مجله کنترل
جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۶۹-۵۷

سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور با وجود پارامترهای نامعلوم و غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر ورودی‌های کنترلی

علی ابویی[۱]، محمد حائری[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، Aliabooee@ee.sharif.edu

[۲] استاد، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، Haeri@sina.sharif.edu

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۳/۲۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۵/۳۰)

چکیده: در این مقاله، مسئله سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور با در نظر گرفتن سه فرض عملی مهم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا، از تئوری پایداری لیاپانوف برای طراحی ورودی‌های کنترلی به منظور سنکرون‌سازی شمول‌های لور پیرو و مرجع استفاده می‌شود. به عنوان فرض اول، بخش معادله دیفرانسیلی شمول‌های لور به صورت یک مجموعه‌ی محدب در نظر گرفته می‌شود که این نکته می‌تواند بخشی از عدم‌قطعیت‌های سیستم دینامیکی توصیف شده با شمول لور را پوشش دهد. ناشناخته بودن پارامترهای شمول دیفرانسیلی لور، فرض دوم این مقاله را تشکیل می‌دهد. با توجه به فرض سوم، عملگرهای غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر اعمال ورودی‌های کنترلی به شمول‌های لور در نظر گرفته می‌شوند. در واقع این فرض آخر، تا حدودی محدویت‌های پیاده‌سازی عملی را به علت وجود عملگرها نشان می‌دهد و چنانچه این موضوع در حین فرآیند طراحی، نادیده انگاشته شود، مشکلاتی را به وجود خواهد آورد. برای ارزیابی کارایی و موثر بودن ورودی‌های کنترلی پیشنهادی، دو شبیه‌سازی کامپیوتری شامل سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور و یک مثال عملی آن ارائه شده است.

کلمات کلیدی: شمول دیفرانسیلی لور ، غیرخطی‌ساز شعاعی ، شمول‌های لور مرجع و پیرو، سنکرون‌سازی.

Synchronization of Two Lur'e Differential Inclusions with Sector Input Nonlinearity and Unknown Parameters

Ali Abooee, Mohammad Haeri

Abstract: This paper deals with the synchronization of two Lur'e differential inclusions containing sector nonlinearity. Lyapunov stability theorem is employed to design the control inputs. The controllers are designed considering three important practical features in physical systems. First, differential equation part of the Lur'e differential inclusion is assumed to be convex. Second, it is presumed that parameters of the Lur'e differential inclusion are not completely known. Third, sector nonlinearities are considered on control inputs applied to the Lur'e differential inclusions. To assess performance and effectiveness of the proposed controllers a numerical example and a rotor dynamic system are simulated.

Keywords: Lur'e differential inclusion, Sector nonlinearity, Master and slave Lur'e systems, Synchronization.

۱- مقدمه

امروزه، شمول‌های دیفرانسیلی[۱] کاربردهای گسترده‌ایی در مدل‌سازی دقیق و جامع سیستم‌های عملی و پدیده‌های فیزیکی دارند. در این راستا می‌توان به کاربرد شمول دیفرانسیلی در مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی با محدودیت‌های یک‌طرفه و اصطکاک [۱-۳]، مدارهای الکتریکی دارای المان‌های غیرخطی و سوئیچ‌شونده [۴ و ۵]، سیستم‌های

[۱] Differential inclusions

متغیر با زمان یا دارای عدم‌قطعیت متغیر با زمان [۶-۸]، سیستم‌های هایبرید و سیستم‌های سوئیچ‌شونده [۹-۱۳]، سیستم‌های ناپیوسته و ناهموار [۱۴ و ۱۵] و ... اشاره کرد. تحلیل و فرمول‌بندی مسائل کنترل بهینه [۱۶ و ۱۷] و همچنین توصیف سیستم‌های تصادفی [۱۸ و ۱۹]، دو کاربرد مهم و عمده‌ی دیگر از شمول‌های دیفرانسیلی می‌باشند. شمول‌های دیفرانسیلی، داری دسته‌بندی‌های گوناگونی هستند که شمول دیفرانسیلی لور یکی از انواع پرکاربرد و مهم آن‌ها می‌باشد و از ترکیب یک معادله‌ی دیفرانسیلی و یک نگاشت غیرخطی یکنوا[۱] تشکیل شده است [۱، ۱۴و ۲۰-۲۷]. همین ساختار ویژه‌ی شمول لور باعث شده است تا معادلات دینامیکی بسیاری از سیستم‌های عملی در قالب ساختار این نوع شمول قرار گیرند [۱-۳ و ۲۰-۲۷].

با توجه به نکات و مطالب ذکر شده، امروزه مطالعات و پژوهش‌های فراوانی بر روی شمول‌های دیفرانسیلی لور در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی از جمله مهندسی کنترل انجام شده‌اند که تمرکز اغلب این تحقیقات و پژوهش‌ها [۲۰-۲۸] بر روی دو موضوع می‌باشد. موضوع اول، تحلیل پایداری و پایدارسازی شمول‌های دیفرانسیلی لور با طراحی مناسب ورودی‌های کنترلی است [۱، ۲۰، ۲۲ و ۲۸]. موضوع دوم، طراحی رویتگر برای شمول‌های لور می‌باشد که اهمیت بسزایی در سیستم‌های مکانیکی با وجود اصطکاک دارد [۲۱ و ۲۳-۲۷]. در برخی از کاربردهای عملی لازم است که دو سیستم مکانیکی یا الکتریکی که معادلاتشان با شمول دیفرانسیلی لور توصیف می‌شوند، به صورت هماهنگ و سنکرون با هم کار کنند [۱-۴]. با توجه به این نکته، مسئله سنکرون‌سازی[۲] دو سیستم شمول لور اهمیت پیدا می‌کند که این موضوع در مقاله‌ی حاضر مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در اغلب تحقیقات و مطالعاتی که در ارتباط با شمول لور انجام شده است [۱ و ۲۰-۲۸]، سه فرض محدودکننده‌ی غیرعملی و غیرواقعی وجود دارند. در فرض اول، شمول دیفرانسیلی لور به صورت ترکیب یک معادله‌ی دیفرانسیلی و یک نگاشت غیرخطی یکنوا نمایش داده می‌شود [۱، ۲۰ و ۲۳-۲۶]، اما در این مقاله، ترکیب یک شمول دیفرانسیلی محدب[۳] و یک نگاشت غیرخطی یکنوا به عنوان نمایش شمول دیفرانسیلی لور ارائه می‌گردد که حالت جامع‌تر و کلی‌تری نسبت به نمایش قبلی دارد و محدوده‌ی وسیع‌تری از سیستم‌های عملی و عدم‌قطعیت‌های آن‌ها را پوشش خواهد داد. فرض دوم، معلوم و مشخص بودن پارامترهای شمول دیفرانسیلی لور می‌باشد که با توجه به محدودیت‌های جهان واقعی، فرضی غیرمعقول است. بنابراین در این مقاله، پارامترهای شمول دیفرانسیلی لور را نامعلوم و ناشناخته در نظر می‌گیریم تا این فرض محدودکننده را حذف کرده باشیم و مدل شمول دیفرانسیلی لور را به واقعیت سیستم‌های جهان عملی نزدیک سازیم. به عنوان فرض سوم، اکثر مراجع فرض می‌کنند که ورودی‌های کنترلی طراحی شده به صورت مستقیم به سیستم اعمال می‌شوند و هیچ عملگر یا عنصر غیرخطی‌ساز در مسیر اعمال ورودی‌های کنترلی به سیستم وجود ندارد [۲۰-۲۸]. اما همانطوری که می‌دانیم در پیاده‌سازی عملی، به علت محدودیت‌های فیزیکی عملگرها از جمله اشباع[۴] [۲۸]، ناحیه مرده[۵] [۲۹ و ۳۰]، لقی[۶]، هیسترزیس[۷] و ....، همواره توابعی غیرخطی از ورودی‌های کنترلی به سیستم اعمال می‌شوند [۲۸-۳۶]. چنانچه در حین فرآیند طراحی سیگنال‌های کنترلی به این عناصر غیرخطی‌ساز توجه نشود و نادیده انگاشته شوند، هنگام پیاده‌سازی عملی با مشکلات عدیده‌ایی از جمله کاهش کارایی، کاهش سرعت پاسخ سیستم و در مواقعی حتی ناپایداری سیستم حلقه بسته روبرو خواهیم شد [۲۹، ۳۱ و ۳۳-۳۶]. با توجه به اهمیت نکته‌ی ذکر شده، در این مقاله، مسئله‌ی سنکرون‌سازی شمول‌های دیفرانسیلی لور با فرض وجود غیرخطی‌سازهای شعاعی[۸] در مسیر ورودی‌های کنترلی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد و ورودی‌های کنترلی با استفاده‌ی مستقیم از تئوری پایداری لیاپانوف طراحی می‌شوند. نوآوری‌های مقاله‌ی حاضر به صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

۱- ارائه و معرفی یک نمایش جامع و کامل از شمول دیفرانسیلی لور که در واقع دسته‌ی وسیع‌تری از سیستم‌های عملی را همراه با عدم‌قطعیت‌هایشان پوشش می‌دهد. در نمایش جدید، شمول دیفرانسیلی لور به صورت ترکیب یک شمول دیفرانسیلی محدب و یک نگاشت غیرخطی یکنوا در نظر گرفته می‌شود.

۲- تعریف مسئله سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور که در برخی مسائل عملی دارای کاربرد است و یکی از شبیه‌سازی‌های این مقاله به کاربرد عملی این موضوع پرداخته است.

۳- طراحی ورودی‌های کنترلی سنکرون‌ساز با فرض نامعلوم بودن پارامترهای سیستم شمول لور و همچنین فرض وجود غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر اعمال ورودی‌ها به سیستم که این فرض‌ها تا حدود زیادی با محدودیت‌های سیستم‌های عملی تطابق دارند.

۴- ارائه دو دسته‌ی جداگانه ورودی‌های کنترلی سنکرون‌ساز که ورودی‌های کنترلی متعلق به دسته‌ی‌اول به علت استفاده از تابع ناپیوسته علامت[۹]، دارای سوئیچینگ‌های فرکانس بالای شدیدی هستند که مشکلاتی از جمله پدیده وزوز (پدیده چترینگ)[۱۰] و کاهش عمر مفید عملگرها را به همراه خواهند داشت. برای ورودی‌های کنترلی دسته دوم، با جایگزینی تابع ناپیوسته علامت با یک تابع جدید پیشنهادی، این عیب تا حدود زیادی برطرف شده است و سیگنال‌های کنترلی صاف و هموار هستند. لازم به ذکر است که برای هر دو دسته‌ی ورودی‌های کنترلی

[۱] Monotonic set-valued mapping
[۲] Synchronization
[۳] Convex differential inclusion
[۴] Saturation
[۵] Dead-zone
[۶] Backlash
[۷] Hysteresis
[۸] Sector input nonlinearities
[۹] Sign function
[۱۰] Chattering phenomenon

پیشنهادی در این مقاله، پایداری سیستم خطای سنکرون‌سازی شمول‌های لور با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف به صورت تحلیلی به اثبات رسیده است.

ساختار کلی مقاله بدین صورت است که در بخش دوم، معادلات شمول‌های دیفرانسیلی لور مرجع و پیرو[۱] ارائه و معرفی می‌شوند. همچنین تعریف مسئله سنکرون‌سازی و بیان فرض‌های انجام شده در همین بخش گنجانده می‌شوند. طراحی دو دسته‌ی ورودی‌های کنترلی سنکرون‌ساز و اثبات پایداری سیستم دینامیک خطای سنکرون‌سازی با وجود هر دسته از این ورودی‌های کنترلی، بخش سوم مقاله را تشکیل خواهد داد. بخش چهارم به ارائه و بیان نتایج شبیه‌سازی اختصاص یافته و در این بخش دو شبیه‌سازی جداگانه آورده می‌شوند که شبیه‌سازی اول مربوط به سنکرون‌سازی دو شمول لور عددی است و شبیه‌سازی دوم در ارتباط با سنکرون‌سازی دو سیستم دینامیکی drill string است که معادلات دینامیکی هر کدام با شمول دیفرانسیلی لور بیان می‌شود. نتایج حاصل از این مقاله به صورت خلاصه و جمع‌بندی شده در بخش پنجم بیان می‌شود.

