مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۲، تابستان ۱۳۸۹، صفحه ۱۹-۱۱

طراحی قانون هدایت تناسبی-انتگرالی با استفاده از ملاک دایره

ایمان محمدزمان[۱]، حمیدرضا مومنی[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، دانشگاه تربیت مدرس، mohammadzaman@modares.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، momeni_h@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۳/۷، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۵/۱۸)

چکیده: در این مقاله یک قانون هدایت تناسبی-انتگرالی به‌منظور صفر کردن نرخ چرخش خط دید ارائه شده که در آن شرط پایداری حلقه هدایت در حضور دینامیک خودخلبان و جستجوگر با استفاده از ملاک دایره مورد ارزیابی قرار گرفته است. شرط ارائه شده یک محدوده برای زمان باقیمانده تا برخورد ارائه نموده که می‌تواند علاوه بر تضمین پایداری به عنوان ابزار طراحی پارامترهای قانون هدایت، خودخلبان و جستجوگر در نظر گرفته شود. شرط پایداری قانون هدایت جدید نسبت به قانون ناوبری تناسبی دارای فضای پایداری بیشتری بوده و از محافظه‌کاری کمتری برخوردار است. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده آن است که قانون هدایت جدید نسبت به قانون ناوبری تناسبی دارای قوام بیشتری نسبت به مانور هدف بوده و عملکرد بهتری از خود نشان داده است

کلمات کلیدی: هدایت تناسبی-انتگرالی، ملاک دایره، دینامیک خودخلبان.

PI Guidance Law Design using Circle Criterion

I. Mohammadzaman, H. Momeni

Abstract: In this paper, a PI guidance law is proposed to nullify the LOS rate. Stability of the guidance dynamics including autopilot and seeker dynamics is analyzed by employing circle criterion. Stability conditions give an analytical bound for the time of the flight up to which stability can be assured. The stability bound of the new guidance law is less conservatism than PN guidance law. Also, this approach can be used as a tool for Guidance, Autopilot and seeker parameters design. Simulation results show the effectiveness and robustness of the proposed guidance law against maneuvering target as compared to PN.

Keywords: PI Guidance, Circle criterion, Autopilot Dynamic.

فهرست علایم

a: شتاب

R: فاصیه نسبی رهگیر و هدف

r: نرخ چرخش خط دید رهگیر و هدف

t: زمان

t_f: زمان پرواز

t_{go}: زمان باقیمانده پرواز

V_C: سرعت نزدیک‌شونگی رهگیر و هدف

ξ: ضریب میرایی

τ_1: ثابت زمانی رهگیر

ω: فرکانس

ω_n: فرکانس طبیعی

زیرنویس:

c: مقدار مرجع

m: رهگیر

M: مقدار اندازه‌گیری‌شده

r: راستای طولی خط دید رهگیر و هدف

t: هدف

θ: راستای جانبی خط دید رهگیر و هدف

0: مقدار اولیه

نویسنده عهده دار مکاتبات: حمیدرضا مومنی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.3.3]

۱- مقدمه

قوانین موجود در زمینه هدایت رهگیرها در اکثر مقالات و تحقیقات و کاربردهای عملی از ناوبری تناسبی استفاده کرده و این روش به عنوان یک معیار برای ارزیابی قوانین هدایت جدید مطرح می‌باشد [۱]-[۳]. علت عمده استفاده از آن سادگی، عملکرد خوب و پیاده‌سازی آسان آن است. لذا بهبود این روش همواره مد نظر محققین بوده است. در سال‌های اخیر روش‌های مختلفی به‌منظور بهبود قانون ناوبری تناسبی ارائه شده است. در مرجع [۴]-[۷] کلاس جدیدی از قوانین ناوبری تناسبی با استفاده از روش لیاپانوف و حل مساله پایداری با فرض ایده‌آل بودن دینامیک رهگیر به‌دست آمده است. تابع لیاپانوف در این حالت، مربع نرخ چرخش خط دید در نظر گرفته شده‌است. در [۸] یک قانون هدایت با استفاده از ایده ناوبری تناسبی و کنترل مد لغزشی پیشنهاد شده است. سطح لغزش متناسب با نرخ چرخش خط دید انتخاب شده و مانور هدف به‌صورت نامعینی محدود، درنظر گرفته شده است. در [۹] با ارائه رویکرد جدیدی از پایداری زمان محدود، یک قانون هدایت با همگرایی زمان محدود بر اساس نامساوی دیفرانسیلی لیاپانوف ارائه شده است. این قانون در حالت‌های خاص مشابه قانون هدایت مد لغزشی بوده و شرط پایداری زمان محدود را نیز ارضا می‌کند. در [۱۰] یک بهره متغیر با زمان با استفاده از پارامتریزاسیون یولا و استفاده از سیستم منجمد ارائه کرده که عملکرد بهتری نسبت به ناوبری تناسبی دارد.

