مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹، صفحه ۱۴-۱

بهبود عملکرد کنترلگر چندمنظوره H_2/H_∞ با استفاده از استراتژی کلیدزنی با سرپرستی و تضمین پایداری بر مبنای تابع لیاپانوف مشترک

فاطمه جمشیدی[۱]، محمد تقی حمیدی بهشتی[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، fjamshidi@modares.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، دانشگاه تربیت مدرس، mbehesht@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۶/۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۸/۱۲)

چکیده: طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های پیچیده شامل بهینه سازی اهداف مختلف و اغلب مغایر می‌باشد که به یک مساله طراحی چندمنظوره می‌انجامد. از آنجا که با استفاده از یک کنترل کننده نمی‌توان تمام اهداف را به طور بهینه برآورده نمود، در این مقاله، از رویکرد کلیدزنی با سرپرستی برای حل مساله کنترل چندمنظوره H_2/H_∞ استفاده شده است. با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی، دو کنترل کننده مجزا برای تامین اهداف عملکردی H_2 و H_∞ طراحی گردیده است. برای ماتریس تبدیل هر کنترل کننده نمایش فضای حالت به گونه‌ای یافت شده که برای هر سیگنال کلیدزنی سیستم حلقه بسته پایدار مطلق باقی بماند. سرپرست کلیدزنی ورودی‌های خارجیِ نویز، اغتشاش و ورودی مرجع را تشخیص داده و کنترل کننده مربوط به آن را در حلقه قرار می‌دهد. رویکرد متداول کنترل چندمنظوره H_2/H_∞، طراحی کنترل کننده واحدی است که اهداف عملکردی H_2 و H_∞ را برآورده می‌سازد. نتایج شبیه سازی نشان می‌دهد که در مقایسه با کنترل کننده چندمنظوره H_2/H_∞ متداول، استراتژی کلیدزنی محافظه کاری را کاهش داده و عملکرد کنترل کننده را به طور قابل ملاحظه-ای بهبود بخشیده است.

کلمات کلیدی: پایداری، تحقق فضای حالت، سرپرست تشخیص ورودی خارجی، کنترلگر کلیدزنی باسرپرستی H_2/H_∞، نامساوی‌های ماتریسی خطی.

Improving the H_2/H_∞ Control Performance Using Supervisory Based Switching

Fatemeh Jamshidi, Mohammad Taghi Hamidi Beheshti

Abstract: In this paper, a supervisory based switching strategy is employed to solve the H_2/H_∞ multi objective controller design. Using linear matrix inequalities, two distinict controllers are designed to meet the H_2 and H_∞ performance specifications. A state realization for each controller transfer matrix is found such that the asymptotical stability of the closed-loop switching system is guaranteed for any switching sequence. A supervisor is used to diagnose the exogenous input changes and switch to the relevant controller. Simulation results show that switching strategy improves the performance of the controller and reduces the conservation in comparison with the common H_2/H_∞ controller.

Keywords: Linear Matrix inequality, Realization Theory, Stability Theory, Supervisor, Switching H_2/H_∞ control.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]

۱- مقدمه

در مسایل واقعی مهندسی کنترل، اغلب لازم است نیازهای مغایری همانند حذف انواع مختلف اغتشاش، تعقیب ورودی مرجع، محدودیت روی بیشینه سیگنال‌ها و مقاوم بودن در برابر شرایط متغیر و عدم قطعیت‌های سیستم، برآورده گردد که به مسایل سنتز چندمنظوره که چندین عملکرد را همزمان تامین می‌کنند، منجر می‌شود. به طور کلی مسائل کنترل چندمنظوره همچنان به صورت مسائل باز باقی مانده‌اند.

روش متداول حل مسایل کنترل چندمنظوره، یافتن یک کنترل کننده برای همه اهداف طراحی و یکسان در نظر گرفتن ماتریس‌های لیاپانوفِ به کار رفته برای مشخصه‌های مختلف طراحی است. اگرچه تامین همه اهداف یک مساله طراحی مطلوب است، اما طراحی یک تک کنترل کننده چندمنظوره مستلزم برقراری مصالحه میان اهداف رقابتی همچون حذف نویز، تعقیب، تنظیم و محدودیت روی سیگنال‌هاست. از این رو استفاده از یک تک کنترل کننده، محدود کننده و محافظه کارانه می‌باشد [۱، ۲ و ۳].

کنترل H_2/H_∞ یک روش کارآمد در کنترل مقاوم است و به طراحی کنترلگری می‌پردازد که عملکرد H_2 سیستم را کمینه می‌کند در حالی که عملکرد H_∞ معینی را تضمین می‌نماید [۱].

امروزه کنترل کلیدزنی به دلیل قابلیت آن در غلبه بر محدودیت-های کنترل تطبیقی و کنترل سیستم‌هایی که با یک تک کنترل کننده نمی‌توانند به عملکرد مطلوب دست‌یابند، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. طرح کنترل کلیدزنی، مکانیزم موثری در مقابله با عدم قطعیت-های مدلسازی و سیستم‌های با پیچیدگی زیاد فراهم می‌آورد. حتی برای سیستم‌های خطی غیر متغیر با زمان نیز کنترل کننده کلیدزنی برای بهبود عملکرد به کار رفته است [۴، ۵ و ۶]. پایه و اساس تئوری کنترل کننده-های هایبرید توسط Morse، Hespanha و Liberzon بنا شده است [۷، ۸ و ۹]. در [۱۰] برای پایدارسازی یک سیستم پیوسته از فیدبک خروجی کلیدزنی استفاده شده است و پاسخ کنترل کننده کلیدزنی و دو کنترل کننده LTI دیگر با هم مقایسه گردیده است. در [۱۱] به طور عملی از کنترل کننده کلیدزنی برای غلبه بر محدودیت‌های دامنه کنترل و حالت استفاده شده است. کنترل مقاوم چندمنظورهٔ یک موتور القایی با مشخصات تعقیب و حذف اغتشاش از طریق کلیدزنی در [۱۲] پیشنهاد گردیده است. کلیدزنی میان کنترل کننده‌ها برای بهبود مصالحه در اهداف طراحی در [۱۳، ۱۴ و ۱۵] نیز به کار رفته است.

در این مقاله مساله کنترل سیستم‌های پیچیده با استفاده از کنترل کننده کلیدزنی با سرپرستی بررسی گردیده است. هدف، استفاده از کنترل کننده کلیدزنیِ با سرپرستی برای کاهش محافظه کاری در طراحی کنترل کننده و بهبود عملکرد آن می‌باشد. از این رو مفهوم کنترل کننده چندگانه به کار رفته و از سرپرست برای تنظیم کلیدزنی میان کنترل کننده‌ها در جهت بهبود عملکرد حلقه بسته استفاده شده است. با به کارگیری کلیدزنی میان کنترل کننده‌هایِ از پیش طراحی شده که هر کدام یکی از مشخصات H_2 و H_∞ را برآورده می‌سازند، رفتار مطلوب بدست آمده است. کلیدزنی توسط یک سیستم بالادستی تحت عنوان «سرپرست» سازمان‌دهی می‌شود که وقوع ورودی‌هایِ خارجی مختلف را تشخیص داده و کنترل کننده مربوطه را در حلقه قرار می‌دهد. در اغلب مسایل مهندسی، محدودیت‌های سیگنال کلیدزنی از قبل شناخته شده نیست. از این رو کلیدزنی به طور دلخواه در نظر گرفته شده است. در این مقاله برای تضمین پایداری سیستم کلیدزنی تحت هر دنباله کلیدزنی دلخواه تحقق کنترل کننده‌ها بر اساس پارامتریزاسیونِ یولا آنها که در [۱۶ و ۱۷] بیان شده، انتخاب گردیده است.

ساختار این مقاله به شرح زیر است. در بخش ۲، تعریف مساله و نحوه محاسبهٔ تابع تبدیلِ کنترلگرهایِ H_2 و H_∞، ارائه شده است. در بخش ۳، مسالهٔ طراحی کنترل کننده کلیدزنیِ پایدار به طور دقیق بررسی و چگونگی انتخاب تحقق فضای حالت کنترل کننده‌ها بیان گردیده است. چگونگی تشخیص وقوع ورودی‌های خارجیِ نویز، اغتشاش و ورودی مرجع توسط سرپرستِ کلیدزنی در بخش ۴ توصیف شده است. در بخش ۵، نحوهٔ ارزیابیِ عملکردِ H_2 و H_∞ سیستم کلیدزنی ارائه گردیده است. در بخش بعد روش پیشنهادی به یک مثال اعمال و نتایج با کنترل کننده چندمنظوره H_2/H_∞ متداول مقایسه شده است که کارآمدی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. نتیجه گیری از مباحث مطرح شده و ارائه پیشنهادات بخش انتهایی مقاله را تشکیل می-دهد.

