**مجله کنترل**
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد ۱۸، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۳، صفحه ۴۱-۳۱

# کنترل بهینه در زنجیره‌های تأمین پویا با تأکید بر تحلیل حساسیت و پایداری

حمیده دیوسالار[۱]، حمیدرضا یوسف زاده[۲]

[۱] دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران، divsalar.math@student.pnu.ac.ir

[۲] استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران، usefzadeh.math@pnu.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۱۶ ویرایش: ۱۴۰۴/۰۲/۲۳ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۱۶

**چکیده:** امروزه زنجیره‌های تأمین نقش حیاتی در کاهش هزینه‌ها، بهبود خدمات به مشتریان و افزایش سودآوری دارند. این مقاله با دیدگاهی نوین به مسئله زنجیره تأمین به عنوان یک مسئله کنترلی، رویکردی متفاوت برای حل این مسئله ارائه می‌دهد. بر این اساس، مدل‌سازی ریاضی زنجیره تأمین با درنظرگرفتن دینامیک سیستم‌ها و استفاده از تکنیک‌های کنترل بهینه صورت می‌پذیرد. این مدل ریاضی، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی را در بر دارد که با توجه به مسئله ترکیبی(MP) و با تأکید بر پایداری زیست محیطی (کاهش ضایعات و انتشار کربن) وانعطاف پذیری مدیریت اختلالات تقاضا وبحران های تأمین برای زنجیره تأمین پویای حلقه باز و حلقه بسته به‌کاررفته‌اند. نرخ تولید و ظرفیت تولید برای سطوح موجودی در هرگره از شبکه زنجیره تأمین پویا، بر اساس تعادل بین ورود و خروج مواد خام تحلیل شده است. علاوه بر این، تحلیل حساسیت و تجزیه و تحلیل پایداری زنجیره‌های تأمین پویای حلقه باز و بسته به منظور درک بهتر نقش پارامترهای مختلف بر عملکرد سیستم انجام شده است. به‌منظور بهینه‌سازی عملکرد زنجیره تأمین پویا، یک رویکرد کنترل بهینه مبتنی بر انرژی در ساختاری شش طبقه‌ای برای زنجیره تأمین پویا حلقه بسته پیشنهاد شده است. همچنین با ارزیابی جامع روش پیشنهادی، این مدل می‌تواند ضایعات را به‌طور مؤثری کاهش دهد، تاب‌آوری در برابر اختلالات را بهبود بخشد و به اهداف اقتصادی و زیست محیطی دست یابد.

**کلمات کلیدی:** زنجیره تأمین حلقه باز پویا، زنجیره تأمین حلقه بسته پویا، سطح موجودی، کنترل بهینه، پایداری، پایداری زیست‌محیطی ، انعطاف پذیری.

# Optimal Control in Dynamic Supply Chains with Emphasis on Sensitivity Analysis and Stability

**Hamideh Divsalar, Hamidreza usefzadeh**

**Abstract:** Supply chains are essential for minimizing costs, improving customer satisfaction, and increasing profitability. This paper introduces an innovative perspective on supply chains as a control problem, presenting a distinctive approach for addressing this issue. Mathematical modeling of the supply chain is conducted, considering system dynamics and employing optimal control techniques. This mathematical model is represented through a set of ordinary differential equations applied to both dynamic open-loop and closed-loop supply chains, with an emphasis on environmental sustainability (reducing waste and carbon emissions) and flexibility in managing demand disruptions and supply crises. We analyze production rates and capacities at each node within the supply chain network, emphasizing the balance between the inflow and outflow of raw materials. Additionally, sensitivity and stability analyses for open-loop and closed-loop supply chains are performed to gain insights into how various parameters influence system performance. To enhance supply chain efficiency, we propose an energy-based optimal control strategy structured across six layers for the closed-loop supply chain. A comprehensive evaluation of the proposed method assesses its effectiveness in significantly reducing waste, enhancing resilience against disruptions, and achieving economic and environmental objectives. The findings indicate that our proposed approach can effectively enhance supply chain performance, facilitating the achievement of both economic and environmental objectives.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]

**Keywords:** Dynamic Open-Loop Supply Chain, Dynamic Closed-Loop Supply Chain, Inventory Level, Optimal Control, Stability, Environmental Sustainability, Flexibility.

## ۱- مقدمه

یک زنجیره تأمین، شبکه‌ای از نهادهای توزیع شامل تأمین‌کنندگان، تولیدکنندگان، توزیع‌کنندگان و خرده‌فروشان است که وظیفه تهیه مواد اولیه، تبدیل مواد اولیه به محصولات میانی و نهایی و همچنین توزیع محصولات نهایی بین مشتریان و مصرف‌کنندگان را دارد. انتخاب مناسب تجهیزات، ماشین‌آلات، ناوگان حمل‌ونقل موجود در یک زنجیره تأمین جزء اساسی و مهم چنین سیستمی می‌باشد؛ با این حال کارایی زنجیره تأمین منوط به تصمیمات مدیریتی است. با توجه به پیچیدگی‌های سیستم‌های زنجیره تأمین که وابسته به عواملی از جمله سلایق مشتریان، رقابت بین شرکت‌ها و پیشرفت اقتصاد جهانی می‌باشد، تصمیمات مدیریتی زنجیره تأمین اغلب از حالت بهینه فاصله دارند [۳]. از اوایل دهه ۱۹۵۰ چارچوب مشخصی برای تجزیه وتحلیل زنجیره‌های تأمین پویا به وجود آمد. زنجیره تأمین پویا به یک زنجیره تأمین اشاره دارد که با استفاده از کنترل بهینه، قادر به واکنش سریع به تغییرات محیطی و تقاضای بازار است و مدیریت جریان‌های اطلاعات، محصولات و مالی را بهینه می‌کند [۹]. کنترل بهینه در زنجیره تأمین پویا نیز به روش‌ها و راهبردهایی اطلاق می‌شود که هدف آن بهبود عملکرد و افزایش بهره‌وری زنجیره تأمین است [۸]. شباهت زنجیره تأمین به یک سیستم پویا و ارتباط آن با کنترل بهینه، زمینه ساخت زنجیره‌های تأمین پویا را فراهم می‌کند [۱۸]. کنترل بهینه با استفاده از مدل‌سازی ریاضی و الگوریتم‌های بهینه‌سازی، به مدیریت بهینه‌ی تولید، توزیع و موجودی کمک می‌کند [۱۴]. هدف اصلی این کنترل‌ها: کاهش هزینه‌ها، بهبود استفاده از منابع و ارتقای توانایی زنجیره تأمین در پاسخ به تغییرات سریع بازار است. مدیریت موجودی و تقاضا در زنجیره تأمین پویا از چالش‌های اساسی سیستم‌های پویاست [۲۰]. با افزایش پیچیدگی‌ها و نوسانات بازار نیاز به زنجیره‌های تأمین پویا که بتوانند به‌سرعت و به طور مؤثر به تغییرات تقاضا و شرایط محیطی واکنش نشان دهند، بیش از پیش مشهود است. زنجیره‌های تأمین پویا با انعطاف‌پذیری بالا و قابلیت تطبیق سریع با تغییرات، امکان بهینه‌سازی عملکرد و افزایش کارایی را فراهم می‌آورند [۲۲]. کنترل تولید، موجودی و تقاضا به منظور کاهش هزینه‌های نگهداری و تضمین دسترسی به موقع محصولات از اهمیت بالایی برخوردار است [۶]. مدل‌سازی پویای زنجیره تأمین در مسائل مربوط به کنترل تولید و موجودی، نقش مهمی را ایفا می‌کند که در برخی تحقیقات مانند [۲]، [۷]، [۱۳]، [۱۶] و [۲۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین روش‌های کنترل پیشرفته در مسائل مربوط به کنترل تولید و موجودی در [۴] و [۲۳] مورد بررسی قرار گرفته است. در برخی از مطالعات مانند [۱۴]-[۱۰]، حل مسائل کنترل بهینه مبتنی بر حل معادلات ژاکوبی بلمن می باشد.کنترل بهینه در زمان‌بندی تولید به استفاده از روش‌ها و الگوریتم‌های بهینه‌سازی برای بهبود نحوه برنامه‌ریزی و زمان‌بندی فرایندهای تولیدی اشاره دارد و برخی از کاربردهای آن برای نمونه در [۶] و [۱۷] قابل‌دسترسی است. این مطالعه با تمرکز بر زنجیره‌های تأمین پویا، مدلی را ارائه می‌دهدکه پایداری زیست محیطی و انعطاف‌پذیری را با کنترل بهینه ادغام کرده و برای حل از اصل حداکثری پونتریاگین (PMP)[1] استفاده می‌کند.