روش‌های ذکرشده در بالا با فرض دینامیک ایده‌آل رهگیر توسعه داده شده است. این روش‌ها برای حالتی که در آن دینامیک جستجوگر، وسیله پرنده، خودخلبان و عملگر ایده‌آل بوده و تاخیری بین نرخ چرخش خط دید رهگیر و هدف و شتاب رهگیر وجود ندارد ، عملکرد مناسبی داشته و منجر به برخورد نقطه‌ای بین رهگیر و هدف بدون مانور می‌گردد. ولیکن در حالت واقعی با درنظر گرفتن دینامیک رهگیر، در انتهای مسیر برخورد، نرخ چرخش خط دید به سمت واگرایی میل کرده و لذا شتاب رهگیر نیز افزایش می‌یابد و حلقه هدایت به سمت ناپایداری حرکت می‌کند. این واگرایی تاثیر زیادی در فاصله از دست‌دهی[1] گذاشته و عملکرد حلقه هدایت را کاهش می‌دهد. در [۱۱]-[۱۳] قانون هدایت با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر با استفاده از تئوری مد لغزشی طراحی شده است. ولیکن کاربرد آن در سیستم‌های عملی به علت وجود نوسان، محدود می‌باشد. از آن‌جا که در بیشتر موارد قانون هدایت بایستی منجر به یک فرمان شتاب نرم و بدون نوسان برای رهگیر شود، تمامی قوانین هدایت مد لغزشی دارای مراحل هموارسازی بوده که منجر به ازدست دادن جزیی قوام نسبت به اغتشاش و نامعینی می‌شود. این مساله در کنترل مد لغزشی مرتبه بالا مورد توجه قرار گرفته‌است. در [۱۴] و [۱۵] الگوریتم هدایت بر پایه کنترل مد لغزشی مرتبه دوم مجانبی هموار به‌منظور ساختن سیستم هدایت و کنترل یکپارچه استفاده شده‌است. در این روش با وجود مانور هدف، سطح لغزش وابسته به شتاب هدف می‌باشد و لذا تخمینی از مانور هدف برای آن اجتناب ناپذیر است. همچنین با توجه به پیچیدگی قوانین بدست آمده با این روش، استفاده از آن در سیستم‌های عملی محدود می‌باشد. در [۱۶] و [۱۷] با استفاده از ایده ناوبری تناسبی یک قانون هدایت پیش‌فاز برای رسیدن به فاصله ازدست‌دهی صفر با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر ارائه کرده است. ولیکن این قانون نسبت به نویز حلقه هدایت دارای حساسیت زیادی بوده و فرضیات درنظر گرفته شده در این حالت، باعث کاهش عملکرد این قانون در حالت واقعی خواهد شد. بطوریکه عملکرد مناسب آن با درنظر گرفتن معادلات سینماتیک غیرخطی و در حضور مانور هدف سوال برانگیز می‌باشد و پیاده‌سازی عملی آن نیز با مشکلاتی همراه خواهد بود.

در این مقاله از هدایت تناسبی-انتگرالی برای طراحی قانون هدایت استفاده شده است. این قانون بدون اضافه کردن سنسور جدید به سیستم، از نرخ چرخش خط دید و زاویه خط دید (انتگرال نرخ چرخش خط دید) برای محاسبه قانون هدایت استفاده نموده و مشکلات پیاده‌سازی نیز در آن وجود ندارد.

در [۱۸] از روش ملاک دایره برای تحلیل حلقه هدایت با درنظر گرفتن قانون ناوبری تناسبی استفاده شده و شروط کافی برای پایداری بدست آمده است. از آن‌جا که می‌توان حلقه هدایت را بصورت یک سیستم خطی غیر متغیر با زمان و یک بهره متغیر با زمان مدل نمود، ملاک دایره می‌تواند یک ابزار مناسب برای تعیین ناحیه پایداری آن باشد. در این مقاله با استفاده از ملاک دایره، قانون هدایت تناسبی-انتگرالی مناسب برای صفر کردن نرخ چرخش خط دید و تضمین پایداری حلقه هدایت با وجود دینامیک خودخلبان و جستجوگر طراحی شده است. با استفاده از شرط بدست آمده می‌توان بهره‌های قانون هدایت تناسبی-انتگرالی را طوری تنظیم نمود که ناحیه همگرایی قانون هدایت جدید نسبت به ناحیه همگرایی قانون ناوبری تناسبی ارائه‌شده در [۱۸] افزایش یابد. همچنین تحلیل پایداری حلقه هدایت نشان داده است که پایداری قانون هدایت تناسبی-انتگرالی از محافظه‌کاری کمتری نسبت به پایداری قانون ناوبری تناسبی ارائه‌شده در[۱۸] برخوردار است.

[1] Miss distance

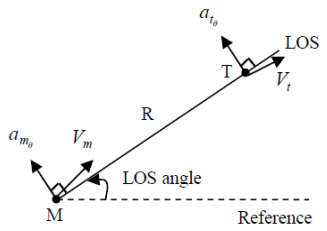
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.3.3]

۲- سینماتیک نسبی بین رهگیر و هدف

با توجه به شکل (۱)، سینماتیک نسبی بین رهگیر و هدف در مختصات دو بعدی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [۲۰]:

$$\ddot{R}R = r^2R + a_{t_r} - a_{m_r} \quad (۱)$$

$$\dot{r} = -2\frac{\dot{R}}{R}r + \frac{1}{R}(a_{t_\theta} - a_{m_\theta}) \quad (۲)$$



شکل ۱: سینماتیک نسبی رهگیر و هدف در مختصات دو بعدی

که در آن R فاصله نسبی رهگیر و هدف، $\dot{R}$ و $\ddot{R}$ مشتق اول و دوم فاصله نسبی هدف و رهگیر نسبت به زمان، r نرخ چرخش خط دید، a_{t_r} و a_{m_r} به‌ترتیب شتاب هدف و رهگیر در راستای خط دید و a_{t_θ} و a_{m_θ} به‌ترتیب شتاب هدف و رهگیر در راستای عمود بر خط دید می‌باشند. اگر رهگیر با سرعت نزدیک‌شوندگی ثابت $V_C = -\dot{R}$ به هدف برخورد نماید، می‌توان نوشت:

$$R = V_C t_{go} \quad (۳)$$

که در آن t_{go} نشان‌دهنده زمان باقیمانده تا برخورد بین رهگیر و هدف می‌باشد و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$t_{go} = t_f - t, \qquad t_f = R_0/V_C \quad (۴)$$