معرفی علائم و اختصارات: در این مقاله، $|\boldsymbol{A}|$ بیانگر قدرمطلق ماتریس $\boldsymbol{A}$ است به طوری که هر درایه آن قدرمطلق درایه‌ی متناظر در ماتریس $\boldsymbol{A}$ می‌باشد. $\|\boldsymbol{x}(t)\|$ نشان‌دهنده‌ی نرم اقلیدسی[۲] بردار $\boldsymbol{x}(t)$ در لحظه‌ی t است. L_2 و L_∞ به ترتیب بیانگر فضاهای توابع انتگرالی مربعی[۳] و توابع کراندار[۴] هستند.

۲- توصیف معادلات شمول دیفرانسیلی لور و تعریف مسئله‌ی سنکرون‌سازی

سیستم شمول دیفرانسیلی لور با فرض پارامترهای نامعلوم و وجود غیرخطی‌سازهای شعاعی به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود که در ادامه، این شمول به عنوان شمول لور پیرو در نظرگرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)\in \mathrm{co}\{\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)\}+\mathrm{co}\{\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{\theta}\}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_x(t)+\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x(t))\\&\boldsymbol{\omega}_x(t)\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t)),i=1,\ldots,N,\ j=1,\ldots,M\end{aligned}\quad (۱)$$

در رابطه (۱)، co بیانگر مجموعه محدب[۵]، $\boldsymbol{x}\in\Re^n$ بردار متغیرهای حالت، $\boldsymbol{G}\in\Re^{n\times m}$ و $\boldsymbol{H}\in\Re^{m\times n}$ ماتریس‌های ثابت و معلوم می‌باشند. ماتریس‌های ثابت و معلوم $\boldsymbol{A}_i\in\Re^{n\times n}$ رئوس[۶] فضای ماتریسی محدبی هستند که ماتریس نامعلوم $\boldsymbol{A}$ به آن فضا تعلق دارد. $\boldsymbol{\theta}\in\Re^l$ بردار پارامترهای کراندار ناشناخته و $\boldsymbol{F}_j:\Re^n\to\Re^{n\times l}$ توابع ماتریسی هموار و معلوم‌ایی هستند که به عنوان رئوس فضای توابع ماتریسی محدبی در نظرگرفته می‌شوند که تابع ماتریسی نامعلوم $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ در این فضا قرار دارد. $\boldsymbol{\rho}:\Re^m\to\Re^m$، یک نگاشت غیرخطی یکنوا با ویژگی‌های خاص و منحصر به فردی (این ویژگی‌ها در ادامه بیان خواهد شد) است که $\boldsymbol{\omega}_x\in\Re^m$ نشان‌دهنده‌ی خروجی این نگاشت می‌باشد. $\boldsymbol{u}_x\in\Re^n$ بیانگر بردار ورودی‌های کنترلی است و $\boldsymbol{\phi}_x:\Re^n\to\Re^n$ به عنوان بردار توابع غیرخطی‌ساز شعاعی از این ورودی‌های کنترلی در نظر گرفته می‌شود که در ادامه به صورت کامل معرفی خواهد شد.

تعریف ۱: نگاشت غیرخطی $\boldsymbol{\rho}(.)$ را در نظر بگیرید، گراف این نگاشت غیرخطی $\boldsymbol{\rho}(.)$ به صورت $\mathrm{Graph}(\boldsymbol{\rho})$ نشان داده می‌شود که به صورت رابطه (۲)، قابل بیان است [۲۱ و ۲۳-۲۷].

$$\mathrm{Graph}(\boldsymbol{\rho})=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*)\middle|\boldsymbol{x}^*\in\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})\right\}\quad (۲)$$

تعریف ۲: نگاشت غیرخطی $\boldsymbol{\rho}(.)$ یکنوا نامیده می‌شود اگر گراف آن یعنی $\mathrm{Graph}(\boldsymbol{\rho})$ یکنوا باشد. این بدان معنی است که برای همه‌ی $\boldsymbol{x}\in\Re^n$، $\boldsymbol{y}\in\Re^n$، $\boldsymbol{x}^*\in\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})$ و $\boldsymbol{y}^*\in\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{y})$ همواره نامساوی $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{y}^*)\ge 0$ برقراراست [۲۳-۲۵ و ۲۷].

فرض ۱: پارامترهای سیستم شمول دیفرانسیلی لور ثابت، نامعلوم و کراندار در نظر گرفته می‌شوند. در واقع نامساوی $\|\boldsymbol{\theta}\|\le\gamma$ همواره برقرار می‌باشد که در این رابطه، $\boldsymbol{\theta}$ بردار پارامترهای شمول لور و γ به عنوان کران بالای این بردار، ثابت و نامعلوم است.

فرض ۲: شرط لیپ‌شیتز[۷] برای توابع ماتریسی $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x})$ برقرار می‌باشد که این شرط به صورت رابطه (۳)، قابل بیان است. باید توجه داشت که در رابطه (۳)، δ_j ثابت‌های مثبت و معلوم هستند [۲۱ و ۲۳-۲۶].

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y})\|\le\delta_j\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\\&\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\ j=1,\ldots,M,\ \sum_{j=1}^{M}\delta_j=\delta_t\end{aligned}\quad (۳)$$

فرض ۳: نگاشت غیرخطی $\boldsymbol{\rho}(.)$ یکنوا، محدب، بسته[۸]، کراندار، غیرتهی[۹] و نیمه پیوسته از بالا[۱۰] می‌باشد [۲۱].

فرض ۴: درایه‌های متعلق به بردار غیرخطی‌ساز شعاعی $\boldsymbol{\phi}_x:\Re^n\to\Re^n$، شرایط غیرخطی‌سازی شعاعی را برآورده می‌سازند که رابطه (۴)، این شرایط را به صورت نامساوی نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که ضرایب α_{k_x} و β_{k_x} ثابت و معلوم هستند [۲۳ و ۲۴].

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)=[\phi_{1_x}(u_{1_x})\ \ \ldots\ \ \phi_{n_x}(u_{n_x})]^T\\&\alpha_{k_x}u_{k_x}^2\le\phi_{k_x}(u_{k_x})u_{k_x}\le\beta_{k_x}u_{k_x}^2,\ \alpha_{k_x},\beta_{k_x}\ge 0,\quad k=1,\ldots,n\end{aligned}\quad (۴)$$

لم ۱ (وجود جواب برای شمول دیفرانسیلی لور): شمول دیفرانسیلی لور رابطه‌ی (۱) را با نگاشت غیرخطی $\boldsymbol{\rho}(.)$ که فرض ۳ را برآورده می‌سازد، در نظر بگیرید. برای هر $\boldsymbol{x}_0\in\Re^n$، تابع پیوسته‌ی مطلق[۱۱] $\boldsymbol{x}(t)\in\Re^n$ وجود دارد که یک جواب از شمول دیفرانسیلی لور رابطه‌ی (۱) با فرض شرایط اولیه $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ است. لازم به ذکر است

[۱] Master and slave Lur'e differential inclusions
[۲] Euclidean norm
[۳] Space of square integral functions
[۴] Bounded functions
[۵] Convex hull
[۶] Vertices
[۷] Lipschitz
[۸] Closed
[۹] Non-empty
[۱۰] Upper semi-continuous
[۱۱] Absolutely continuous

که تابع پیوسته‌ی مطلق $\boldsymbol{x}(t)\in\Re^n$ بر روی بازه‌ی $[0,\infty)$ تعریف شده است [۲۳-۲۷].

با توجه به تئوری آنالیز مجموعه‌های محدب [۳۷-۳۹]، شمول دیفرانسیلی لور (۱) می‌تواند به صورت یک سیستم دارای عدم قطعیت، بازنویسی و معادل شود. سیستم دارای عدم قطعیت معادل با شمول دیفرانسیلی لور رابطه (۱)، به صورت رابطه (۵) نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_x(t)+\sum_{j=1}^{M}\eta_j\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x(t))\\ \boldsymbol{\omega}_x(t)&\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t)),\end{aligned}\qquad(۵)$$

در رابطه (۵)، λ_i و η_j ثابت‌های نامعلومی هستند که دارای ویژگی زیر می‌باشند.

$$0\le\lambda_i\le1,\quad\sum_{i=1}^{N}\lambda_i=1,\quad 0\le\eta_j\le1,\quad\sum_{j=1}^{M}\eta_j=1$$

در حالت کلی، برای مسئله‌ی سنکرون‌سازی به دو سیستم مرجع و پیرو نیاز است. در این مقاله برای تعریف مسئله‌ی سنکرون‌سازی، شمول دیفرانسیلی لور رابطه (۵) به عنوان سیستم پیرو و سیستم شمول دیفرانسیلی رابطه (۶) به عنوان سیستم مرجع در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{y}}(t)&\in\operatorname{co}\{\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}(t)\}+\operatorname{co}\{\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{\theta}\}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_y(t)+\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y(t))\\ \boldsymbol{\omega}_y(t)&\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}(t))\end{aligned}\qquad(۶)$$

در رابطه (۶)، $\boldsymbol{y}\in\Re^n$ بردار متغیرهای حالت شمول دیفرانسیلی لور مرجع می‌باشد. $\boldsymbol{u}_y\in\Re^n$ بیانگر بردار ورودی‌های کنترلی و $\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y):\Re^n\to\Re^n$ نشان‌دهنده‌ی بردار توابع غیرخطی از ورودی‌های کنترلی است که به سیستم لور مرجع اعمال می‌شوند. از آنجایی که رابطه (۶) سیستم شمول لور مرجع را توصیف می‌کند، منطقی و معقول است که فرض کنیم بردار $\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)$ ناشناخته و کراندار است به طوری که نامساوی $\|\boldsymbol{\Psi}_y\|\le\kappa$ همواره برآورده می‌شود و κ ثابتی نامعلوم است. مشابه با نکته ذکر شده در بالا، شمول لور رابطه (۶)، معادل با سیستم دارای عدم‌قطعیت رابطه (۷) می‌باشد.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{y}}(t)&=\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_y(t)+\sum_{j=1}^{M}\xi_j\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y(t))\\ \boldsymbol{\omega}_y(t)&\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}(t))\end{aligned}\qquad(۷)$$

در رابطه (۷)، υ_i و ξ_j ثابت‌های نامعلومی هستند که دارای ویژگی زیر می‌باشند.

$$0\le\upsilon_i\le1,\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i=1,\quad 0\le\xi_j\le1,\sum_{j=1}^{M}\xi_j=1$$

۳- طراحی ورودی‌های کنترلی سنکرون‌سازی

در این بخش، ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x\in\Re^n$ (که به سیستم شمول لور پیرو اعمال می‌شوند) و همچنین دو قانون به‌روزرسانی[۱] برای دو کران بالای نامعلوم γ و κ به گونه‌ایی طراحی می‌شوند که پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت شمول لور پیرو، پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت متناظر در شمول لور مرجع را به خوبی دنبال و ردیابی کنند یا به عبارت دیگر رابطه‌ی $\lim_{t\to\infty}|x_i-y_i|=0$ برقرار شود. بدین منظور، بردار خطای سنکرون‌سازی را به صورت $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{e}\in\Re^n$ تعریف می‌کنیم. با در نظر گرفتن این بردار خطا، دینامیک خطای سنکرون‌سازی میان دو شمول لور مرجع و پیرو به صورت رابطه زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}(t)=&\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}(t)+\sum_{i=1}^{N}(\lambda_i-\upsilon_i)\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)\\&+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}_x(t)-\boldsymbol{\omega}_y(t))-\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y(t))+\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x(t))\\&+\sum_{j=1}^{M}\xi_j\left(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y})\right)\boldsymbol{\theta}+\sum_{j=1}^{M}(\eta_j-\xi_j)\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{\theta}\end{aligned}\qquad(۸)$$

با تعریف بردار خطای سنکرون‌سازی به صورت بالا، مسئله‌ی سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور به مسئله‌ی پایدارسازی دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) تبدیل می‌شود. در واقع می‌توان گفت ورودی‌های کنترلی اعمالی به شمول لور پیرو، باید به گونه‌ایی طراحی شوند که دینامیک خطای توصیف شده توسط رابطه (۸) پایدار شود و خطای سنکرون‌سازی با گذشت زمان به صفر همگرا گردد یا به عبارتی دیگر رابطه $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{e}\|=0$ برای بردار خطای سنکرون‌سازی برقرار شود. بدین منظور تئوری ۱، ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x\in\Re^n$ و دو قانون به‌روزرسانی مرتبط با تخمین دو ثابت نامعلوم γ و κ را پیشنهاد می‌دهد تا سنکرون‌سازی میان دو شمول دیفرانسیلی لور (۱) و (۶) حاصل شود. لازم به ذکر است که ورودی‌های کنترلی اعمالی به شمول لور پیرو، تحت غیرخطی‌سازهای شعاعی قرار می‌گیرند.