۲- بیان مساله

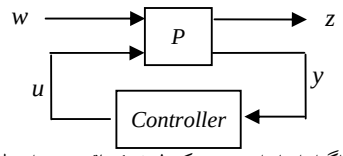
سیستم LTI با بعد محدود P، به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$P:\begin{cases}\dot{x} = Ax + B_u u_C + B_w w\\ z = C_z x + D_{zu} u_C + D_{zw} w\\ y = C_y x + D_{yw} w\end{cases} \qquad (۱)$$

که $x \in R^{n_x}$، متغیر حالت، $w \in R^{n_w}$، ورودی خارجی (نویز، اغتشاش و ورودی مرجع)، $u_C \in R^{n_u}$، ورودی کنترل، $z \in R^{n_z}$، خروجی کنترل شونده و $y \in R^{n_y}$، خروجی اندازه-

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]

گیری شده است. فرضیات لازم برای کنترل H_2 و H_∞ صادق می‌باشد [۲]. شکل ۱، دیاگرامِ استانداردِ سیستمِ کنترل شدهٔ حلقه بسته برای طراحی کنترل کننده‌های H_2 و H_∞ را نمایش می‌دهد.



شکل ۱: دیاگرام استاندارد سیستم کنترل شدهٔ حلقه بسته برای طراحی کنترل کننده‌های H_2 و H_∞

نمایش فضای حالت کنترلگر و سیستم حلقه بسته به ترتیب به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x}_C = Fx_C + Gy \\ u_C = Hx_C + Jy \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl}x_{cl} + B_{cl}w \\ z = C_{cl}x_{cl} + D_{cl}w \end{cases} \quad (۳)$$

که

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} A + B_u JC_y & B_u H & B_w + B_u JD_{yw} \\ GC_y & F & GD_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} JC_y & D_{zu} H & D_{zw} + D_{zu} JD_{yw} \end{array}\right)$$

و $T_i(s) = L_i T(s) R_i$ تابع تبدیل از ورودی خارجی $w_i = R_i^{-1} w$ به خروجی کنترل شده $z_i = L_i z$ (که برای بیان اهداف عملکردی مختلف به کار می‌رود) است [۲]. تحقق فضای حالت $T_i(s)$ به صورت $\left(\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array}\right)$ است که در آن

$$B_i = \begin{pmatrix} B_{w_i} + B_u JD_{yw_i} \\ GD_{yw_i} \end{pmatrix}, \quad B_{w_i} = B_w R_i,$$

$$C_i = \begin{pmatrix} C_{z_i} + D_{z_i u} JC_y & D_{z_i u} H \end{pmatrix}, \quad C_{z_i} = L_i C_z,$$

$$D_i = D_{z_i w_i} + D_{z_i u} JD_{yw_i}, \quad D_{z_i w_i} = L_i D_{zw} R_i,$$

$$D_{yw_i} = D_{yw} R_i, \quad D_{z_i u} = L_i D_{zu}.$$

معیار عملکرد استاندارد H_2/H_∞ مورد نظر می‌باشد. به منظور بیان مساله به فرم نامساوی ماتریسی خطی (LMI) ماتریس لیاپانوف P_i, $i \in I = \{H_2, H_\infty\}$ به صورت زیر افراز بندی شده است

$$P_i = \begin{bmatrix} Y_i & N_i \\ N_i^T & * \end{bmatrix}, P_i^{-1} = \begin{bmatrix} X_i & M_i \\ M_i^T & * \end{bmatrix} \quad (۴)$$

X_i, Y_i, M_i, N_i باید در رابطه (۴) صدق کنند، از این رو M_i, N_i به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که:

$$M_i N_i^T = I - X_i Y_i \quad (۵)$$

شرط پایداری سیستم حلقه بسته توسط کنترل کننده طراحی شده، $P_i > 0$، به شکل $\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} > 0$ در می‌آید [۲].

متغیرهای طراحی، F_i, G_i, H_i, J_i، (تحقق فضای حالت کنترل کننده) با استفاده از رابطه (۶) به $\hat{F}_i, \hat{G}_i, \hat{H}_i, \hat{J}_i$ تغییر می‌کنند:

$$\begin{aligned} \hat{F}_i &= N_i F_i M_i^T + N_i G_i C_y X_i + \\ &\quad + Y_i B_u H_i M_i^T + Y_i \left(A + B_u J_i C_y\right) X_i \\ \hat{G}_i &:= N_i G_i + Y_i B_u J_i \\ \hat{H}_i &:= H_i M_i^T + J_i C_y X_i \\ \hat{J}_i &:= J_i \end{aligned} \quad (۶)$$

لم ۲-۱.(طراحی کنترل کننده H_∞) [۲]: سیستم حلقه بسته (۳) پایدار بوده و به حد نرم-∞ از پیش تعیین شده ($\left\|T_{w_{H_\infty} \to z_{H_\infty}}\right\|_\infty < \gamma$) $\gamma > 0$ دست می‌یابد، اگر و تنها اگر ماتریس‌های $X_{H_\infty}, Y_{H_\infty}$، $\hat{F}_{H_\infty}, \hat{G}_{H_\infty}, \hat{H}_{H_\infty}, \hat{J}_{H_\infty}$ وجود داشته باشند که در LMI های زیر صدق نمایند ($i = H_\infty$):

$$\begin{bmatrix} X_{H_\infty} & I \\ I & Y_{H_\infty} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & * & * & * \\ L_{21} & L_{22} & * & * \\ L_{31} & L_{32} & -\gamma I & * \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (۷)$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= AX_{H_\infty} + B_u \hat{H}_{H_\infty} + \left(AX_{H_\infty} + B_u \hat{H}_{H_\infty}\right)^T \\ L_{21} &= \hat{F}_{H_\infty} + \left(A + B_u \hat{J}_{H_\infty} C_y\right)^T \\ L_{22} &= Y_{H_\infty} A + \hat{G}_{H_\infty} C_y + \left(Y_{H_\infty} A + \hat{G}_{H_\infty} C_y\right)^T \\ L_{31} &= \left(B_{w_i} + B_u \hat{J}_{H_\infty} D_{yw_i}\right)^T \\ L_{32} &= \left(Y_{H_\infty} B_{w_i} + \hat{G}_{H_\infty} D_{yw_i}\right)^T \\ L_{41} &= C_{z_i} X_{H_\infty} + D_{z_i u} \hat{H}_{H_\infty} \\ L_{42} &= C_{z_i} + D_{z_i u} \hat{J}_{H_\infty} C_y \\ L_{43} &= D_{z_i w_i} + D_{z_i u} \hat{J}_{H_\infty} D_{yw_i} \end{aligned}$$

که

با استفاده از رابطه (۶)، تحقق فضای حالت کنترل کننده ای که سیستم حلقه بسته را پایدار می‌سازد و عملکرد مطلوب را تامین می‌نماید، به ازای $i = H_\infty$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} J_i &:= \hat{J}_i \\ H_i &:= \left(\hat{H}_i - J_i C_y X_i\right) M_i^{-T} \\ G_i &:= N_i^{-1} \left(\hat{G}_i - Y_i B_u J_i\right) \end{aligned}$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]

$$F_i = N_i^{-1}\left(\widehat{F}_i - N_i G_i C_y X_i - Y_i B_u H_i M_i^T - Y_i\left(A + B_u J_i C_y\right)X_i\right)M_i^{-T} \quad (۸)$$

تابع تبدیل کنترل کننده به صورت زیر برای $i = H_\infty$ محاسبه می‌گردد:

$$K_i(s) = H_i\left(sI - F_i\right)^{-1}G_i + J_i \quad (۹)$$

لم ۲-۲.(طراحی کنترل کننده H_2) [۲]: سیستم حلقه بسته (۳) پایدار بوده و به حد نرم-۲ از پیش تعیین شده ($\left\|T_{w_{H_2}\to z_{H_2}}\right\|_2 < \nu$) $\nu > 0$ دست می‌یابد، اگر و تنها اگر ماتریس‌های X_{H_2}, Y_{H_2}, Z، $\widehat{F}_{H_2}, \widehat{G}_{H_2}, \widehat{H}_{H_2}, \widehat{J}_{H_2}$ وجود داشته باشند که در LMI های زیر صدق نمایند ($i = H_2$):

$$\begin{bmatrix} X_{H_2} & I \\ I & Y_{H_2} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & * & * \\ L_{21} & L_{22} & * \\ L_{31} & L_{32} & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} X_{H_2} & * & * \\ I & Y_{H_2} & * \\ C_{z_i}X_{H_2} + D_{z_iu}\widehat{H}_{H_2} & C_{z_i} + D_{z_iu}\widehat{J}_{H_2}C_y & Z \end{bmatrix} > 0$$

$$D_{z_iw_i} + D_{z_iu}\widehat{J}_{H_2}D_{yw_i} = 0,\quad trace(Z) < \nu \quad (۱۰)$$

که

$$L_{11} = AX_{H_2} + B_u\widehat{H}_{H_2} + \left(AX_{H_2} + B_u\widehat{H}_{H_2}\right)^T$$

$$L_{21} = \widehat{F}_{H_2} + \left(A + B_u\widehat{J}_{H_2}C_y\right)^T$$

$$L_{22} = Y_{H_2}A + \widehat{G}_{H_2}C_y + \left(Y_{H_2}A + \widehat{G}_{H_2}C_y\right)^T$$

$$L_{31} = \left(B_{w_i} + B_u\widehat{J}_{H_2}D_{yw_i}\right)^T$$

$$L_{32} = \left(Y_{H_2}B_{w_i} + \widehat{G}_{H_2}D_{yw_i}\right)^T$$

نمایش فضای حالت و تابع تبدیل کنترل کننده از رابطه (۸) و (۹) به ازای $i = H_2$ بدست می‌آید. در همه نامساوی‌های بالا * نماینده بلوک‌های متقارن است.