با استفاده از رابطه (۳)، معادله غیرخطی (۲) تبدیل به معادله خطی زیر می‌گردد:

$$V_C t_{go}\dot{r} - 2V_C r = -a_{m_\theta} + a_{t_\theta} \quad (۵)$$

با توجه به ایده ناوبری موازی، اگر جهت خط دید نسبت به فضای اینرسی ثابت نگه داشته شود یا به عبارت دیگر خط دید در هر لحظه موازی خط دید اولیه نگه داشته شود و فاصله هدف و رهگیر نیز در حال کم شدن باشد($\dot{R} < 0$)، رهگیر در مسیر برخورد قرار داشته و برخورد بین رهگیر و هدف حتمی خواهد بود[۲]. به عبارت دیگر بایستی نرخ چرخش خط دید صفر گردد. در قانون هدایت تناسبی، از نرخ چرخش خط دید برای تعقیب بین رهگیر و هدف استفاده می‌شود. در این مقاله قانون هدایت پیشنهادی علاوه بر استفاده از نرخ چرخش خط دید، از انتگرال نرخ چرخش خط دید نیز استفاده کرده و قانون هدایت تناسبی-انتگرالی بصورت زیر می‌باشد:

$$a_c = (\frac{K_1}{s} + K_2)V_C r_M \quad (۶)$$

که در آن K_1 و K_2 ضرایب قابل تنظیم قانون هدایت و r_M نرخ چرخش خط دید اندازه‌گیری شده توسط جستجوگر می‌باشد. در بسیاری از مقالات، دینامیک رهگیر و خودخلبان را بصورت ایده‌آل درنظر گرفته و a_{m_θ} همان فرمان شتاب ایجادشده توسط قانون هدایت می‌باشد. ولیکن در حالت واقعی، سیستم پرنده شامل دینامیک جستجوگر، وسیله پرنده، خودخلبان و عملگر می‌باشد و درنظر نگرفتن این دینامیک در طراحی قانون هدایت ممکن است حتی منجر به ناپایداری حلقه هدایت شود. بطور کلی دینامیک جستجوگر می‌تواند بصورت زیر مدل شود:

$$G_1(s) = \frac{r_M(s)}{r(s)} \quad (۷)$$

همچنین دینامیک رهگیر در حالت حلقه بسته و با وجود خودخلبان را می‌توان بصورت زیر نمایش داد:

$$G_2(s) = \frac{a_{m_\theta}(s)}{a_c(s)} \quad (۸)$$

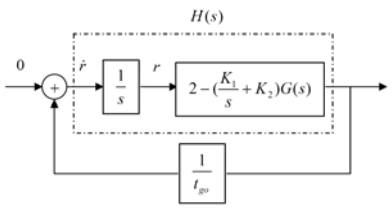
با استفاده از روابط (۶) الی (۸)، شتاب رهگیر بصورت زیر بدست می‌آید:

$$a_{m_\theta} = G_1(s)G_2(s)(\frac{K_1}{s} + K_2)V_C r \quad (۹)$$

که در آن $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ پایدار مجانبی می‌باشد. با قرار دادن رابطه (۹) در معادله (۵)، سینماتیک نسبی خطی‌شده رهگیر و هدف با فرض هدف بدون مانور بصورت زیر بدست می‌آید:

$$t_{go}\dot{r} = \left(2 - (\frac{K_1}{s} + K_2)G(s)\right)r \quad (۱۰)$$

در شکل (۲)، حلقه هدایت تناسبی-انتگرالی که از یک سیستم خطی غیر متغیر با زمان $H(s)$ و یک بهره متغیر با زمان $1/t_{go}$ تشکیل شده نشان داده شده است. در این شکل مانور هدف a_{t_θ} برابر با صفر فرض شده است.



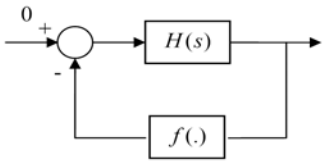
شکل۲: حلقه هدایت تناسبی-انتگرالی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.3.3]

۳- روابط ریاضی ملاک دایره

یک سیستم حلقه‌بسته مطابق شکل ۳ که شامل ورودی صفر، تابع تبدیل سیستم خطی غیر متغیر با زمان در مسیر پیشرو و بهره غیرخطی متغیر با زمان مثبت در مسیر فیدبک است را درنظر بگیرید. فرض کنید[۱۹]:

فرض ۱: در تابع تبدیل $H(s)=q(s)/p(s)$ چند جمله‌ای‌های $p(s)$ و $q(s)$ نسبت به هم اول، $q(s)$ مونیک[1] و سیستم اکیدا سره[2] باشد.



شکل۳: فرم کلی سیستم درنظر گرفته شده

فرض ۲: $f(.)$ تابعی از زمان و متغیرهای حالت بوده و برای تضمین وجود و یکتایی پاسخ معادله دیفرانسیل برای هر شرایط اولیه، این تابع به اندازه کافی هموار باشد.

اطلاعات پایداری سیستم حلقه بسته از اعمال ملاک دایره به تابع غیرخطی $f(.)$ بدست می‌آید و این تابع دارای محدودیت زیر می‌باشد:

$$0 \le \alpha \le f(x,t) \le \beta < \infty, \qquad \forall x \in R^n, \quad \forall t \ge t_0 \quad (۱۱)$$

با این فرضیات و با استفاده از ملاک دایره، قضیه زیر شرایط کافی برای پایداری مطلق فراگیر[3] را بیان می‌کند:

قضیه ۱ : سیستم حلقه‌بسته نشان داده شده در شکل ۳ با فرضیات ارائه شده در بالا پایدار مطلق فراگیر است اگر[۱۹]:

الف) $p(s)+kq(s)$ برای $\forall k \in [\alpha,\beta]$، صفرهایی در نیم‌صفحه سمت راست $\mathrm{Re}[s]>0$ نداشته باشد .

