مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۲، تابستان ۱۳۸۹، صفحه ۱۰-۱

افزایش زمان بحرانی سیستمهای غیر خطی بوسیله گسترش جهت دار ناحیه جذب

ریحانه کاردهی مقدم[۱]، ناصر پریز[۲]، حسن مدیر شانه چی[۳]، علی وحیدیان کامیاد[۴]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، rkardehi_moghaddam@yahoo.com

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@ferdowsi.um.ac.ir

[۳] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، دانشگاه ایلینویز، shanechi@iit.edu

[۴] استاد، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، kamyad@math.um.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۱۱/۳۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۴/۳۰)

چکیده: دراین مقاله ایده جدید گسترش جهت دار ناحیه جذب برای افزایش زمان بحرانی سیستم های غیر خطی ارایه می شود. برای محاسبه مقادیر بهینه پارامترهای کنترلی گسترش دهنده ناحیه جذب، از تئوری اندازه استفاده کرده ایم. بوسیله این روش می توان مسئله بهینه سازی غیر خطی گسترش جهتدار ناحیه جذب را به یک مسئله بهینه سازی خطی با ساختار استاندارد تبدیل کرد. در این مقاله ابتدا راستای خروج مسیر حالت سیستم از حوزه جذب نقطه تعادل مورد نظر به عنوان جهت بحرانی در نظر گرفته می شود و سپس پارامترهای کنترلی سیستم به گونه ای تعیین می شوند که ناحیه جذب در این راستا بیشترین گستردگی را داشته باشد. در بخش شبیه سازی روش ارایه شده جهت افزایش زمان بحرانی یک سیستم قدرت چهار ماشینه- پنج خط اعمال شده است.

کلمات کلیدی: گسترش جهتدار ناحیه جذب، تئوری اندازه، بهینه سازی، افزایش زمان بحرانی، سیستم قدرت

Using Directional Enlargement of Domain of Attraction to Increase Critical Clearing Time of Nonlinear Systems

Reihaneh Kardehi Moghaddam, Naser Pariz, Hasan Modir Shanechi, Ali Vahidian Kamyad

Abstract: In this work we use directional enlargement of domain of attraction to increase critical clearing time of nonlinear systems. To find the optimal control parameters, we use measure theory which converts the enlargement problem to a linear programming problem. At first step we find the critical directions of system, along them the system instability happens. After that we find optimal controlling parameters to extend domain of attraction along directions of interest. The efficiency of the proposed method is verified in simulation part for increasing critical clearing time of a power system with four machines.

Keywords: DA enlargement، measure theory، optimization، increasing critical clearing time، power systems

۱- مقدمه

توسیع ناحیه جذب یک سیستم غیر خطی بوسیله تعیین مقادیر مناسب پارامترهای کنترلی یا طراحی کنترل کننده بهینه از دیرباز مورد توجه طراحان بوده است. در سیستمهای با ناحیه جذب همه جایی، بروز اختلال، پایداری سیستم را تهدید نمی کند و عموما به صورت سیستماتیک اثر آن رفع می شود. اما در سیستمهای با ناحیه جذب محدود، افزایش زمان مجاز رفع اختلال بسیار مهم است. دراکثر مراجعی که تاکنون به این مسئله پرداخته اند [۱ تا ۴] ، ناحیه جذب در همه جهات وسعت یافته است و روشی برای تغییر شکل دلخواه آن ارائه نشده است. هدف این مقاله

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.1.1]

افزایش بهینه ناحیه جذب در راستاهای بحرانی سیستم است که با عنوان توسیع جهت دار مطرح شده است. گسترش جهت دار در مقایسه با روشهای مبتنی بر توسعه کلی ناحیه جذب، دارای مزایایی همچون صرف هزینه کنترلی کمتر، تعیین ساده ترو سریعتر مقادیر مناسب پارامترهای کنترلی و قابلیت کاربرد در جهت افزایش زمان بحرانی است که به تفصیل در بخش شبیه سازی مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت.

با توجه به کاربرد وسیع سیستمهای قدرت، تحلیل دینامیکی این سیستمها و بررسی پایداری آنها در هنگام ایجاد خطا و پس از رفع خطا از اهمیت ویژه ای برخوردار است. یکی از رویکردهای بررسی سیستمهای قدرت، تحلیل پایداری سیستم پس از خطا[1] از طریق تعیین ناحیه جذب و یا محاسبه زمان بحرانی رفع خطا[2] می باشد. تحلیل زمان بحرانی رفع خطا در منابع و مقالاتی که به تحلیل سیستم های قدرت پرداخته اند از دو دید گاه مورد توجه قرار گرفته است. دسته ای از این مراجع به ارائه روشهایی برای افزایش دقت یا سرعت محاسبه این زمان پرداخته‌اند [۵و ۶] ودر دسته ای دیگرروشهایی برای افزایش زمان بحرانی ارائه شده است [۱،۲و ۷]. زمان بحرانی، حداکثر مدت زمان بعد از بروز خطا است که اگر خطا قبل از آن مدت برطرف شود سیستم همچنان پایدار باقی می ماند [۸]. بنابراین افزایش زمان بحرانی، در حقیقت افزایش فرصت سیستم برای تحمل خطا و گامی موثر در تامین ایمنی پایداری سیستمهای قدرت می باشد.

روشهای ارائه شده درمقالاتی که به افزایش زمان بحرانی رفع خطا پرداخته اند، عموما به دو دسته زیر تفکیک می شوند:

۱- روشهای کاهش دهنده طول مسیر سیستم خطا دار، مانند استفاده از رگولاتورهای ولتاژ سریع[3]، مقاومتهای ترمز[4] [۹] و یا دوباره بستن خط[5] [۱۰].

۲- روشهای تعیین کنترل کننده مناسب برای گسترش همه جایی ناحیه جذب[6] پس از خطا [۷و۹].

این مقاله شامل پنج بخش است. پس از بیان تعاریف اولیه در بخش دوم، روشی برای تعیین مقادیر بهینه پارامترهای کنترلی و توسیع جهت دار ناحیه جذب در بخش سوم ارائه شده است و پس از ارائه روش حل مسئله بوسیله تئوری اندازه در بخش چهارم، تاثیر این دستاورد بر افزایش زمان بحرانی سیستمهای قدرت با شبیه سازی یک سیستم ۴ ماشینه-۵ خطه در بخش پنجم بررسی شده است.

۲- تعاریف اولیه

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x,\alpha,t) \quad f: D\times P\times R^{+} \to R^{n} \qquad (۱)$$
$$x\in D\subseteq R^{n}, x\in P\subseteq R^{l}$$
$$f(0,\alpha,t)=0$$
$$x(t=0)=x_0$$

که در آن α بردار پارامتر کنترلی قابل تنظیم است و فرض می شود مقدار آن بر نقطه تعادل سیستم که در اینجا صفر است بی تاثیر است. همچنین x و x_0 به ترتیب بردار حالت و مقدار اولیه آن را نشان می دهد. فرض کنید $x(x_0,\alpha_0,t)$ پاسخ منحصر بفرد سیستم برای شرایط اولیه x_0 و α_0 باشد.

تعریف۱: پایداری

الف- نقطه تعادل پایدار است هر گاه به ازای هر $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد $\delta(\varepsilon)>0$ به گونه ای که

$$\|x_0\|<\delta \Rightarrow \|x(x_0,\alpha_0,t)\|<\varepsilon \quad \forall t\geq 0$$

ب- نقطه تعادل ناپایدار است هرگاه پایدار نباشد.

