مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۲، تابستان ۱۳۸۹، صفحه ۵۴-۴۴

مدل‌سازی تبانی واحدهای تولیدی در بازار برق با کمک نظریه بازی‌ها

محمد عظیم آرمین[۱]، حبیب رجبی مشهدی[۲]، محمدرضا لطفعلی‌پور[۳]

[۱]دانشجوی دکترای برق قدرت، دانشگاه فردوسی مشهد، *az.armin@Gmail.com*

[۲]دانشیار گروه برق دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، *h_mashhadi@um.ac.ir*

[۳]دانشیار گروه اقتصاد دانشکده علوم اداری و اقتصاد، دانشگاه فردوسی مشهد، *lotfalipour@Eco.um.ac.ir*

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۵/۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۶/۱۵)

چکیده: بازار برق، به دلیل ویژگی‌های خود نمی‌تواند به شکل یک بازار رقابت کامل در نظر گرفته شود. به ویژه به دلیل تعداد نسبتا کم تولیدکنندگان می‌توان آن را یک بازار رقابت چندجانبه نامید. این مسئله با بروز بحران‌هایی در دهه ۹۰ میلادی و سال ۲۰۰۱ در بازارهای برق در جهان نمود بیشتری یافت. در این حالت قدرت عوامل تشکیل‌دهنده، قیمت بازار را از مقدار رقابتی افزایش خواهد داد. از طرفی امکان تبانی بین واحدهای بازار نیز وجود دارد که موجب خواهد شد تا قیمت‌ها در بازار بالاتر رود. از سویی، بالا رفتن قیمت در تبانی متاثر از وابستگی بار به قیمت در بازار است. در این مقاله، نخست ویژگی‌های بازار برق در ارتباط با تبانی به همراه برخی موارد دیده شده از تبانی در بازارهای برق دنیا تشریح شده است. سپس، یک مدل تحلیلی بر پایه نظریه بازی‌ها، برای رفتار بازیگران بازار در شرایط رقابتی و شکل‌گیری تبانی ارائه شده است. با کمک مدل ارائه شده، تغییرات قیمت بازار در شرایط رقابتی و هم‌چنین در شکل‌گیری تبانی مورد مطالعه قرار گرفته است و اثر کشش تقاضا بر نقطه تعادل تبانی بررسی شده است. بعلاوه، با کمک نتایج عددی بدست آمده از این مدل، تبانی با حالت انحصاری بازار مقایسه شده است و تفاوت‌های آنها نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: نظریه بازی‌ها، تعادل نش، بازار برق، بازار رقابت چندگانه، تبانی، انحصار

Analysis of Collusive Behavior of Generation Companies in Power Market using Game Theory

Mohammad Azim Armin, Habib Rajabi Mashhadi, Mohammadreza Lotalipour

Abstract: Power Market, due to unique characteristics of power system, can not be considered as a competitive market. It is much more like an oligopoly market where small numbers of Generation Companies (GenCos) compete to supply the market demand. It became more obvious in 1990s and 2001 as some major crisis hit power markets around the globe. In such a situation, the ability of market participants could raise prices over the competitive level. On the other hand, there is also possible GenCos collude and as a result the market prices rise. The ability of raising the price in collusion is highly dependent on price elasticity of demand. In this paper, at first several reported recent research works related to the collusive behavior in the power market are reviewed. Then, an analytic model based on game theory is proposed to analyze the behavior of participants in competitive and collusive market states. Using the proposed model on a simple system, variation of the market price in both competitive & collusive states are investigated and effects of price elasticity on equilibrium point in a collusive state are studied. Furthermore, the numerical results obtained from the proposed collusion model and a monopolistic model of the market, are compared and the differences are interpreted.