ب) رابطه زیر به ازای $\forall \omega \in R$ برقرار باشد:

$$\mathrm{Re}\{[p(-j\omega)+\alpha q(-j\omega)].[p(j\omega)+\beta q(j\omega)]\} \ge 0 \quad (۱۲)$$

با استفاده از این قضیه می‌توان شرط‌های کافی بر روی المان غیرخطی $f(x,t)$ را برای تضمین پایداری سیستم حلقه بسته بدست آورد.

۴- پایداری قانون هدایت تناسبی-انتگرالی

ملاک دایره بیشتر از آن که برای بررسی پایداری مورد استفاده قرار گیرد می‌تواند به عنوان یک ابزار طراحی در نظر گرفته شده و از آن برای محدود کردن حدود بالا و پایین المان غیرخطی $f(x,t)$ استفاده کرد. به عبارت دیگر در مساله پایداری حلقه هدایت از آن‌جا که المان غیرخطی مطابق شکل ۲ بر اساس زمان باقیمانده تا برخورد t_{go} می‌باشد، می‌توان حدود بالا و پایین زمان باقیمانده تا برخورد را به منظور تضمین پایداری حلقه هدایت بدست آورد. با توجه به شکل ۲ می‌توان نوشت:

$$H(s)=q(s)/p(s)=(1/s)\left(2-(\frac{K_1}{s}+K_2)G(s)\right) \quad (۱۳)$$

همچنین تابع غیرخطی $f(x,t)$ بصورت زیر می‌باشد:

$$0 \le \alpha = 1/t_f \le 1/t_{go} \le \beta \quad (۱۴)$$

که در آن β حد بالای تابع غیرخطی یا به عبارت دیگر کوتاهترین زمان باقیمانده تا برخورد بوده که پایداری حلقه هدایت تضمین می‌باشد. لذا بدست آوردن حد β برای تحلیل پایداری حلقه هدایت از اهمیت خاصی برخوردار است. به‌منظور استفاده از قضیه ۱ بایستی ابتدا فرضیات لازم آن را بررسی نمود.

لم ۱: تابع تبدیل $G(s)=n(s)/d(s)$ که در آن $n(s)$ و $d(s)$ نسبت به هم اول هستند را در نظر بگیرید. مطابق رابطه (۱۳) در تابع تبدیل $H(s)=q(s)/p(s)$، $p(s)$ و $q(s)$ نسبت به هم اول هستند اگر شرایط زیر برقرار باشد:

$$n(s)\big|_{s=0} \ne 0 \quad (۱۵)$$

$$d(s)\big|_{s=-K_1/K_2} \ne 0 \quad (۱۶)$$

$$K_1 \ne 0 \quad (۱۷)$$

اثبات: برای اثبات لم ۱ از لم زیر استفاده می‌شود:

لم ۲: دو چند جمله‌ای نسبت به هم اول $a(z)$ و $b(z)$ که در آن $\deg a(z) < \deg b(z)$ بوده و ثابت‌های c_1,c_2,c_3,c_4 که در آن $c_1c_4-c_2c_3 \ne 0$ می‌باشد را در نظر بگیرید. آن‌گاه چندجمله‌ای‌های $c_1a(z)+c_2b(z)$ و $c_3a(z)+c_4b(z)$ نیز نسبت به هم اول می‌باشند[۱۸].

با استفاده از رابطه (۱۳) می‌توان نوشت:

$$sq(s) = -2sd(s)+(K_1+K_2s)n(s) \quad (۱۸)$$

$$p(s) = sd(s) \quad (۱۹)$$

از آن‌جا که $n(s)$ و $d(s)$ نسبت به هم اول هستند به‌منظور این‌که $(K_1+K_2s)n(s)$ و $sd(s)$ نسبت به هم اول باشند بایستی هیچ ریشه

[1] Monic
[2] Strictly Proper
[3] Global Absolute Stability

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.3.3]

مشترکی نداشته باشند و لذا بایستی شرط (۱۵) و (۱۶) برقرار باشد. اگر این دو عبارت نسبت به هم اول باشند با توجه به لم ۲، $p(s)$ و $sq(s)$ نیز نسبت به هم اول هستند. همچنین اگر $K_1 \neq 0$ باشد، آن‌گاه $K_1 n(0) \neq 0$ بوده و با استفاده از رابطه (۱۸) و (۱۹) می‌توان گفت، $p(s)$ و $q(s)$ نسبت به هم اول هستند.

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته شکل ۲ که در آن بهره متغیر با زمان $f(.)$ بصورت فریز شده با مقدار $k \in [\alpha, \beta]$ نشان داده شده است، بصورت زیر می‌باشد:

$$1 + kH(s) = 1 + (k/s)\left(2 - (\frac{K_1}{s} + K_2)G(s)\right) \quad (۲۰)$$

فرض کنید $G(s) = n(s)/d(s)$ بصورت زیر باشد:

$$n(s) = a_{n-j}s^{n-j} + a_{n-j-1}s^{n-j-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0 \quad (۲۱)$$

$$d(s) = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0 \quad (۲۲)$$

که در آن j اختلاف درجه بین صورت و مخرج تابع تبدیل $G(s)$ می‌باشد. رابطه (۲۰) را می‌توان با جایگذاری (۲۱) و (۲۲) بصورت زیر نوشت:

$$s^2 d(s) + k\big((K_1 + K_2 s)n(s) - 2sd(s)\big) = 0 \quad (۲۳)$$

به‌منظور بررسی شرط الف در قضیه ۱، شرط لازم و کافی برای این‌که عبارت بالا دارای هیچ صفری در سمت راست محور موهومی نباشد آن است که تمام ضرایب چندجمله‌ای بالا هم علامت باشند و لذا می‌توان نوشت:

$$b_{n-i-2} + kK_1 a_{n-j-i} - 2kb_{n-i-1} + kK_2 a_{n-j-i-1} > 0 \quad (۲۴)$$

که در آن $i = 0,1,\ldots,n$ می‌باشد. لذا شرط بالا می‌تواند محدودیت بر روی k گذاشته و منجر به محدودیت در محدوده تغییرات t_{go} شود. شرط پایداری (۲۴) با توجه به فریز کردن المان غیرخطی بدست آمده است.