ج- نقطه تعادل پایدار مجانبی است هر گاه پایدار باشد و مقدار محدودی مانند $c>0$ وجود داشته باشد به صورتی که

$$\|x_0\|<c \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(x_0,\alpha_0,t)=0$$

تعریف ۲: ناحیه جذب [۱۲]

ناحیه جذب نقطه تعادل در سیستم فوق، مکان هندسی نقاطی از فضای حالت است که چنانچه سیستم از آن نقاط رها شود با گذشت زمان به نقطه تعادل میل می کند.

$$DA=\{x_0 \mid x_0\in D,\ \lim_{t\to\infty} x(x_0,\alpha_0,t)=0\} \qquad (۲)$$

تعریف ۳: راستای خروج

راستای خروج بردار نرمالی است در جهت برداری که نقطه تعادل سیستم را به محل برخورد مسیر حالت سیستم مختل شده با مرز ناحیه جذب سیستم بدون اختلال، متصل می کند.

تعریف ۴: مجموعه فشرده

(بر اساس قضیه هاین-بورل[7]) یک زیر مجموعه از فضای اقلیدسی را فشرده[8] گویند اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد [۱۳].

تعریف ۵: تابع محمل فشرده

تابع $h: X\to R$ را محمل فشرده[9] گویند هر گاه بستار محمل آن یعنی بستار مجموعه $\{x\in X : h(x)\neq 0\}$ فشرده باشد [۱۳].

تعریف ۶: فضای هاسدورف

فضای توپولوژیک X هاسدورف[10] نامیده می شود هر گاه برای هر دو نقطه دلخواه از آن مانند $x,y\in X$ همسایگی های U از x و V از y وجود داشته باشد که جدا از هم باشند یا به عبارتی در رابطه $U\bigcap V=\phi$ صدق کنند[۱۳یا۱۷].

[1] - Post Fault System
[2] - Critical Clearing Time
[3] - Fast Voltage Regulators
[4] - Break Resistor
[5] - Line Reclosing
[6] - Domain of Attraction

[7] - Heine Borel
[8] - Compact
[9] - Compact support
[10]- Hausdorff

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.1.1]

۳- توسعه جهتدار ناحیه جذب

بررسی سیستمهای غیر خطی، از جمله سیستمهای قدرت، نشان می دهد که عموما انحراف از نقطه تعادل به دلیل بروز خطاهای رایج در سیستم ، در جهت خاصی صورت می گیرد. بنابراین شناسایی این راستا و تلاش برای گسترش ناحیه جذب در آن جهت، گامی موثر در دستیابی به کنترل کارامدتر سیستم با صرف هزینه کمتر است. یکی از کاربردهای توسیع جهتدار ناحیه جذب افزایش زمان بحرانی سیستم های غیر خطی است که در بخش شبیه سازی برای یک سیستم قدرت به کار رفته است.

فرض کنید که $e \in R^n$ راستای خروج مسیر حالت سیستم(۱) باشد. در این صورت مسئله توسیع جهت دار ناحیه جذب برای افزایش زمان بحرانی عبارت است از تعیین مقدار بهینه بردار پارامترهای کنترلی $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_l]^T$ برای افزایش ناحیه جذب در راستای e.

لم۱: توسیع جهت دار ناحیه جذب در راستای بردار e را می توان در قالب یک مسئله بهینه سازی به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} &\underset{\alpha\in P}{Maximize}\ \gamma \\ &s.t.:\ \dot{x} = f(x,\alpha,t)\ \ f: D\times P\times R^{+} \to R^{n} \\ &\quad f(0,\alpha,t) = 0 \\ &\quad x_0 = \gamma e \\ &\quad \lim_{t\to\infty} x(x_0,\alpha,t) = 0 \\ &\quad \gamma \ge 0 \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن D و P بسته وکراندار هستند و تابع f لیپشیتز محلی است .

اثبات:

واضح است که فاصله نقطه شروع مسیر حالت سیستم ($x_0 = \gamma e$) از نقطه تعادل، $\|x_0\| = \gamma$ می‌باشد لذا با انتخاب α مناسب در حوزه P برای ماکزیمم کردن γ وتحت شرایط قید شده ، نقطه x_0 دورترین نقطه در راستای e خواهد بود که در حوزه جذب نقطه تعادل قرار خواهد گرفت.

از آنجا که مقدار بدست آمده برای γ نشان دهنده میزان تاثیر بردار کنترلی بر توسیع ناحیه جذب در راستای e است، از این پس آن را ضریب گسترش ناحیه جذب می نامیم.

۴-محاسبه مقادیر بهینه پارامترهای کنترلی با استفاده از تئوری اندازه

در بخش قبل توسیع جهت دار ناحیه جذب در قالب مسئله بهینه سازی با ساختاری معین (رابطه ۳) بیان گردید که حل آن با استفاده از روشهای مرسوم به سادگی امکان پذیر نیست. در این بخش روشی مبتنی بر تئوری اندازه برای حل آن ارائه می گردد.

تئوری اندازه روشی کارآمد برای حل مسائل بهینه سازی با ساختار غیر خطی یا نا هموار است. در این بخش ابتدا مسئله با استفاده از یک تبدیل غیر خطی مناسب، به مسئله ای که همه متغیرها در آن کراندار هستند یا بعبارت دیگر به مسئله ای با کران محدود تبدیل می‌شود و سپس با معرفی و استفاده از یک نگاشت، مسئله (۳) به مسئله ای با قیود انتگرالی تبدیل می شود که آنهم بر اساس قضیه نمایش ریس در فضای اندازه به صورت یک مسئله برنامه ریزی خطی با بعد بینهایت بیان می شود. در نهایت با استفاده از قضایای تقریب در فضای اندازه مسئله برنامه ریزی خطی به مسئله ای با قیود محدود تبدیل می‌شود که اندازه بهینه صادق در آن بوسیله ترکیبی خطی و محدود از اندازه های اتمیک تعیین می شود.

۴-۱- تبدیل مسئله به یک مسئله کران محدود

با توجه به اینکه تئوری اندازه برای حل مسائلی با کران محدود به کار می رود [۱۱] و اینکه تمام متغیرها بغیر از زمان در مسئله (۳) کراندار هستند، می توان با استفاده از یک تابع یک به یک و پوششی از بازه $[0,\infty)$ به بازه $J=[0,1)$ مانند $\theta = \frac{t}{t+1}$ مسئله را به مسئله کراندار زیر تبدیل نمود:

$$\begin{aligned} &\underset{\alpha\in P}{Maximize}\ \gamma \\ &s.t.:\ \dot{y} = g(y,\alpha,\theta);\quad \theta\in J=[0,1) \\ &\quad y_0 = y(\theta=0) = \gamma e \\ &\quad \lim_{\theta\to 1^-} y(\theta) = 0 \\ &\quad \gamma \ge 0 \end{aligned} \qquad (۴)$$

در رابطه فوق $g\ ,\ y$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} &y(\theta) = x(t) = x\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) \\ &g(y,\theta,\alpha) = f(y(\theta),\alpha)\,\frac{1}{(1-\theta)^2} \\ &g: D\times P\times J \to R^n;\ y\in D;\ \theta\in J \end{aligned} \qquad (۵)$$

گرچه تبدیل غیر خطی فوق، مسئله نا متغیر با زمان (۳) را به مسئله ای وابسته به زمان تبدیل می کند ولی مسئله جدید دارای ساختار استاندارد در تئوری اندازه می باشد و به سادگی قابل حل است.