در روش متداول طراحی کنترل کننده چندمنظوره H_2/H_∞، حد نرم-۲، ν، کمینه می‌گردد در حالی‌که LMIهای (۷) و (۱۰) همزمان صادقند. برای این منظور کنترل کننده‌ها و ماتریس‌های لیاپانوفِ LMI-های (۷) و (۱۰) یکسان در نظر گرفته می‌شوند، یعنی:

$$\widehat{F}_{H_2} = \widehat{F}_{H_\infty}, \widehat{G}_{H_2} = \widehat{G}_{H_\infty}, \widehat{H}_{H_2} = \widehat{H}_{H_\infty}$$
$$\widehat{J}_{H_2} = \widehat{J}_{H_\infty}, X_{H_2} = X_{H_\infty}, Y_{H_2} = Y_{H_\infty}$$

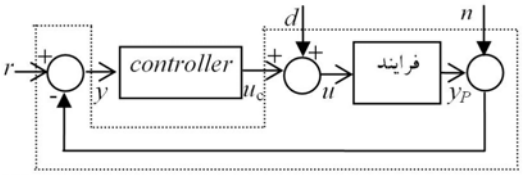
۳- طراحی کنترل کننده کلیدزنی پایدارساز

پیکربندی سیستم حلقه بسته در شکل ۲ نشان داده شده که در آن، y_P، خروجی فرآیند، r، ورودی مرجع (نقطه تنظیم) محدود، d، ورودی اغتشاش نامعلوم و محدود و n، نویز اندازه‌گیری نامعلوم و محدود است. برای تطبیق ساختار حلقه بسته شکل ۲ با بلوک دیاگرام شکل ۱، خط چین در شکل ۲، به عنوان P در شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود و ورودی‌های خارجی در شکل ۲، w در شکل ۱ را می‌سازند:

$$w = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

$H_P(s)$ تابع تبدیل اکیدا مناسب و $\{A_P, B_P, C_P\}$ تحقق فضای حالت فرایند LTI مورد بررسی است:

$$\dot{x}_P = A_P x_P + B_P u,\ y_P = C_P x_P$$



شکل ۲: پیکربندی حلقه بسته

کنترل کننده چندگانه که میان توابع تبدیلِ کنترل کننده‌های پایدارساز طراحی شدهٔ بخش ۲، $K_{H_2}(s), K_{H_\infty}(s)$، به طور موثری کلیدزنی می‌کند، یک سیستم دینامیکی با دو ورودی σ و y و یک خروجی u_C است. ورودی تکه‌ای ثابت $\sigma : [0,\infty) \to I$ سیگنال کلیدزنی خوانده می‌شود. زمانی که σ مقدار ثابت $i \in I$ دارد، کنترل کننده چندگانه همانند یک سیستم LTI با تابع تبدیل $K_i(s)$ از y به u_C و تحقق فضای حالت

$$\dot{x}_C = F_i x_C + G_i y;\ u_C = H_i x_C + J_i y \quad (۱۱)$$

رفتار می‌نماید. لحظاتی که نقاط ناپیوستگی σ رخ می‌دهد، لحظات کلیدزنی خوانده می‌شود. اگر t_1 و t_2 دو لحظه کلیدزنی متوالی باشد، σ روی بازه زمانی $t \in [t_1 \quad t_2)$ ثابت است.

روی هر بازه زمانی که σ مقدار ثابت i دارد، فرایند با کنترل کننده K_i کنترل شده و زیرسیستم دینامیکی حلقه بسته به شکل زیر است:

$$\dot{x} = A_i x + B_i w,\ y_P = Cx \quad (۱۲)$$

که $x := \begin{bmatrix} x_P \\ x_C \end{bmatrix}$، و $w := \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]

$$C := \begin{bmatrix} C_P & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} B_P J_i & B_P & -B_P J_i \\ G_i & 0 & -G_i \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_P - B_P J_i C_P & B_P H_i \\ -G_i C_P & F_i \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

از آنجا که سیستم حلقه بسته با هر یک از کنترل کننده‌ها پایدار مجانبی است بنابراین قسمت حقیقی مقدار ویژه‌های ماتریس A_i منفی است و داریم $Q_i A_i + A_i^T < 0$.

با فرض اینکه در لحظه کلیدزنیِ t مقدار بردار حالت کنترل کننده، x_C، ثابت نباشد، در لحظه کلیدزنیِ t، مقدار x_C با نگاشت بازنشانی خطی، $R_C\left(\sigma(t), \sigma(t^-)\right)$ به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$x_C(t) = R_C\left(\sigma(t), \sigma(t^-)\right) x_C(t^-)$$

در ادامه برای تابع تبدیل کنترل کننده‌ها تحققی جستجو می‌شود که برای هر سیگنال کلیدزنیِ σ و هر ورودی خارجیِ محدودِ w، سیستم کلیدزنی پایدار بوده و متغیرهای حالتِ x، محدود باقی بماند. برای این منظور لازم است علاوه بر پایداری زیرسیستم‌هایِ سیستم کلیدزنی، نگاشت بازنشانی $R_C(i,j)$ به گونه‌ای انتخاب شود که در هر لحظه کلیدزنی از کنترل کننده j به کنترل کننده i داشته باشیم [۱۶]:

$$R(i,j)^T Q_i R(i,j) \le Q_j \qquad (۱۴)$$

که

$$R(i,j) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_C(i,j) \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب سیستم کلیدزنی با داشتن تابع لیاپانوف چندگانهٔ کاهشی پایدار می‌گردد.

برای این منظور، از میان اعضای مجموعه $K = \{K_{H_2}(s), K_{H_\infty}(s)\}$، تابع تبدیل یکی از کنترل کننده‌ها، $K_k(s)$، به دلخواه انتخاب می‌گردد. اگر $\{A_P, B_P, C_P\}$ و $\{F_k, G_k, H_k, J_k\}$ به ترتیب تحقق‌های کاهش ناپذیر $H_P(s)$ و $K_k(s)$ باشند، ماتریس‌های X_{AC}, Y_{FH} به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $A_P + X_{AC} C_P$ و $F_k + Y_{FH} H_k$ پایدار مجانبی باشند و ماتریس‌های A_E, B_E C_E, D_E, F_E, G_E به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$A_E = \begin{bmatrix} A_P + X_{AC} C_P & 0 \\ 0 & F_k + Y_{FH} H_k \end{bmatrix},\ B_E = \begin{bmatrix} B_P \\ -Y_{FH} \end{bmatrix}$$

$$D_E = \begin{bmatrix} -X_{AC} \\ -G_k - Y_{FH} J_k \end{bmatrix},\ C_E = \begin{bmatrix} C_P & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_E = \begin{bmatrix} 0 & -H_k \end{bmatrix},\ G_E = J_k \qquad (۱۵)$$

به آسانی دیده می‌شود که A_E یک ماتریس پایدار و $\{A_E + D_E C_E, B_E, C_E\}$ و $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ به ترتیب تحقق‌های پایدارپذیر و آشکارپذیر $H_P(s)$ و $K_k(s)$ هستند.

توابع تبدیل $X_C(s), Y_C(s), Y_P(s), X_P(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} X_C & -Y_C \\ Y_p & X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_E \\ C_E \end{bmatrix} (sI - A_E)^{-1} \begin{bmatrix} B_E & -D_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -G_E \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

برای هر $i \in I$، تابع تبدیل $S_i(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_i(s) = \left(-Y_C(s) + X_C(s) K_i(s)\right) \times \left(X_p(s) + Y_p(s) K_i(s)\right)^{-1} \qquad (۱۴)$$

می‌توان تحقیق کرد که $\{A_E - B_E F_E, B_E, -F_E, I\}$ تحقق فضای حالت کاهش‌پذیر $X_C^{-1}(s)$ و

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_E & 0 \\ B_E F_E & A_E - B_E F_E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_E \\ B_E G_E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} F_E & -F_E \end{bmatrix}, G_E \right\}$$

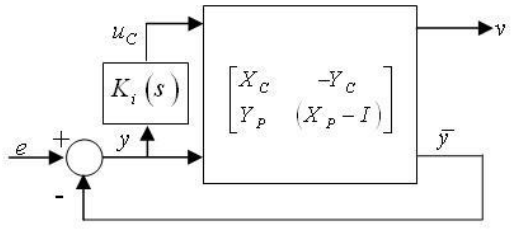
تحقق فضای حالت کاهش‌پذیر $X_C^{-1}(s) Y_C(s)$ با بردار حالت $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ است. با انتخاب بردار حالتِ $x = x_1 - x_2$، $X_C^{-1}(s) Y_C(s)$ به صورت $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ تحقق می‌یابد که همان تحقق فضای حالت $K_k(s)$ است. به بیان دیگر $K_k(s) = X_C^{-1}(s) Y_C(s)$ و در نتیجه $S_k(s) = 0$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $H_P(s) = X_P^{-1}(s) Y_P(s)$.