تئوری ۱: دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) را همراه با فرض‌های ۱ الی ۴ در نظر بگیرید. چنانچه ماتریس مثبت معین متقارن[۲] $\boldsymbol{P}$ وجود داشته باشد که تساوی ماتریسی $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{H}$ را برقرار سازد، آنگاه خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) با در نظر گرفتن بردار ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x\in\Re^n$ و دو قانون به‌روزرسانی که به ترتیب در رابطه‌های (۹) و (۱۰) آورده شده‌اند، به سمت صفر همگرا می‌شود و سنکرون‌سازی میان دو شمول دیفرانسیلی لور (۱) و (۶) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}u_{k_x}&=-\frac{1}{\alpha_{k_x}}\varepsilon_k\mu_k\operatorname{sgn}(\Omega_k),\quad\varepsilon_k>1\\ \mu_k&=\left(\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|\right)_k+\left(\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|\right)_k+\hat{\gamma}\delta_t\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)+\hat{\kappa}\\ &\quad\text{for}\,k=1,\ldots,n\\ \hat{\gamma}(0)&=\frac{1}{\delta_t\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})\min_k(\varepsilon_k-1)}>0,\ \hat{\kappa}(0)\ge0\end{aligned}\qquad(۹)$$

در رابطه (۹)، $(\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|)_k$ و $(\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|)_k$ به ترتیب درایه‌های kام از بردارهای $\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|$ و $\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|$ هستند. ε_k ضریب (ثابت) دلخواه بزرگتر از یک و $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})$ کوچکترین مقدار ویژه ماتریس $\boldsymbol{P}$ می‌باشد.

[۱] Adaptation law

[۲] Symmetric positive definite matrix

$$\dot{\hat{\gamma}} = \delta_t \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\| \right) \text{ and } \dot{\hat{\kappa}} = \|\boldsymbol{\Omega}\|, \quad \boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1 \ \ \dots \ \ \Omega_n], \Omega_k = \sum_{d=1}^{n} e_d \, p_{dk} \tag{۱۰}$$

در رابطه (۱۰)، p_{dk} درایه‌ی سطر dام و ستون kام از ماتریس $\boldsymbol{P}$ و e_d درایه‌ی dام از بردار $\boldsymbol{e}$ می‌باشند.

اثبات: در اینجا، از تئوری پایداری لیاپانوف برای اثبات پایداری دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) با وجود ورودی‌های کنترلی رابطه (۹) و قوانین به‌روزرسانی رابطه (۱۰)، استفاده خواهد شد. تابع کاندید لیاپانوف به صورت رابطه (۱۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{e} + \tilde{\gamma}^2 + \tilde{\kappa}^2) \tag{۱۱}$$

در این رابطه، $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma} - \gamma$ و $\tilde{\kappa} = \hat{\kappa} - \kappa$ به عنوان خطاهای تخمین دو کران ثابت γ و κ تعریف شده‌اند. در ادامه با مشتق‌گیری از تابع کاندید لیاپانوف تعریف شده، رابطه (۱۲) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \dot{\boldsymbol{e}} + \tilde{\gamma}\dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{\kappa}\dot{\tilde{\kappa}} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \left(\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e} + \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \upsilon_i) \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} \right) \\ & + \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \left(\sum_{j=1}^{M} \xi_j \left(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}) \right) + \sum_{j=1}^{M} (\eta_j - \xi_j) \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) \right) \boldsymbol{\theta} \\ & + \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}_x) - \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y) + \tilde{\gamma}\dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{\kappa}\dot{\tilde{\kappa}} + \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_y) \end{aligned} \tag{۱۲}$$

با توجه به فرض $\boldsymbol{G}^T \boldsymbol{P} = \boldsymbol{H}$، تساوی $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_y) = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{H}^T (\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_y)$ به راحتی حاصل می‌شود. همچنین از آنجایی که $\boldsymbol{\omega}_y \in -\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y})$، $\boldsymbol{\omega}_x \in -\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})$ و نگاشت $\boldsymbol{\rho}(.)$ یکنواست، می‌توان نامساوی رابطه (۱۳) را نتیجه گرفت.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_y) &= \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{H}^T (\boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_y) \\ &= -(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{y})(-\boldsymbol{\omega}_x - (-\boldsymbol{\omega}_y)) \le 0 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

با توجه به تعریف بردار $\boldsymbol{\Omega}$ در رابطه (۱۰) و در نظر گرفتن شرایط مرتبط با ثابت‌های نامعلوم λ_i و υ_i، عبارت $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} (\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e} + \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \upsilon_i) \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x})$ که در سمت راست معادله‌ی (۱۲) وجود دارد، می‌تواند به صورت رابطه (۱۴) بازنویسی و در ادامه جایگزین شود.

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \left(\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e} + \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \upsilon_i) \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} \right) \\ & \le \sum_{k=1}^{n} \left(|\Omega_k| \left(\left(\sum_{i=1}^{N} |\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e}| \right)_k + \left(\sum_{i=1}^{N} |\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}| \right)_k \right) \right) \\ & = \sum_{k=1}^{n} \left(|\Omega_k| \left(\mu_k - \hat{\gamma} \delta_t \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\| \right) - \hat{\kappa} \right) \right) \end{aligned} \tag{۱۴}$$

حال در ادامه با توجه به فرض ۲، نامساوی رابطه (۱۵) برای عبارت $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} (\sum_{j=1}^{M} \xi_j \left(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}) \right) + \sum_{j=1}^{M} (\eta_j - \xi_j) \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x})) \boldsymbol{\theta}$ حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \left(\sum_{j=1}^{M} \xi_j \left(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}) \right) + \sum_{j=1}^{M} (\eta_j - \xi_j) \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) \right) \boldsymbol{\theta} \\ & \le \left\| \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \right\| \left(\sum_{j=1}^{M} \left\| \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}) \right\| + \sum_{j=1}^{M} \left\| \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) \right\| \right) \|\boldsymbol{\theta}\| \\ & \le \left\| \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \right\| \|\boldsymbol{\theta}\| \left(\|\boldsymbol{e}\| + \|\boldsymbol{x}\| \right) \delta_t \le \left\| \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \right\| \left(\|\boldsymbol{e}\| + \|\boldsymbol{x}\| \right) \gamma \, \delta_t \\ & \le \gamma \, \delta_t \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \left(\|\boldsymbol{e}\| + \|\boldsymbol{x}\| \right) \end{aligned} \tag{۱۵}$$

با در نظر گرفتن تعریف Ω_k، دو عبارت $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}_x)$ و $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}_x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{k_x}(u_{k_x}) \Omega_k \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y) \le \left\| \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \right\| \left\| \boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y) \right\| \le \kappa \|\boldsymbol{\Omega}\| \end{aligned} \tag{۱۶}$$

با جایگذاری ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۹) در نامساوی غیرخطی‌ساز شعاعی مرتبط با فرض ۴، رابطه (۱۷) به راحتی نتیجه می‌شود.

$$\varepsilon_k \mu_k \operatorname{sgn}^2(\Omega_k) \le -\phi_{k_x}(u_{k_x}) \operatorname{sgn}(\Omega_k) \tag{۱۷}$$

در این رابطه، sgn(.) بیانگر تابع علامت می‌باشد. چنانچه طرفین نامساوی رابطه (۱۷) را در عبارت Ω_k^2 ضرب کرده و $\Omega_k \operatorname{sgn}(\Omega_k) = |\Omega_k|$ را در نظر بگیریم، با جایگذاری نامساوی حاصله در رابطه (۱۶)، نامساوی رابطه (۱۸) برای عبارت $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}_x)$ استخراج می‌شود.

$$\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}_x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{k_x}(u_{k_x}) \Omega_k \le -\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mu_k |\Omega_k| \tag{۱۸}$$

با جایگذاری (۱۰)، نامساوی‌های (۱۳) الی (۱۶) و نامساوی (۱۸) در طرف دوم (۱۲)، نامساوی زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned} \dot{V} \le & \sum_{k=1}^{n} \left(|\Omega_k| \left(\mu_k - \hat{\gamma} \delta_t \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\| \right) - \hat{\kappa} \right) \right) - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mu_k |\Omega_k| \\ & + \gamma \, \delta_t \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\| \right) + \tilde{\gamma} \delta_t \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\| \right) \\ & + \kappa \|\boldsymbol{\Omega}\| + \tilde{\kappa} \|\boldsymbol{\Omega}\| \end{aligned} \tag{۱۹}$$

با توجه به نامساوی $-\sum_{k=1}^{n} |\Omega_k| \le -\|\boldsymbol{\Omega}\|$ و تعاریف $\tilde{\kappa} = \hat{\kappa} - \kappa$ و $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma} - \gamma$، نامساوی رابطه (۱۹) به صورت نامساوی رابطه (۲۰) ساده و بازنویسی می‌شود.

$$\dot{V} \le -\sum_{k=1}^{n} \mu_k |\Omega_k| (\varepsilon_k - 1) \le 0 \tag{۲۰}$$

نامساوی $\mu_k \ge \delta_t \|\boldsymbol{e}\| \hat{\gamma}(0)$ به راحتی از روی تعریف μ_k در رابطه (۹) قابل دستیابی است. با جایگذاری این نامساوی در رابطه (۲۰)، نامساوی رابطه زیر استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V} & \le -\sum_{k=1}^{n} \mu_k |\Omega_k| (\varepsilon_k - 1) \le -\delta_t \hat{\gamma}(0) \|\boldsymbol{e}\| \sum_{\substack{k=1 \\ k}}^{n} |\Omega_k| \min(\varepsilon_k - 1) \\ & \le -\delta_t \hat{\gamma}(0) \|\boldsymbol{e}\| \|\boldsymbol{\Omega}\| \min_k (\varepsilon_k - 1) \\ & \le -\delta_t \hat{\gamma}(0) \left\| \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{e} \right\| \min_k (\varepsilon_k - 1) \\ & \le -\delta_t \hat{\gamma}(0) \lambda_{\min}(\boldsymbol{P}) \|\boldsymbol{e}\|^2 \min_k (\varepsilon_k - 1) \le -\|\boldsymbol{e}\|^2 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی رابطه (۲۱) از لحظه‌ی صفر تا لحظه‌ی

t به رابطه (۲۲) خواهیم رسید.