ساختار کلی مقاله را می‌توان به شرح زیر بیان نمود. در بخش ۲ مبانی نظری و ادبیات پژوهش بیان خواهد شد. در بخش ۳ به ارائه زنجیره تأمین پویای حلقه باز چهار طبقه‌ای شامل تأمین‌کننده، مرکز عمده، مرکز توزیع و مشتریان و شش طبقه‌ای برای زنجیره تأمین پویای حلقه بسته شامل تأمین‌کننده، مرکز عمده، مرکز توزیع، مشتریان، مرکز جمع‌آوری، مرکز بازیافت پرداخته شده است. در بخش ۴ و ۵ به ترتیب تحلیل حساسیت و پایداری زنجیره‌های تأمین پویا مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. نقش کنترل بهینه در زنجیره تأمین پویا در بخش ۶ مطالعه شده است و با ارائه یک مثال، کنترل بهینه مبتنی بر انرژی برای زنجیره تأمین پویای حلقه بسته بیان و بررسی می‌گردد که برای مدل‌سازی زنجیره تأمین پویا از معادلات دیفرانسیل معمولی و اصل PMP استفاده شده است. در پایان در بخش ۷ نتیجه‌گیری کلی مقاله آورده شده است.

## ۲- مبانی نظری و ادبیات پژوهش

زنجیره تأمین مستقیم (رو به جلو)[2] سیستمی است که تهیه مواد اولیه از تأمین‌کننده تا ارائه آن به تولیدکننده و انجام فرایند تولید و سپس رساندن محصول به دست توزیع‌کنندگان و خرده‌فروشان و تحویل کالا به مصرف‌کنندگان نهایی را در بر می‌گیرد. عملکرد زنجیره تأمین بر کاهش هزینه‌ها و افزایش رضایت مشتریان اثرگذار می‌باشد [۱].

زنجیره تأمین معکوس[3] از آن با نام لجستیک معکوس هم یاد می‌شود در واقع مجموعه‌ای از فعالیت‌هایی است که به‌منظور بازیافت یا بازگرداندن برخی از محصولات یا بخشی از آن به چرخه تولید انجام می‌گیرد که می‌توان به کالاهای ازرده خارج شده معیوب، عودت داده شده یا دور انداخته شده و مستعمل اشاره نمود. نقش زنجیره تأمین معکوس غالباً در توسعه پایداری و بهبود محیط‌زیست می‌باشد. به‌عبارت‌دیگر، فرایند زنجیره تأمین معکوس شامل گردآوری و طبقه‌بندی محصولات ازرده خارج شده یا مرجوعی و انتقال مجدد آن به زنجیره تأمین می‌باشد [۱۱].

زنجیره‌های تأمین بر حسب کارایی به دودسته حلقه باز و حلقه بسته تقسیم می‌شوند که زنجیره تأمین حلقه باز در واقع همان زنجیره تأمین مستقیم یا سنتی می‌باشد درحالی‌که زنجیره تأمین حلقه بسته ترکیبی از زنجیره تأمین مستقیم با زنجیره تأمین معکوس می‌باشد [۱۹]. پس از نهایی

[1] Pontryagin's Maximum Principle (PMP)
[2] Forward Supply Chain
[3] Reverse Supply Chain



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]

شدن فرایند تولید و حمل و توزیع کالا، تولیدکننده با بازگشت بخشی از محصولات ازرده خارج شده به‌عنوان مواد اولیه برای ساخت محصولات جدید و استفاده مجدد در چرخه زنجیره تأمین به اهدافی نظیر پایداری و صرفه‌جویی بیشتر هزینه‌ها و دستیابی به مواد اولیه ارزان‌تر کمک می‌کند [۲۰]. از طرفی زنجیره‌های تأمین را می‌توان سیستم‌های پویای پیچیده‌ای در نظرگرفت که بر اساس خواسته و نظر مشتریان ایجاد می‌شوند و برای بررسی سیستم‌های پویا می‌توان از تئوری کنترل بهینه استفاده نمود. در این مقاله تئوری کنترل بهینه را به‌عنوان یک راهبردی برای زنجیره تأمین پویا استفاده شده است تا هزینه‌های مرتبط با نگهداری کاهش یابد، موجودی بهینه شود و پایداری زیست محیطی و انعطاف‌پذیری بهبود یابد که برای اجرای آن از اصل PMP استفاده شده است. در توصیف دینامیکی یک سیستم کنترلی مبتنی بر معادلات دیفرانسیل معمولی از مدیریت موجودی زنجیره تأمین پویا که وابسته به سطوح مختلف موجودی یک زنجیره تأمین پویای حلقه بسته می‌باشد، استفاده شده است. مدیریت موجودی نقش مهمی در زنجیره تأمین پویا ایفا می‌کند. مدیریت موجودی عبارت از فرایند مستمر برنامه‌ریزی، سازماندهی و کنترل موجودی است درحالی‌که عرضه و تقاضا متعادل باشند [۵]. طراحی یک سیستم مدیریت موجودی به طور مستقیم با فروش کالا، تولید و تدارکات مرتبط می‌شود [۸]. علاوه بر این، هدف مدیریت موجودی به حداقل رساندن میانگین هزینه در واحد زمان برای بلندمدت می‌باشد [۱۲]. در مدیریت موجودی زنجیره تأمین پویا، متغیرهای تصمیم به سطوح موجودی آن زنجیره مرتبط می‌شوند. میزان تولید و سطوح ظرفیت، پارامترهای سطوح موجودی می‌باشند. کنترل بهینه با تنظیم این متغیرها امکان پاسخگویی سریع به تغییرات تقاضا و کاهش ضایعات را فراهم می‌کند.

## ۳- مدل ریاضی

مدل‌سازی پویای زنجیره تأمین تولید و عرضه، بر متغیرهای تصمیم‌گیری سطح موجودی زنجیره تأمین به عنوان مسئله ترکیبی[1]، تمرکز دارد. در این مدل، نرخ تولید و سطوح ظرفیت تولید به عنوان پارامترهای ورودی در نظر گرفته می‌شوند. مسئله MP در شیمی به‌عنوان آنالیز محفظه‌ای[2] شناخته می‌شود که شامل تعیین مقدار غلظت محلول حاصل از ترکیب دو یا چند ماده ساده در یک مخزن می‌باشد [۱۸]. روشی است که شامل بررسی تعادل جریان مواد یا منابع در یک سیستم است. مدل ریاضی MP در مهندسی برای سیستم‌های بیولوژیکی [۱۵] و در مهندسی پزشکی [۱۹] نیز به کار می‌رود. مدل ریاضی MP از معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر پیروی می‌کند:

$$\frac{dS}{dt} = R_{in} - R_{out} \qquad (۱)$$

که درآن،

$S(t)$: مقدار مواد یا محصولات موجود در خط تولید در زمان $t$ است.

$R_{in}$: مقدار ورود مواد اولیه به خط تولید (مثلاً از تأمین‌کننده) است.

$R_{out}$: مقدار خروج محصولات نهایی از خط تولید (مثلاً برای ارسال به توزیع‌کننده) است.