تعریف۷: پاسخ قابل قبول

زوج $w=[y(.),\alpha]$ را پاسخ قابل قبول برای مسئله گسترش جهت دار ناحیه جذب می نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف- $y(.)$ مشتق پذیر باشد و در رابطه $\dot{y} = g(y,\alpha,\theta)$ صدق کند.

ب- بردار پارامترهای کنترلی α متعلق به P باشد.

ج-شرط حدی $\lim_{\theta\to 1^-} y = 0$ برقرار باشد.

د- $y_0 = y(\theta=0) = \gamma e$ و $\gamma \ge 0$ باشد.

با توجه به تعریف سیستم در رابطه (۳)، نقطه $w=(0,\alpha)$ همواره یکی از پاسخ قابل قبول این سیستم است و بنا براین مجموعه زوجهای قابل قبول W برای کلاسی از سیستمهای غیر خطی که در رابطه (۳) صادقند نا تهی است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.1.1]

مسئله (۴) با استفاده از روشهای کلاسیک به آسانی قابل حل نیست، از طرفی تخمین عددی زوج بهینه مشکل است، بنا بر این در بخشهای بعد تغییراتی در ساختار مسئله ایجاد می شود تا به صورت یک مسئله برنامه ریزی خطی در فضای اندازه بیان گردد.

.

۴-۲- نگاشت خطی $I(\Lambda_w)$ و تابعک خطی Λ_w

ایده اصلی جهت حل مسئله (۴) بر اساس تئوری اندازه این است که می توان هر زوج قابل قبول $w=[y(.),\alpha]$ را بوسیله یک نگاشت خطی، به یک تابعک خطی که قابل تبدیل به اندازه های بورل است جایگزین نمود. چنانچه ثابت شود این تبدیل یک به یک است می توان به جای تعیین زوجهای قابل قبول، تابعک خطی هم ارز با آن را تعیین کرد. مزیت استفاده از تابعک هم ارز به جای تعیین زوجهای قابل قبول اولیه، امکان تبدیل مسئله اصلی که یک مسئله بهینه سازی غیر خطی است به یک مسئله برنامه ریزی خطی می باشد.

مجموعه $\Omega = D\times P\times J$ رادر نظر بگیرید و فرض کنید که $C_c(\Omega)$ مجموعه توابع کراندار، پیوسته و محمل فشرده روی Ω باشد. نگاشت $I(\Lambda_w)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$I(\Lambda_w):\ F\in C_c(\Omega),[y(.),\alpha]\in W\longrightarrow\Lambda_w(F)=\int_J F(y,\alpha,\theta)d\theta \qquad (۶)$$

این نگاشت هر تابع $F(y,\alpha,\theta)\in C_c(\Omega)$ از زوج قابل قبول را به تابعک $\Lambda_w(F)$ در Λ_w تصویر می کند.

گزاره ۱: نگاشت $I(\Lambda_w)$ یک نگاشت خطی است به عبارتی:

$$\forall F,G\in C_C(\Omega),\forall\alpha,\beta\in R:$$
$$\Lambda_w(\alpha F+\beta G)=\alpha\Lambda_w(F)+\beta\Lambda_w(G)$$

گزاره ۲: نگاشت $I(\Lambda_w)$ یک نگاشت مثبت است [۱۳] به عبارتی:

$$\forall(y,\alpha,\theta)\in\Omega\ :F(y,\alpha,\theta)\geq 0\rightarrow\Lambda_w(F)\geq 0$$

قضیه ۱: نگاشت $I(\Lambda_w):W\rightarrow\Lambda_w$ یک نگاشت یک به یک است.

اثبات:

برای اثبات قضیه، کافی است نشان دهیم اگر $w_1\neq w_2$ آنگاه $\Lambda_{w_1}\neq\Lambda_{w_2}$.

فرض کنید $w_1=[y_1(\cdot),\alpha]$ و $w_2=[y_2(\cdot),\alpha]$. با توجه به پیوستگی $y_1(.)$ و $y_2(.)$ بازه‌ای مانند $J_\theta\in J$ وجود دارد به صورتیکه $y_1(\theta)\neq y_2(\theta)\quad\forall\theta\in J_\theta$. حال می توان تابع پیوسته و دلخواه F را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$F(y,\alpha,\theta)\in C_c(\Omega),\ F(y_1,\alpha,\theta)=\begin{cases}0 & \theta\notin J_\theta\\ h_1(\theta)>0 & \theta\in J_\theta\end{cases}$$
$$F(y_2,\alpha,\theta)=\begin{cases}0 & \theta\notin J_\theta\\ h_2(\theta)<0 & \theta\in J_\theta\end{cases}$$

برای چنین تابعی رابطه زیر برقرار است:

$$\Lambda_{w_1}(F)=\int_J F(w_1,\theta)d\theta=\int_{J_\theta}F(y_1,\alpha,\theta)d\theta>0$$
$$\Lambda_{w_2}(F)=\int_J F(w_2,\theta)d\theta=\int_{J_\theta}F(y_2,\alpha,\theta)d\theta<0$$

عبارت فوق هم ارز با رابطه $\Lambda_{w_1}\neq\Lambda_{w_2}$ است.

با توجه به یک به یک بودن نگاشت Λ_w، از این پس می توان بجای پاسخ قابل قبول در مسئله گسترش جهت دار ناحیه جذب از تابعک خطی هم ارز آن در Λ_w استفاده کرد. بنابر این با تبدیل قیود مسئله به صورت انتگرالی در بخش بعد ساختار کلی مسئله را به شکل انتگرالی تغییر می دهیم سپس در بخش ۴-۴ نشان خواهیم داد که بنا به قضیه ریس این انتگرال با یک اندازه بورل منحصر بفرد قابل بیان است.

۴-۳- تبدیل قیود به ساختار انتگرالی

برا ی تبدیل مسئله (۴) به یک مسئله برنامه ریزی خطی که متغیر های آن تابعک های خطی اند لازم است تابع هدف و قیود به صورت تابعک های خطی بیان شوند. با توجه به اینکه تابع هدف در مسئله مذکور تابعک خطی است (مقداری ثابت دارد که به سادگی می‌توان آن را به صورت انتگرالی بیان کرد) کافی است قیود مسئله به شکل تابعک خطی بیان شوند. برای تعیین یک تابعک خطی که تمام قیود را شامل شود، به صورت زیر عمل می کنیم.

همانطور که برای تعیین دقیق تابع $y=f(x)$ به بینهایت نقطه x از دامنه تابع نیاز داریم، برای تعیین تابعک $y=f(x(t))$ نیز به بینهایت تابع $x(t)$ از دامنه تابعک نیاز داریم. بنا بر این در ادامه برای تعیین تابعک خطی مذکور از بی نهایت تابع با ساختار ϕ که به صورت زیر تعریف می شود استفاده خواهیم کرد. لازم به ذکر است که ساختار پیشنهاد شده در رابطه (۷) فقط به ساده سازی ساختار انتگرالی (۸) و در نتیجه کاهش محاسبات در روند تعیین تابعک کمک خواهد کرد.

فرض کنید $D\times P\times J\subset B$، B یک گوی باز در فضای R^{n+l+1} و همچنین $CD(B)$ فضای همه توابع اسکالر کراندار، مقدار حقیقی و به طور پیوسته مشتق پذیر[1] روی B باشد. فرض کنید ϕ تابع دلخواه در $CD(B)$ باشد، ϕ^g را که به صورت زیر تعریف می شود در نظر می گیریم.