$$V(t)+\int_0^t \|\boldsymbol{e}(\tau)\|^2 d\tau \le V(0)<\infty \qquad (۲۲)$$

از رابطه (۲۲)، دو نامساوی با اهمیت $V(t)<\infty$ و $\int_0^\infty \|\boldsymbol{e}(\tau)\|^2 d\tau<\infty$ حاصل می‌شود. حال با توجه به تعریف تابع کاندید لیاپانوف در رابطه (۱۱) و در نظر گرفتن نامساوی $V(t)<\infty$ می‌توان به این نتیجه رسید که $\boldsymbol{e}(t)\in L_\infty$ است یا به عبارتی دیگر بردار خطای سنکرون‌سازی کراندار می‌باشد. نامساوی $\int_0^\infty \|\boldsymbol{e}(\tau)\|^2 d\tau<\infty$ بیانگر این نکته می‌باشد که بردار خطای سنکرون‌سازی همچنین متعلق به فضای توابع انتگرالی مربعی یا به تعبیر ریاضی $\boldsymbol{e}(t)\in L_2$ است. با در نظر گرفتن $\boldsymbol{e}(t)\in L_\infty$، دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) نشان می‌دهد که $\dot{\boldsymbol{e}}(t)$ نیز کراندار بوده و یا به تعبیر ریاضی $\dot{\boldsymbol{e}}(t)\in L_\infty$ است. حال با توجه به لم باربالت، از آنجایی که $\boldsymbol{e}(t)\in L_\infty\cap L_2$ و $\dot{\boldsymbol{e}}(t)\in L_\infty$ می‌باشند می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{e}\|=0$ برقرار است و بدین ترتیب اثبات تئوری ۱ پایان می‌پذیرد. ■

یادآوری ۱: برای ورودی‌های کنترلی رابطه (۹)، ضرایب دلخواه (اختیاری) $\varepsilon_k, k=1,\ldots,n$ توسط طراح و همواره بزرگتر از یک انتخاب می‌شوند که می‌تواند به عنوان یک درجه آزادی در طراحی منظور شود. اما باید به این نکته توجه داشت که این ضرایب دلخواه بر روی دامنه و انرژی سیگنال‌های کنترلی و همچنین سرعت همگرایی خطاهای سنکرون‌سازی تاثیر بسزایی دارند. در واقع بزرگ انتخاب کردن این ضرایب اختیاری، بیشینه دامنه‌های سیگنال‌های کنترلی را افزایش داده که از نظر پیاده‌سازی عملی مطلوب نبوده اما در عوض سرعت همگرایی خطاهای سنکرون‌سازی به سمت صفر را افزایش می‌دهد که مطلوب می‌باشد. بنابراین طراح در هنگام انتخاب ضرایب دلخواه $\varepsilon_k, k=1,\ldots,n$ باید مصالحه‌ایی میان دو معیار ذکر شده یعنی بیشینه دامنه سیگنال کنترلی و سرعت همگرایی خطاهای سنکرون‌سازی به سمت صفر، انجام دهد.

یادآوری ۲: با توجه به ورودی‌های کنترلی تعریف شده در رابطه (۹)، ماتریس مثبت معین متقارن $\boldsymbol{P}$ نیز توسط طراح انتخاب می‌شود و باید همواره تساوی ماتریسی $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{H}$ برقرار باشد. در واقع طراح می‌تواند با انتخاب مناسب درایه‌های ماتریس $\boldsymbol{P}$، بیشینه دامنه‌های سیگنال‌های کنترلی را کاهش داده و همچنین سرعت همگرایی خطاهای سنکرون‌سازی به سمت صفر را افزایش دهد.

یادآوری ۳: با توجه به اینکه $\dot{\boldsymbol{e}}(t)$ پیوسته نمی‌باشد، $\hat{\gamma}$ و $\hat{\kappa}$ (که در واقع تخمین دو ثابت نامعلوم γ و κ هستند) به مقادیر واقعی و اسمی دو پارامتر γ و κ همگرا نخواهند شد.

یادآوری ۴: از آنجایی که در ساختن ورودی‌های کنترلی رابطه (۹)، از تابع علامت که تابعی ناپیوسته می‌باشد استفاده شده است، سوئیچینگ‌های فرکانس بالایی در سیگنال‌های کنترلی مشاهده خواهد شد. در واقع این سوئیچینگ‌های فرکانس بالا باعث به وجود آمدن پدیده‌ی نامطلوب وزوز (چترینگ) می‌شوند که در گذر زمان کاهش عمر مفید عملگرها و رله‌ها را در پی خواهد شد.

برای حذف این سوئیچینگ‌های فرکانس بالا، ورودی‌های کنترلی جدیدی به صورت رابطه (۲۳) پیشنهاد می‌شوند که در این ورودی‌ها، تابع علامت با یک تابع پیوسته جایگزین شده است.

$$u_{k_x}=-\frac{1}{\alpha_{k_x}}\varepsilon_k\upsilon_k^2\frac{\Omega_k}{|\Omega_k|\upsilon_k+\chi_k(t)},\ \ \varepsilon_k>1$$
$$\upsilon_k=\left(\sum_{i=1}^N|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|\right)_k+\left(\sum_{i=1}^N|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|\right)_k+\delta_t\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)\hat{\gamma}+\hat{\kappa}+|\Omega_k| \qquad (۲۳)$$
$$k=1,\ldots,n,\ \ \hat{\gamma}(0)>0,\ \hat{\kappa}(0)>0$$

در این رابطه، $\chi_k(t), k=1,\ldots,n$ توابعی همواره مثبت با ویژگی $\int_0^\infty\chi_k(t)dt<\infty$ هستند. در ادامه، تئوری ۲ نشان می‌دهد که ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۲۳) می‌توانند دو شمول دیفرانسیلی لور رابطه‌های (۱) و (۶) را با هم سنکرون سازند.

تئوری ۲: دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) را همراه با فرض‌های ۱ الی ۴ در نظر بگیرید. چنانچه ماتریس مثبت معین متقارن $\boldsymbol{P}$ وجود داشته باشد که تساوی ماتریسی $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{H}$ برقرار گردد، آنگاه ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۲۳) همراه با قانون‌های به‌روزرسانی رابطه (۱۰)، خطاهای سنکرون‌سازی سیستم رابطه (۸) را به سمت صفرهمگرا می‌سازند و در واقع سنکرون‌سازی میان دو شمول لور رابطه‌های (۱) و (۶) حاصل می‌شود.

اثبات: کاملاً مشابه با اثبات تئوری ۱، رابطه (۲۴) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{V}\le&\sum_{k=1}^n\left(|\Omega_k|\left(\upsilon_k-\hat{\gamma}\delta_t\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)-|\Omega_k|-\hat{\kappa}\right)\right)\\&+\gamma\,\delta_t\sum_{k=1}^n|\Omega_k|\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)++\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x) \qquad (۲۴)\\&+\|\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\|\kappa+\tilde{\gamma}\delta_t\sum_{k=1}^n|\Omega_k|\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)+\tilde{\kappa}\|\boldsymbol{\Omega}\|\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن فرض ۴ و جایگذاری ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۲۳) در عبارت $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)=\sum_{k=1}^n\Omega_k\phi_{k_x}(u_{k_x})$، نامساوی رابطه (۲۵) نتیجه می‌شود. اثبات نامساوی ارائه شده در رابطه (۲۵) همراه با جزئیات بیشتر در پیوست ۱ مقاله آورده شده است.

$$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)=\sum_{k=1}^n\Omega_k\phi_{k_x}(u_{k_x})\le-\sum_{k=1}^n\frac{\varepsilon_k\upsilon_k^2\Omega_k^2}{|\Omega_k|\upsilon_k+\chi_k(t)} \qquad (۲۵)$$

با جایگذاری رابطه (۲۵) در رابطه (۲۴)، به نامساوی رابطه (۲۶) می‌رسیم.

$$\begin{aligned}\dot{V}\le&\sum_{k=1}^n\left(|\Omega_k|\left(\upsilon_k-\hat{\gamma}\delta_t\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)-|\Omega_k|-\hat{\kappa}\right)\right)-\sum_{k=1}^n\frac{\varepsilon_k\upsilon_k^2\Omega_k^2}{|\Omega_k|\upsilon_k+\chi_k(t)} \qquad (۲۶)\\&+\gamma\,\delta_t\sum_{k=1}^n|\Omega_k|\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)+\tilde{\gamma}\delta_t\sum_{k=1}^n|\Omega_k|\left(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|\right)+\|\boldsymbol{\Omega}\|\kappa+\tilde{\kappa}\|\boldsymbol{\Omega}\|\end{aligned}$$

با توجه به دو تعریف $\tilde{\gamma}=\hat{\gamma}-\gamma$ و $\tilde{\kappa}=\hat{\kappa}-\kappa$ و همچنین با در نظرگرفتن $-\sum_{k=1}^n|\Omega_k|\le-\|\boldsymbol{\Omega}\|$، نامساوی رابطه (۲۶) به صورت نامساوی رابطه (۲۷) ساده و بازنویسی می‌شود.

$$\dot{V}\le-\sum_{k=1}^n|\Omega_k|^2-\sum_{k=1}^n\frac{(\varepsilon_k-1)\upsilon_k^2\Omega_k^2}{|\Omega_k|\upsilon_k+\chi_k(t)}+\sum_{k=1}^n\frac{|\Omega_k|\upsilon_k\chi_k(t)}{|\Omega_k|\upsilon_k+\chi_k(t)} \qquad (۲۷)$$

از آنجایی که تمامی ضرایب ثابت دلخواه $\varepsilon_k, k=1,\ldots,n$ همواره

بزرگتر از یک انتخاب می‌شوند بنابراین عبارت دوم از طرف راست نامساوی (۲۷) همواره منفی است. از طرف دیگر می‌دانیم که برای هر دو مقدار مثبت حقیقی a و b، نامساوی $0 \le ab/(a+b) \le b$ همواره برقرار است. بنابراین با در نظرگرفتن نکات ذکر شده، نامساوی رابطه (۲۷) به آسانی به نامساوی رابطه (۲۸) تبدیل می‌گردد.

$$\dot{V} \le -\|\boldsymbol{\Omega}\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \chi_k(t) \qquad (۲۸)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۲۸) از لحظه‌ی صفر تا لحظه‌ی t، و در نظر گرفتن ویژگی $\int_0^\infty \chi_k(t)dt < \infty$، نامساوی رابطه (۲۹) حاصل می‌شود.

$$V(t) + \int_0^t \|\boldsymbol{\Omega}(\tau)\|^2 d\tau \le V(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \chi_k(\tau)d\tau < \infty \qquad (۲۹)$$

دو نامساوی مهم $V(t) < \infty$ و $\int_0^\infty \|\boldsymbol{\Omega}(\tau)\|^2 d\tau < \infty$ از رابطه (۲۹) نتیجه می‌شوند. با توجه به تعریف تابع کاندید لیاپانوف $V(t)$ و نامساوی $V(t) < \infty$ می‌توان نتیجه گرفت که بردار خطاهای سنکرون‌سازی کراندار بوده و به تعبیر ریاضی $\boldsymbol{e}(t) \in L_\infty$ است. با توجه به تعریف بردار $\boldsymbol{\Omega}$، نامساوی $\int_0^\infty \|\boldsymbol{\Omega}(\tau)\|^2 d\tau < \infty$ نشان می‌دهد که $\boldsymbol{e}(t) \in L_2$ است. با در نظر گرفتن $\boldsymbol{e}(t) \in L_\infty$، دینامیک خطای سنکرون‌سازی رابطه (۸) نشان می‌دهد که $\dot{\boldsymbol{e}}(t)$ نیز کراندار بوده و به تعبیر ریاضی $\dot{\boldsymbol{e}}(t) \in L_\infty$ است. حال با توجه به لم باربالت، از آنجایی که $\boldsymbol{e}(t) \in L_\infty \cap L_2$ و $\dot{\boldsymbol{e}}(t) \in L_\infty$ می‌باشند می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{e}\| = 0$ برقرار است و بدین ترتیب اثبات تئوری ۲ پایان می‌پذیرد.■

۴- نتایج شبیه‌سازی کامپیوتری

در این بخش، ورودی‌های کنترلی طراحی شده بر روی دو مثال مورد شبیه‌سازی قرار خواهند گرفت تا عملکرد و کارایی آنها نشان داده شود. در زیربخش (۴-۱)، هر دو دسته‌ی ورودی‌های کنترلی رابطه‌های (۹) و (۲۳) برای سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرند. در زیربخش (۴-۲)، معادلات دینامیکی دو سیستم drill string معرفی می‌شوند که معادلات هر کدام از این دو سیستم در قالب شمول دیفرانسیلی لور قابل بیان است. در شبیه‌سازی مرتبط با این زیربخش نیز هر دو دسته‌ی ورودی‌های کنترلی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۴-۱ شبیه‌سازی مرتبط با سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور

دو شمول دیفرانسیلی لور پیرو و مرجع را به صورت رابطه (۳۰) در نظر بگیرید.

$$\text{Master:} \begin{cases} \dot{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{3} \upsilon_i \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_y + \sum_{j=1}^{2} \xi_j \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y})\theta + \boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y) \\ \boldsymbol{\omega}_y \in -\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}) \end{cases}$$
$$\text{Slave:} \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_x + \sum_{j=1}^{2} \eta_j \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x})\theta + \boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x) \\ \boldsymbol{\omega}_x \in -\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) \end{cases} \qquad (۳۰)$$

ماتریس‌های $\boldsymbol{A}_i$، $\boldsymbol{G}$ و $\boldsymbol{H}$، توابع برداری هموار $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x})$ و $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y})$، ثابت‌های λ_i، υ_i، η_j و ξ_j و بردار ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{H} = [6 \;\; 4 \;\; -2], \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5\sin(x_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5\sin(y_1) \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2\sin(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} 2\sin(y_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\upsilon} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.02 \\ 0.03 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.05 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y) = \begin{bmatrix} 0.5\sin(t) \\ 0.25 \\ 0.25\sin(2t) \end{bmatrix}.$$

با توجه به دو تابع برداری $\boldsymbol{F}_1$ و $\boldsymbol{F}_2$ که در بالا تعریف شده‌اند و شرط لیپ‌شیتز فرض۲، ثابت‌های δ_1، δ_2 و δ_t به صورت $\delta_1 = 1.5$، $\delta_2 = 2$ و $\delta_t = 3.5$ نتیجه می‌شود. پارامتر ناشناخته θ، بردار توابع غیرخطی‌ساز شعاعی $\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)$ مرتبط با سیستم لور پیرو و نگاشت غیرخطی یکنوای $\boldsymbol{\rho}(.)$ به صورت زیر فرض شده‌اند.

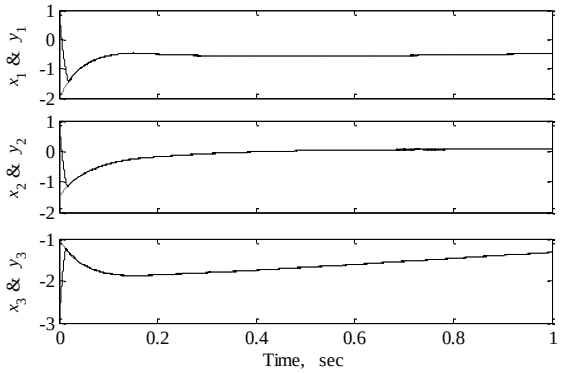
$$\theta = 1.5, \quad \boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x) = \begin{bmatrix} (0.9 - 0.4\sin u_{1_x})u_{1_x} \\ (0.4 + 0.2\cos u_{2_x})u_{2_x} \\ (0.8 + 0.4\sin u_{3_x})u_{3_x} \end{bmatrix},$$
$$\rho(\tau) = \begin{cases} \text{sgn}(\tau)(|\tau| + 2) & \text{if } \tau \ne 0 \\ [-2, 2] & \text{if } \tau = 0 \end{cases}$$

با توجه به بردار توابع غیرخطی‌ساز در نظر گرفته شده‌ی $\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)$، ضرایب ثابت $\alpha_{1_x} = 0.5$، $\alpha_{2_x} = 0.1$، $\alpha_{3_x} = 0.2$، $\beta_{1_x} = 1.3$، $\beta_{2_x} = 0.6$ و $\beta_{3_x} = 0.5$ نتیجه می‌شوند. ماتریس مثبت معین متقارن $\boldsymbol{P}$، به صورت $\boldsymbol{P} = \text{diag}(3,4,2)$ اختیار شده است که تساوی ماتریسی $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P} = \boldsymbol{H}$ نیز همواره برقرار می‌باشد. بردار ورودی‌های کنترلی اعمالی به شمول دیفرانسیلی لور پیرو و قوانین به‌روزرسانی مرتبط با دو پارامتر ثابت ناشناخته‌ی γ و κ به صورت رابطه (۳۱) حاصل می‌شوند. لازم به ذکر است که بردار ورودی‌های رابطه (۳۱) با استناد به ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۹)، نوشته شده‌اند. بنابراین انتظار خواهیم داشت که سوئیچینگ‌های فرکانس بالایی در سیگنال کنترلی رخ دهد.

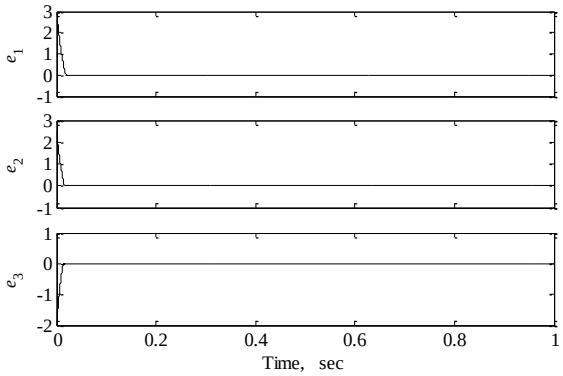
$$\dot{\hat{\gamma}} = 3.5\big(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\|\big)\big(3|e_1| + 4|e_2| + 2|e_3|\big), \; \hat{\gamma}(0) = 0.5$$
$$\dot{\hat{\kappa}} = \sqrt{9e_1^2 + 16e_2^2 + 4e_3^2}, \; \hat{\kappa}(0) = 0.25$$
$$\mu_k = \Big(\sum_{i=1}^{3} |\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|\Big)_k + \Big(\sum_{i=1}^{3} |\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|\Big)_k \qquad (۳۱)$$
$$+ 3.5\big(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{e}\|\big)\hat{\gamma} + \hat{\kappa}, \; \text{for } k = 1,2,3$$
$$\boldsymbol{u}_x = \begin{bmatrix} -2\varepsilon_1\mu_1\text{sgn}(e_1) \\ -5\varepsilon_2\mu_2\text{sgn}(e_2) \\ -2.5\varepsilon_3\mu_3\text{sgn}(e_3) \end{bmatrix}, \; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1.1$$

شکل‌های ۱ تا ۴ نتایج شبیه‌سازی مرتبط با سنکرون‌سازی میان دو شمول دیفرانسیلی لور رابطه ۳۰ را با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه ۳۱ نشان می‌دهند. شکل ۱ پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت را با در نظر گرفتن شرایط اولیه $\boldsymbol{x}(0) = [1\;1\;-3]^T$ و $\boldsymbol{y}(0) = [-2\;-1.5\;1]^T$ نشان می‌دهد. نمودار خطای سنکرون‌سازی در شکل ۲ به تصویر کشیده شده

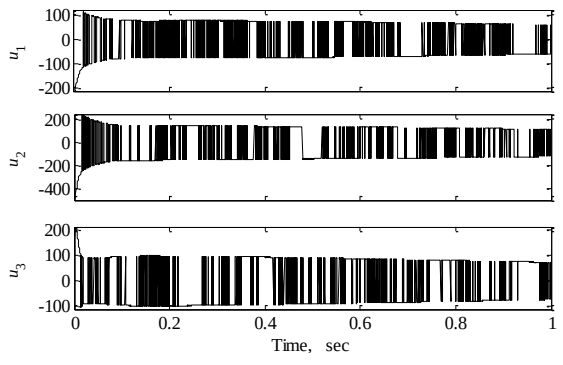
است. با دقت در شکل ۲ می‌توان دید که همه‌ی خطاهای سنکرون‌سازی تقریباً بعد از گذشت ۰.۰۲ ثانیه به صفر همگرا شده‌اند. شکل ۳ ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x$ را که به سیستم لور پیرو اعمال شده‌اند، نشان می‌دهد. همانطوری که از قبل نیز پیش‌بینی شده بود، سوئیچینگ‌های فرکانس بالا در سیگنال‌های کنترلی دیده می‌شود. شکل ۴ پاسخ‌های زمانی مرتبط با $\hat{\gamma}$ و $\hat{\kappa}$ را نشان می‌دهد که در واقع تخمین دو پارامتر ثابت ناشناخته‌ی γ و κ هستند. با دقت در شکل ۴ مشخص می‌شود که مقادیر تخمین پارامترهای γ و κ به ۳.۶ و ۰.۳۸ همگرا شده‌اند که با مقادیر اصلی این پارامترهای ثابت ناشناخته $\|\theta\| \le \gamma = 1.5$ و $\|\boldsymbol{\Psi}_y\| \le \kappa = 0.3124$ متفاوت هستند که این موضوع در واقع تاییدی بر یادآوری ۳ می‌باشد.



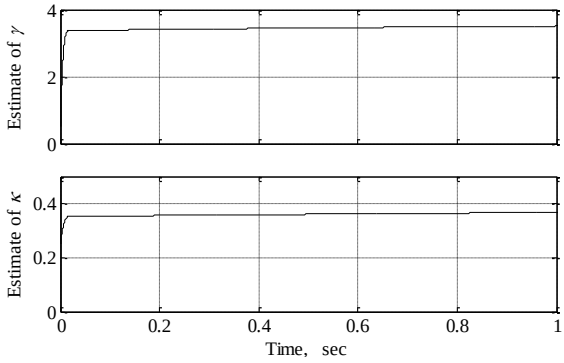
شکل ۱: پاسخ زمانی‌های متغیرهای حالت دو شمول دیفرانسیلی لور مرجع و پیرو رابطه (۳۰) با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۱)



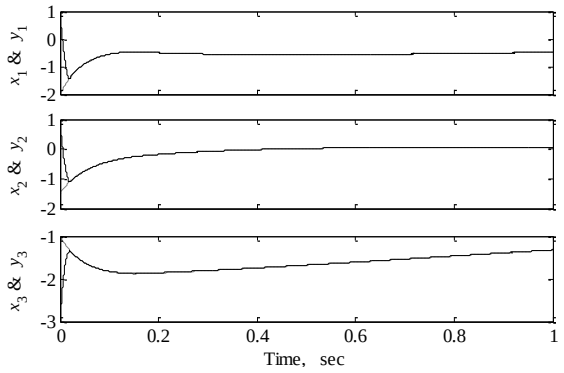
شکل ۲: پاسخ‌های زمانی خطاهای سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور مرجع و پیرو رابطه (۳۰) با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۱)



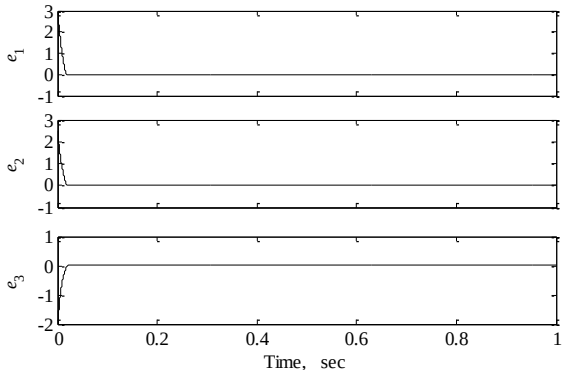
شکل ۳: ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x$ رابطه‌ی (۳۱) اعمال شده به شمول دیفرانسیلی لور پیرو



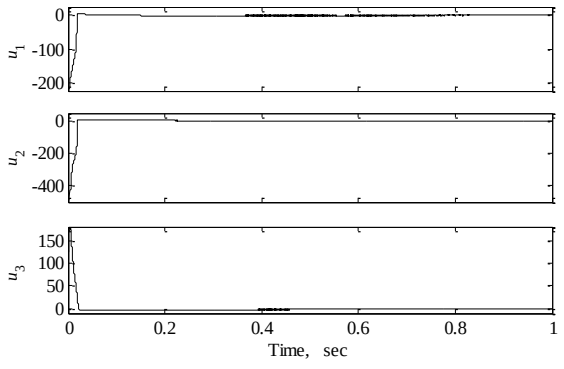
شکل ۴: پاسخ‌های زمانی $\hat{\gamma}$ و $\hat{\kappa}$ با وجود ورودی‌های کنترلی (۳۱)



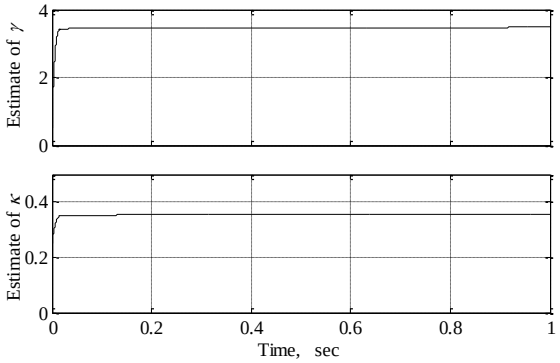
شکل ۵: پاسخ زمانی‌های متغیرهای حالت دو شمول دیفرانسیلی لور مرجع و پیرو رابطه (۳۰) با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۲)



شکل ۶: پاسخ‌های زمانی خطاهای سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور مرجع و پیرو رابطه (۳۰) با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۲)



شکل ۷: ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x$ رابطه‌ی (۳۲) اعمال شده به شمول دیفرانسیلی لور پیرو



شکل ۸: پاسخ‌های زمانی $\hat{\gamma}$ و $\hat{\kappa}$ با وجود ورودی‌های کنترلی (۳۲)

شبیه‌سازی‌های مرتبط با همین زیربخش را با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۲) تکرار می‌کنیم تا سوئیچینگ‌های فرکانس بالا کاهش یافته و سیگنال‌های کنترلی اعمالی به شمول لور پیرو تا حدود زیادی صاف و هموار شوند. ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۲) با استناد به ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه (۲۳) نوشته شده‌اند.