این معادله نشان‌دهنده تغییرات مقدار مواد در خط تولید با توجه به نرخ‌های ورودی و خروجی است.

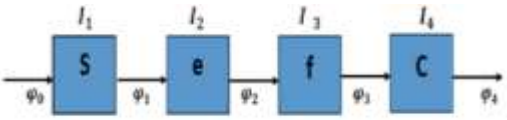
### ۳-۱ مدل‌سازی ریاضی زنجیره تأمین پویای حلقه باز

برای مدل‌سازی ریاضی یک زنجیره تأمین پویا از مفهوم معادله دیفرانسیل معمولی مسئله MP یعنی میزان ورودی و خروجی در طول زنجیره تأمین استفاده می‌شود. مدل ریاضی ارائه شده در یک سیستم خطی ثابت زمانی باحالت کلی زیر ارائه شده است [۱۸].

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases} \qquad (۲)$$

که در آن ماتریس‌های $A, B, C, D$ از مرتبه $n$ و $u, y, x \in M_{n\times 1}$.

برای مدل‌سازی زنجیره تأمین پویا در سیستم خطی ثابت زمانی (۲)، یک زنجیره تأمین حلقه باز چهارطبقه ای شامل تأمین‌کننده (s)، مرکز عمده (e)، مرکز توزیع (f) و مشتری (c) می‌باشد را مطابق شکل ۱ برای مدل ظرفیت موجودی در نظر می‌گیریم [۱۸].




شکل ۱: زنجیره تأمین پویای حلقه باز چهار طبقه‌ای برای یک مدل مدیریت ظرفیت موجودی [۱۸].

به‌طورکلی مدل ریاضی تک ورودی تک خروجی برای هر گره در یک زنجیره تأمین پویای مستقیم حلقه باز به‌صورت (۳) بیان می‌شود.

$$\frac{dI_j}{dt} = \varphi_i \frac{I_i}{C_i} - \varphi_j \frac{I_j}{C_j}, \qquad (۳)$$

$$i, j = ۱, \dots, ٤$$

که در آن:

$\varphi_i$: نرخ ورودی( تقاضا)، $\varphi_j$: نرخ خروجی (تولید)،

[1] Mixed Problem (MP)

[2] Compartmental Analysis



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]

$I_i$ : سطح موجودی ورودی( تقاضا)، $I_j$ سطح موجودی خروجی(تولید).

$C_i$ ظرفیت ورودی( تقاضا)، $C_j$ : ظرفیت خروجی (تولید).

لذا برای زنجیره تأمین پویای چهارطبقه‌ای که شامل تأمین‌کننده (S)، مرکز عمده (e)، مرکز توزیع (f) و مشتری (c) می‌باشد، مدل ریاضی زنجیره تأمین پویای حلقه باز به‌صورت روابط (۴)- (۷) بیان می‌شود [۱۸].

$$\frac{dI_1}{dt} = \varphi_0 - \varphi_1 \frac{I_1}{C_1}, \quad (۴)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \varphi_1 \frac{I_1}{C_1} - \varphi_2 \frac{I_2}{C_2}, \quad (۵)$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \varphi_2 \frac{I_2}{C_2} - \varphi_3 \frac{I_3}{C_3}, \quad (۶)$$

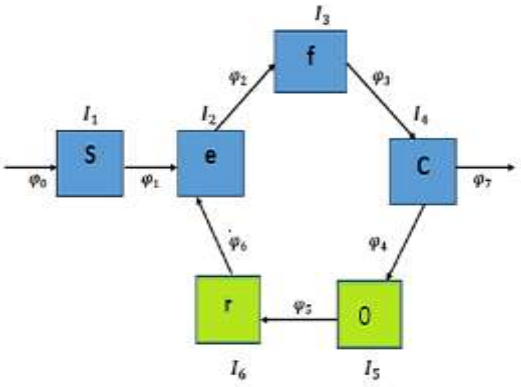
$$\frac{dI_4}{dt} = \varphi_3 \frac{I_3}{C_3} - \varphi_4 \frac{I_4}{C_4}. \quad (۷)$$

که در آن $\varphi_0$ نرخ ورودی اولیه در طبقه تأمین کننده $I_1$ است.

## ۳-۲ مدل‌سازی ریاضی زنجیره تأمین پویای حلقه بسته

یادآور می‌شویم که در زنجیره تأمین مستقیم، مواد خام به محصولات جدید تبدیل می‌شوند درحالی‌که در زنجیره تأمین معکوس، محصولات استفاده شده به‌عنوان مواد خام اولیه که به آن محصولات بازسازی شده نیز می‌گویند، مجدداً وارد چرخه تولید می‌شوند.

در این مطالعه، یک چارچوب جامع برای مدل‌سازی زنجیره تأمین پویای حلقه بسته مبتنی بر مدل توسعه‌یافته حلقه باز بخش (۳-۱) ارائه می‌دهیم که با استفاده از مسئله MP و معادلات دیفرانسیل معمولی، مدیریت موجودی را بهینه می‌کند. هدف این مدل، کاهش اثرات زیست محیطی با بهبود بازیافت وکاهش ضایعات انتشارکربن و افزایش انعطاف‌پذیری سیستم در برابر اختلالات تقاضا مانند تغییرات فصلی یا رقابتی است. این مطالعه بستر مناسب برای به حداقل رساندن هزینه‌های عملیاتی (مانند هزینه‌های تولید، حمل و نقل وبازیافت)، حداکثرسازی سود از طریق بازیافت و استفاده مجدد از مواد در چرخه بازیافت فراهم می‌نماید. برای دستیابی به این اهداف، عوامل متعددی شامل کیفیت مواد بازیافتی، فناوری بازیافت ،کارایی حمل ونقل، اثرات فصلی، رقابت وتخریب مواد در مدل لحاظ شده‌اند که این عوامل مدل را به یک سیستم حلقه بسته پایدار و انعطاف‌پذیر گسترش می‌دهند. لذا برای یک زنجیره تأمین پویای شش طبقه‌ای حلقه بسته که شامل تأمین‌کننده (s)، مرکز عمده (e)، مرکز توزیع (f)، مشتری (c)، مرکز جمع‌آوری (o)، مرکز بازیافت (r) می‌باشد، باتوجه به رابطه (۳) مدل ریاضی مربوطه در روابط (۱۳)- (۸) بیان می‌شود.




شکل (۲) : زنجیره تأمین پویای حلقه بسته شش طبقه‌ای برای یک مدل مدیریت ظرفیت موجودی

$$\frac{dI_1}{dt} = \varphi_0 - \frac{\varphi_1 I_1}{C_1}, \quad (۸)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\varphi_1 I_1}{C_1} + \frac{\theta\tau\varphi_6 I_6(1+\vartheta t)}{C_6} - \frac{(1-\rho)\beta\varphi_2 max(I_2 - S_2, 0)}{C_2+\eta I_6} - \frac{\mu I_2}{C_2}, \quad (۹)$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \frac{\beta\sigma\varphi_2 I_2}{C_2} - \frac{\varphi_3 I_3}{C_3} - \frac{\kappa I_3}{C_3}, \quad (۱۰)$$

$$\frac{dI_4}{dt} = \frac{\varphi_3 I_3}{C_3} - \frac{(1-\rho)\beta\sigma(1-\xi)\varphi_4 max(I_4 - S_4, 0)(1+\delta(t))}{C_4} - \frac{\varphi_7 I_4(1+\vartheta t)}{C_4}, \quad (۱۱)$$

$$\frac{dI_5}{dt} = \frac{\beta\sigma\varphi_4 I_4}{C_4} - \frac{\varphi_5 I_5}{C_5} - \frac{\kappa I_5}{C_5}, \quad (۱۲)$$

$$\frac{dI_6}{dt} = \frac{\varphi_5 I_5}{C_5} - \frac{(1-\theta\tau)\varphi_6 I_6}{C_6} - \frac{\mu\varphi_6 I_6}{C_6}. \quad (۱۳)$$