همچنین به‌منظور بررسی شرط ب در قضیه ۱، در [۱۸] اثبات شده است که شرط پایداری سیستم شکل ۳ با وجود سیستم خطی غیرمتغیر با زمان $H(s)$ در مسیر پیشرو و المان غیرخطی $1/t_{go}$ در مسیر فیدبک آن است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$t_{go} \geq -\frac{\mathrm{Re}[H(j\omega)] + \alpha|H(j\omega)|^2}{1 + \alpha\,\mathrm{Re}[H(j\omega)]}, \qquad \forall \omega \neq 0 \quad (۲۵)$$

با استفاده از موارد ذکر شده در بالا و استفاده از روابط (۲۴) و (۲۵) می‌توان قضیه زیر را بیان نمود:

قضیه ۲: حلقه هدایت شکل ۲ با قانون هدایت تناسبی-انتگرالی پایدار است اگر شرایط (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) و (۲۴) برقرار بوده و محدوده پایداری از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$t_{go} > \max\{A_1, A_2\}$$

$$A_1 = \max_i \left\{ \frac{b_{n-i-2}}{2b_{n-i-1} - K_1 a_{n-j-i} - K_2 a_{n-j-i-1}} \right\}$$

$$A_2 = \max_\omega \left\{ \frac{(K_1/\omega^2)\,\mathrm{Re}[G(j\omega)] - K_2\,\mathrm{Re}[G(j\omega)/j\omega] + \alpha|H(j\omega)|^2}{1 + (\alpha K_1/\omega^2)\,\mathrm{Re}[G(j\omega)] - \alpha K_2\,\mathrm{Re}[G(j\omega)/j\omega]} \right\}$$

(۲۶)

در رابطه بالا، شرط A_1 از بررسی شرط قضیه ۱ الف و رابطه (۲۴) بدست آمده و به بررسی پایداری سیستم فریز شده می‌پردازد. شرط A_2 نیز از بررسی شرط قضیه ۱ ب و جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۲۵) استخراج شده است.

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت به شبیه‌سازی قانون هدایت ارائه‌شده و مقایسه آن با ناوبری تناسبی پرداخته می‌شود. تابع تبدیل دینامیک جستجوگر و خودخلبان به صورت فرم کلی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(s^2/\omega_n^2 + 2\xi s/\omega_n + 1)} \quad (۲۷)$$

شرط پایداری سیستم فریز شده با توجه به رابطه (۲۴) و شرط A_1 در رابطه (۲۶) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$K_1 > 0, \qquad K_2 > 2 \quad (۲۸)$$

$$t_{go} > \frac{2(2\tau_1\xi/\omega_n + 1/\omega_n^2)}{\tau_1 + 2\xi/\omega_n} \quad (۲۹)$$

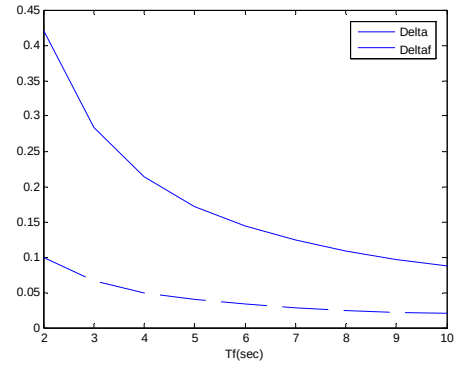
$$t_{go} > \frac{2\tau_1}{\omega_n^2} \quad (۳۰)$$

اگر $K_1 = 2$، $K_2 = 4$، $\tau_1 = 0.3$، $\xi = 0.5$ و $\omega_n = 10$ مطابق قضیه ۲ می‌توان شرط‌های پایداری سیستم را بدست آورده و با هم مقایسه نمود. اگر شرط پایداری نرمالیزه شده سیستم فریز شده بصورت $\delta_f = A_1/t_f$ در نظر گرفته شود می‌توان به بررسی شروط کافی پایداری (۲۵) و ارتباط بین آن‌ها پرداخت. در شکل (۴) مقادیر δ_f و $\delta = A_2/t_f$ بر حسب زمان پرواز نشان داده شده است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که شرط پایداری (۲۵) یک شرط محافظه‌کارانه‌تر از شرط پایداری سیستم فریز شده می‌باشد و بررسی پایداری سیستم فریز شده برای تضمین پایداری سیستم حلقه بسته کافی نیست.

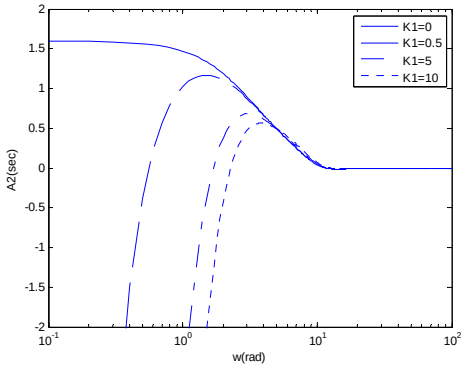
در شکل (۵) شرط پایداری A_2 در معادله (۲۶) به ازای پارامترهای ذکر شده در بالا و $\alpha = 0$ در فرکانس‌های مختلف و به ازای مقادیر مختلف بهره K_1 نشان داده شده است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که با افزایش بهره K_1 مقدار بیشینه شرط پایداری کاهش یافته و لذا ناحیه پایداری در شرط A_2 افزایش می‌یابد. در شکل

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.3.3]