Keyword: Game Theory, Nash Equilibrium, Power Market, Oligopoly, Collusion, Monopoly

نویسنده عهده دار مکاتبات: حبیب رجبی مشهدی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]

فهرست پارامترها

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$	ضرایب تابع هزینه
P_i	میزان تولید واحد
P_d	میزان تقاضای بازار
P_i^0	تولید در یک بازار کاملا رقابتی
$C_i(P_i)$	هزینه واحد تولیدی
λ, μ_i, μ_i'	ضرایب قیود در تابع لاگرانژ
$B_i(P_i)$	پیشنهاد قیمت یک واحد
ρ	قیمت در بازار
β_{bi}	عرض از مبداء تابع پیشنهاد قیمت یک واحد
$\Delta\beta_i$	تغییر در مقدار پیشنهاد قیمت در بازار رقابتی
$\Delta\beta^c$	تغییر توافق شده در مقدار پیشنهاد قیمت در تبانی
$\Delta\pi_i$	تغییر در میزان سود واحد

۱- مقدمه

در یک بازار رقابتی برق، واحدهای نیروگاهی نمی‌توانند قیمت بازار را تحت تاثیر قرار دهند و به بیان دیگر آن‌ها قیمت را از بازار دریافت خواهند کرد[1]. در چنین حالتی آن‌ها تلاش خواهند کرد تا مقدار تولید خود را با توجه به قیمت بازار تعیین کنند [۱]. در این شرایط مقدار بهینه تولید بر اساس نقطه تلاقی منحنی هزینه نهایی واحد با قیمت بازار محاسبه می‌شود. اما در یک بازار بر پایه رقابت چندگانه این امکان برای واحدها وجود دارد تا قیمت بازار را تحت تاثیر قرار دهند. واحدی که خواستار افزایش قیمت بازار است می‌تواند این عمل را با افزایش قیمت پیشنهادی خود انجام دهد[2]. او می‌تواند این هدف را به شکل غیرمستقیم از کاهش تولید خود[3] نیز برآورده سازد یا این که هر دو عمل مذکور را هم‌زمان انجام دهد [۲].

در این حالت بازار مشابه یک سیستم اقتصادی است که بازیگران آن تمایل به کنترل آن دارند. واحدی در بازار که قابلیت تاثیرگذاری به یکی از دو طریق فوق بر قیمت بازار را دارد و می‌تواند آن را از سطح رقابتی بالاتر ببرد، دارای قدرت بازار است. این عمل باید به شکل سودمندانه انجام گرفته باشد یعنی از بالارفتن قیمت و کاهش مقدار فروش واحد، سودی نصیب او شده باشد. علاوه بر بالابردن قیمت از سطح رقابتی، توانایی واحد در حفظ این قیمت برای دوره‌ای از زمان نیز اهمیت دارد. اقتصاددانان و به تبع آن‌ها مهندسین بر پایه این دو نکته، مفهوم قدرت بازار را تعریف کرده‌اند [۲].

افزایش قیمت بازار علاوه بر سوءاستفاده از قدرت بازار توسط برخی از واحدها، می‌تواند از تصمیم مشترک تمامی واحدها یا بخش بزرگی از آن‌ها در افزایش قیمت خود ناشی گردد. در این حالت تبانی به شکل ضمنی[4] یا به صورت صریح صورت گرفته است. در یک تبانی ضمنی، ارتباطی بین واحدها وجود ندارد و واحدها صرفا بر اساس برداشتی که از نحوه قیمت‌دهی یکدیگر دارند، قیمت‌ها را در جهت سود بالاتر تنظیم می‌کنند. ممکن است تبانی با توافقی صریح شکل بگیرد که در این حالت واحدها برای کنترل قیمت با هم ارتباط می‌گیرند. بر خلاف آن‌چه در اعمال قدرت بازار قابل مشاهده است، تبانی بایستی در یک فرآیند زمان‌بر انجام گیرد. در یک تبانی (بویژه اگر تبانی به شکل ضمنی باشد) بایستی مراحل شناسایی و دوره اولیه بازار سپری گردد. هم‌چنین در اعمال قدرت بازار، شرایط مانند سطح بار و ساختار می‌تواند تاثیرگذار باشد، در حالی‌که در تبانی این امکان وجود دارد که واحدها در صورت همکاری بتوانند، حتی در شرایطی مانند پایین بودن سطح بار و یا سایر شرایط شبکه نیز مقدار قیمت بالایی را طلب کنند.

