضی	1.021892992	$3.0E-3$
مسیر پیشنهادی	1.018832360	0
مسیر بهینه (چرخزاد)	1.018832360	0

همچنین مسیرهای مختلف پیموده شده بین نقاط ابتدائی و انتهایی در مقایسه با مسیر دقیق چرخزاد در شکل (۷) رسم شده که نشان از منطبق بودن مسیر پیشنهادی با مسیر بهینه در امتداد منحنی چرخزاد دارد.



شکل (۷): مسیرهای مختلف در حل مسأله کوتاه‌ترین زمان در مقایسه با مسیر بهینه چرخزاد

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، بعد از بیان مختصری از تاریخچه مسأله کوتاه‌ترین زمان به بررسی ویژگی‌های منحنی چرخزاد پرداخته شد. در ادامه پس از معرفی مسأله حساب تغییرات به بررسی معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ به عنوان شرط لازم برای حل مسائل حساب تغییرات پرداخته شد. همچنین معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژِ متناظر با مسأله کوتاه‌ترین زمان تشکیل و جواب آن به‌دست آمد که حاکی از این است که جواب بهینه این مسأله، منحنی چرخزاد است. همچنین یک روش ابتکاری برای حل معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ بر پایه تبدیل آن به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه گردید. در نهایت در بخش مقایسه مسیرهای مختلف حل مسأله کوتاه‌ترین زمان، مشخص گردید که جواب به دست آمده در قالب روش پیشنهادی با مقدار به‌دست آمده در امتداد مسیر بهینه یعنی منحنی چرخزاد برابری می‌کند.

مراجع

[1] Bernoulli, J. (1697). Jacobi Bernoulli solutio problematum fraternorum. Acta Eruditorum, Leipzig, 214, 1697.

[2] Galilei, G. (1914). Dialogues concerning two new sciences. Dover.

[3] Brunt, B. (2004). The Calculus of Variations. Springer-Verlag, New York.

[4] Bell, E. T. (1986). Men of mathematics. Simon and Schuster, New York.

[5] Chandrasekhar, S. (2003). Newton's Principia for the common reader. Oxford University Press.

[6] Euler, L. (1744). The Method of Finding Plane Curves that Show Some Property of Maximum or Minimum, Lausanne and Geneva.

[7] Goldstine, H. H. (2012). A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

[8] Nishiyama, Y. (2013). The brachistochrone curve: The problem of quickest descent. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 82(3), 409-419.

[9] Brookfield, G. (2010). Yet another elementary solution of the brachistochrone problem. Mathematics Magazine, 83(1), 59-63.

[10] Lemak, S. S., & Belousova, M. D. (2021). The brachistochrone problem with constraints on the curvature of the trajectory. IFAC-PapersOnLine, 54(13), 437-442.

[11] Kushner, H. J., Dupuis, P. (1992). Numerical methods for stochastic control problems in continuous time, Springer, New York.

[12] Kafash, B., Nikoeenezhad, Z., & Delavarkhalafi, A. (2016). An iterative algorithm for solving stochastic optimal control via the Markov chain approximation. Journal of Control, 10(2), 35-43. (In Persian)

[13] Ciarlet, P. G., & Mardare, C. (2022). On the Brachistochrone Problem. Communications in Mathematical Analysis and Applications, 1(1), 213-240.

[14] Abdul-Hafidh, E. H. (2022). A new approach to solve the Brachistochrone problem by constructing a lattice unit cell. Heliyon, 8(12).

[15] Benham, G. P., Cohen, C., Brunet, E., & Clanet, C. (2020). Brachistochrone on a velodrome. Proceedings of the Royal Society A, 476 (2238), 20200153.

[16] Sun, P., Liu, Y., & Huang, X. (2022). Exploring the brachistochrone (shortest-time) path in fire spread. Scientific Reports, 12(1), 13600.

[17] De Sousa, L. G. B., & Lima, L. P. F. (2024). An educational product based on the brachistochrone problem. International Journal of Professional Business Review: Int. J. Prof. Bus. Rev., 9(5), 2.

[18] Martin, J. (2010). The Helen of geometry. The College Mathematics Journal, 41(1), 17-28.

[19] Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., Giordano, F. R., & Korkmaz, R. (2010). Thomas' calculus (Vol. 12). Boston: Pearson.

[20] Mallik, A. K. (2008). Optimization problems in elementary geometry. Resonance, 13, 561-582.

[21] Russak, I. B. (2002). Calculus of variations MA 4311 lecture notes.

[22] Fleming, W. H., & Rishel, R. W. (2012). Deterministic and stochastic optimal control (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

[23] Kafash, B. (2024). Historical Approaches and Modern Methods in Analyzing the Brachistochrone Problem. Mathematics and Society, doi: 10.22108/msci.2024.142284.1678 (In Persian).