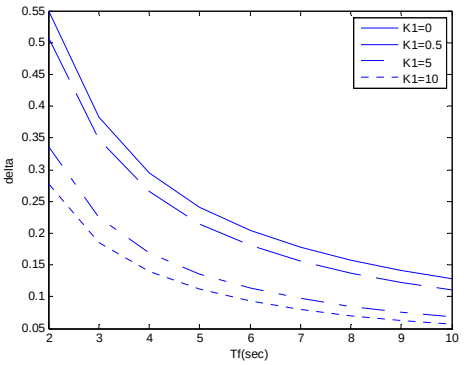
(۶) شرط پایداری نرمالیزه شده (۲۶) به ازای مقادیر مختلف بهره K_1 نشان داده شده است. با توجه به شکل، قانون هدایت جدید دارای محدوده پایداری بیشتری نسبت به ناوبری تناسبی ($K_1 = 0$) بوده و با افزایش بهره انتگرالی، ناحیه پایداری افزایش یافته است.



شکل۴: نمایش δ_f و δ بر حسب زمان پرواز به ازای $K_1 = 2$، $K_2 = 4$، $\tau_1 = 0.3$، $\xi = 0.5$ و $\omega_n = 10$

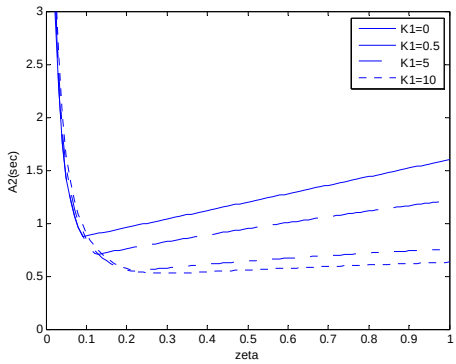


شکل۵: شرط پایداری A_2 به ازای $\alpha = 0$، $K_2 = 4$ ، $\tau_1 = 0.3$، $\xi = 0.5$ و $\omega_n = 10$ مقادیر مختلف K_1

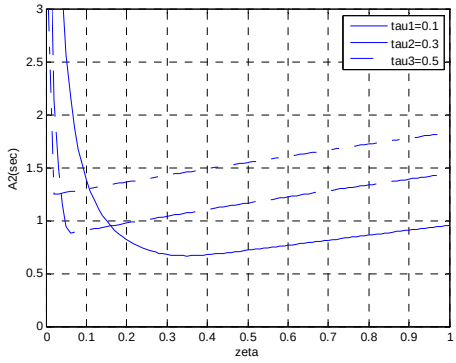


شکل۶: شرط پایداری نرمالیزه شده بر حسب زمان پرواز به ازای $K_2 = 4$ ، $\tau_1 = 0.3$، $\xi = 0.5$ و $\omega_n = 10$ و مقادیر مختلف K_1

در شکل (۷) شرط پایداری A_2 بر حسب ضریب میرایی خودخلبان و به ازای مقادیر مختلف بهره K_1 نشان داده شده است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که با افزایش بهره K_1 محدوده پایداری افزایش یافته است. همچنین می‌توان از شکل (۷) برای طراحی ضریب میرایی خودخلبان استفاده نمود. مثلا برای یک سیستم با بهره $K_1 = 5$ می‌توان با انتخاب و طراحی $\xi = 0.2$ به بیشترین ناحیه پایداری در حلقه هدایت رسید. در شکل (۸) شرط پایداری A_2 بر حسب ثابت زمانی جستجوگر و در شکل (۹) بر حسب فرکانس طبیعی خودخلبان به ازای مقادیر مختلف بهره K_1 نشان داده شده است. در این حالت نیز می‌توان از این شکل‌ها برای طراحی بهترین ضریب میرایی خودخلبان به‌منظور افزایش ناحیه پایداری استفاده نمود.



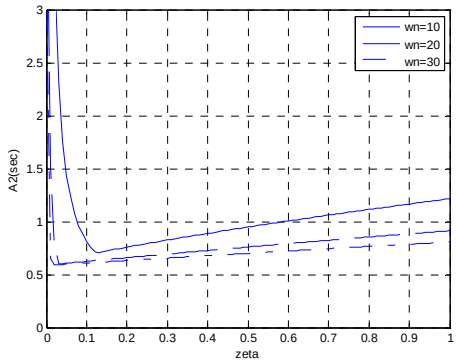
شکل۷: شرط پایداری A_2 بر حسب ξ به ازای $\alpha = 0$، $K_2 = 4$ ، $\tau_1 = 0.2$ و $\omega_n = 10$ مقادیر مختلف K_1



شکل۸: شرط پایداری A_2 بر حسب ξ به ازای $\alpha = 0$، $K_1 = 0.5$ $K_2 = 4$ و $\omega_n = 10$ و مقادیر مختلف τ_1

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.3.3]



شکل۹: شرط پایداری A_2 بر حسب ζ به ازای $\alpha = 0$، $K_1 = 0.5$ ، $K_2 = 4$ و $\tau_1 = 0.2$ و مقادیر مختلف ω_n