تابع تبدیل $S_i(s)$، از e به v، با رابطه (۱۷) توصیف می‌شود و بلوک دیاگرام آن در شکل ۳ نشان داده شده است ($L(.)$ بیانگر تبدیل لاپلاس است):

$$\begin{bmatrix} L(v) \\ L(\bar{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_C(s) & -Y_C(s) \\ Y_P(s) & (X_P - I)(s) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L(u_C) \\ L(y) \end{bmatrix}$$

$$y = e - \bar{y},\ L(u_C) = K_i(s) \times L(y) \qquad (۱۵)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]



شکل ۳: بلوک دیاگرام رابطه (۱۷)

با انتخاب تحقق کاهش‌ناپذیر دلخواه $\{F_i, G_i, H_i, J_i\}$ برای $K_i(s)$، رابطه (۱۷) به صورت زیر تحقق می‌یابد:

$$\dot{x}_E = A_E x_E + B_E u_C - D_E y \;،\; \bar{y} = C_E x_E$$
$$v = F_E x_E + u_C - G_E y$$
$$\dot{x} = F_i x + G_i y \;،\; u_C = H_i x + J_i y$$

و تابع تبدیل $S_i(s)$ با $\{\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i\}$ تحقق می یابد که

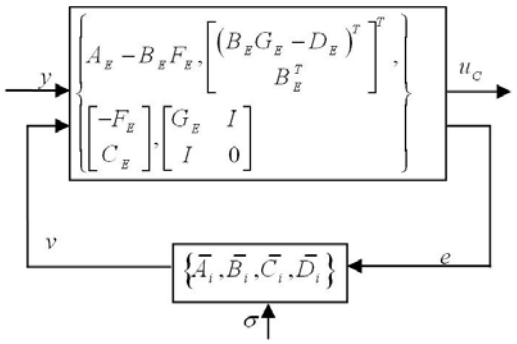
$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_E + D_E C_E - B_E J_i C_E & B_E H_i \\ -G_i C_E & F_i \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

از آنجا که $K_i(s)$، فرایند $H_P(s)$ را پایدار می‌سازد و $\{A_E + D_E C_E,\ B_E,\ C_E\}$ یک تحقق پایدارپذیر و آشکارپذیر $H_P(s)$ است و از مقایسه $\bar{A}_i$ رابطه (۱۸) با A_i رابطه (۱۳)، نتیجه می‌شود که $\bar{A}_i$ و تابع تبدیل $S_i(s)$ پایدار مجانبی است.

بنابراین کنترل کننده کلیدزنی شکل ۴ به صورت زیر تحقق می‌یابد:

$$\dot{x}_E = A_E x_E + B_E u_C - D_E y \;،\; e = C_E x_E + y$$
$$u_C = -F_E x_E + G_E y + v \qquad (۱۷)$$

از آنجا که ماتریس‌های $A_E, B_E, C_E, D_E, F_E, G_E$ ثابت هستند، رابطه (۱۹) از یک کنترل کننده به کنترل کننده دیگر تغییر نمی‌کند.



شکل ۴: کنترل کننده چندگانه کلیدزنی

بدین ترتیب ماتریس‌های تحقق تابع تبدیل کنترل کننده از y به u_C ($\{\tilde{F}_i, \tilde{G}_i, \tilde{H}_i, \tilde{J}_i\}$) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{F}_i = \begin{bmatrix} A_E - B_E F_E + B_E \bar{D}_i C_E & B_E \bar{C}_i \\ \bar{B}_i C_E & \bar{A}_i \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_i = \begin{bmatrix} -D_E + B_E(\bar{D}_i + G_E) \\ \bar{B}_i \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H}_i = \begin{bmatrix} -F_E + \bar{D}_i C_E & \bar{C}_i \end{bmatrix},\ \tilde{J}_i = \bar{D}_i + G_E$$

در حالت کلی تحقق $\{\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i\}$ و $\{\tilde{F}_i, \tilde{G}_i, \tilde{H}_i, \tilde{J}_i\}$ کاهش ناپذیر نیست.

چنانچه در لحظات کلیدزنی مقدار بردار حالتِ x_C ثابت باشد ($R_C(i,j) = I$)، برای برقراری رابطه (۱۴) و تضمین پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته تحت کلیدزنی دلخواه لازم است زیرسیستم‌های حلقه بسته با هر کنترل کننده تابع لیاپانوف مشترک داشته باشند.

خانواده توابع تبدیل پایدار مجانبی $S_i(s) \in S := \{S_{H_2}(s), S_{H_\infty}(s)\}$ را در نظر بگیرید. در ادامه نشان داده می‌شود که چگونه تحقق پایدارپذیر و رویت‌پذیر $\{\bar{A}_i,\ \bar{B}_i, \bar{C}_i,\ \bar{D}_i\}$ از مرتبه n برای هر $S_i(s) \in S$ یافت شود به گونه‌ای که:

$$Q\bar{A}_i + \bar{A}_i^T Q < 0,\ i \in I \qquad (۱۸)$$

که $Q = Q^T = R'R > 0$ و R غیرمنفرد است. با چنین ماتریسی می‌توان تابع لیاپانوف مشترک $V(z) = z'Qz$ برای خانواده سیستم‌های LTI $\{\dot{z} = \bar{A}_i z : i \in I\}$ ساخت. اگر بزرگترین درجه مک میلان ماتریس‌های تبدیل مجموعه S، n باشد، $\{\tilde{A}_i,\ \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i\}$ تحقق مرتبه n برای ماتریس تبدیل $S_i(s), i \in I$ انتخاب می‌شود که $\tilde{A}_i$ پایدار مجانبی است. به دلیل پایدار مجانبی بودن $\tilde{A}_i$، خانواده معادلات لیاپانوف $Q_i \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T Q_i = -I$، جواب $Q_i = Q_i^T = R_i' R_i > 0$ دارد که R_i غیرمنفرد است. با انتخاب

$$\bar{A}_i := R^{-1} R_i \tilde{A}_i R_i^{-1} R;\ \bar{B}_i := R^{-1} R_i \tilde{B}_i;\ \bar{C}_i := \tilde{C}_i R_i^{-1} R,$$

$\bar{D}_i = \tilde{D}_i$. از آنجا که $\{\bar{A}_i,\ \bar{B}_i, \bar{C}_i,\ \bar{D}_i\}$ با تبدیل تشابهی از $\{\tilde{A}_i,\ \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i\}$ بدست می‌آید، $\{\bar{A}_i,\ \bar{B}_i, \bar{C}_i,\ \bar{D}_i\}$ نیز یک تحقق S_i است. به علاوه $Q\bar{A}_i + \bar{A}_i^T Q = -\left(R_i^{-1} R\right)^T R_i^{-1} R < 0$.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]

وجود تابع لیاپانوف مشترک برای همه $S_i(s)$ ها، پایداری نمایی سیستم کلیدزنی را تضمین می‌نماید. همچنین برای هر سیگنال کلیدزنی بردار حالت x محدود است.

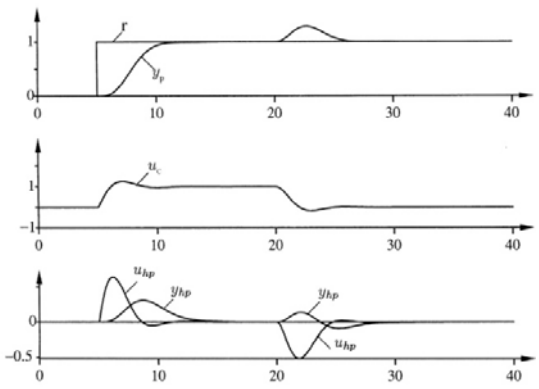
۴- طراحی سرپرست

سرپرست در بالاترین سطح قرار گرفته و از روی ورودی و خروجی‌های سیستم لزوم کلیدزنی را تشخیص داده و تصمیم می‌گیرد کدام کنترلگر در حلقه قرار گیرد [۶]. در کنترل با سرپرستی، کلیدزنیِ مبتنی بر منطق، جایگزین کنترل تطبیقیِ کلاسیک شده است. در این مقاله از سرپرست تشخیص ورودی خارجی استفاده شده است.