[1] - continually differentiable

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.1.1]

$$\phi^g = [\frac{\partial \phi}{\partial y}]^T .g + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \phi_y^T \cdot g + \phi_\theta \qquad (۷)$$

فرض کنید $w \in W$ باشد، داریم:

$$\Lambda_w(\phi^g) = \int_{[0,1)} \phi^g \, d\theta = \lim_{\theta_m \to 1} \int_{[0,\theta_m]} (\phi_y^T \cdot g + \phi_\theta) d\theta$$
$$= \lim_{\theta_m \to 1} \int_{[0,\theta_m]} ([\frac{\partial \phi}{\partial y}]^T .g + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) d\theta = \lim_{\theta_m \to 1} \int_{[0,\theta_m]} ([\frac{\partial \phi}{\partial y}]^T . \frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) d\theta \qquad (۸)$$
$$= \int_{[0,\theta_m]} (\frac{d\phi}{d\theta}) d\theta = \lim_{\theta_m \to 1} \phi(y(\theta_m), \theta_m) - \phi(y(0), 0) = \Delta\phi$$

با توجه به حدود مرزی مسئله (۴) ($y_0 = \gamma e, \ \lim_{\theta \to 1^-} y(\theta) = 0$) و جایگذاری آن در رابطه فوق، نتیجه زیر بدست می آید:

$$\Lambda_w(\phi^g) = \int_{[0,1)} \phi^g \, d\theta = \phi(0, \theta_m) - \phi(\gamma e, 0) = \Delta\phi \qquad (۹)$$

می توان با انتخاب دسته خاصی از توابع ϕ به صورت $\phi = y_j \psi$ که در آن $\psi(y, \theta = 0) = \psi(y, \theta = 1) = 0$ رابطه انتگرالی ساده تری بدست آورد، ψ تابعی در فضای $S(\Omega)$ و $S(\Omega)$ فضای توابع کراندار، مشتق پذیر،محمل فشرده ومقدار حقیقی است. در این مقاله برای ساده تر کردن روابط و بدون از دست دادن کلیت مسئله، ψ را به صورت تابعی از θ بکار خواهیم برد.

هر گاه g_j و y_j به ترتیب مولفه های j ام g و y باشد، دسته توابع ζ_j را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\zeta_j = y_j \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + g_j \psi \quad j = 1, \ldots, n \quad \forall \psi \in S(\Omega) \qquad (۱۰)$$

برای هر $[y(.), \theta] \in W$ داریم:

$$\Lambda_w(\zeta_j) = \int_{[0,1)} \zeta_j(y, \theta) d\theta = \lim_{\theta_m \to 1} \int_{[0,\theta_m]} (y_j \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + g_j \psi) d\theta =$$
$$\lim_{\theta_m \to 1} \{y_j \psi\}\Big|_{[0,\theta_m]} - \lim_{\theta_m \to 1} \int_{[0,\theta_m]} \{\dot{y}_j - g_j\} \psi \, d\theta \qquad (۱۱)$$

با توجه به اینکه $[y(.), \alpha]$ یک پاسخ قابل قبول برای مسئله (۴) است ، رابطه $\dot{y}_j = g_j$ برقرار بوده و از طرفی طبق تعریف $\psi(y, \theta = 0) = \psi(y, \theta = 1) = 0$ می باشد. بنابراین انتگرال فوق برابر صفر است.

$$\Lambda_w(\zeta_j) = \int_{[0,1)} \zeta_j(y, \theta) d\theta = 0 \qquad (۱۲)$$

با توجه به اینکه قیود به تابعک خطی تبدیل شده اند مسئله بهینه سازی غیر خطی(۴) به مسئله بر نامه ریزی خطی زیر با بعد بینهایت و تعداد قید بینهایت تبدیل می گردد.

$$\begin{aligned} &\max imize \ \gamma \\ &\Lambda_w(\phi_g) = \phi(0, \theta_m) - \phi(\gamma e, 0) = \Delta\phi \quad \phi \in CD(B) \\ &\Lambda_w(\zeta_j) = 0 \qquad j = 1, \ldots, n \quad \forall \psi \in S(\Omega) \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

۴-۴- نمایش مسئله در فضای اندازه بر اساس قضیه نمایش ریس[1]

با استفاده از قضیه نمایش ریس می توان هر تابعک بیان شده در مسئله گسترش جهت دار را با اندازه بورل هم ارز آن بیان کرد.

قضیه۲ (قضیه نمایش ریس):

فرض کنید Ω یک فضای هاسدورف فشرده باشد و Λ یک تابعک خطی مثبت روی $C_c(\Omega)$ باشد، در این صورت اندازه بورل یکتایی مانند μ روی Ω وجود دارد به طوری که: $F \in C_c(\Omega)$ که در آن $\Lambda(F) = \int_\Omega F d\mu = \mu(F)$.

اثبات:به[۱۱] یا [۱۶]مراجعه شود.

با توجه به اینکه Ω یک مجموعه بسته نیست وشرط لازم برای استفاده از قضیه نمایش ریس، فشردگی Ω است، ابتدا آن را با مجموعه بسته Ω_m به صورت زیر تقریب می زنیم:

$$\Omega_m = D \times P \times J_m; \quad J_m = [0, \theta_m]; \quad \theta_m < 1; \quad \lim_{m \to \infty} \theta_m = 1$$

بر اساس رابطه فوق Ω_m مجموعه ای بسته است از طرفی با توجه به کراندار بودن مجموعه های P، D و J_m، می توان نتیجه گرفت Ω_m مجموعه ی بسته و کراندار در فضای اقلیدسی است و بنا بر این فشرده است [۱۳]. از طرفی به سادگی می توان ثابت کرد که Ω_m یک فضای هاسدورف است چرا که $R^q \quad q = 1, 2, \ldots$ هاسدورف است و هر زیر مجموعه از یک فضای هاسدورف، هاسدورف است[۱۷]، پس $\Omega_m = D \times P \times J_m \subset R^{n+l+1}$ نیز هاسدورف است.

بنا براین مشابه بخش قبل در فضای Ω_m نیز می توان به ازای هر زوج پاسخ قابل قبول، نگاشت متناظر با آن را به صورت زیر تعریف کرد و ان را با اندازه بورل هم ارزش نشان داد.

$$I(\Lambda_{m_w}) : F \in C_c(\Omega_m), [y, \alpha] \in W \longrightarrow \Lambda_{m_w} = \int_{J_m} F(y, \alpha, \theta) d\theta \qquad (۱۴)$$

که $C_c(\Omega_m)$ مجموعه توابع کراندار، پیوسته و محمل فشرده روی Ω_m و Λ_{m_w} نیز یک تابعک خطی، مثبت و پیوسته در $C_c(\Omega_m)$ است که از این پس برای سادگی به صورت $\Lambda_m(F)$ نمایش داده می شود. در این صورت بنا به قضیه نمایش ریس اندازه بورلی مانند μ_m وجود دارد که در رابطه زیر صدق می کند [۱۵]:

$$\Lambda_m(F) = \int_{J_m} F(y(\theta), \alpha, \theta) d\theta = \int_{\Omega_m} F \, d\mu_m = \mu_m(F) \quad F \in C_c(\Omega_m) \qquad (۱۵)$$

[1] - Riesz Representation Theorem

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.1.1]

لم۲:

هر گاه فضای همه اندازه های مثبت رادن در Ω_m را با $M^+(\Omega_m)$ نشان دهیم مسئله گسترش جهت دار ناحیه جذب در این فضا معادل است با:

$$\begin{aligned} &Maximize \quad \gamma \\ &\mu_m\in M^+(\Omega_m) \\ &s.t.: \quad \mu_m(\phi_g)=\phi(0,1)-\phi(\gamma e,0) \quad \forall \phi\in CD(B) \\ &\qquad \mu_m(\zeta_j)=0 \qquad\qquad \forall \psi\in S(\Omega_m),\ \ j=1,...,n \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma\ge 0, \mu_m\in M^+(\Omega_m) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

اثبات: چنانچه قیود ۱۳ با ساختار ۱۵ جایگزین شود اثبات واضح است.