### تعریف متغیرها و پارامترهای مدل

- $I_k$ : سطح موجودی درگره ام $k$ $(k = 1, \dots, 6)$ که نشان‌دهنده مقدار مواد یا محصولات در هر طبقه زنجیره تأمین است.
- $C_k$: ظرفیت درگره ام $k$ $(k = 1, \dots, 6)$ که حداکثر توان ذخیره‌سازی در هر طبقه را مشخص می‌کند.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]

- $\varphi_k$: نرخ جریان بین گره‌ها که میزان انتقال مواد بین طبقه‌های زنجیره تأمین را نشان می‌دهد.
- $\varphi_6$: بیانگر میزان بازگشت مواد بازیافتی به چرخه تولید است.
- $\varphi_7$: نرخ مرجوعی که نشان‌دهنده میزان بازگشت محصولات مرجوعی از مشتری به زنجیره تأمین است.
- $\theta \in [0,1]$ : کیفیت مواد بازیافتی که میزان مرغوبیت مواد بازیافت شده را تعیین می‌کند.
- $\tau \in [0,1]$ : ضریب فناوری بازیافت که میزان کارایی فناوری های مورد استفاده در فرآیند بازیافت را نشان می‌دهد.
- $\vartheta \in [0,1]$ : نرخ یادگیری سازمانی که بهبود عملکرد سیستم با تجربه افراد را اندازه‌گیری می‌کند. نشان‌دهنده میزان بهبود کارایی سیستم (سازمان) در طول زمان به دلیل تجربه افراد و یادگیری است.
- $\rho \in [0,1]$: ضریب محدودیت زیست‌محیطی که تأثیر قوانین زیست‌محیطی بر زنجیره تأمین را نشان می‌دهد، اگر $(1-\rho)=0$ یعنی تولید با تمام ظرفیت انجام می‌شود و اگر $(1-\rho)=1$ یعنی تولید متوقف می‌شود.
- $\beta$: ضریب کارایی، افزایش ضریب کارایی حمل و نقل، بهره‌وری حمل‌ونقل را بهبود می‌بخشد و با کاهش هزینه‌ها و انتشار کربن، به بهبود کارایی سیستم و پایداری زیست‌محیطی کمک می‌کند .
- $\sigma$: ضریب اثرات فصلی، تأثیر عوامل محیطی (مانند شرایط آب‌وهوایی، تغییرات فصلی، یا تعطیلات) را بر زنجیره تأمین نشان می‌دهد و با افزایش انعطاف‌پذیری سیستم در برابر شرایط محیطی، مدیریت بهینه زنجیره تأمین را تسهیل می‌بخشد.
- $\xi$ : ضریب رقابت، سطح رقابت میان گره‌ها یا سازمان‌ها برای جذب تقاضا را نشان می‌دهد این پارامتر، انعطاف‌پذیری سیستم را در برابر رقابت تقویت می‌کند و سیستم را برای حفظ تقاضا در شرایط رقابتی آماده می‌سازد.
- $\delta(t)$ : تابعی وابسته به زمان است که تغییرات تقاضای مشتری (مانند نوسانات فصلی، تغییرات بازار، یا رویدادهای خاص را مدل‌سازی می‌کند. این تابع معمولاً به‌صورت $\delta(t)=\sin(\omega t)$ تعریف می‌شود تا نوسانات دوره‌ای را نشان دهد. این پارامتر، انعطاف‌پذیری سیستم را در برابر نوسانات تقاضا بهبود می‌بخشد و به سازمان کمک می‌کند تا به تغییرات بازار پاسخ مناسبی ارائه دهد.
- $\mu$ : ضریبی که هزینه‌های عملیاتی را در مدل وارد می‌نماید و به بهینه‌سازی اقتصادی و کاهش هزینه‌ها یاری می‌رساند.
- $\eta$ : :تأثیر بازیافت بر افزایش ظرفیت گره‌ها (مانند مرکز عمده) را نشان می‌دهد و به‌صورت یک ضریب مثبت تعریف می‌شود که با کاهش نیاز به تولید جدید، به پایداری زیست‌محیطی کمک می‌کند.
- $S_k$ : سطح موجودی ایمنی، مقداری از موجودی است که درگره ام $k$ $(k=1,\dots,6)$، به‌عنوان ذخیره احتیاطی نگهداری می‌شود تا از بروز کمبود در زنجیره تأمین در برابر اختلالات تقاضا یا عرضه (مانند تغییرات ناگهانی تقاضا یا تأخیر در تأمین مواد) جلوگیری نماید و انعطاف‌پذیری سیستم را در برابر اختلالات تقویت می‌نماید.
- $\kappa$: ضریب تخریب مواد $\kappa$، میزان فاسد شدن یا از بین رفتن مواد در طول زمان (مانند خرابی محصولات یا کاهش کیفیت) را نشان می‌دهد. اگر $\kappa=0$ باشد هیچ تخریبی وجود ندارد؛ اما اگر $\kappa=1$ باشد آنگاه مواد به‌طور کامل تخریب می‌شوند و با شناسایی ضایعات، به بهبود پایداری زیست محیطی کمک می‌نماید.

## ٤ تحلیل حساسیت زنجیره تأمین پویای حلقه باز و حلقه بسته

تحلیل حساسیت ابزاری کلیدی برای بررسی رفتار دینامیکی زنجیره تأمین پویا درساختارهای حلقه باز و حلقه بسته است. این تحلیل با هدف ارزیابی تأثیر تغییرات پارامترهای کلیدی مانند نرخ تولید $(\varphi_k)$ و ظرفیت تولید $(C_k)$ بر عملکرد سیستم انجام می‌شود. در این بخش، ابتدا حساسیت این پارامترها در زنجیره تأمین حلقه باز وسپس در زنجیره تأمین حلقه بسته تحلیل می‌شود و تأثیر آن‌ها بر پایداری زیست محیطی و انعطاف‌پذیری به صورت کلی بررسی می‌گردد.

### ٤-١ تحلیل حساسیت زنجیره تأمین پویای حلقه باز

با درنظرگرفتن سطوح ظرفیت و نرخ تولید در یک زنجیره تأمین پویا، حساسیت نرخ تولید را می‌توان در فضای حالت مورد تحلیل قرارداد. برای تعیین چگونگی حساسیت نرخ تولید مربوط به زنجیره تأمین پویای حلقه باز چهارطبقه‌ای که شامل تأمین‌کننده (s)، مرکز عمده (e)، مرکز توزیع (f)، مشتری (c) می‌باشد، ابتدا روابط (۷)- (۴) را در نظرگرفته و با مشتق‌گیری نسبت به نرخ تولید در هر مرحله داریم:

$$\frac{d\dot{I}_k}{d\varphi_k}=\frac{-I_k}{C_k}, \qquad k=1,2,3,4, \qquad (14)$$

با مشتق‌گیری نسبت به سطح ظرفیت تولید در روابط (۷)- (۴) داریم:

$$\frac{d\dot{I}_k}{dC_k}=\varphi_k\,\frac{I_k}{{C_k}^2}, \qquad k=1,2,3,4, \qquad (15)$$

باتوجه به روابط (۱۴) و(۱۵) داریم:



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]

$$\frac{d\dot{I}_k}{dC_k} = \frac{-\varphi_k}{C_k}\ \frac{d\dot{I}_k}{d\varphi_k}, \qquad k = ۱,۲,۳,۴, \qquad (۱۶)$$