سرپرست، وقوعِ نویز، اغتشاش و ورودی مرجع را تشخیص می‌دهد و کنترل کننده مربوطه را در حلقه فیدبک قرار می‌دهد. برای تشخیص تغییرات اغتشاش بار d و نقطه تنظیم، r، سیگنال کنترلی u_C و خروجی فرایند y_P از یک فیلتر بالا گذر عبور داده می‌شوند و به ترتیب u_{hp} و y_{hp} بدست می‌آید. شکل ۵ نشان می‌دهد که بعد از تغییر اغتشاش بار، y_P, u_C در جهت‌های مخالف حرکت می‌کنند، در حالی که بعد از تغییر نقطه تنظیم در جهت یکسان حرکت می‌کنند. فرض می‌شود فرآیند مینیمم فاز بوده و بهره استاتیک مثبت (منفی) دارد یعنی $\lim_{s\to 0} H_P(s) > 0$ ($\lim_{s\to 0} H_P(s) < 0$). اگر دامنه $|y_{hp}|$ و $|u_{hp}|$ از حد آستانه مشخصی بیشتر شود، یکی از شرایط زیر رخ خواهد داد:

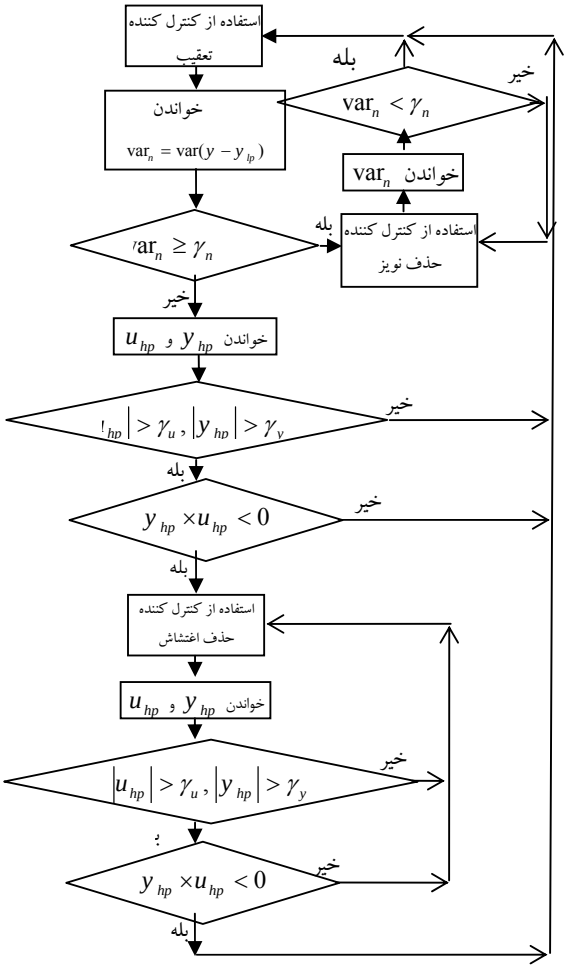
اگر $y_{hp} u_{hp} > 0$، آنگاه نقطه تنظیم (اغتشاش بار) تغییر کرده است.

اگر ، آنگاه اغتشاش بار (نقطه تنظیم) تغییر کرده است [۱۸].



شکل ۵: منحنی‌های پاسخ به تغییر نقطه تنظیم در $t = 5$ و تغییر اغتشاش بار در $t = 20$ را نشان می‌دهد [۱۸]

با فرض اینکه نویز اندازه گیری منحصرا فرکانس‌های بالا را در بر دارد، برای تشخیص نویز اندازه گیری با واریانس بالا، خطای تعقیب، y، از یک فیلتر پایین گذر عبور داده می‌شود و y_{lp} بدست می‌آید. در این قاعده از این ایده استفاده می‌شود که $y - y_{lp}$، تخمینی از نویز اندازه‌گیری وارده شده بر خروجی سیستم را می‌دهد. با محاسبه واریانس پنجره‌ای از آخرین نویزهای تخمین زده شده می‌توان تصمیم گیری کرد. اگر واریانس نویز از مقدار از پیش تعیین شده‌ای بیشتر بود، نویز اندازه گیری وارد شده و بایستی کنترل کننده حذف نویز فعال شود. شرط قطع استفاده از کنترل کننده حذف نویز، کم شدن دوباره واریانس نویز است. شکل ۶، الگوریتم انتخاب کنترل کننده توسط سرپرست را نشان می‌دهد.



شکل ۶: الگوریتم انتخاب کنترل کننده توسط سرپرست

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]

۵- ارزیابی عملکرد H_2 و H_∞ سیستم کلیدزنی

سیستم کلیدزنی خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma w$$
$$z_\infty = C_{\infty\sigma} x + D_{\infty\sigma} w \, , \, z_2 = C_{2\sigma} x \qquad (۲۱)$$

$L_{2,T}$، بیانگر مجموعه توابع $f(.)$ است به طوری که

$$\| f \|_{2,T} := \left(\int_0^T f'(t) f(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

بهره ریشه میانگین مربعات، $g_{\infty_S}(T)$، سیستم کلیدزنی (۲۱) روی مجموعه سیگنال‌های کلیدزنی مجاز σ با رابطه (۲۲) تعریف می‌شود [۱۹]:

$$g_{\infty_S}(T) := \qquad (۲۲)$$
$$\inf_{\gamma \geq 0} \left\{ \gamma \,|\, \| z_\infty \|_{2,T} \leq \gamma \| w \|_{2,T} \, , \ \forall w \in L_{2,T} \, , \forall \sigma \right\}$$

که z_∞، خروجی سیستم کلیدزنی مربوط به ورودی w و سیگنال کلیدزنی σ و بازای شرط اولیه $x(0) = 0$ می‌باشد. از آنجا که برای سیستم‌های خطی غیرکلیدزنی، $\lim_{T \to \infty} g_\infty(T)$، همان نرم H_∞ تابع تبدیل از ورودی w به خروجی z_∞ است [۲۰]، از بهره $\underset{w,\sigma}{Sup} \frac{\| z_\infty \|_{2,T}}{\| w \|_{2,T}}$ برای ارزیابی عملکرد H_∞ سیستم کلیدزنی می‌توان استفاده نمود [۱۹].

تعریف۱: به طور مشابه، بهره $g_{2_S}(T)$ سیستم کلیدزنی (۲۱) روی مجموعه سیگنال‌های کلیدزنی مجاز σ با رابطه (۲۳) تعریف می‌کنیم:

$$g_{2_S}(T) := \qquad (۲۳)$$
$$\inf_{\nu \geq 0} \left\{ \nu \,|\, \underset{t \in [0,T]}{Sup} |z_2| \leq \nu \| w \|_{2,T} \, , \ \forall w \in L_{2,T} \, , \forall \sigma \right\}$$

که z_2، خروجی سیستم کلیدزنی مربوط به ورودی w و سیگنال کلیدزنی σ و بازای شرط اولیه $x(0) = 0$ می‌باشد. از آنجا که برای سیستم‌های خطی غیرکلیدزنی، $\lim_{T \to \infty} g_2(T)$، همان حد بالای نرم H_2 تابع تبدیل از ورودی w به خروجی z_2 است [۲۰]، در این مقاله از بهره $\underset{w,\sigma}{Sup} \frac{\| z_2 \|_{\infty,T}}{\| w \|_{2,T}}$ برای ارزیابی عملکرد H_2 سیستم کلیدزنی استفاده می‌کنیم.

۶- شبیه سازی

به منظور نشان دادن قابلیت کلیدزنی در کاهش محافظه کاری و بهبود عملکرد کنترل با اهداف چندگانه، روش پیشنهادی این مقاله به دو سیستم نمونه اعمال گردیده است.

مثال ۱: روش پیشنهادی به مدل دینامیکی زاویه چرخش هواپیما [۲۱ ص ۳۸۱] که در [۱۶] نیز استفاده شده اعمال گردیده است که دارای تابع تبدیل زیر می‌باشد:

$$H_P(s) = \frac{-1000}{s(s+0.875)(s+50)}$$

در این مثال فرض شده است که نویز اندازه گیری سفید با واریانس بزرگ در بازه زمانی $t \in [18, 40]$ به سیستم وارد می‌شود و ورودی مرجع پالس مربعی با دوره تناوب $20s$ است. هدف طراحی، حذف نویز و پاسخ کند در حضور نویز و تعقیب سریع ورودی مرجع در سایر زمانهاست. این یک مساله چندمنظوره با دو معیار متضاد می‌باشد زیرا اگر کنترل کننده ای پهنای باند حلقه بسته کوچکی داشته باشد، به نویز حساس نیست اما پاسخ کندی را نمایش می‌دهد و اگر کنترل کننده ای پهنای باند بزرگی داشته باشد و در نتیجه سریع باشد خیلی حساس به نویز می گردد.

فرایند فوق پایدار مجانبی نمی‌باشد و برای یافتن تحقق مناسب کنترل کننده از مطالب بخش ۳ بهره گرفته می‌شود. تحقق فضای حالت زیر برای مدل دینامیکی زاویه چرخش هواپیما انتخاب شده است:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -50.875 & -43.75 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 \end{bmatrix}}_{A_P} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_P} u$$
$$y_P = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_P} x$$

با انتخاب این تحقق فضای حالت به راحتی می‌توان تحقیق کرد:

$$\dot{y}_P = \begin{bmatrix} 0 & -1000 & 0 \end{bmatrix} x$$

از آنجا که $u = u_C + d$ و $w = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$ داریم:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -50.875 & -43.75 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_u} u_C + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_w} w$$

برای خطای تعقیب $y = r - n - y_P$، می‌توان نوشت:

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{D_w} w$$

برای جلوگیری از افزایش بیش از حد سیگنال کنترلی و تعقیب ورودی مرجع، کنترل کننده K_{H_∞} با کمینه سازی $\left\| T_{w_\infty \to z_\infty} \right\|_\infty$ طراحی می‌گردد که $w_\infty = r$ و z_∞ به صورت زیر تعریف می‌شود:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]

$$z_\infty = \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ u_C \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{z_\infty}} \begin{bmatrix} x \\ x_w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D_{z_\infty u}} u_C + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{z_\infty w}} w$$

که $\tilde{y}$، خطای تعقیب وزن‌دهی شده است. تابع وزنی به صورت $W = \dfrac{s+100}{s+0.001}$ انتخاب شده است. کنترل کننده K_{H_∞} مطابق زیر بدست آمده است:

$$K_{H_\infty} = \frac{-3.6548\times10^{-4}\left(s+9.2879\times10^{8}\right)(s+50)(s+0.99)(s+0.41)}{\left(s^2\text{-}79.3s+1843.4\right)\left(s+1.7299\times10^{4}\right)\left(s+9.57\times10^{-4}\right)}$$