در ادامه فضای تمام اندازه های مثبت رادن($M^+(\Omega_m)$) که در قیود مسئله(۱۶) صدق می کنند را با A_m نشان می دهیم و ثابت می کنیم مسئله (۱۶) در آن دارای پاسخی بهینه است.

قضیه۳:

یک اندازه بهینه مانند μ_{opt} در A_m وجود دارد که به ازای آن مقدار γ ماکزیمم شود.

اثبات:

بنا بر [۱۳]، هر تابع پیوسته روی یک مجموعه فشرده دارای اکسترمم است. بنا بر این کافی است ثابت کنیم γ روی A_m پیوسته است و مجموعه A_m فشرده است. از پیوستگی γ روی $M^+(\Omega_m)$ می توان نتیجه گرفت γ روی هر زیر مجموعه از $M^+(\Omega_m)$ مانند A_m پیوسته است [۱۳] و فشردگی A_m به صورت زیر ثابت می شود:

بر اساس [۱۴]، از فشردگی Ω_m می‌توان نتیجه گرفت $G_m=\{\mu_m : \mu_m\in M^+(\Omega_m),\ \mu_m(1)=\theta_m\}$ نیز فشرده است. از طرفی $A_m\subset G_m$ (برای اثبات کافی است تابع دلخواه $\phi=\theta$ را در نظر بگیریم و در رابطه (۷)قرار دهیم که $\phi^g=1$ را نتیجه می دهد و با جایگذاری ϕ^g در (۸) خواهیم داشت $\Delta\phi=\mu(\phi^g)=\mu(1)=\theta_m$)و هر زیر مجموعه بسته از یک مجموعه فشرده، فشرده است [۱۳]، پس برای اثبات فشردگی A_m کافی است ثابت کنیم بسته است. فرض کنید $\{(\mu_m)_i\}$ دنباله ای کوشی در A_m باشد، با توجه به اینکه $A_m\subset M^+(\Omega_m)$، می توان نتیجه گرفت $\{(\mu_m)_i\}$ دنباله ای در $M^+(\Omega_m)$ نیز هست. از طرفی با توجه به فشردگی Ω_m، $M^+(\Omega_m)$ یک فضای کامل است بنابراین هر دنباله کوشی در آن به مقداری مانند μ_{opt} همگراست ($(\mu_m)_i\to\mu_{opt}$). براساس رابطه زیر می توان اثبات کرد که $\mu_{opt}\in A_m$:

$$\mu_{opt}(\phi_g)=\lim_{i\to\infty}(\mu_m(\phi_g))_i=\phi(0,1)-\phi(\gamma e,0)$$
$$\mu_{opt}(\zeta_j)=\lim_{k\to\infty}(\mu_m(\zeta_j))_k=0$$

پس هر دنباله کوشی در A_m به عضوی مانند $\mu_{opt}\in A_m$ همگراست. پس A_m کامل و در نتیجه بسته است (هر مجموعه کامل بسته است[۱۳]).

۴-۵- تقریب پاسخ مسئله گسترش جهت دار ناحیه جذب

معادله (۱۶) یک برنامه ریزی خطی با بعد نامتناهی است چرا که تعداد بینهایت تابع از نوع ϕ و ψ وجود دارد و در نتیجه بینهایت شرط لازم برای مسئله بهینه سازی می توان در نظر گرفت. بنا بر این برای تعیین پاسخ بهینه مسئله گسترش ناحیه جذب لازم است از چند تقریب در مسئله استفاده شود تا بعد مسئله محدود شود.

در ابتدا فرض می کنیم مسئله می نیم سازی (۱۶) روی A_m انجام نشود بلکه روی زیر فضایی از $M^+(\Omega_m)$ ، به نام $A_m(N_1,N_2)$ ، که تنها در تعداد متناهی از شرایط مسئله صادق است انجام گیرد.

با توجه به اینکه هر تابع هموار را می توان با بسط جملات سینوسی و یا چند جمله ای نشان داد و از طرفی انتگرال گیری و مشتق گیری از این توابع ساده است در این مقاله توابع ϕ و ψ به صورت چند جمله ای و سینوسی در نظر گرفته می شود. اولین مجموعه از دسته شرایط مسئله (۱۶) را در نظر بگیرید و فرض کنید به جای بینهایت تابع، تعداد N_1 تابع ϕ به صورت $\phi_i \quad i=1,...,N_1$ تعریف کنیم به گونه ای که ترکیب خطی $\phi_i\in CD(B)$ با توپولوژی همگرایی یکنواخت در $CD(B)$ چگال باشد. به عنوان مثال در این مقاله ϕ_i به صورت چند جمله ای هایی از مولفه بردار n تایی y و یا متغیر θ انتخاب می شود. همچنین فرض کنید تعداد N_2 تابع $\zeta_{j,h}$ در $S(\Omega_m)$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\zeta_{j,h}=y_j\frac{\partial\psi_h}{\partial\theta}+g_j\psi_h \quad j=1,....,n,\ \ h=1,...,N_2$$
$$\psi_h\in\{\sin(2\pi r\theta),1-\cos(2\pi r\theta) \qquad r=1,2,..\}$$

با توجه به لم ۳ می توان اثبات کرد اگر چه برای محاسبه پاسخ دقیق مسئله (۱۶) به بینهایت قید نیاز داریم اما با تعداد محدودی ازاین قیود نیز می توان تقریب خوبی از پاسخ را بدست آورد و با زیاد شدن تعداد این قیود پاسخ تخمینی مسئله گسترش جهت دار ناحیه جذب به مقدار واقعی میل می کند.

لم۳:

مسئله ماکسیمم سازی $\|\gamma\|$ بر روی مجموعه $A_m(N_1,N_2)$ که در روابط زیر صادق هستند را در نظر بگیرید.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.1.1]

$$\mu_m(\phi_i^g) = \phi_i(0,\theta_m) - \phi_i(\gamma e,0) \qquad i = 1,...,N_1$$
$$\mu_m(\zeta_{j,h}) = 0 \qquad h = 1,...,N_2,\ \ j = 1,...,n$$

در این صورت رابطه حدی زیر برقرار است:

$$\lim_{N_1,N_2\to\infty} \ \sup_{A_m(N_1,N_2)} (\|\gamma\|) = \sup_{A_m}(\|\gamma\|)$$

اثبات: به گزاره III.1 مرجع ۱۱ مراجعه شود.

با استفاده از نظریه اساسی اندازه (روزن بلوم)[1] می توان پاسخ مسئله (۱۶)را بر اساس لم ۴ محاسبه کرد[۱۵].