شکل‌های ۵ الی ۸ نتایج شبیه‌سازی مرتبط با سنکرون‌سازی دو شمول لور مرجع و پیرو رابطه (۳۰) را با وجود ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۲) نشان می‌دهند. پاسخ‌های زمانی دو شمول لور مرجع و پیرو و همچنین خطاهای سنکرون‌سازی به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ آورده شده‌اند. شکل ۷ ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۲) را به تصویر می‌کشد که با دقت در این شکل می‌توان تشخیص داد که سوئیچینگ‌های فرکانس بالا حذف شده‌اند. شکل ۸ نیز پاسخ‌های زمانی مرتبط با $\hat{\gamma}$ و $\hat{\kappa}$ را نشان می‌دهد.

$$\boldsymbol{u}_x=\begin{bmatrix}-2\varepsilon_1\upsilon_1^2\dfrac{3e_1}{|3e_1|\upsilon_1+\chi_1(t)}\\ -5\varepsilon_2\upsilon_2^2\dfrac{4e_2}{|4e_2|\upsilon_2+\chi_2(t)}\\ -2.5\varepsilon_3\upsilon_3^2\dfrac{2e_3}{|2e_3|\upsilon_3+\chi_3(t)}\end{bmatrix},\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1.1$$
$$\upsilon_k=\left(\sum_{i=1}^{3}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|\right)_k+\left(\sum_{i=1}^{3}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|\right)_k+3.5(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|)\hat{\gamma}+\hat{\kappa}+|\Omega_k|,\ \text{for } k=1,2,3 \qquad (۳۲)$$
$$\boldsymbol{\Omega}=[3e_1\quad 4e_2\quad 2e_3],\ \chi_k(t)=5e^{-0.001t}$$
$$\dot{\hat{\gamma}}=3.5(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{e}\|)(3|e_1|+4|e_2|+2|e_3|),\hat{\gamma}(0)=0.5$$
$$\dot{\hat{\kappa}}=\sqrt{9e_1^2+16e_2^2+4e_3^2},\hat{\kappa}(0)=0.25$$

۴-۲ شبیه‌سازی مرتبط با سنکرون‌سازی دو سیستم Drill String

در این زیربخش، ابتدا سیستم drill string [۱ و ۱۴] و اجزای تشکیل‌دهنده آن به طور مختصر معرفی می‌شوند. همچنین در ادامه، معادلات دینامیکی این سیستم همراه با پارامترهای موجود در آن معرفی خواهند شد. این دستگاه شامل تقویت‌کننده توان، موتور DC، دو دیسک چرخشی (یک دیسک چرخشی بالایی و یک دیسک چرخشی پایینی) و میله با سختی کم[۱] می‌باشد. موتور DC از طریق یک گیربکس به دیسک بالایی متصل بوده و ولتاژ ورودی موتور DC از طریق کامپیوتر به آن داده می‌شود. میله با سختی کم به گونه‌ایی دو دیسک بالایی و پایینی را به هم متصل کرده است که هر دو دیسک می‌توانند حول مرکزهای هندسی خود به راحتی بچرخند. وضعیت‌های زاویه‌ایی مرتبط با هر یک از دو دیسک با استفاده از دو انکودر افزایشی[۲] جداگانه اندازه‌گیری می‌شوند. معادلات دینامیکی توصیف‌کننده این سیستم در رابطه (۳۳) آورده شده است [۱ و ۱۴].

$$\begin{aligned}&J_u\ddot{\theta}_u+k_\theta(\theta_u-\theta_l)+T_{fu}(\dot{\theta}_u)-k_mu=0\\&J_L\ddot{\theta}_L-k_\theta(\theta_u-\theta_l)+T_{fl}(\dot{\theta}_l)=0\end{aligned} \qquad (۳۳)$$

در این رابطه، u بیانگر ورودی کنترلی (همان ولتاژ ورودی به موتور DC است که مقدار آن به بازه‌ی $[-5v\ ,5v]$ محدود می‌باشد)، θ_u و θ_l نیز به ترتیب بیانگر وضعیت زاویه‌ایی دیسک بالایی و پایینی می‌باشند. J_u، k_θ، k_m و J_L ضرایب ثابتی هستند که مقادیرشان در جدول ۱ آورده شده است. T_{fu} بیانگر گشتاور اصطکاکی است که بر روی دیسک بالایی وارد شده و این گشتاور با استفاده از رابطه (۳۴) بیان می‌شود [۱ و ۱۴].

$$T_{fu}(\dot{\theta}_u)\in\begin{cases}T_{cu}(\dot{\theta}_u)\text{sgn}(\dot{\theta}_u)-(b_u-\Delta b_u)\dot{\theta}_u & \text{for } \dot{\theta}_u=0\\ [-T_{su}+\Delta T_{su},\ T_{su}+\Delta T_{su}] & \text{for } \dot{\theta}_u\neq 0\end{cases} \qquad (۳۴)$$
$$T_{cu}(\dot{\theta}_u)=T_{su}+\Delta T_{su}\text{sgn}(\dot{\theta}_u)+b_u|\dot{\theta}_u|+\Delta b_u\dot{\theta}_u$$

در این رابطه، Δb_u، ΔT_{su}، T_{su} و b_u ضرایب ثابتی هستند که مقادیرشان در جدول (۱) آورده شده است. T_{fl} نیز به طور مشابه بیانگر گشتاور اصطکاکی است که بر روی دیسک پایینی وارد شده و با رابطه (۳۵) توصیف می‌شود.

$$T_{fl}(\dot{\theta}_l)\in\begin{cases}T_{cl}(\dot{\theta}_l)\text{sgn}(\dot{\theta}_l)+0.1\dot{\theta}_l & \text{for } \dot{\theta}_l\neq 0\\ [-T_{sl},T_{sl}] & \text{for } \dot{\theta}_l\neq 0\end{cases} \qquad (۳۵)$$
$$T_{cl}(\dot{\theta}_l)=T_{cl}+(T_{sl}-T_{cl})e^{-\left|\frac{\dot{\theta}_l}{\omega_{sl}}\right|^{\delta_{sl}}}+b_l|\dot{\theta}_l|$$

در رابطه (۳۵)، b_l، δ_{sl}، T_{cl}، T_{sl} و ω_{sl} ضرایب ثابتی هستند که مقادیرشان در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱: مقادیر ضرایب ثابت مدل دینامیکی سیستم Drill-string [۱ و ۱۴]

پارامتر	مقدار	واحد
k_m	4.3228	[N.m/v]
J_u	0.4765	[kg.m^2]
T_{su}	0.37975	[N.m]
ΔT_{su}	-0.00575	[N.m]
b_u	2.4245	[kg.m^2/rad.sec]
Δb_u	-0.0084	[kg.m^2/rad.sec]
k_θ	0.075	[N.m/rad]
J_L	0.035	[kg.m^2]
T_{sl}	0.26	[N.m]
T_{cl}	0.05	[N.m]
ω_{sl}	2.2	[rad/sec]
δ_{sl}	1.5	[-]
b_l	0.009	[kg.m^2/rad.sec]

[۱] Low-stiffness string

[۲] Incremental encoder

با انتخاب بردار متغیرهای حالت به صورت $\boldsymbol{y}=[y_1 \;\; y_2 \;\; y_3]^T=[\theta_u-\theta_l \;\; \dot{\theta}_u \;\; \dot{\theta}_l]^T$، معادلات دینامیکی سیستم drill-string مرجع در قالب معادلات سیستم شمول لور به صورت رابطه (۳۶) نتیجه می‌گردد.

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{A}y+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_y+\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y),\ \boldsymbol{\omega}_y\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}) \qquad (۳۶)$$

در این رابطه، ماتریس‌های $\boldsymbol{A}\in\Re^{3\times3}$، $\boldsymbol{G}\in\Re^{3\times2}$ و $\boldsymbol{H}\in\Re^{2\times3}$، نگاشت غیرخطی یکنوای $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y})\in\Re^2$ و بردار ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)\in\Re^3$ به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -k_\theta/J_u & 0 & 0\\ k_\theta/J_l & 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1/J_u & 0\\ 0 & 1/J_l\end{bmatrix},\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\rho}\left(\begin{bmatrix}y_2\\ y_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}T_{fu}(y_2)\\ T_{fl}(y_3)\end{bmatrix},\boldsymbol{\Psi}_y(\boldsymbol{u}_y)=\begin{bmatrix}0\\ \frac{k_m}{J_u}u_2\\ 0\end{bmatrix}$$

همانطوری که در بالا نیز ذکر شد باید توجه داشت که u_2 در واقع ولتاژ ورودی به بخش درایو بوده که همواره مقدار این ولتاژ باید در محدوده‌ی $[-5v,5v]$ قرار داشته باشد تا آسیبی به اجزای الکتریکی سیستم وارد نشود. در این مثال، فرض کرده‌ایم که ولتاژ ورودی به سیستم drill string مرجع، مقدار ثابت $u_2=2.7$ است. ماتریس $\boldsymbol{A}$ نیز به صورت ترکیب خطی محدب دو ماتریس معلوم $\boldsymbol{A}_1$ و $\boldsymbol{A}_2$ نوشته می‌شود که در زیر این ترکیب خطی نشان داده شده است. باید توجه داشت که در ادامه در طراحی ورودی‌های کنترلی برای سیستم drill string پیرو، فرض می‌شود که دو ضریب ثابت υ_1 و υ_2 نامعلوم هستند و در اختیار طراح قرار ندارند.