اما به هر حال در شکل‌گیری یک تبانی و عملیاتی شدن آن نیز عواملی می‌توانند تاثیرگذار باشند. به عنوان مثال مقدار تقاضا در صورت کاهش می‌تواند شرایطی را فراهم بیاورد که انجام تبانی چندان سودآور نباشد. در این حالت، واحدها تمایل دارند تا با کاهش قیمت خود سود بیشتری از بازار را بدست آورند. به عبارت دیگر کاهش قیمت می‌تواند تا حد یک قیمت ویژه ادامه یابد و پایداری تبانی را تهدید کند. به عبارت دیگر، این کاهش قیمت که به دلیل کاهش تقاضا صورت گرفته است دیگر برای افراد درون یک تبانی سودآور نخواهد بود. در برخی از بازارها، بروز دوره‌هایی از جنگ قیمت و تبانی بین واحدهای بازار مشاهده شده است که طی آن‌ها، تبانی به حالت تعلیق درآمده و پس از دوره‌هایی دوباره از سرگرفته شده است [۳].

بازار برق از بسیاری جهات یک بازار ویژه به شمار می‌رود. تعداد بازیگران آن در بیشتر بازارها اندک است و ماهیت کالای تولیدی آن همگن است و از این رو محلی ایده‌آل برای تبانی به شمار می‌رود. بطور کلی بالا بودن کشش تقاضا در بازار می‌تواند به سخت‌تر شدن شرایطی

[1] *Price Taker*
[2] *Financial Withholding*
[3] *Physical Withholding*
[4] *Tacit*

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]

که تبانی بایستی طی آن صورت گیرد، کمک کند. اگر چه مقدار کشش تقاضا در بازار برق برای انواع تقاضاهای مختلف از خانگی تا تجاری و صنعتی متفاوت است، اما به هر حال مقدار آن در بازار برق در کوتاه مدت، اندک است و قابل توجه نمی‌باشد. تفاوت توابع هزینه واحدها و اختلاف بین تکنولوژی آن‌ها، نیز یک مشکل اساسی در برقراری تبانی است. هرچه تکنولوژی‌های بکار رفته در واحدهای تولیدی متفاوت‌تر و در نتیجه اختلاف بین تابع هزینه آن‌ها بیشتر باشد، امکان دستیابی به سود و ولی در برخی از بازارهای برق مانند بازار انگلستان و ولز، این توابع هزینه تقریبا مشابه هستند [۱].

نمونه‌ای از تبانی‌ها در بازارهای برق در سراسر جهان دیده شده است. در بازار برق انگلستان و ولز در دهه ۱۹۹۰ دو شرکت بزرگ *National Power* و *PowerGen* بدون رقابت واقعی با یکدیگر قیمت‌ها را بالاتر از هزینه نهایی بازار نگاه داشته بودند [۴]. در کالیفرنیا در سال‌های ۲۰۰۰ و ۲۰۰۱ اقدام مشترک بسیاری از شرکت‌ها در کاهش سطح تولید یک بحران جدی را بوجود آورد [۵]. در اسپانیا دو شرکت بزرگ *Endesa* و *Iberdrola* از رقابت با یکدیگر خودداری می‌کردند و برای کاهش قیمت بازار تلاشی انجام نمی‌دادند [۶]. در شانگهای شش شرکت بزرگ تامین انرژی با ارائه پیشنهادات قیمت بالاتر و کاهش مقدار تولید خود، سعی در بالابردن قیمت بازار به نفع خود داشته‌اند [۷].