لم ۴:

اندازه بهینه μ_{opt} در مجموعه $A_m(N_1,N_2)$ که به ازای آن تابع $\|\gamma\|$ مقدار ماکزیمم خود را اختیار می کند را می توان به صورت مقابل بیان کرد:

$$\mu_{opt} = \Sigma_{k=1}^{N} \beta_k^* \delta(z_k^*) \qquad \beta_k^* \ge 0,\ z_k^* \in \Omega_m,\ N = N_1 + N_2$$

در لم ۴، سه تایی (y,α,θ) با z_k^* نمایش داده می شود و $\delta(z) \in M^+(\Omega_m)$ اندازه اتمیک واحد است. اندازه اتمیک تابعی مانند F براساس رابطه زیر تعریف می شود:

$$\delta(z)F = F(z) \quad F \in C_c(\Omega_m), z \in \Omega_m$$

با توجه به لم ۴، مسئله گسترش ناحیه جذب به یک مسئله برنامه ریزی خطی تبدیل می شود که در آن β_k^*، z_k^* و α مجهولند، اما بنا به قضیه زیر می توان با تقریب z_k^* به صورت یک مجموعه چگال در Ω_m تعداد مجهولات مسئله را کم کرد.

قضیه ۴:

فرض کنید که Z_{Ω_m} یک مجموعه شمارا و چگال در Ω_m باشدو فرض کنید ε مقداری دلخواه و معین است. آنگاه اندازه ای مانند $\upsilon \in M^+(\Omega_m)$ وجود دارد که در روابط زیر صادق است:

$$\left|(\mu_{opt} - \upsilon)\phi_i^g\right| < \varepsilon \qquad i = 1,...,N_1$$
$$\left|(\mu_{opt} - \upsilon)\zeta_{j,h}\right| < \varepsilon \qquad j = 1,...,n, h = 1,...,N_2$$

که υ عبارت است از $\upsilon = \sum_{k=1}^{N} \beta_k^* \delta(z_k)$ و $z_k \in Z_{\Omega_m}$.

اثبات:

با توجه به پیوستگی ϕ_i^g و $\zeta_{j,h}$ می‌توان یک $z_k \in Z_{\Omega_m}$ به اندازه کافی نزدیک به z_k^* در نظر گرفت به طوریکه روابط زیر برقرار باشد:

$$\left|\phi_i^g(z_k^*) - \phi_i^g(z_k)\right| < \frac{\varepsilon}{\theta_m} \qquad i = 1,...,N_1$$

$$\left|\zeta_{j,h}(z_k^*) - \zeta_{j,h}(z_k)\right| < \frac{\varepsilon}{\theta_m} \qquad j = 1,...,n, h = 1,...,N_2$$

با توجه به اینکه $\mu_{opt}(1) = \theta_m$ (در قضیه ۳ اثبات شد)، می توان نتیجه گرفت $\sum_{k=0}^{N} \beta_k^* = \theta_m$ بنا بر این رابطه زیر برقرار است:

$$\left|(\mu_{opt} - \upsilon)\phi_i^g\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} \beta_k^* (\phi_i^g(z_k^*) - \phi_i^g(z_k))\right|$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \beta_k^* (\phi_i^g(z_k^*) - \phi_i^g(z_k))\right| \le \sum_{k=1}^{N} \beta_k^* \max_{i,k} \left|\phi_i^g(z_k^*) - \phi_i^g(z_k)\right|$$

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k^* \max_{i,k} \left|\phi_i^g(z_k^*) - \phi_i^g(z_k)\right| < \varepsilon$$

$$\left|(\mu_{opt} - \upsilon)\zeta_{j,h}\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} \beta_k^* (\zeta_{j,h}(z_k^*) - \zeta_{j,h}(z_k))\right|$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \beta_k^* (\zeta_{j,h}(z_k^*) - \zeta_{j,h}(z_k))\right| \le \sum_{k=1}^{N} \beta_k^* \max_{h} \left|\zeta_{j,h}(z_k^*) - \zeta_{j,h}(z_k)\right|$$

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k^* \max_{h} \left|\zeta_{j,h}(z_k^*) - \zeta_{j,h}(z_k)\right| < \varepsilon$$

براساس لم۴ وقضیه۴ مسئله (۱۶) را می توان به ساختار یک برنامه ریزی خطی با قیود محدود به صورت زیر تبدیل کرد:

$$Maximize \|\gamma\|$$

$$s.t.: \quad -\varepsilon \le \sum_{k=1}^{N} \beta_k^* \phi_i^g(z_k) - \phi_i(0,1) + \phi_i(\gamma e,0) \le \varepsilon \quad i = 1,...,N_1$$
$$-\varepsilon \le \sum_{k=1}^{N} \beta_k^* \zeta_{j,h}(z_k) \le \varepsilon \qquad j = 1,...,n, h = 1,...,N_2 \qquad (۱۷)$$

لازم به ذکر است که مجهولات مسئله فوق عبارتند از β^*_k، γ و همچنین پارامترهای کنترلی α که در ساختار $\phi_i^g(z_k)$ و $\zeta_{j,h}(z_k)$ ظاهر می شوند. در این مقاله برای تعیین (z_k) ابتدا با انتخاب N دلخواه، یک افراز N تایی در Ω_m در نظر می گیریم و سپس هر z_k را نقطه ای درون یک افراز انتخاب می کنیم. واضح است که با انتخاب مقادیر به اندازه کافی کوچک از ε پاسخ مسئله بهینه سازی فوق به مسئله گسترش جهت دار ناحیه جذب همگرا خواهد شد.

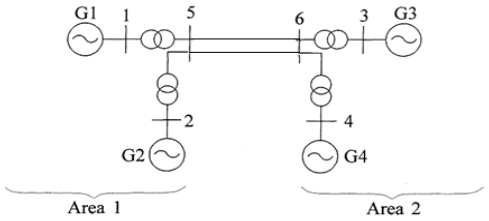
۵-شبیه سازی

این بخش تاثیر روش ارائه شده در بخش قبل بر افزایش زمان بحرانی یک سیستم قدرت ۴ ماشینه و ۵ خطی مورد بررسی قرار می گیرد.

سیستم قدرت ۴ ماشینه و ۵خطه زیر را در نظر بگیرید:

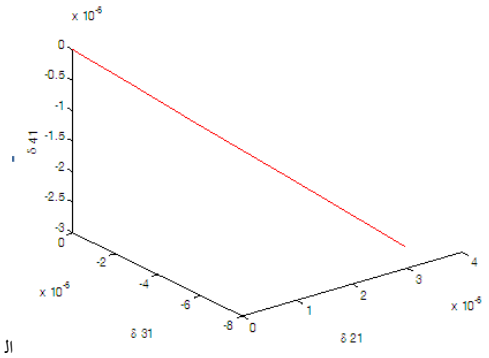
[1] - Rosen Bloom

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.1.1]

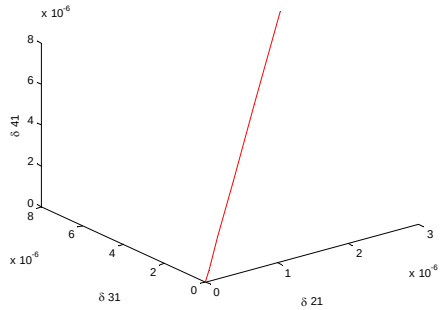


شکل ۱: سیستم ۴ ژنراتوره ۵ خطه

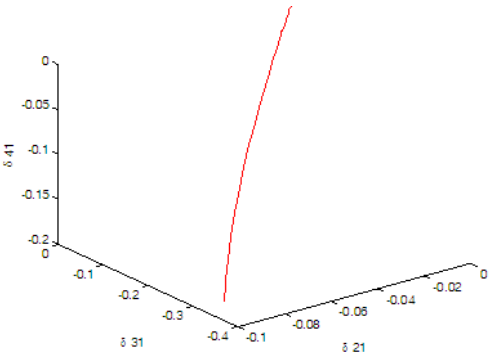
معدلات ژنراتورها و سیستم تحریک در پیوست آمده است. مقدار نامی بهره سیستم تحریک در این سیستم $k_A = [۲۰۰\ ۲۰۰\ ۲۰۰\ ۲۰۰]$ است. با ایجاد خطای اتصال کوتاه باس ۵ و ۶و مدار باز خط ۵-۶، مسیرخروج از نقطه تعادل(مبدا) به شکل زیر است.