که با حل رابطه (۱۶ ) خواهیم داشت:

$$\ln(C_k\varphi_k) = \gamma, \quad (۱۷)$$

و در رابطه (۱۷)، $\gamma$ ثابت انتگرال‌گیری است وداریم:

$$C_k = \frac{e^{\gamma}}{\varphi_k}. \qquad k = ۱,۲,۳,۴, \qquad (۱۸)$$

## ٤-۲ تحلیل حساسیت در زنجیره تأمین پویای حلقه بسته

زنجیره تأمین پویای حلقه بسته که شامل شش طبقه تأمین‌کننده (s)، مرکز عمده (e)، مرکز توزیع (f)، مشتری (c)، مرکز جمع‌آوری (o) و مرکز بازیافت (r) می‌باشد، روابط حاکم بر جریان مواد و بازیافت به‌صورت روابط (۱۳)-(۸) تعریف می‌شوند. برای مطالعه تحلیل حساسیت، ابتدا مشتق روابط نسبت به نرخ تولید$(\varphi_k\ ,\ k = 1, \dots ,6)$ در هر مرحله برای هرگره محاسبه می‌شود. با توجه به نقش ضرایب عددی برای روابط (۱۳)-(۸ ) ، روابط (۲۳)-(۱۹) با نماد تقریب مشخص می‌گردند.

$$\frac{d\dot{I}_k}{d\varphi_k} \cong \frac{-I_k}{C_k}, \quad k = 1, \dots ,6 \qquad (۱۹)$$

با مشتق‌گیری نسبت به سطح ظرفیت تولید در روابط (۱۳)- (۸) داریم:

$$\frac{d\dot{I}_k}{dC_k} \cong \varphi_k\ \frac{I_k}{C_k^{۲}}\ , \qquad k = 1, \dots ,6 \quad (۲۰)$$

باتوجه به دورابطه (۱۹) و(۲۰) داریم:

$$\frac{d\dot{I}_k}{dC_k} \cong \frac{-\varphi_k}{C_k}\ \frac{d\dot{I}_k}{d\varphi_k}, \ k = 1, \dots ,6 \quad (۲۱)$$

که با حل رابطه (۲۱ ) خواهیم داشت:

$$\ln(C_k\varphi_k) \cong \gamma, \qquad (۲۲)$$

و در رابطه (۲۲)، $\gamma$ ثابت انتگرالگیری است وداریم:

$$C_k \cong \frac{e^{\gamma}}{\varphi_k}. \qquad k = 1, \dots ,6. \qquad (۲۳)$$

اگرفرضیات زیر برای روابط (۱۳)- (۸ ) برقرار باشند، رابطه (۲۳) به تساوی تبدیل می‌شود.

- سطح موجودی همواره بیشتر از سطح ایمنی است $(I_k > S_k,\ k = 2,4\ )$.
- حذف اثرات زمانی $(\vartheta = 0, \delta(t) = 0)$ .
- حذف فاکتورهای زیست‌محیطی $(\mu = 1\ , \kappa = 0, \xi = 0, \sigma = 1, \beta = 1, \rho = 0, \eta = 0)$.
- حذف تاثیر بازیافت $(\theta\tau = 1)$ .

این نتیجه مشابه زنجیره تأمین پویای حلقه باز است و نشان می‌دهد که رابطه معکوس میان نرخ تولید و حداکثر توان ذخیره‌سازی در هر گره از زنجیره تأمین پویا که در اصطلاح همان ظرفیت تولید می‌نامند، در هر دو ساختار برقرار است. این رابطه معکوس، امکان تنظیم تولید و بازیافت را فراهم می‌آورد، که تأثیرات مهمی بر عملکرد سیستم دارد.

## ٤-۳ تأثیر تحلیل حساسیت بر پایداری زیست‌محیطی و انعطاف‌پذیری

تحلیل حساسیت در زنجیره‌های تأمین پویا نشان می‌دهد که رابطه معکوس میان نرخ تولید و ظرفیت تولید، پایه‌ای برای بهبود عملکرد زنجیره تأمین پویا فراهم می‌آورد. در زنجیره تأمین پویای حلقه باز که جریان مواد به‌صورت خطی است و بازیافت وجود ندارد، رابطه معکوس میان نرخ تولید و ظرفیت، تولید غیرضروری را کاهش می‌دهد. در زنجیره تأمین پویای حلقه بسته نیز رابطه معکوس میان نرخ تولید و ظرفیت، تولید غیر ضروری کاهش می‌یابد که با کم کردن مصرف منابع اولیه و انتشار کربن، پایداری زیست‌محیطی تقویت می‌شود. از نظر انعطاف‌پذیری، تنظیم این پارامترها سیستم را با تغییرات تقاضا هماهنگ می‌کند. افزایش نرخ تولید در زمان تقاضای بالا، عرضه را تسریع می‌کند؛ در حالی که کاهش آن در زمان تقاضای پایین از هدررفت منابع جلوگیری می‌کند. این یافته‌ها، راهنمایی عملی برای مدیران زنجیره تأمین ارائه می‌دهد تا با تنظیم پارامترهای کلیدی رابطه‌ای معکوس بین نرخ تولید و ظرفیت تولید ایجاد نمایند و عملکرد سیستم را بهینه سازند تا به اهداف زیست‌محیطی و عملیاتی دست یابند.

## ٥ پایداری در زنجیره تأمین پویای حلقه باز و حلقه بسته

پایداری در زنجیره تأمین پویا به تمرکز بر جنبه‌های زیست محیطی، اقتصادی و اجتماعی برای اطمینان از طولانی مدت بودن منابع وکاهش اثرات منفی آنها بر محیط زیست اشاره دارد. پایداری زیست محیطی بر کاهش ضایعات وانتشار کربن و پایداری اقتصادی و اجتماعی بر بهینه‌سازی هزینه‌ها و سودآوری تمرکز دارد. در این بخش پایداری زنجیره تأمین پویا



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]

در ساختارهای حلقه باز و بسته با استفاده ازتحلیل ریاضی بررسی می‌شود و در نهایت با بیان قضیه ۲ به این نتیجه می‌رسیم که پایداری دینامیکی با پایداری زیست محیطی مرتبط می‌باشد.

**قضیه ۱.** [۱۸]. یک نقطه تعادل $x^*$ از زنجیره تأمین پویای حلقه باز که در روابط (۷)-(۴) صدق می کند پایدار است اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین $J^*$ متناظر با روابط (۷) - (۴) دارای قسمت‌های حقیقی منفی باشد.

**قضیه ۲.** یک نقطه تعادل $x^*$ از زنجیره تأمین پویای حلقه بسته که در روابط (۱۳) - (۸) صدق می کند:
(الف) اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین $J^*$ متناظر با روابط (۱۳) - (۸) دارای قسمت‌های حقیقی منفی باشد و فرضیات زیر برقرار باشد:

- سطح موجودی همواره بیشتر از سطح ایمنی است $(I_k > S_k,\ k = 2,4)$.
- حذف اثرات زمانی $(\vartheta = 0, \delta(t) = 0)$.
- حذف فاکتورهای زیست‌محیطی $(\mu = 1, \kappa = 0, \xi = 0, \sigma = 1, \beta = 1, \rho = 0, \eta = 0)$.
- حذف تاثیر بازیافت $(\theta\tau = 1)$.

نقطه تعادل $x^*$، پایدار مجانبی است

(ب) اگر شرایط زیست محیطی زیر برقرار باشد:

- مقدار بازیافت $(\theta\tau)$ به اندازه کافی بالا باشد $(\theta\tau \geq \theta_{min})$.
- ضریب تخریب مواد $(\kappa)$ کمتر از یک مقدار بحرانی باشد $(\kappa_{max} > \kappa)$.
- محدودیت‌های زیست محیطی$(\rho)$ به طور مؤثر اعمال شود$(\rho \geq \rho_{min})$.