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ \frac{-3k_\theta}{J_u} & 0 & 0\\ \frac{9k_\theta}{J_l} & 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0 & \frac{8}{9} & \frac{-8}{9}\\ \frac{-7k_\theta}{9J_u} & 0 & 0\\ \frac{k_\theta}{9J_l} & 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\upsilon}=\begin{bmatrix}\upsilon_1\\ \upsilon_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.9\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\upsilon_1\boldsymbol{A}_1+\upsilon_2\boldsymbol{A}_2$$

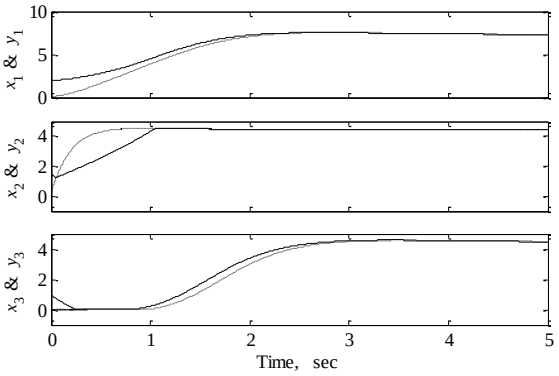
معادلات دینامیکی سیستم drill string پیرو نیز به صورت رابطه (۳۷) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}_x+\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x),\ \boldsymbol{\omega}_x\in-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}),$$
$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.9\end{bmatrix},\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)=\begin{bmatrix}0\\ \frac{k_m}{J_u}u_{2_x}\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۳۷)$$

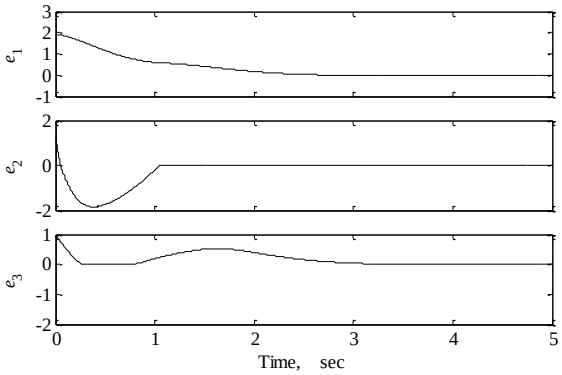
در ادامه فرض می‌کنیم که دو ضریب ثابت λ_1 و λ_2 نامعلوم هستند و در اختیار طراح قرار ندارند. برای سنکرون‌سازی دو سیستم drill string مرجع و پیرو، بردار ورودی‌های کنترلی $\boldsymbol{u}_x=[0 \;\; u_{2_x} \;\; 0]^T$ باید چنان طراحی شود که متغیرهای حالت سیستم drill string پیرو متغیرهای حالت متناظر سیستم مرجع را به خوبی دنبال کنند و خطاهای میان متغیرهای حالت متناظر به سمت صفر همگرا شوند. با توجه به بردار غیرخطی‌ساز $\boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x)$ که در رابطه (۳۷) در نظر گرفته شده است، ضریب ثابت α_{2_x} به صورت $\alpha_{2_x}=k_m/J_u$ نتیجه می‌شود. ماتریس مثبت معین متقارن $\boldsymbol{P}$ نیز به صورت $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(0.5,J_u,J_l)$ انتخاب شده است که برای این مثال شرط تساوی ماتریسی $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{H}$ را برآورده می‌سازد. بردار ورودی‌های کنترلی اعمالی به سیستم drill string پیرو به صورت رابطه‌ی (۳۸) حاصل می‌شود.

$$\dot{\hat{\kappa}}=\sqrt{0.25e_1^2+J_u^2e_2^2+J_l^2e_3^2},\hat{\kappa}(0)=1$$
$$\mu_1=\mu_3=0,\ \mu_2=(\sum_{i=1}^{2}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{e}|)_2+(\sum_{i=1}^{2}|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}|)_2+\hat{\kappa} \qquad (۳۸)$$
$$\boldsymbol{u}_x=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{J_u}{k_m}\varepsilon_2\mu_2\mathrm{sgn}(e_2)\\ 0\end{bmatrix},\varepsilon_2=1.1$$

شکل‌های ۹ الی ۱۲ نتایج مرتبط با سنکرون‌سازی دو سیستم drill string رابطه‌های (۳۶) و (۳۷) را با وجود ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۸)، نشان می‌دهند. پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت دو سیستم مرجع و پیرو در شکل ۹ آورده شده است و شرایط اولیه برای این دو سیستم به صورت $\boldsymbol{y}(0)=[0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.1]^T$ و $\boldsymbol{x}(0)=[2 \;\; 1.5]^T$ در نظر گرفته شده است. شکل ۱۰ پاسخ زمانی خطاهای سنکرون‌سازی مرتبط با دو سیستم رابطه‌های (۳۶) و (۳۷) را به تصویر می‌کشد که تقریباً بعد از گذشت ۳ ثانیه، متغیرهای متناظر با هم سنکرون شده و تمامی خطاهای سنکرون‌سازی به صفر همگرا شده‌اند.



شکل ۹: پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت دو سیستم drill string مرجع و پیرو با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۸)

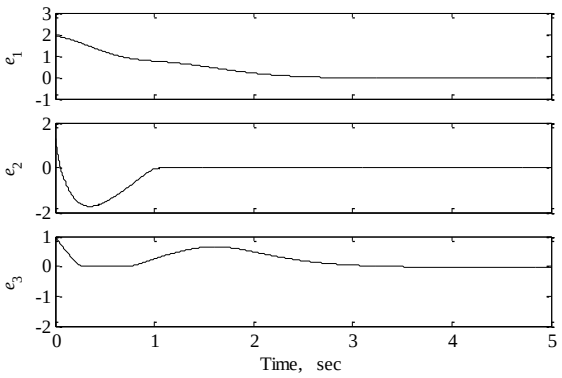


شکل ۱۰: پاسخ‌های زمانی خطاهای سنکرون‌سازی دو سیستم drill string با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۸)

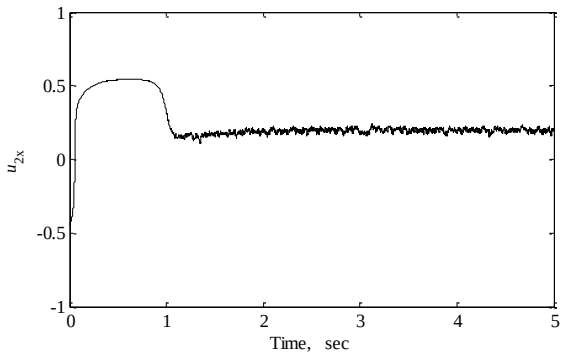
$$\boldsymbol{u}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{J_u}{k_m}\varepsilon_2 \upsilon_2^2 \frac{J_u e_2}{|J_u e_2|\upsilon_2 + \chi_2(t)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (۳۹)$$
$$\varepsilon_2 = 1.1, \chi_2(t) = 0.15e^{-0.005t}, \upsilon_1 = \upsilon_3 = 0,$$
$$\dot{\hat{\kappa}} = \sqrt{0.25e_1^2 + J_u^2 e_2^2 + J_l^2 e_3^2}, \hat{\kappa}(0) = 1,$$
$$\upsilon_2 = \left(\sum_{i=1}^{2} |\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{e}|\right)_2 + \left(\sum_{i=1}^{2} |\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}|\right)_2 + \hat{\kappa} + |J_u e_2|,$$

شکل‌های ۱۳ الی ۱۶ نتایج شبیه‌سازی مرتبط با سنکرون‌سازی دو سیستم رابطه‌های (۳۶) و (۳۷) را با وجود اعمال ورودی کنترلی رابطه (۳۹) به سیستم drill string پیرو نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که تمامی شرایط اولیه به طور مشابه و یکسان با شبیه‌سازی قبل انتخاب شده‌اند و در واقع فقط ورودی کنترلی رابطه (۳۹) جایگزین ورودی کنترلی رابطه (۳۸) شده است. شکل‌های ۱۳ و ۱۴ به ترتیب پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت دو سیستم drill string مرجع و پیرو و خطاهای سنکرون‌سازی را با اعمال ورودی کنترلی رابطه (۳۹) نشان می‌دهند.

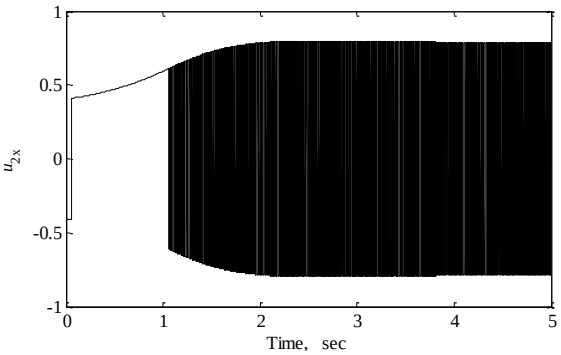
شکل ۱۵ ورودی کنترلی u_{2x} را به تصویر می‌کشد که به سیستم drill string پیرو اعمال شده است. مقایسه میان دو شکل ۱۵ و ۱۱ نشان می‌دهد که سوئیچینگ‌های فرکانس بالا تا حد بسیار زیادی در این حالت کاهش یافته است و ورودی کنترلی شکل ۱۵ در پیاده‌سازی عملی قابل اعمال به سیستم پیرو می‌باشد. شکل ۱۶ نیز پاسخ زمانی $\hat{\kappa}$ را با وجود ورودی کنترلی رابطه (۳۹) نشان می‌دهد که در این حالت نیز مقدار نهایی $\hat{\kappa}$ به مقدار واقعی و نامی پارامتر κ همگرا نشده است.



شکل۱۴: پاسخ‌های زمانی خطاهای سنکرون‌سازی دو سیستم drill string با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۹)

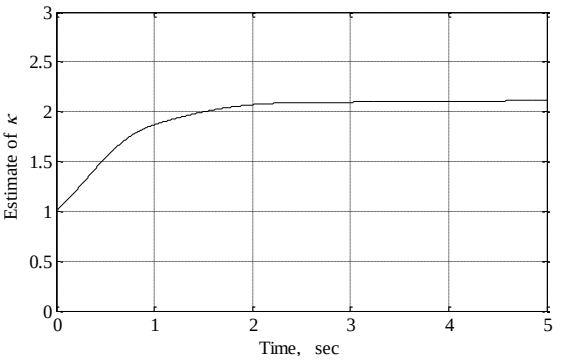


شکل۱۵: پاسخ زمانی ورودی کنترلی u_{2x} رابطه (۳۹) اعمال شده به سیستم drill string پیرو رابطه (۳۷)

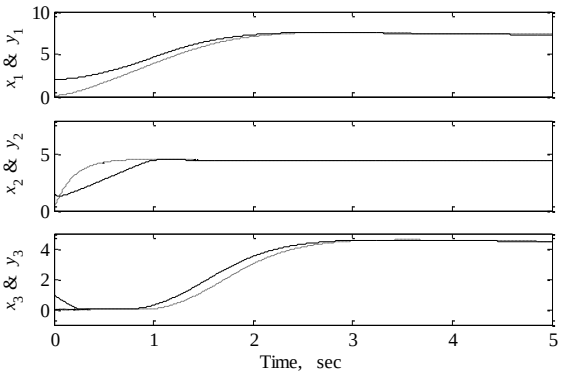


شکل ۱۱: پاسخ زمانی ورودی کنترلی u_{2x} رابطه (۳۸) اعمال شده به سیستم drill string پیرو رابطه (۳۷)

شکل ۱۱ ورودی کنترلی u_{2x} را نشان می‌دهد که به سیستم drill string پیرو اعمال شده است. این شکل به خوبی نشان می‌دهد که ورودی کنترلی u_{2x} دارای سوئیچینگ فرکانس‌های بالای شدیدی است که مطلوب نبوده و تقریباً اعمال این ورودی کنترلی را در پیاده‌سازی عملی غیرممکن می‌سازد. پاسخ زمانی $\hat{\kappa}$ نیز در شکل ۱۲ آورده شده است. با دقت در شکل ۱۲ مشخص می‌شود که مقدار نهایی $\hat{\kappa}$ به حدود ۲.۲ رسیده است و با مقدار واقعی پارامتر κ که برابر با $|(k_m / J_u)u_2| = 24.5$ است، متفاوت می‌باشد.

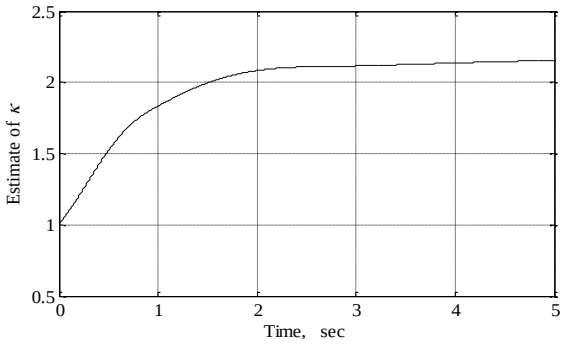


شکل ۱۲: پاسخ زمانی $\hat{\kappa}$ با اعمال ورودی کنترلی (۳۸)



شکل۱۳: پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت دو سیستم drill string مرجع و پیرو با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۹)

در ادامه، شبیه‌سازی‌های مرتبط با همین زیربخش را با اعمال ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۹) تکرار می‌کنیم تا سوئیچینگ‌های فرکانس بالای ورودی کنترلی را تا حد زیادی کاهش دهیم.