ف-اتصال کوتاه باس ۶



ب- اتصال کوتاه باس ۵



ج-مدار باز خط ۵-۶

شکل ۲: مسیرخروج از نقطه تعادل

بر اساس مسیرهای بحرانی سیستم که در شکل ۲ ترسیم شده است، می توان مسیرهای خروج را تعیین کرد و سپس با استفاده از پاسخ مسئله گسترش جهتدار، مقدار بهینه بهره سیستم تحریک را برای گسترش جهت دار ناحیه جذب در راستای هر یک از این مسیرها محاسبه کرد. در جدول زیر راستای خروج بر اساس تعریف ۳ تعیین شده و بهره سیستم تحریک(پارامتر های کنترلی) بهینه بدست آمده برای هر یک از بردارها بر اساس تئوری اندازه معین شده است. مراحل محاسبه بهره بهینه سیستم تحریک در پیوست ذکر شده است.

جدول ۱: بهره بهینه سیستم تحریک

خطا	راستای خروج	بهره بهینه سیستم تحریک
اتصال کوتاه باس ۵	$e_۱ = [۰.۳۹\ -۰.۸۵\ \ -۰.۳۵]$	$k_۱ = [۹۲\ ۹۰\ ۹۲\ ۹۰]$
اتصال کوتاه باس ۶	$e_۲ = [.۳\ \ .۶\ \ .۷۴]$	$k_۲ = [۸۷\ ۸۷\ ۸۷\ ۸۷]$
مدار باز خط ۶-۵	$e_۳ = [-۰.۲۴\ -۰.۸۵\ \ -۰.۴۶]$	$k_۳ = [۱۰۲\ \ ۱۲۳\ \ ۱۰۱\ ۱۲۳]$

در جدول زیر تاثیر توسیع جهت دار بر افزایش زمان بحرانی مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که مشاهده می شود بهترین زمان بحرانی برای هر خطا به ازای بهره بهینه بدست آمده است و در هر سه حالت زمان بحرانی نسبت به مقدار نامی آن افزایش یافته است.

جدول ۲:تغییرات زمان بحرانی نسبت به بهره سیستم تحریک

	k_A	$k_۱$	$k_۲$	$k_۳$
زمان بحرانی (اتصال کوتاه باس ۵)	۰.۰۰۱۲	۰.۰۰۳۳	۰.۰۰۲	۰.۰۰۲۲۵
زمان بحرانی (اتصال کوتاه باس ۶)	۰.۰۰۱۲	۰.۰۰۲۸	۰.۰۰۳۶	۰.۰۰۲۲۵
زمان بحرانی (مدار باز خط ۶-۵)	۰.۲۱	۰.۲۳	۰.۲۰۸	۰.۳۴۳

۶-نتیجه گیری و پیشنهاد

در این مقاله روشی نوین برای افزایش زمان بحرانی سیستمهای غیر خطی ارائه می شود. در روش مذکور، ابتدا خطاهای رایج سیستم و در نتیجه راستاهایی که خروج از نقطه تعادل در طول آن شایع تر است بوسیله شبیه سازی معین می شود و سپس به جای صرف هزینه کنترلی برای گسترش جهت دار محافظه کارانه ناحیه جذب در همه جهات، به تعیین پارامترهای کنترلی برای توسیع در جهتهای بحرانی می پردازیم. علاوه بر صرف هزینه کنترلی کمتر در مقایسه با توسیع همه جایی ناحیه جذب، می توان به مزایای دیگری همچون قابلیت تبدیل روش به یک مسئله برنامه ریزی خطی با استفاده از تئوری اندازه اشاره کرد. از این روش می توان برای توسیع چند جهته ناحیه جذب و همچنین تعیین حساسیت ناحیه جذب به

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.1.1]

تغییر پارامترهای کنترلی در راستایی مشخص نیز استفاده کرد که در پژوهشهای بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۷- پیوست: محاسبه بهره بهینه سیستم تحریک سیستم قدرت ۴ ماشینه

۷-۱- معادلات سیستم

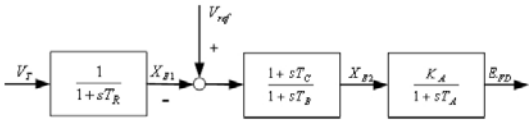
در قسمت شبیه سازی از یک سیستم دوناحیه ای چهار ژنراتوره که یکی از سیستمهای استاندارد معرفی شده در IEEE است استفاده کرده ایم [۱۸]. معادلات حالات ژنراتورها به صورت زیر است:

$$\dot{E}'_{qi}=\frac{1}{\tau'_{di}}(E_{FDi}-E'_{qi}+(x_{di}-x'_{di})I_{di})$$
$$\dot{E}'_{di}=\frac{1}{\tau'_{qi}}(-E'_{di}+(x_{qi}-x'_{qi})I_{qi})$$
$$\dot{\omega}_i=\frac{1}{M_i}(P_{mi}-(I_{di}E'_{di}+I_{qi}E'_{qi})+(x_{qi}-x'_{qi})I_{di}I_{qi}-D(\omega_i-\omega_s))$$
$$\dot{\delta}_{j1_\theta}=\omega_b(\omega_j-\omega_1) \qquad j=2,3,4;\ \ i=1,..,4 \tag{۱۸}$$

بغیر از ضرایب دمپینگ بقیه پارامترها در ژنراتورها مشابه اند و بر حسب پایه ۱۰۰ مگاولت‌آمپر و ۲۰ کیلو ولت بصورت زیر مقدار دهی شده‌اند:

$x_{di}=1.8\ pu,\ x_{qi}=1.7\ pu$
$x'_{di}=0.3\ pu, x'_{qi}=0.55\ pu$
$\tau'_{di}=8\ \text{sec},\ \tau'_{qi}=.4\ \text{sec}$

سیستمهای تحریک نیز مشابه و بر اساس مرجع [۱۸] انتخاب شده اند. بلوک دیاگرام سیستم تحریک و معادلات آن بصورت زیر است:



شکل ۳: بلوک دیاگرام سیستم تحریک

$$\dot{E}_{FDi}=\frac{K_{Ai}K_{E2i}}{T_{Ai}}-\frac{1}{T_{Ai}}E_{FD_i} \tag{۱۹}$$
$$\dot{X}_{E1i}=-\frac{1}{T_{Ri}}X_{E1i}+\frac{1}{T_{Ri}}V_{Ti}$$
$$\dot{X}_{E2i}=-\frac{1}{T_{Bi}}(\frac{T_{Ci}}{T_{Ri}}-1)X_{E1i}-\frac{1}{T_{Bi}}X_{E2i}-\frac{T_{Ci}}{T_{Bi}T_{Ri}}V_{Ti}+\frac{1}{T_{Bi}}V_{refi}$$
$T_A=T_R=0.01,\ T_B=10,\ T_C=1$