آنگاه زنجیره تأمین حلقه بسته، پایدار زیست محیطی است

**اثبات (الف) :** روابط (۱۳)-(۸) زنجیره تأمین پویای حلقه بسته را در نظر می گیریم. با مشتق گیری نسبت به

$I_k(k = 1, \dots, 6)$ ماتریس ژاکوبین $(J^*)$ به‌صورت (24) مشخص می‌شود.

$$(J^* ) = \begin{bmatrix} -\frac{\varphi_1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_1}{C_1} & -\frac{(1-\rho)\beta\varphi_2}{C_2} - \frac{\mu}{C_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\theta\tau\varphi_6}{C_6} \\ 0 & \frac{\beta\sigma\varphi_2}{C_2} & -\frac{\varphi_3}{C_3} - \frac{\kappa}{C_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varphi_3}{C_3} & -\frac{(1-\rho)\beta\sigma(1-\xi)\varphi_4}{C_4} - \frac{\varphi_7}{C_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta\sigma\varphi_4}{C_4} & -\frac{\varphi_5}{C_5} - \frac{\kappa}{C_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_5}{C_5} & -\frac{(1-\theta\tau)\varphi_6}{C_6} - \frac{\mu\varphi_6}{C_6} \end{bmatrix}$$

(۲۴)

با محاسبه مقادیرویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ از ماتریس $J^*$ داریم:

$$\lambda_1 = -\frac{\varphi_1}{C_1}, \quad (۲۵)$$

$$\lambda_2 = -\frac{(1-\rho)\beta\varphi_2}{C_2} - \frac{\mu}{C_2}, \quad (۲۶)$$

$$\lambda_3 = -\frac{\varphi_3}{C_3} - \frac{\kappa}{C_3}, \quad (۲۷)$$

$$\lambda_4 = -\frac{(1-\rho)\beta(1-\xi)\varphi_4}{C_4} - \frac{\varphi_7}{C_4}, \quad (۲۸)$$

$$\lambda_5 = -\frac{\varphi_5}{C_5} - \frac{\kappa}{C_5}, \quad (۲۹)$$

$$\lambda_6 = -\frac{(1-\theta\tau)\varphi_6}{C_6} - \frac{\mu}{C_6}, \quad (۳۰)$$

اکنون با توجه به فرضیات (الف) ومثبت بودن مقادیر $\varphi_k, C_k$، رابطه (۳۱) را خواهیم داشت:

$$\lambda_k \cong -\frac{\varphi_k}{C_k},\ k = 1, \dots, 6. \quad (۳۱)$$

لذا مقایر ویژه منفی است و نقطه تعادل پایدار مجانبی است.

**اثبات (ب):** پایداری زیست‌محیطی به معنای کاهش ضایعات، کاهش مصرف منابع اولیه وکاهش انتشارکربن است. ما باید نشان دهیم که



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]

اگر شرایط زیست‌محیطی قضیه ۲ برقرار باشند، این اهداف محقق می‌شوند. هر شرط را به‌صورت جداگانه بررسی می‌کنیم.

**مقدار بازیافت $(\theta\tau \geq \theta_{min})$ :** در زنجیره تأمین پویای حلقه بسته (شکل ۲) مواد بازیافتی ازگره بازیافت (r) به مرکز عمده (e) بازمی‌گردد. این جریان، بازیافت را با $\frac{\theta\tau\varphi_6 I_6}{C_6}(1+\vartheta\tau)$ در گره (e) نشان می‌دهد. هر چه مقدار $\theta\tau$ بزرگتر باشد، مواد بیشتری بازیافت می‌شوند و ضایعات که با $-\frac{(1-\theta\tau)\varphi_6 I_6}{C_6}$ در گره (r) نشان داده می‌شود، کاهش می‌یابد. اگر $\theta\tau \geq \theta_{min}$ باشد، می‌توان $\theta_{min}$ را طوری تنظیم نمود که ضایعات کمتر از حد مجاز زیست محیطی باشد. این کار مصرف مواد اولیه را کاهش می‌دهد، زیرا نیاز به تولید جدید کمتر می‌شود.

**ضریب تخریب مواد $(\kappa < \kappa_{max})$ :**

ضریب تخریب $\kappa$ در گره‌های f، o نشان‌دهنده ضریب تخریب موادی می‌باشدکه به ضایعات منجر می‌شود. اگر $(\kappa_{max} > \kappa)$ باشد، مقدار مواد تخریب‌شده کاهش می‌یابد. این کاهش، ضایعات را کم می‌کند واز تولید اضافی برای جایگزینی مواد تخریب شده جلوگیری می‌کند، که به کاهش انتشار کربن کمک می‌کند.

**محدودیت‌های زیست محیطی $(\rho \geq \rho_{min})$ :**

ضریب محدودیت زیست محیطی $\rho$ در گره های(e) و(c) جریان تولید را کنترل می‌کند. اگر $(\rho \geq \rho_{min})$ باشد دراین‌صورت با کاهش مقدار $(1-\rho)$ تولید غیر ضروری کمتر می شود و این کاهش، مصرف منابع اولیه و انتشار کربن ناشی از تولید و حمل‌ونقل را کم می‌کند.

## ٦ مطالعه موردی

همان‌طور که اشاره شد، یک زنجیره تأمین پویای حلقه بسته شامل شش طبقه تأمین‌کننده (s)، مرکز عمده (e)، مرکز توزیع (f)، مشتری (c)، مرکز جمع‌آوری (o)، مرکز بازیافت (r) می‌باشد. یک کنترل بهینه مبتنی بر انرژی به‌منظور کنترل تقاضا به‌صورت روابط (۳۲) تا (۳۸) تعریف می‌کنیم.

$$J(\varphi_.) = min\tfrac{1}{2}\int_0^T \varphi_.^2\, dt \qquad (۳۲)$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \varphi_. - \frac{\varphi_1 I_1}{C_1}, \qquad (۳۳)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{\varphi_1 I_1}{C_1} + \frac{\varphi_6 I_6}{C_6} - \frac{(\varphi_2+1)I_2}{C_2}, \qquad (۳۴)$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \frac{\varphi_2 I_2}{C_2} - \frac{\varphi_3 I_3}{C_3}, \qquad (۳۵)$$

$$\frac{dI_4}{dt} = \frac{\varphi_3 I_3}{C_3} - \frac{\varphi_4 I_4}{C_4} - \frac{\varphi_7 I_4}{C_4}, \qquad (۳۶)$$

$$\frac{dI_5}{dt} = \frac{\varphi_4 I_4}{C_4} - \frac{\varphi_5 I_5}{C_5}, \qquad (۳۷)$$

$$\frac{dI_6}{dt} = \frac{\varphi_5 I_5}{C_5} - \frac{\varphi_6 I_6}{C_6}. \qquad (۳۸)$$

برای حل مسئله فوق روابط(۱۳)- (۸) ساده‌سازی شده تا به فرم روابط (۳۸)- (۳۳) تبدیل شود. برای تبدیل روابط به فرم ساده شده، فرضیات زیر اعمال می‌شود.

- سطح موجودی همواره بیشتر از سطح ایمنی است $(I_k > S_k,\ k = 2,4)$.
- حذف اثرات زمانی $(\vartheta = 0, \delta(t) = 0)$.
- حذف فاکتورهای زیست‌محیطی $(\mu = 1, \kappa = 0, \xi = 0, \sigma = 1, \beta = 1, \rho = 0, \eta = 0)$.
- حذف تاثیر بازیافت $(\theta\tau = 1)$.

### ٦-١ حل مسئله با اصل حداکثری پونتریاگین (PMP)

برای کمینه کردن تابع هزینه، از اصل PMP استفاده می‌کنیم. این روش به ما کمک می‌کند تا نرخ تولید بهینه $(\varphi_.)$ را پیدا کنیم.