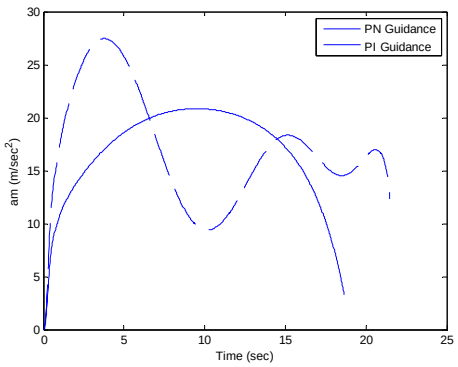
در این قسمت به شبیه‌سازی غیرخطی قانون هدایت جدید در مختصات دوبعدی برای دو سناریوی پروازی مختلف پرداخته و نتایج به‌دست آمده با قانون ناوبری تناسبی مقایسه می‌گردد. در سناریوی اول، هدف در فاصله حدود ۲۲۰۰ متری از رهگیر درنظر گرفته شده و مکان اولیه هدف و رهگیر در مختصات کارتزین $R_{t_0} = [2000 \quad 1000]^T \ m$، $R_{m_0} = [0 \quad 0]^T \ m$، سرعت اولیه هدف و رهگیر در مختصات کارتزین به ترتیب $v_{t_0} = [13.4 \quad 62.6]^T \ m/s$ و $v_{m_0} = [169.9 \quad 107.3]^T \ m/s$ و مانور هدف در دستگاه قطبی به‌صورت $a_{t_r} = 5, \quad a_{t_\theta} = 5 \quad m/s^2$ می‌باشد. شرط توقف شبیه‌سازی رسیدن به فاصله ازدست‌دهی صفر و یا همان برخورد بین رهگیر و هدف می‌باشد. ضریب ناوبری در قانون ناوبری تناسبی، $K_2 = 4$ و $K_1 = 0$ در نظر گرفته شده‌است و ضرایب موجود در قانون هدایت جدید به‌صورت $K_2 = 4$ و $K_1 = 2$ می‌باشد. در جدول (۱) مشخصات به‌دست آمده با اعمال این دو قانون آورده شده‌است. با توجه به شبیه‌سازی انجام شده، زمان لازم به‌منظور برخورد بین رهگیر و هدف در قانون هدایت جدید نسبت به ناوبری تناسبی کمتر می‌باشد. همچنین یکی دیگر از معیارهای مقایسه بین قوانین هدایت مختلف، مقدار انرژی مورد نیاز برای اعمال سیگنال کنترلی می‌باشد. در این مساله، انتگرال مجذور شتاب جانبی اعمال‌شده به رهگیر به عنوان معیاری برای مقایسه انرژی درنظر گرفته شده‌است. مطابق جدول (۱) مشاهده می‌گردد که انرژی مورد نیاز در قانون هدایت جدید کمتر از مقدار انرژی مورد نیاز با استفاده از قانون هدایت تناسبی می‌باشد.

جدول ۱: مقایسه مشخصات بدست آمده توسط قانون هدایت تناسبی و هدایت تناسبی-انتگرالی در سناریوی اول

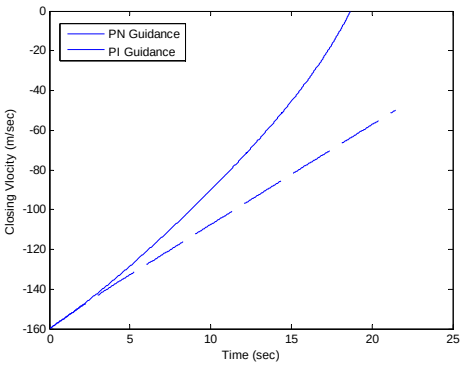
	زمان برخورد(ثانیه)	انرژی کنترلی
ناوبری تناسبی	۲۲/۴۳	۱۶۴۸
تناسبی-انتگرالی	۲۱	۱۴۷۰

در سناریوی دوم مانور هدف در دستگاه قطبی به‌صورت $a_{t_r} = 5, \quad a_{t_\theta} = 15 \quad m/s^2$ می‌باشد. در این حالت، با اعمال قانون هدایت تناسبی، رهگیر به هدف برخورد نکرده و در ثانیه ۱۸/۶۷، $\dot{R} > 0$ می‌گردد و منجر به از دست دادن هدف و فاصله ازدست‌دهی ۵۳۰ متر می‌گردد. ولی با اعمال قانون هدایت پیشنهادشده، رهگیر و هدف با یکدیگر برخورد کرده و منجر به فاصله ازدست‌دهی صفر می‌گردد. در شکل (۱۰) شتاب اعمال‌شده به رهگیر توسط قانون هدایت پیشنهادشده و قانون هدایت تناسبی نشان داده شده‌است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که با نزدیک‌شدن سرعت نزدیک‌شوندگی رهگیر به هدف به سمت صفر، شتاب اعمالی نیز کاهش یافته و به صفر نزدیک می‌گردد. در شکل (۱۱)، سرعت نزدیک‌شوندگی رهگیر به هدف نشان داده شده‌است. با توجه به این شکل، در قانون هدایت تناسبی در این سناریوی پروازی $\dot{R} > 0$ شده که نشان‌دهنده ناپایدار شدن سیستم بوده و رهگیر قادر به تعقیب هدف نمی‌باشد. در شکل (۱۲) نرخ چرخش خط دید در هر دو قانون نشان داده شده‌است. همان‌طور که از شکل مشخص است، قانون هدایت جدید باعث قرار گرفتن موشک در نزدیک خط دید شده و لذا نرخ چرخش خط دید نسبت به قانون ناوبری تناسبی به صفر نزدیک‌تر است. این مساله از آنجا حایز اهمیت است که در سناریوی واقعی و شبیه‌سازی غیرخطی و متغیر با زمان پرواز، یکی از مسایل مهم در پایداری موشک سریع صفر شدن نرخ چرخش خط دید است که منجر به ثابت ماندن سرعت نزدیک‌شوندگی موشک و هدف می‌باشد. لذا سیستم قوام بیشتری در برابر مانور هدف خواهد داشت. در جدول (۲) مشخصات به‌دست آمده توسط هر دو قانون در سناریوی دوم نشان داده شده‌است. با توجه به این سناریو می‌توان مشاهده کرد که قانون هدایت جدید، ناحیه درگیری بین رهگیر و هدف را افزایش داده‌است.