۷-۲- تبدیل مسئله به کران محدود

با توجه به روابط (۱۸) و (۱۹) بردار حالت به صورت زیر تعریف می شود:

$$[\delta_{21},\delta_{31},\delta_{41},\omega_1,..,\omega_4,E'_{q1},...,E'_{q4},E'_{d1},...,E'_{d4},$$
$$E'_{FD1},..,E'_{FD4},X_{E11},...,X_{E14},X_{E21},...,X_{E24}]^T$$

با تبدیل مسئله به کران محدود دسته معادلات (۱۸) و (۱۹) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\dot{E}'_{qi_\theta}=(\frac{1}{\tau'_{di}}(E_{FDi_\theta}-E'_{qi_\theta}+(x_{di}-x'_{di})I_{di}))\frac{1}{(1-\theta)^2}$$
$$\dot{E}'_{di_\theta}=(\frac{1}{\tau'_{qi}}(-E'_{di_\theta}+(x_{qi}-x'_{qi})I_{qi}))\frac{1}{(1-\theta)^2}$$
$$\dot{\omega}_{i_\theta}=(\frac{1}{M_i}(P_{mi}-(I_{di}E'_{di_\theta}+I_{qi}E'_{qi_\theta})+(x_{qi}-x'_{qi})I_{di}I_{qi}$$
$$-D(\omega_{i_\theta}-\omega_s)))\frac{1}{(1-\theta)^2}$$
$$\dot{\delta}_{j1_\theta}=(\omega_b(\omega_{j_\theta}-\omega_{i_\theta}))\frac{1}{(1-\theta)^2}$$
$$\dot{E}_{FDi_\theta}=(\frac{K_{Ai}K_{E2i}}{T_{Ai}}-\frac{1}{T_{Ai}}E_{FDi_\theta})\frac{1}{(1-\theta)^2}$$
$$\dot{X}_{E1i_\theta}=(-\frac{1}{T_{Ri}}X_{E1i_\theta}+\frac{1}{T_{Ri}}V_{Ti})\frac{1}{(1-\theta)^2}$$
$$\dot{X}_{E2i_\theta}=(-\frac{1}{T_{Bi}}(\frac{T_{Ci}}{T_{Ri}}-1)X_{E1i_\theta}-\frac{1}{T_{Bi}}X_{E2i_\theta}-\frac{T_{Ci}}{T_{Bi}T_{Ri}}V_{Ti}$$
$$+\frac{1}{T_{Bi}}V_{refi})\frac{1}{(1-\theta)^2}$$

۷-۳- انتخاب توابع ϕ و ψ

با توجه به آنچه در بخش ۴-۳ بیان شد، دسته توابع ϕ را بصورت چند جمله ای‌هایی از حالات بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi=\{\delta_{j1}^2,\omega_i^2,\delta_{j1}\omega_i\}\quad j=2,3,4;i=1,...,4$$

سپس تابعی های ϕ^g را بر اساس رابطه (۷) محاسبه می کنیم. به عنوان مثال برای $\phi=\omega_1^2$ تابعی ϕ^g عبارت است از:

$$\phi^g=2\omega_1(\frac{1}{M_i}(P_{m1}-(I_{d1}E'_{d1_\theta}+I_{q1}E'_{q1_\theta})+(x_{q1}-x'_{q1})I_{d1}I_{q1}$$
$$-D(\omega_{1_\theta}-\omega_s)))\frac{1}{(1-\theta)^2}$$

دسته توابع ψ_h را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\psi_h\in\{\sin(2\pi r\theta),1-\cos(2\pi r\theta)\qquad r=1,2,..\}$$

و در نتیجه از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\zeta_{j,h}=y_j\frac{\partial\psi_h}{\partial\theta}+g_j\psi_h\quad j=1,....,28,\ \ h=1,...,2$$

پس از تعیین این دسته توابع و جایگذاری آنها در (۱۶)، مسئله بهینه سازی (۱۶) برای ۳ راستای متفاوت خروج از سیستم که بر اساس ستون دوم جدول ۱ مشخص شده توسط نرم افزار MATLAB حل شده است. با توجه به بردار حالات و جدول ۱، بردار خروج از نقطه تعادل برای ۳ خطای اتصال کوتاه باس ۵و۶ و مدار باز خط ۵-۶ (به ترتیب) به صورت زیر است:

$$e_1=[0.39\ -0.85\ \ -0.35\ 0...\ 0]^T_{1\times27}$$
$$e_2=[0.3\ \ 0.6\ \ 0.74\ 0...\ 0]^T_{1\times27}$$
$$e_3=[-0.24\ -0.85\ \ -0.46\ 0...\ 0]^T_{1\times27}$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.1.1]

مراجع

[1] R. W. Brockett, Hongyi L, December 2003, "A light weight rotary double pendulum: maximizing the domain of attraction", Proceeding of 42nd IEEE conference on decision and contro, pp 3299-4404.

[2] Y. Cao, Z. Li, D.G. Ward, January 2002, "An antiwindup approach to enlarging domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation", IEEE transactions on automatic contro,، vol. 47, no.1, pp 140-145.

[3] G. Chesi, 2004, "Computing output feedback controllers to enlarge the domain of attraction in polynomial system", IEEE Trans. On automatic contro, vol. 49, no. 1, pp. 1846-1850.

[4] F. Hashemzade, M. J. Yazdanpanah, 2006, "Semi-global enlargement of domain of attraction for a class of affine nonlinear systems", IEEE, Iتnternational conference on control applications, pp. 2257-2262.

[5] Trong B.Ngye, M. A. Pai, I. A. Hisken, 2000, "Direct computation of critical clearing time using trajectory sensitivities", IEEE, Power engineering society summer mitting, vol 1, pp. 604-608.

[6] S. Jiriwibhakorn, A.H. Coonick **, 2000, "**Fast critical clearing time estimation of a large power systemusing neural networks and Sobol sequences**"** , IEEE، Power Engineering Society Summer Meeting **,** pp 522-527، vol. 1.

[7] A. S. Bazanella, P. Kototovic, A. S. Silva, 2004, "A dynamic extension for L_gV controllers", IEEE trans on automatic control, pp.588-592.

[8] M. A. Pai, 1981, "Power system stability", North-Holland publication company.

[9] M. Galaz, R. Ortega, A. S. Bazanella, A. M. Stankovic, 2003, "An energy shaping approach to

[10] A. G. Bahbah, A. A. Girgis, 1999, "An investigation on the effect of line reclosing on transient stability assessment for multi-mashine power systems", IEEE**,** Power Engineering Society Summer Meeting, pp. 1082-1087.

[11] J. E. Rubio, 1986, "Control and Optimization: The Linear Treatment of Nonlinear Problems", Manchester University Press, Manchester, and John Wiely, New York and London.

[12] H. K. Khalil, 1996, "Nonlinear systems"، Prentice Hall، 2nd Edition.

[13] Walter Rudin, 1986, "Real and complex analysis", McGraw-Hill publisher.

[14] G.Choque, 1996, ،"Lectureson Analysis. NewYork: Benjamin".

[15] A. V. Kamyad, M.Keyanpour, M. H. Farahi, 2007, "A New Approach for Solving of Optimal Nonlinear Control Problems." , Appl. Math And Computations.

[16] Barra G, 1981, "Measure theory and integration", John Willy and sons.

[17] J.Munkres, 2000, "Topology", published by Prentice Hall; 2nd edition.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.1.1]