**(۱) تعریف هامیلتونی**

همیلتونی $(H)$ ترکیبی از تابع هزینه و معادلات سیستم است. متغیرهای کمکی $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6)$ را برای هر طبقه تعریف می‌کنیم :

$$H(I:u,\lambda_i,t) = \tfrac{1}{2}\varphi_.^2 + \lambda_1\left(\varphi_. - \frac{\varphi_1 I_1}{C_1}\right) + \lambda_2\left(\frac{\varphi_1 I_1}{C_1} + \frac{\varphi_6 I_6}{C_6} - \frac{(\varphi_2+1)I_2}{C_2}\right) + \lambda_3\left(\frac{\varphi_2 I_2}{C_2} - \frac{\varphi_3 I_3}{C_3}\right) + \lambda_4\left(\frac{\varphi_3 I_3}{C_3} - \frac{\varphi_4 I_4}{C_4} - \frac{\varphi_7 I_4}{C_4}\right) + \lambda_5\left(\frac{\varphi_4 I_4}{C_4} - \frac{\varphi_5 I_5}{C_5}\right) + \lambda_6\left(\frac{\varphi_5 I_5}{C_5} - \frac{\varphi_6 I_6}{C_6}\right). \qquad (۳۹)$$

**(۲) شرایط لازم بهینگی PMP با تمرکز بر شرط هامیلتونی**

PMP شرایط لازم برای بهینگی را مشخص می‌کند. این شرایط شامل موارد زیر است:

- **شرط هامیلتونی (یافتن کنترل بهینه):** برای یافتن کنترل بهینه باید هامیلتونی را نسبت به $\varphi_0$ کمینه کنیم.

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_0} = \varphi_0 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = -\lambda_1, \qquad (۴۰)$$

برای اطمینان از کمینه بودن، مشتق دوم را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial {\varphi_0}^2} = 1 > 0, \qquad (۴۱)$$



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]

بنابراین، نرخ تولید بهینه $\varphi_0$ مستقیماً به متغیر کمکی $\lambda_1$ وابسته است. لازم به ذکر است که نقطه $\varphi_0 = -\lambda_1$ یک نقطه بحرانی اســت و اگر $\frac{\partial^2 H}{\partial {\varphi_0}^2} < 0$ باشــد، نقطه بحرانی یک نقطه بیشینه محلی است واگر $\frac{\partial^2 H}{\partial {\varphi_0}^2} > 0$ باشد ، نقطه بحرانی یک نقطه کمینه محلی است. این شرط تایید می‌کند که $\varphi_0$ تابع هزینه را کمینه می‌کند.

- **معادلات کمکی:**

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I_i}, \qquad i = ۱, \dots, ۶ \qquad (۴۲)$$

(۴۳) برای $I_۱$ : $\frac{d\lambda_۱}{dt} = \frac{\varphi_۱}{C_۱}(\lambda_۱ - \lambda_2),$

(۴۴) برای $I_2$ : $\frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{\varphi_2 + 1}{C_2}(\lambda_2 - \lambda_3),$

(۴۵) برای $I_3$ : $\frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{\varphi_3}{C_3}(\lambda_3 - \lambda_4),$

(۴۶) برای $I_۴$ : $\frac{d\lambda_۴}{dt} = \lambda_4 - \frac{\varphi_4}{C_4}\lambda_5$ $\frac{\varphi_4 + \varphi_7}{C_4}$

(۴۷) برای $I_۵$ : $\frac{d\lambda_۵}{dt} = \frac{\varphi_5}{C_5}(\lambda_5 - \lambda_6),$

(۴۸) برای $I_۶$ : $\frac{d\lambda_6}{dt} = \frac{\varphi_6}{C_6}(\lambda_6 - \lambda_2).$

- **معادلات حالت:** معادلات (۳۸) - (۳۳) معادلات حالت هستند.

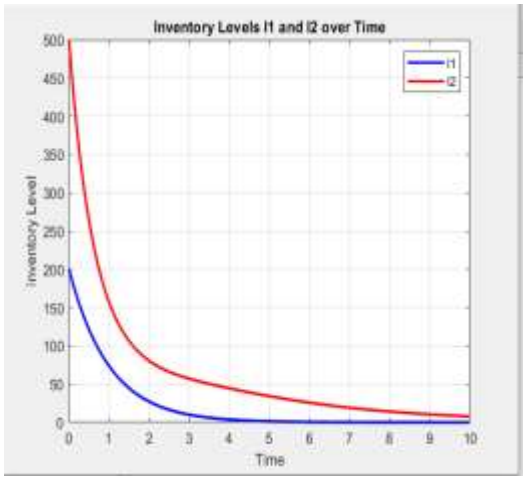
- **شرایط مرزی :** درحل مسئله کنترل بهینه برای زنجیره تأمین حلقه بسته، شرایط مرزی به‌صورت رابطه (49) می‌باشد.

$$I_i(0) = I_{i0}\ , \quad \lambda_i(T) = 0 \quad i = 1,2, \dots, 6. \qquad (۴۹)$$

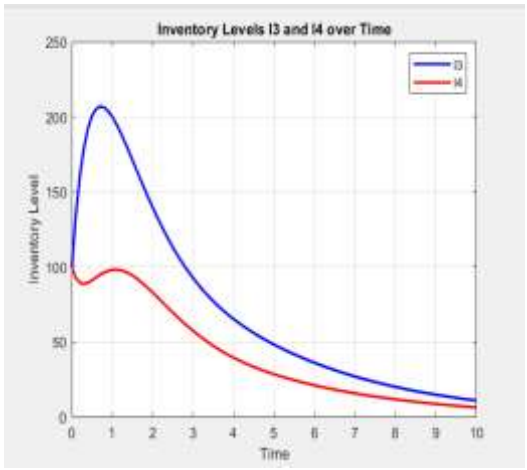
$I_i(0)$ : مقدار اولیه موجودی هر طبقه $I_۱$ تا $I_۶$ را در زمان $t = 0$ مشخص می‌کند.

$\lambda_i(T)$ : مقدار متغیرهای کمکی $\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_۶$ را در زمان $t = T$ برابر با صفر قرار می‌دهد.

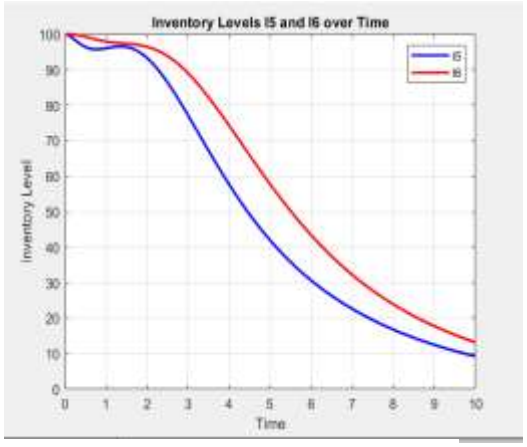
این سیستم شامل ۱۲ معادله (۶ معادله حالت و ۶ معادله کمکی) است که با شرایط مرزی حل می‌شود.




*شکل (۳): سطح موجودی تأمین کننده و مرکز عمده در یک بازه زمانی مشخص ۱۰ سال*



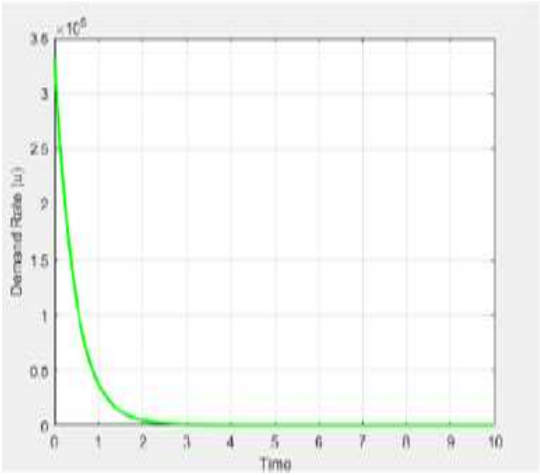

شکل (۴): سطح موجودی مرکز عمده و مشتری در یک بازه زمانی مشخص ۱۰ سال




شکل(۵) : سطح موجودی مرکز جمع‌آوری و مرکز بازیافت در یک بازه زمانی مشخص ۱۰ سال



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]




شکل(۶) : نرخ تقاضا برای یک بازه زمانی مشخص ۱۰ سال

در این پژوهش، مدل زنجیره تأمین حلقه بسته پویا را با استفاده از روش کنترل بهینه به‌منظور مدیریت بهینه موجودی‌ها و نرخ تقاضا توسعه دادیم. نتایج حاصل از شبیه‌سازی و نمودارها نشان می‌دهد که کنترل بهینه نقش مؤثری در بهبود عملکرد زنجیره تأمین ایفا می‌کند که می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

### الف- کاهش نوسانات موجودی

نمودارهای مربوط به سطوح موجودی شکل‌های(۵)، (۴) و(۳) نشان می‌دهد که استفاده از کنترل بهینه باعث کاهش نوسانات شدید در سطوح موجودی می‌شود. این کاهش نوسانات به معنی پایداری بیشتر و کاهش ریسک‌های مرتبط با کمبود یا افزایش ناگهانی موجودی است. به طور خاص، در نمودارهای موجودی‌های $I_1$ تا $I_6$ مشاهده می‌شود که موجودی‌ها به‌تدریج و با نوسانات کمتری به سمت مقادیر تعادلی حرکت می‌کنند.