برای داشتن عملکرد مقاوم‌تر نسبت به نویز اندازه گیری، کنترل کننده K_{H_2} با استفاده از LQG/LQR طراحی می‌شود. تابع هدف مورد نظر

$$J = E\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left(y_P^2(t)+\dot{y}_P^2(t)+\rho^2 u_C^2(t)\right)dt\right\}$$

است. با فرض اینکه n فرایند نویز سفید باشد و $E\left(n(t)n(\tau)\right)=\mu\delta(t-\tau)$ داریم:

$$J = E\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left(z_2(t)^T\ z_2(t)\right)dt\right\} = \left\|T_{w_2\to z_2}\right\|_2^2$$

که $w_2 = \begin{bmatrix} d \\ n \\ \dfrac{}{\sqrt{\mu}} \end{bmatrix}$ و $z_2 = \begin{bmatrix} y_P \\ \dot{y}_P \\ \rho u_C \end{bmatrix}$ به بیان دیگر

$$z_2 = \begin{bmatrix} y_P \\ \dot{y}_P \\ \rho u_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{z_2}} \begin{bmatrix} x \\ x_w \end{bmatrix} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix}}_{D_{z_2 u}} u_C$$

کنترل کننده K_{H_2}، $\left\|T_{w_2\to z_2}\right\|_2$ را کمینه می‌سازد و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$K_{H_2} = \frac{-5.5181(s+100.06)(s+50.02)(s+1.26)}{\left(s^2\text{-}16.86s+113.06\right)(s+50.05)(s+100)}$$

منحنی‌های شکل ۷ از چپ به ترتیب پاسخ حلقه بسته کنترل کننده‌های K_{H_∞} و K_{H_2} را نمایش می‌دهند. منحنی‌های بالا خروجی فرایند، y_P، و منحنی‌های پایین خطای تعقیب، $r-y_P$، را نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌گردد کنترل کننده K_{H_∞} از K_{H_2} سریع‌تر است اما به نویز حساس‌تر می‌باشد.

در این مثال فرض بر این است که در لحظات کلیدزنی مقدار متغیرهای حالت ثابت می‌باشد. با استفاده از مطالب بخش ۳، تحقق کنترل کننده‌ها که تضمین کننده پایداری نمایی تحت کلیدزنی دلخواه باشد، بدست آمده است. ابتدا ماتریس‌های $A_E, B_E, C_E, D_E, F_E, G_E$ از رابطه (۱۵) انتخاب شده‌اند و $\{A_E + D_E C_E, B_E, C_E\}$ و $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ تحقق پایدارپذیر و آشکارپذیر $H_P(s)$ و $K_k(s) = K_{H_2}(s)$ می‌باشند. توابع تبدیل X_P, Y_P, X_C, Y_C و با استفاده از رابطه (۱۶) توابع تبدیل $\{S_{H_2}, S_{H_\infty}\}$ محاسبه گردیده‌اند. همانطور که قبلا اشاره گردید $H_P(s) = X_P^{-1}Y_P$ و $K_{H_2} = X_C^{-1}Y_C$ از این رو $S_{H_2} = 0$. تحقق مینیمال $\{\bar{A}_\infty, \bar{B}_\infty, \bar{C}_\infty\}$ برای S_{H_∞} و تحقق بدیهی $\{\bar{A}_\infty, 0, \bar{C}_\infty\}$ برای S_{H_2} انتخاب شده است. دو تحقق $\bar{A}_\infty$ یکسان دارند و رابطه (۲۰) بازای $Q = Q_2 = Q_\infty$ برقرار می‌باشد. بدین ترتیب سیستم حلقه بسته کلیدزنی پایدار نمایی است.

منحنی‌های سمت راست در شکل ۸، پاسخ حلقه بسته کنترل کننده کلیدزنی $K_{switching}$ را نشان می‌دهند. سرپرست تشخیص ورودی خارجی معرفی شده در بخش ۴، حضور نویز اندازه گیری واریانس بالا را در بازه زمانی $t \in [18.41 \quad 40.37]$ تشخیص می‌دهد. بنابراین از عملکرد تعقیب ورودی مرجع کنترل کننده K_{H_∞} در حالت عادی (عدم حضور نویز اندازه‌گیری) و از حذف نویز خوب کنترل کننده K_{H_2} در حضور نویز اندازه‌گیری در محدوده زمانی $t \in [18.41 \quad 40.37]$ استفاده شده است. منحنی‌های سمت چپ شکل ۸ عملکرد تک کنترل کننده چندمنظوره متداول K_{H_2/H_∞} که $\left\|T_{w_\infty\to z_\infty}\right\|_\infty \le \gamma$ را کمینه می‌کند، در حالی که $\left\|T_{w_2\to z_2}\right\|_2$ را نشان می‌دهد. این کنترل کننده با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی به صورت زیر طراحی شده است.

$$K_{H_2/H_\infty} = \frac{-1.277\times10^{3}(s+50)\left(s^2\text{-}7.74s+25.41\right)}{\left(s^2\text{-}47.02s+1583.1\right)(s+0.001)(s+62.84)}$$

در شکل ۸ منحنی‌های بالا خروجی فرایند، y_P، و منحنی‌های پایین خطای تعقیب، $r-y_P$، را نشان می‌دهند.

بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته با کنترل کننده کلیدزنی با سرپرستی در شکل ۹ نشان داده شده است.

مقایسه منحنی‌ها نشان می‌دهد که با کلیدزنی میان کنترل کننده‌ها محافظه کاری کاهش یافته و زمانی که نویز به سیستم اعمال نمی‌شود، از سرعت تعقیب بالای کنترل کننده K_{H_∞} و در حضور نویز از ویژگی حذف نویز کنترل کننده K_{H_2} بهره گرفته شده است. بدین ترتیب با

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]

استفاده از کلیدزنی به نحو بهتری می‌توان به هر دو هدف طراحی دست یافت.

همانگونه که در بخش ۵ بیان شد، برای کمی نمودن عملکرد کنترلگر کلیدزنی در کمینه سازی $\left\|T_{w_2\to z_2}\right\|_2$، از $\sup_w \frac{\|z_2\|_\infty}{\|w_2\|_2}$، به عنوان شاخص عملکرد H_2 و برای کمی نمودن عملکرد کنترلگر کلیدزنی در کمینه سازی $\left\|T_{w_\infty\to z_\infty}\right\|_\infty$، از $\sup_w \frac{\|z_\infty\|_2}{\|w_\infty\|_2}$، به عنوان شاخص عملکرد H_∞، استفاده می‌شود. با استفاده از جدول ۱ می‌توان دریافت که کنترل کننده $K_{switching}$ پس از کنترل کننده K_{H_2} با داشتن کمترین مقدار $\sup_w \frac{\|z_2\|_\infty}{\|w_2\|_2}$ بهترین عملکرد حذف نویز و پس از کنترل کننده های K_{H_∞} و K_{H_2/H_∞} با داشتن کمترین مقدار $\sup_w \frac{\|z_\infty\|_2}{\|w_\infty\|_2}$ بهترین عملکرد تعقیب را دارد. همچنین مقایسه مقادیر $\sup_w \frac{\|r-y\|_2}{\|w_\infty\|_2}$ نشان می‌دهد کنترل کننده $K_{switching}$ بعد از کنترل کننده K_{H_∞} بهترین عملکرد تعقیب را دارا می‌باشد.

جدول ۱: مقایسه عملکرد کنترل کننده های مختلف مثال ۱

$K_{switching}$	K_{H_2/H_∞}	K_{H_∞}	K_{H_2}	
318.89	8278.41	8673.26	166.07	$\sup_w \frac{\|z_2\|_\infty}{\|w_2\|_2}$
31.33	6.39	6.37	60.1	$\sup_w \frac{\|z_\infty\|_2}{\|w_\infty\|_2}$
0.22	0.4	0.17	0.3	$\sup_w \frac{\|r-y\|_2}{\|w_\infty\|_2}$