با این‌حال کارهای انجام گرفته در این زمینه چندان زیاد نیست. بیشتر کارهای تحقیقاتی انجام شده در این زمینه در چند سال اخیر بویژه پس از بروز بحران کالیفرنیا در سال ۲۰۰۰ و ۲۰۰۱، انجام شده است. کارهای انجام شده دارای دو رویکرد کلی به مسئله تبانی است. برخی از مقالات [۴، ۸، ۹ و ۱۰]، از دید تئوری به بررسی بازار پرداخته‌اند. در این مقالات به بررسی توصیفی شرایط، وضعیت بازار و امکان بروز تبانی پرداخته شده است. هم‌چنین در ادامه به بررسی شاخص‌های نظارتی و ارائه پیشنهاداتی برای بهتر کردن فضای رقابت اشاره شده است. در رویکرد دوم جنبه تاثیر تبانی بر فرآیندهای بازار مانند قیمت‌دهی واحدها، بیشتر مورد توجه بوده است. در اکثر مقالات سعی شده با ارائه روش‌های عموما مبتنی بر شبیه‌سازی، این فرآیندها به صورت واقعی شبیه‌سازی شده و اثر تبانی بر روی قیمت‌های خروجی در بازار مورد مطالعه قرار گیرد [۱۱، ۱۲ و ۱۳]. در این شبیه‌سازی‌ها، افزایش قیمت بازار از مقدار رقابتی (هزینه حدی بازار) معادل افزایش قیمت در تبانی پنداشته شده است و در مورد تفاوت تبانی با قدرت بازار بحث نشده است. در [۱۴]، تبانی معادل نوعی انحصار فرض شده است که با توجه به تفاوت‌های تبانی با یک انحصار، سوالاتی در مورد این فرض مطرح است.

در [۱۵] به جای شبیه‌سازی از تحلیل احتمالی بازار در چند حالت مشخص بار و قیمت در یک بازار دوگانه استفاده شده است. در این مقاله نیز مشخص نشده است که چه مقدار از افزایش قیمت حاصل از یک توافق برای تبانی در بازار است.

در ادامه، در بخش دوم، کلیاتی در مورد نظریه بازی‌ها و تبانی بیان می‌شود. در بخش سوم با بیان معادلات مربوط به سود واحدها در بازار رقابتی تصمیمات هر یک در چنین فضایی مشخص شده است و سپس در بخش چهارم با در نظر گرفتن تبانی بین واحدها نحوه تصمیم گیری هر یک مدل شده است. برای روشن شدن بیشتر موضوع، از نتایج حاصل در بخش سوم و چهارم در بخش پنجم ، برای محاسبه نحوه قیمت‌دهی واحدهای یک مثال عددی استفاده شده است.

۲-نظریه بازی‌ها و تبانی در بازار برق

از دیدگاه غالب در این دوره، در یک بازار، آنچه برای یک شرکت‌کننده اهمیت خواهد داشت، افزایش سود ناشی از فروش محصولات تولید شده در بازار است. در این میان، خواست یک تولیدکننده در بازار (یا به شکل کلی بازیگر بازار) در برآوردن این هدف تنها عامل تعیین کننده نخواهد بود. از آن‌جا که منابع تامین سود در هر بازاری محدود است و بایستی به نحوی در بین شرکت‌کنندگان در بازار تقسیم گردد، تمایل یک بازیگر به بالا بردن سهم خود از سود بازار به معنای کاهش سهم دیگری از مقداری از سود است. از این جاست که تصمیم دیگر بازیگران بر این فرایند تاثیر می گذارد. برای یافتن استراتژی بهینه، در چنین تصمیم‌گیری‌هایی می‌توان از نظریه بازی‌ها استفاده نمود.

نظریه بازی‌ها، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در حوزه‌های مختلفی و بویژه در اقتصاد به کار می‌رود. نظریه بازی‌ها تلاش می‌کند با ارائه روش‌های ریاضی بهترین انتخاب‌ها و حرکات را برای بازیگران[5] تعیین کند. هر بازی دارای یک مجموعه از بازیگران و یک مجموعه از استراتژی‌ها و یا حرکت‌ها است. انتخاب حرکت و استراتژی از سوی هر یک از بازیگران بازار با توجه به رفتار رقبا صورت می‌پذیرد. هر یک از بازیگران سعی خواهد کرد مقدار تابع پرداختی[6] به خود را بیشینه کند. نتیجه بازی در صورت رفتار عقلانی[7] و منطقی هر

[5] *Players*
[6] *Payoff Function*
[7] *Rational*

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]

یک از بازیگران بازار باید منجر به یک نقطه یا دسته‌ای از نقاط تعادل[8] گردد که طی آن‌ها بیشترین سود کسب شود و یا کمترین ضرر به بازیگران تحمیل گردد. حرکات بازیگران بر اساس اصل خردمندانه بودن[9] رفتار آن‌ها انتخاب می‌شود. در این شرایط بازیگران می‌توانند نتایج انتخاب خود را از قبل بدانند و بدین ترتیب بهترین انتخاب را انجام دهند. اگر بتوان استراتژی بهینه را مستقل از رفتار سایر بازیگران انتخاب کرد، بازی دارای یک نقطه تعادل غالب[10] خواهد بود.