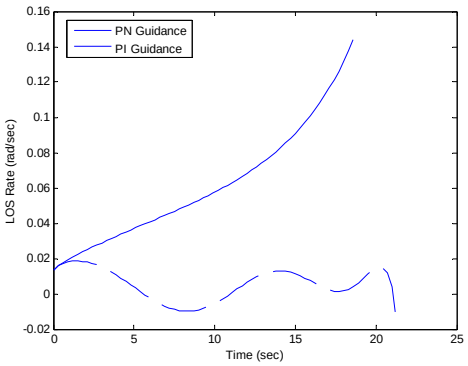
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.3.3]



شکل ۱۰: شتاب جانبی اعمال شده به رهگیر در سناریوی دوم



شکل ۱۱: سرعت نزدیک‌شوندگی رهگیر به هدف در سناریوی دوم



شکل ۱۲: نرخ چرخش خط دید در سناریوی دوم

جدول ۲: مقایسه مشخصات بدست آمده توسط قانون هدایت جدید و هدایت تناسبی در سناریوی دوم

فاصله ازدست‌دهی	زمان اتمام شبیه‌سازی (ثانیه)	
۵۳۰ (متر)	۱۸/۶۷	ناوبری تناسبی
صفر	۲۱/۵	تناسبی-انتگرالی

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک قانون هدایت تناسبی-انتگرالی ارائه شد و تحلیل پایداری آن با درنظر گرفتن دینامیک خودخلبان و جستجوگر با استفاده از ملاک دایره صورت پذیرفت. از آن‌جا که مساله هدایت یک مساله زمان محدود بوده، با استفاده از ملاک دایره و به ازای زمان پرواز محدود، حد پایین پایداری حلقه هدایت بر اساس زمان باقیمانده تا برخورد بدست آمده است. از شروط پایداری بدست آمده می‌توان برای طراحی ضرایب قانون هدایت و تعیین پارامترهای مناسب خودخلبان و جستجوگر استفاده نمود. حد پایداری بدست آمده برای قانون جدید دارای محافظه‌کاری کمتری نسبت به ناوبری تناسبی بوده و دارای ناحیه پایداری بیشتری می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی غیرخطی نشان می‌دهد که با استفاده از قانون هدایت جدید، رهگیر در مدت زمان کمتری به هدف برخورد کرده و از انرژی کمتری استفاده می‌نماید. همچنین با استفاده از شبیه‌سازی یک سناریوی پروازی مشاهده می‌گردد که ناحیه درگیری در این حالت نسبت به قانون هدایت تناسبی افزایش یافته‌است.

مراجع

[1] Zarchan, P. "*Tactical and Strategic Missile Guidance*", AIAA Series, Vol. 199, 2002.

[2] Shneydor, N.A., "*Missile Guidance and Pursuit; Kinematics, Dynamics and Control*", Horwood Series in Engineering Science, 1998.

[3] Yanushevsky, R.; "*Modern Missile Guidance*", CRC Press, Tailor&Francis Group, 2008.

[4] Yanushevsky, R. and Boord, W., 2005, "Lyapunov approach to guidance laws design", *Nonlinear Analysis*, 743-749.

[5] Yanushevsky, R. and Boord, W., 2005, "New approach to guidance law design", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 28, No.1, 162-166.

[6] Lechevin, N. and Rabbath, C.A., 2005, "Lyapunov-based nonlinear missile guidance", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 27, No.6, 1096-1102.

[7] Yanushevsky, R., 2006, "Concerning Lyapunov-based guidance", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 29, No.2, 509-511.

[8] Moon, J., Kim, K. and Kim, J., 2001, "Design of missile Guidance law via variable structure control", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 24, No.4, 659-664.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.3.3]

[9] Zhou, D., and Sun, S., 2009 “Guidance Laws with Finite Time Convergence”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 6, 1838-1846.

[10] محمدزمان. ایمان، مومنی، حمیدرضا. ۱۳۸۷، ”طراحی قانون هدایت جدید به‌منظور مقابله با اهداف مانوردار“، *شانزدهمین کنفرانس مهندسی برق ایران*، دانشگاه تربیت مدرس، ۴۰- ۴۷.

[11] Shima, T., Idan, M. and Golan, O.M., 2006, "Sliding mode control for integrated missile autopilot guidance," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.29, No.2, 250-260.

[12] Lum, K.Y., Xu, J.X, Abidi, K. and Xu, H., 2008, "Sliding Mode Guidance Law for Delayed LOS Rate Measurement," *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Honolulu, Hawaii.

[13] Koren, A., Idan, M. and Golan, O.M., 2008, "Integrated Sliding Mode Guidance and Control for a Missile with On–Off Actuators," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 31, No.1, 204-214.

[14] Shtesell, Y.B and Tournes, C.H., 2009, “Integrated Higher-Order Sliding Mode Guidance and Autopilot for Dual-Control Missiles,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 6, 1838-1846.

[15] Shtesell, Y.B and Shkolnokov, I.A., 2003 “Integrated guidance and control of advanced interceptors using second order sliding modes”, *Proceeding of 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, 4587-4592.

[16] Gurfil, P., Jodorkovsky, M. and Guelman, M., 2001, “Neoclassical Guidance for homing missiles”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 24, No.3, 452-459.

[17] Gurfil, P., 2003, “Zero-miss-distance guidance law based on line-of-sight rate measurement only”, *Control Engineering Practice*, Vol. 11, 819-832.

[18] Gurfil, P., Jodorkovsky, M., and Guelman, M., 1998, “Finite Time Stability Approach to Proportional Navigation Systems Analysis”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 6, 853-861.

[19] Curran, P.F., 1993, “Proof of the circle criterion for state space systems via quadratic Lyapunov functions - Part 2”, *International Journal of Control*, Vol. 57, No. 4, 957-9691.

[20] حیرانی نوبری، جعفر، ۱۳۸۱، ”نگرش نوین به هندسه درگیری با الهام از هدایت ناوبری تناسبی“، *دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی*.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.3.3]