### ب- تعادل تأمین و تقاضا

نمودار نرخ تقاضا شکل (۶) نشان می‌دهد که کنترل بهینه تضمین می‌کند در هر لحظه زمانی، نرخ تقاضا به‌گونه‌ای تنظیم شود که تعادل مناسبی بین تأمین و تقاضا برقرار باشد. این تعادل منجر به بهره‌وری بالاتر و کاهش هزینه‌های نگهداری و سفارش دهی می‌شود. کاهش نوسانات نرخ تقاضا در طول زمان بیانگر این تعادل است.

### ج- پاسخگویی به تغییرات تقاضا

نمودار نرخ تقاضا شکل (۶) همچنین نشان می‌دهد که کنترل بهینه قابلیت تنظیم نرخ تقاضا را به‌گونه‌ای فراهم می‌کند که سیستم بتواند به تغییرات تقاضا به طور مؤثر پاسخ دهد. این ویژگی باعث انعطاف‌پذیری بیشتر زنجیره تأمین و توانایی مقابله با تغییرات ناگهانی در تقاضا می‌شود.

## ۷ نتیجه‌گیری

این پژوهش نشان داد که استفاده از کنترل بهینه در مدیریت زنجیره تأمین پویا، علاوه بر کاهش هزینه‌ها و افزایش بهره‌وری، به بهبود پایداری زیست‌محیطی و انعطاف‌پذیری سیستم نیز کمک می‌کند. نتایج حاصل از این مطالعه تأیید می‌کند که کنترل بهینه راهکاری مؤثر برای مدیریت کارآمد زنجیره تأمین پویا است، زیرا تولید را با تقاضا هماهنگ کرده و از هدررفت منابع جلوگیری می‌کند. تحلیل حساسیت انجام‌شده نیز نشان داد که تنظیم پارامترهای کلیدی مانند نرخ تولید و ظرفیت، نقش مهمی در بهبود عملکرد سیستم دارد. این رویکرد نه‌تنها پایداری زیست‌محیطی را از طریق کاهش ضایعات تقویت می‌کند، بلکه انعطاف‌پذیری سیستم را در برابر تغییرات بازار افزایش می‌دهد. برای تحقیقات آینده، پیشنهاد می‌شود این رویکرد برای سیستم‌های غیرخطی توسعه یابد و از روش‌های پیشرفته مانند کنترل پیش‌بینی مدل غیرخطی استفاده شود. یافته‌های این تحقیق می‌تواند به‌عنوان خط‌مشی مناسب برای مدیران و پژوهشگران در راستای بهبود و بهینه‌سازی فرایندهای زنجیره تأمین پویا مورد استفاده قرار گیرد.

## مراجع

[1] Arzu Akyuz, G., Erman Erkan, T. (2010). Supply chain performance measurement: A literature review. International Journal of Production Research, 48(17), 5137-5155.

[2] Axsater, S. (1985). Control theory concepts in production and inventory control. International Journal of Systems Science, 16(2), 161-169.

[3] Beamon, B. M. (1998). Supply chain design and analysis: Models and methods. International Journal of Production Economics, 55(3), 281-294.

[4] Bertsekas, D. (2000). Dynamic programming and optimal control. Belmont, MA: Athena Scientific. Appendix E.

[5] de Vries, J. (2007). Diagnosing inventory management systems: An empirical evaluation of a conceptual approach. International Journal of Production Economics, 108(1-2), 63-73.

[6] Dolgui, A., Ivanov, D., Sethi, S. P., Sokolov, B. (2019). Scheduling in production, supply chain and industry systems by optimal control: fundamentals, state-of-the-art and applications. International Journal of Production Research,57(2), 411-432

[7] Edghill, J., Towill, D. (1989). The use of system dynamics in manufacturing systems engineering. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 11(4), 208-216.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]

uncertainty. International Journal of Production Economics, 248, 108431.

[22] Zhao, L., Yang, Z. (2023). Multi-objective optimization in supply chain networks: An adaptive approach. Computers Industrial Engineering, 177, 108235.

[23] Zhou, W., Xu, Q. (2021). Optimal control strategies for supply chain management with stochastic demand. European Journal of Operational Research, 293(1), 45-59.

[8] Fiestras-Janeiro, M. G., García-Jurado, I., Meca, A., Mosquera, M. A. (2011). Cooperative game theory and inventory management. European Journal of Operational Research, 210(3), 459-466.

[9] Ivanov, D., Dolgui, A., Sokolov, B. (2016). Robust dynamic schedule coordination control in the supply chain. Computers Industrial Engineering, 94, 18-31.

[10] Ivanov, D., Sethi, S., Dolgui, A., Sokolov, B. (2018). A survey on control theory applications to operational systems, supply chain management, and industry. Annual Reviews in Control, 46, 134-147.

[11] Kumar, V. N. S. A., Kumar, V., Brady, M., Garza-Reyes, J. A., Simpson, M. (2017). Resolving forward-reverse logistics multi-period model using evolutionary algorithms. International Journal of Production Economics, 183, 458-469.

[12] Martinez-Luaces, V. (2018). Square matrices associated to mixing problems ODE systems. In Matrix Theory-Applications and Theorems.

[13] Ortega, M., Lin, L. (2004). Control theory applications to the production–inventory problem: A review. International Journal of Production Research, 42(11), 2303-2322.

[14] Powell, W. B. (2007). Approximate dynamic programming: Solving the curses of dimensionality, 703, John Wiley & Sons.

[15] Rahimian, E., Zabihi, S., Amiri, M., Linares-Barranco, B. (2017). Digital implementation of the two-compartmental Pinsky–Rinzel pyramidal neuron model. IEEE Transactions on Biomedical Circuits and Systems, 12(1), 47-57.

[16] Riddalls, C. E., Bennett, S., Tipi, N. S. (2000). Modelling the dynamics of supply chains. International Journal of Systems Science, 31(8), 969-976.

[17] Singh, D., Verma, A. (2018). Inventory management in supply chain. Materials Today: Proceedings, 5(2), 3867-3872.

[18] Taboada, H., Davizón, Y. A., Espíritu, J. F., Sánchez-Leal, J. (2022). Mathematical modeling and optimal control for a class of dynamic supply chain: A systems theory approach. Applied Sciences, 12(11), 5347.

[19] Yuan, K. F., Gao, Y. (2010). Inventory decision-making models for a closed loop supply chain system. International Journal of Production Research, 48(20), 6155-6187.

[20] Zhang, G., Amin, S. H. (2011). Network design of a closed-loop supply chain with uncertain demand and return. In Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Service Operations, Logistics and Informatics, 376-379, IEEE.

[21] Zhang, J., Wu, Y. (2022). A hybrid model for optimizing supply chain inventory under demand



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09 ]