مثال ۲: روش پیشنهادی به مدل دینامیکی سیستم جرم/ فنر/ دمپر [۲۲ ص ۵۸ و ۲۸۰] اعمال گردیده است که با معادلات دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1}\\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \frac{1}{m_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{m_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\end{bmatrix}$$

$$y_P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}x,\ y=y_P+n$$

که $k_1=1, k_2=4, b_1=0.2, b_2=0.1, m_1=1$ $m_2=2$ و F_1 نیروی کنترل، F_2 نیروی اغتشاش و n نویز اندازه گیری می‌باشد. در این مثال فرض شده است که اغتشاش پله F_2 در بازه زمانی $t\in[10,\ 25]$ و نویز اندازه گیری سفید n در بازه زمانی $t\in[70,\ 85]$ به سیستم وارد می‌شود. هدف طراحی قانون کنترلی است که تاثیر نیروی اغتشاش F_2 و نویز اندازه گیری n را کمینه سازد. طراحی کنترل کننده‌ها مشابه مثال قبل است. کنترل کننده K_{H_∞}، $\left\|T_{w_\infty=F_2\to z_\infty=y_P}\right\|_\infty$ و کنترل کننده K_{H_2}، $\left\|T_{w_2=n\to z_2=\begin{bmatrix}y\\ F_1\end{bmatrix}}\right\|_2$ را کمینه می‌سازد و کنترل کننده چندمنظوره متداول K_{H_2/H_∞}، $\left\|T_{n\to z_2}\right\|_2$ را کمینه می‌کند، در حالی که $\left\|T_{F_2\to z_\infty}\right\|_\infty\le\gamma$. منحنی‌های شکل ۱۰ از چپ به ترتیب پاسخ حلقه بسته کنترل کننده‌های K_{H_∞} و K_{H_2} را نمایش می‌دهند. در این مثال فرض بر این است که در لحظات کلیدزنی مقدار متغیرهای حالت ثابت می‌باشد. تحقق کنترل کننده‌ها مشابه مثال قبل محاسبه شده است. منحنی‌های شکل ۱۱ از چپ به ترتیب پاسخ حلقه بسته کنترل کننده‌های $K_{switching}$ و K_{H_2/H_∞} را نمایش می‌دهند.کنترل کننده $K_{switching}$ در حضور اغتشاش، از حذف اغتشاش کنترل کننده K_{H_∞} و در حضور نویز از ویژگی حذف نویز کنترل کننده K_{H_2} بهره گرفته است. بدین ترتیب با استفاده از کلیدزنی به نحو بهتری می‌توان به هر دو هدف طراحی دست یافت. با استفاده از جدول ۲ می‌توان دریافت که کنترل کننده $K_{switching}$ پس از کنترل کننده K_{H_2} با داشتن کمترین مقدار $\sup_w \frac{\|z_2\|_\infty}{\|w_2\|_2}$ بهترین عملکرد حذف نویز و پس از کنترل کننده های K_{H_∞} و K_{H_2/H_∞} با داشتن کمترین مقدار $\sup_w \frac{\|z_\infty\|_2}{\|w_\infty\|_2}$ بهترین عملکرد حذف اغتشاش را دارد.

جدول ۲: مقایسه عملکرد کنترل کننده های مختلف مثال ۲

$K_{switching}$	K_{H_2/H_∞}	K_{H_∞}	K_{H_2}	
0.0294	0.0432	0.0504	0.0285	$\sup_w \frac{\|z_2\|_\infty}{\|w_2\|_2}$
0.0407	0.0396	0.0393	0.0594	$\sup_w \frac{\|z_\infty\|_2}{\|w_\infty\|_2}$

۸- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

از آنجا که رویکرد متداول کنترل چندمنظوره، طراحی یک تک کنترل‌کننده است که اهداف مختلف طراحی را تامین کند، طراحی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]

چنین کنترل‌کننده‌ای نیاز به مصالحه میان اهداف مغایر دارد و در بسیاری موارد سیستم کنترلی رفتار مطلوب را به دست نمی‌دهد. در این مقاله رویکرد جدید طراحی کنترل چندمنظوره مبتنی بر کلیدزنی میان کنترل‌کننده چندگانه و باسرپرستی معرفی گردیده است. کنترل‌کننده چندگانه شامل چند کنترل‌کننده است که هر یک جهت برآوردن دسته‌ای از اهداف مرتبط مانند ردیابی ورودی مرجع یا حذف نویز اندازه‌گیری و یا حذف اغتشاش توسط LMI طراحی شده‌اند. برای تضمین پایداری سیستم حلقه بسته با وجود کلیدزنی و تغییر ساختار کنترل‌کننده‌ها، تحقق مناسبی از کنترل‌کننده‌ها انتخاب گردیده است. با توجه به عملکرد و رفتار سیستم یکی از کنترل کننده‌های موجود توسط یک سیستم بالادستی تحت عنوان «سرپرست» انتخاب و در حلقه قرار می‌گیرد. منطق سرپرست در تشخیص لزوم کلیدزنی و انتخاب کنترل کننده بیان شده است. شبیه سازی‌ها نشان می‌دهد کنترل‌کننده کلیدزنی در محدوده زمانی که یک کنترل کننده در حلقه قرار می‌گیرد، ویژگی‌های آنرا نمایش می‌دهد و محافظه‌کاری و تضعیف عملکرد ناشی از در نظر گرفتن همزمان همه اهداف کنترلی در طراحی یک کنترل‌کننده واحد را از بین می‌برد و به بهبود قابل ملاحظه در عملکرد کنترل کننده می‌انجامد.

در روش ارائه شده در این مقاله جهت تضمین پایداری تحت کلیدزنی، نامعینی‌های مدل فرایند در نظر گرفته نشده و در محدوده‌ای که بتوان مدل فرایند را ثابت فرض کرد، قابل استفاده می‌باشد. همچنین پایداری تحت کلیدزنی با فرض پایداری زیرسیستم‌ها تضمین شده است و چنانچه به دلیل نامعینی در مدل فرایند سیستم حلقه بسته ناپایدار شود، اثبات پایداری دیگر برقرار نیست. بنابراین از آنجا که یکی از انگیزه‌های اصلی استفاده از کنترل کننده H_∞ رسیدن به قوام در پایداری و عملکرد است تضمین پایداری حلقه بسته با وجود نامعینی مدل فرایند و ناپایداری زیرسیستم‌ها می‌تواند به عنوان مساله باز در آینده مورد بررسی و مطالعه قرار بگیرد.

مراجع

[1] Boyd S., Barratt, C., *Linear Controller Design: Limits of Performance*, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.

[2] Scherer, C., Gahinet, P, Chilali, M., 1997, "Multiobjective output feedback control via LMI optimization", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 42, 7, 896-911.

[3] Khargonekar, P.P., Rotea, M.A., 1991, "Mixed H2/H∞ control: a convex optimization approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 824-837.

[4] Sun, Z., Ge, S.S., 2005, "Analysis and synthesis of switched linear control systems", *Automatica*, 41, 181-195.

[5] Feuer, A., Goodween, G.C., Saldago, M., 1997, "Potential benefits of hybrid control for linear time invariant plants", *Proceedings of American Control Conference,* New Mexico, USA, 2790-2794.

[6] McClamroch, N.H., Kalmanovsky, I., 2000, "Performance benefits of hybrid control design for linear and nonlinear systems", *Proceedings of IEEE,* 88, 7, 1083-1096.

[7] Morse, S., Control using logic-based switching, in A. Isidori (Ed.), Trends in Control: An European perspective, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 69-113, 1995.

[8] Hespanha, J.P., 1999, "Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching", *Automatica*, 35, 385-393.

[9] Liberzon, D., *Switching in systems and control. Systems and control: Foundations and applications*, Boston, MA: Birkhنuser, 2003.

[10] Santarelli, K.R., Dahleh, M.A., 2008, "Comparison of a switching controller to two LTI controllers for a class of LTI plants", *Proceedings of American Control Conference,* Seattle, Washington, 4640-4646.

[11] Kogiso, K., Hirata, K., 2004, "Controller switching strategies for constrained mechanical systems with application to the remote control over networks", Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications, 1, 480-484.

[12] Zheng, K., Lee, A.H, Bentsman, J., Krein, P.T., 2006, "High performance robust linear controller synthesis for an induction motor using a multi-objective hybrid control strategy", *Nonlinear Analysis*, 65, 2061-2081.

[13] Essounbouli, N., Manamanni, N., Hamzaoui, A., Zaytoon, J., 2006, "Synthesis of switching controllers: A fuzzy supervisor approach", *Nonlinear Analysis,* 65, 1689–1704.

[14] DeCarlo, R.A., Zak, S.H., Matthews, G.P., 1988, "Variable structure control of non-linear multivariable systems: A tutorial," *Proceedings of the IEEE,* 76, 3, 212–232.

[15] Jamshidi, F., Fakharian, A., Beheshti, M.T.H., 2010, "Fuzzy supervisor approach on logic based switching H2/H∞", *Proceedings of the Institution of*

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]

[19] Margaliot, M., Hespanha, J.P., 2008, "Root-mean-square gains of switched linear systems: A variational approach", *Automatica,* 44, 2398-2402.

[20] Doyl, J., Francis, B., Tannenbaum, A., *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co., 1990.

[21] Vegte, J.V., *Feedback Control Systems*. New Jersey: Prentice Hall, 3th edition, 1994.

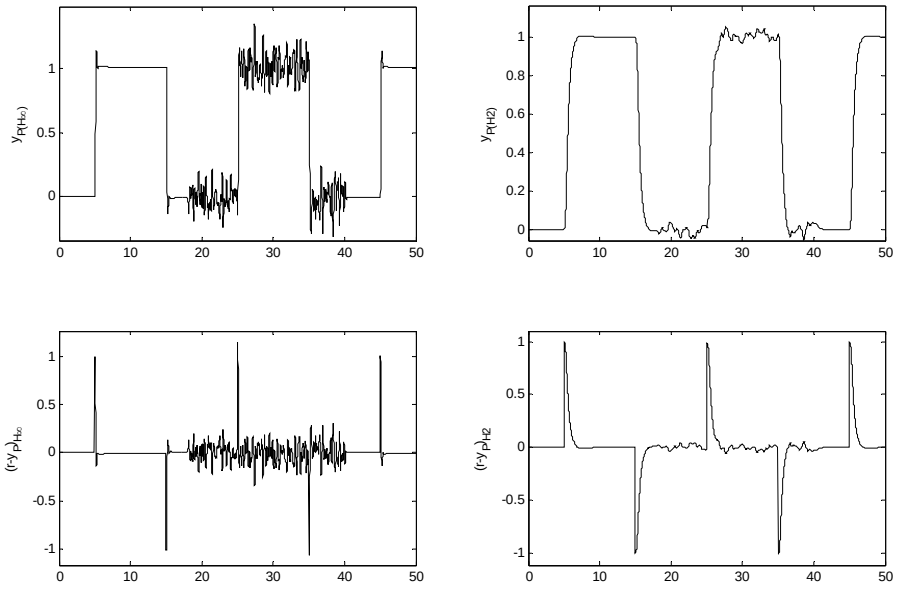
[22] Zhou, K., *Essentials of Robust Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1998.