بالا بودن قیمت‌ها خریداران را ناامید خواهد ساخت و سطح مصرف آن‌ها را بالطبع کاهش می‌دهد. در چنین حالتی خریداران به دنبال محصولات جایگزین یا با نرخ کمتر، بازار فعلی یا بازارهای دیگر مناطق جغرافیایی را جستجو خواهند کرد. این مسئله تولیدکنندگان فعلی را نیز وسوسه خواهد کرد که در یک اقدام یک‌جانبه قیمت محصولات خود را کاهش دهند یا سطح تولید را چنان افزایش دهند تا بتوانند فروش و در نتیجه سود خود را افزایش دهند. این مشکلی است که همواره تولیدکنندگان را در اتخاذ تصمیم برای شرکت در یک تبانی یا ترک آن به منظور رقابت، مردد می‌کند و یا توافق‌های انجام شده را با خطر فروپاشی روبرو می‌سازد. از این منظر مسئله تبانی شبیه به مسئله باز و کبوتر[11] در تئوری بازی‌هاست [۱۶]. اگر بنگاه‌های حاضر در بازار اقدام به تبانی نمایند، سود بالاتر از حالت رقابتی کسب خواهند کرد. اما همیشه این امکان وجود دارد که یکی از شرکا با تولید بیش از توافق یا پیشنهاد قیمت کمتر از مقدار تعیین شده، خواستار آن باشد تا سهم بیشتری از بازار را از آن خود کند. در این شرایط می‌توان جدول بازی را به شکل جدول ۱ تشکیل داد.

جدول ۱- بازی یک بازار دو شرکتی

	Compete	*Collude*
Compete	*0,0*	*2,-1*
Collude	*-1,2*	*1,1*

در این جا استراتژی شرکت A در سطر و استراتژی شرکت B در ستون جدول نشان داده شده است. واحدها ممکن است با یکدیگر رقابت کنند[12] که در این صورت سود اندکی و عادی بازار را بدست خواهند آورد یا در یک توافق با یکدیگر به همکاری[13]، مثلا افزایش قیمت یا کاهش سطح تولید برای بالارفتن قیمت‌ها، بپردازند که در این صورت سودی اضافه نیز کسب خواهند کرد. مقدار نشان داده شده در هر خانه از جدول سود دریافتی به ترتیب برای شرکت A و B است. در این حالت نتایج یک بازی همکارانه[14] با یک بازی غیرهمکارانه[15] متفاوت است.

۳- مدل بازار با فرض رقابت بین واحدها

تعداد واحدها در یک بازار انحصار چندگانه دو واحد یا بیشتر است. اما بهر حال تعداد آن‌ها در مقایسه با یک بازار رقابت کامل بسیار اندک می‌باشد. وضعیت بازار برق نیز یک بازار انحصار چندگانه است. در این نوع از بازارها، واحدها امکان تاثیر گذاری بر قیمت را خواهند داشت و از این رو می‌توانند قیمت را به میزان دلخواه تغییر دهند.

برای بررسی میزان تاثیر گذاری یک واحد نیروگاهی بر قیمت در یک بازار انحصار چندگانه مدل زیر ارائه شده است. نیروگاهی را با تابع هزینه‌ی درجه دو درنظر بگیرید:

$$C_i(P_i) = \frac{\alpha_i}{2} P_i^2 + \beta_i P_i + \gamma_i \qquad (۱)$$

این واحد پیشنهاد قیمت خود را برای فروش برق به بازار بر اساس معادله (۲) بیان می‌کند.