شکل۱۶: پاسخ زمانی ورودی کنترلی u_{2x} رابطه (۳۹) اعمال شده به سیستم drill string پیرو رابطه (۳۷)

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، در ابتدا مدل جامع و کامل‌تری از شمول دیفرانسیلی لور نسبت به مدل‌های دیگر ارائه شد و در ادامه مسئله سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور با فرض ناشناخته بودن پارامترهای شمول لور و همچنین فرض وجود غیرخطی‌سازهای شعاعی در مسیر ورودی‌های کنترلی، مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا، دو دسته ورودی‌های کنترلی سنکرون‌ساز با استفاده مستقیم از تئوری پایداری لیاپانوف طراحی گردیدند. دسته‌ی اول از ورودی‌های کنترلی به علت استفاده از تابع علامت دارای سوئیچینگ‌های فرکانس بالایی بودند که در دسته دوم ورودی‌های کنترلی پیشنهادی، این مشکل برطرف شد. پایداری دینامیک خطاهای سنکرون‌سازی و همگرا شدن این خطاها به صفر با وجود هرکدام از دو دسته‌ی ورودی‌های کنترلی با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف به اثبات رسیدند. برای نشان دادن عملکرد و کارایی بالای ورودی‌های کنترلی طراحی شده، دو شبیه‌سازی کامپیوتری در ادامه مقاله آورده شدند که یکی از مثال‌های شبیه‌سازی مرتبط با یک کاربرد عملی بود و در واقع مسئله سنکرون‌سازی دو سیستم drill string را مورد شبیه‌سازی قرار داد. نتایج شبیه‌سازی‌های کامپیوتری نیز کارایی ورودی‌های کنترلی را در پایدارسازی دینامیک خطاهای سنکرون‌سازی با وجود غیرخطی‌سازهای شعاعی به خوبی نشان داد.

مراجع

[1] J.C.A Bruin, A. Doris, N. Wouw, W.P.M.H. Heemels, and H. Nijmeijer, “Control of mechanical motion systems with non-collocation of actuation and friction: A Popov criterion approach for input-to-state stability and set-valued nonlinearities,” Automatica, vol. 45, no. 2, pp. 405-415, 2009.

[2] B. Brogliato, “Some perspectives on the analysis and control of complementarity systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, no. 6, pp. 918-935, 2003.

[3] R. Ma, “Second order periodic problems in the presence of dry friction,” Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 12, no. 6, pp. 3306-3314, 2011.

[4] K. Addi, S. Adly, B. Brogliat, and D. Goeleven, “A method using the approach of Moreau and Panagiotopoulos for the mathematical formulation of non-regular circuits in electronics,” Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 1, no. 1, pp. 30-43, 2007.

[5] C. Glocker, “Models of non-smooth switches in electrical systems,” International Journal of Circuit Theory and Applications, vol. 33, no. 3, pp. 205-234, 2005.

[6] E. S. Pyatnitskiy and L.B. Rapoport, “Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control system,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 43, no. 3, pp. 219-229, 1996.

[7] J.W. Chen, J.F. Huang, and L.Y. Lo, “Viable control for uncertain nonlinear dynamical systems described by differential inclusions,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 315, no. 1, pp. 41-53, 2006.

[8] M.F. Miranda and V.J.S. Leite, “Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying state delay: A convex approach,” Journal of The Franklin Institute, vol. 348, no. 4, pp. 568-588, 2011.

[9] J.P. Aubin, J. Lygeros, M. Quincampoix, S. Sastry, and N. Seub, “Impulse differential inclusions: A viability approach to hybrid systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, no. 1, pp. 2-20, 2002.

[10] A. Schaft and J. Schumacher, “Complementarity modelling of hybrid systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 43, no. 4, pp. 483-490, 1998.

[11] A.A. Zevin and M.A. Pinsky, “General solution of stability problem for plane linear switched systems and differential inclusions,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 9, pp. 2149-2153, 2008.

[12] S. Balochian and A.K. Sedigh, “Sufficient condition for stabilization of linear time invariant fractional order switched systems and variable structure control stabilizers,” ISA Transaction, vol. 51, no. 1, pp. 65-73, 2012.

[13] Z. Sun and S.S. Ge, “Analysis and synthesis of switched control systems,” Automatica, vol. 41, no. 2, pp. 181-195, 2005.

[14] A. Doris, A.L. Juloski, N. Mihajlovic, W.P.M.H Heemels, N. Wouw and H. Nijmeijer, “Observer designs for experimental non-smooth and discontinuous systems,” IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 16, no. 6, pp.1323-1332, 2008.

[15] W.P.M.H. Heemels and S. Weiland, “Input-to-state stability and interconnections of discontinuous dynamical systems,” Automatica, vol. 44, no. 12, pp. 3079-3086, 2008.

[16] V. Azhmyakov, “On the set-valued approach to optimal control of sliding mode processes,” Journal of The Franklin Institute, vol. 349, no. 4, pp. 1323-1336, 2012.

[17] E.N. Mahmudov, “On duality in problems of optimal control described by convex inclusions of Goursat-Darboux type,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 307, no. 2, pp. 628-640, 2005.

vol. 40, no. 3, pp.401-413, 2004.

[32] J.M. Gomes da Silva Jr., E.B. Castelan, J. Corso, and D. Eckhard, "Dynamic output feedback stabilization for systems with sector-bounded nonlinearities and saturating actuators," Journal of the Franklin Institute, vol. 350, no. 3, pp. 464-484, 2013.

[33] S.M. Lee, J.H. Park, and O.M. Kwon, "Improved asymptotic stability analysis for Lur'e systems with sector and slope restricted nonlinearities," Physics Letters A, vol. 362, no. 5, pp. 348-351, 2007.

[34] B. Zhou, W. X. Zheng, and G. R. Duan, "An improved treatment of saturation nonlinearity with its application to control of systems subject to nested saturation," Automatica, vol. 47, no. 2, pp. 306-315, 2011.

[35] D. Karimipour, S. Pourdehi, and P. Karimaghaee, "Adaptive unstable periodic orbit stabilization of uncertain time-delayed chaotic systems subjected to input nonlinearity," System and Control Letters, vol. 61, no. 12, pp. 1168-1174, 2012.

[36] E. Rocha-Cózatl and J.A. Moreno, "Dissipative design of unknown input observers for systems with sector nonlinearities," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 21, no. 14, pp. 1623-1644, 2011.

[37] G. Smirnov, Introduction to the Theory of Differential Inclusions. SIAM: Philadelphia, 2002.

[38] J. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusions: Set-valued Maps and Viability Theory, Springer Verlag: Berlin, 1984.

[39] S. Boyd, E.L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Society for Industrial and Applied Mathematics: Philadelphia, 1994.

پیوست ۱

با توجه به تعریف $\Omega_k = \sum_{d=1}^{n} e_d p_{dk}$ از رابطه‌ی (۱۰)، می‌توان رابطه (۱-۱) را نتیجه گرفت.

$$\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{\phi}_x(\boldsymbol{u}_x) = \sum_{k=1}^{n} \Omega_k \phi_{k_x}(u_{k_x}) \qquad (۱-۱)$$

با جایگذاری ورودی‌های کنترلی رابطه (۲۳) در فرض ۴ مرتبط با غیرخطی‌ساز شعاعی یعنی ، نامساوی رابطه (۲-۱) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\alpha_{k_x}\left(\frac{1}{\alpha_{k_x}}\right)^2 \varepsilon_k^2 \upsilon_k^4 \frac{\Omega_k^2}{\left(|\Omega_k|\upsilon_k + \chi_k(t)\right)^2} \\ &\le -\frac{1}{\alpha_{k_x}} \varepsilon_k \upsilon_k^2 \frac{\Omega_k}{|\Omega_k|\upsilon_k + \chi_k(t)} \phi_{k_x}(u_{k_x}) \end{aligned} \qquad (۲-۱)$$

از آنجایی که υ_k، ε_k و $\chi_k(t)$ همواره مثبت هستند، نامساوی رابطه (۲-۱) به صورت نامساوی رابطه (۳-۱) ساده و بازنویسی می‌شود.

$$\Omega_k \phi_{k_x}(u_{k_x}) \le -\varepsilon_k \upsilon_k^2 \frac{\Omega_k^2}{|\Omega_k|\upsilon_k + \chi_k(t)} \qquad (۳-۱)$$

$\sum_{k=1}^{n} \Omega_k \phi_{k_x}(u_{k_x}) \le -\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k \upsilon_k^2 \Omega_k^2}{|\Omega_k|\upsilon_k + \chi_k(t)}$ بسیار واضح است که نامساوی با رابطه (۳-۱) یکسان است. بنابراین نامساوی رابطه (۲۵) اثبات شد.

[18] Y. Ren, L. Hu, and R. Sakthivel, "Controllability of impulsive neutral stochastic functional differential inclusions with infinite delay," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 235, no. 8, pp. 2603-2614, 2011.

[19] J. Huang, Z. Han, X. Cai, and L. Liu, "Control of time-delayed linear differential inclusions with stochastic disturbance," Journal of The Franklin Institute, vol. 347, no. 10, pp. 1895-1906, 2010.

[20] X. Liu, J. Wang, Z. Duan, and L. Huang, "New absolute stability criteria for time-delay Lur'e systems with sector-bounded nonlinearity," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 20, no. 6, pp. 659-672, 2010.

[21] J. Huang, Z. Han, X. Cai, and L. Liu, "Adaptive full-order and reduced order observers for the Lur'e differential inclusion system," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 16, no. 7, pp. 2869-2879, 2011.

[22] C. Yang, Q. Zhang, and L. Zhou, "Lur'e Lyapunov functions and absolute stability criteria for Lur'e systems with multiple nonlinearities," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 17, no. 9, pp. 829-841, 2007.

[23] B. Brogliato and W. P. M. H Heemles, "Observer design for Lur'e systems with multivalued mappings: A passivity approach," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 8, pp. 1996-2001, 2009.

[24] J. Huang, Z. Han, and X. Cai, "Note on observer for Lur'e differential inclusion systems," IET Control Theory and Applications, vol. 5, no. 17, pp. 1939-1944, 2011.

[25] D. Chen, G. Yang, and Z. Han, "Impulsive observer for input-to-state stability based synchronization of Lur'e differential inclusion system," Communic-ations in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 17, no. 7, pp. 2990-2996, 2012.

[26] J. Huang and Z. Han, "Adaptive non-fragile observer design for the uncertain Lur'e differential inclusion system," Applied Mathematical Modelling, vol. 37, no. 1, pp. 72-81, 2013.

[27] J. Huang, P. Wang, Z. Han, and X. Cai, "Observer design for the Lur'e differential inclusion system with Markovian jumping parameters," International Journal of System Science, vol. 44, no. 12, pp. 2338-2348, 2013.

[28] X. Cai, J. Huang, and L. Liu, "Stability analysis of linear time-delay differential inclusion systems subject to input saturation," IET Control Theory and Applications, vol. 4, no. 11, pp. 2592-2602, 2010.

[29] Y. Zheng, C. Wen, and Z. Li, "Robust adaptive asymptotic tracking control of uncertain nonlinear systems subject to nonsmooth actuator nonlinearities," International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 27, no. 1, pp. 108-121, 2013.

[30] J. Na, "Adaptive prescribed performance control of nonlinear systems with unknown dead zone," International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 27, no. 5, pp. 426-446, 2013.

[31] X.S. Wang, C.Y. Su, and H. Hong, "Robust adaptive control of a class of nonlinear systems," Automatica,