Mechanical Engineers, Part I, Journal of Systems and Control Engineering, 224, 1, 11-19.

[16] Hespanha, J.P., Morse, A.S., 2002, "Switching between stabilizing controllers", *Automatica*," 38, 1905-1917.

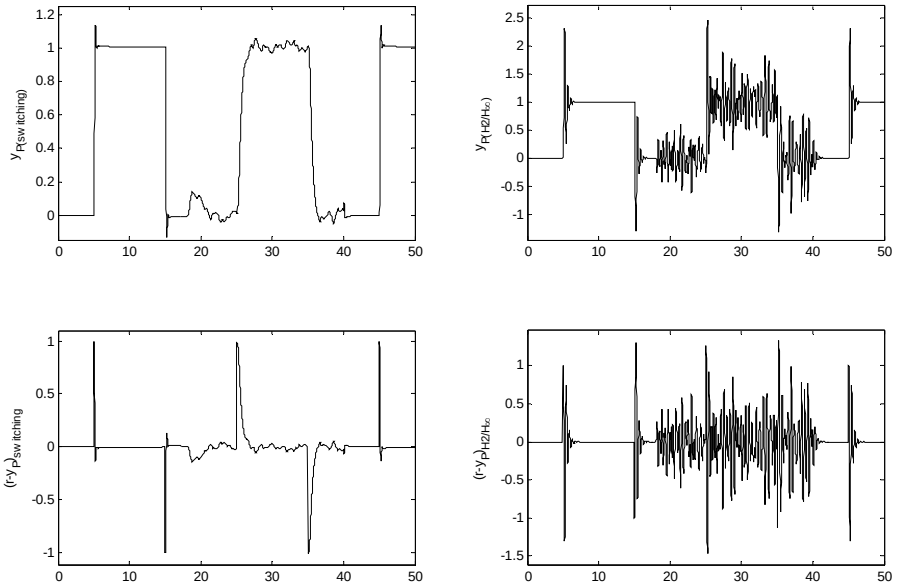
[17] Youla, D.C., Jabr, H.A., Bongiorno, J.J., 1976, "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers-part II. the multivariable case", *IEEE Transactions on Automatic & Control*, 21, 319-338.

[18] HaKgglund, T., Astrom, J.K., 2000, "Supervision of [1] adaptive control algorithms", *Automatica*, 36, 1171-1180.



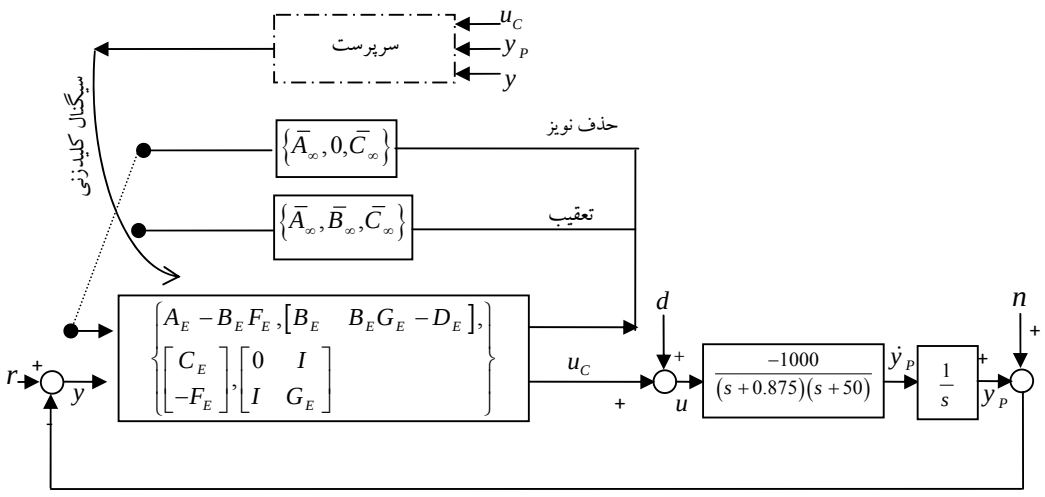
شکل ۷: به ترتیب از سمت راست، پاسخ حلقه بسته کنترل کننده‌های K_{H_2} و K_{H_∞} منحنی بالا خروجی y_P و منحنی های پایین خطای تعقیب $r-y_P$ مثال ۱

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]



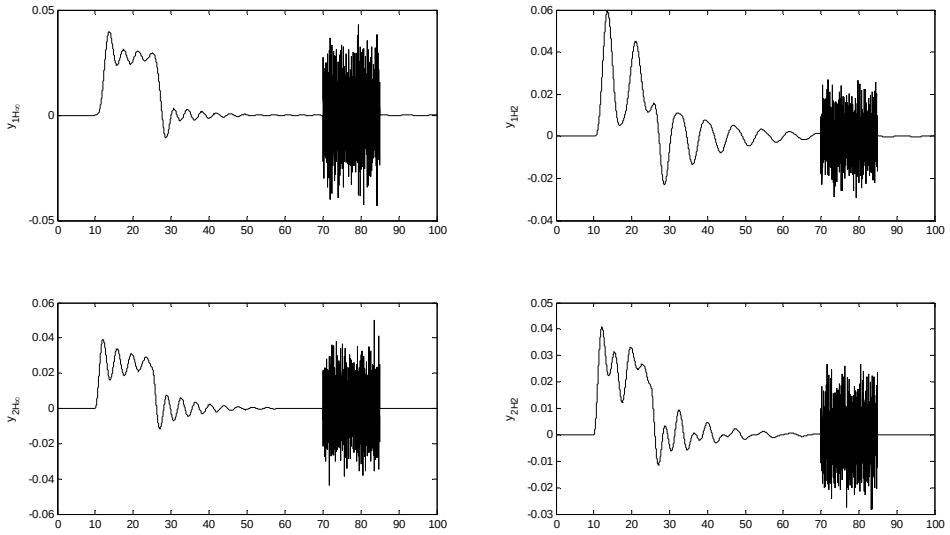
شکل ۸: پاسخ حلقه بسته کنترل کننده K_{H_2/H_∞} و کنترل کننده کلیدزنی با سرپرستی $K_{switching}$ منحنی بالا خروجی y_P و منحنی های پایین خطای تعقیب $r - y_P$

مثال ۱

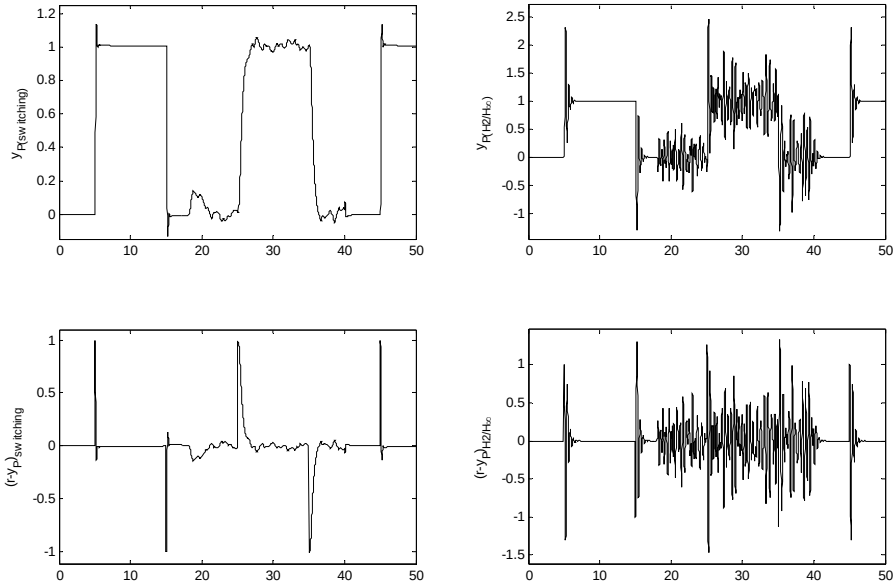


شکل ۹: بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته با کنترل کننده کلیدزنی با سرپرست مثال ۱

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]



شکل ۱۰: پاسخ حلقه بسته کنترل کننده‌های K_{H_2} و K_{H_∞} مثال ۲



شکل ۱۱: پاسخ حلقه بسته کنترل کننده K_{H_2/H_∞} و کنترل کننده کلیدزنی با سرپرستی $K_{switching}$ مثال ۲

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.3.1.3]