$$B_i(P_i) = \alpha_i P_i + \beta_{bi} \qquad (۲)$$

با تغییر مقدار β_{bi} واحد فوق مقدار قیمت خود را تغییر می دهد. با بالابردن عرض از مبدا پیشنهادی مقدار قیمت را افزایش می‌دهد و یا برعکس با کاهش آن میزان قیمت کالای خود در بازار را کاهش می‌دهد. از دید اپراتور بازار باید تولید به گونه‌ای بین واحدهای بازار تقسیم گردد تا هزینه تامین انرژی کمینه باشد. به بیان دیگر:

$$\min_{P_i} \sum_{i=1}^{N} \int (\alpha_i P_i + \beta_{bi}) dP_i \qquad (۳)$$

در معادله (۳)، N تعداد شرکت‌های تامین‌کننده انرژی است. برای مسئله بهینه‌سازی فوق، مقدار تولید و مصرف باید برابر باشد و به عبارت دیگر قید تولید به شکل زیر بایستی برقرار باشد:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = P_d \qquad (۴)$$

هم‌چنین برای هر واحد قیودی برای مقدار حداقل و حداکثر تولید ممکن باید در نظر گرفته شود. که در این صورت:

$$P_i \le P_i^{\max} \qquad (۵)$$

و

$$P_i \ge P_i^{\min} \qquad (۶)$$

[8] *Equilibrium*
[9] *Rationality*
[10] *Dominant Strategy Equilibrium*
[11] *Hawk & Dove Problem*
[12] *compete*
[13] *collude*
[14] *cooperative game*
[15] *non-cooperative game*

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]

تابع لاگرانژ برای این مسئله به شکل زیر تشکیل خواهد شد:

$$L=\sum_{i=1}^{N}\int(\alpha_i P_i+\beta_{bi})dP_i - \lambda\left(\sum_{i=1}^{N}P_i-P_d\right)+\sum_{i=1}^{N}\left(\mu_i(P_i-P_i^{\max})+\mu_i'(P_i^{\min}-P_i)\right) \quad (۷)$$

جهت پرهیز از بالا رفتن حجم معادلات و جلوگیری از پیچیدگی، فرض می‌شود که تمام قیود نامعادله‌ای غیر فعال باشند. با مشتق‌گیری از معادله فوق نسبت به پارامتر بهینه‌سازی (P_i)، مسئله معادله دستگاه معادلات (۸) بدست می‌آید:

$$\begin{cases}\alpha_1 P_1+\beta_{b1}=\lambda\\ \quad\vdots\\ \alpha_N P_N+\beta_{bN}=\lambda\\ \sum_{i=1}^{N}P_i=P_d\end{cases} \quad (۸)$$

در بحث بهینه‌سازی معمولا از متغیر λ به عنوان ضریب تابع لاگرانژ استفاده می‌کنند که از نظر کاربردی، بیانگر قیمت بازار است. اما در مباحث اقتصادی از متغیر ρ برای قیمت استفاده می‌شود. برای هماهنگی با سایر منابع در این مقاله نیز از ρ به جای λ استفاده شده است. وابستگی بار به قیمت بر اساس معادله (۹) در نظر گرفته شده است:

$$P_d=-a\rho+b \quad (۹)$$

در این معادله ρ قیمت تسویه بازار است. با ترکیب معادله (۸) و معادله (۹) می‌توان دستگاه معادلات (۸) را به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & & & \vdots & \\ \vdots & & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_N & -1\\ -1 & & & -1 & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ \\ \vdots\\ P_N\\ \rho\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\beta_{b1}\\ \\ \vdots\\ -\beta_{bN}\\ -b\end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

اگر بازار، یک بازار کاملا رقابتی تصور شود، واحدها برای دریافت حداکثر سود ممکن، باید مقدار تولید خود را به گونه‌ای تقسیم کنند تا هزینه افزایشی آن‌ها با قیمت بازار برابر شود. بیان دیگر این موضوع در معادله (۱۱) نشان داده شده است.

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & & & \vdots & \\ \vdots & & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_N & -1\\ -1 & & & -1 & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1^0\\ \\ \vdots\\ P_N^0\\ \rho^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\beta_1\\ \\ \vdots\\ -\beta_N\\ -b\end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

در این معادله β_i ضریب جمله درجه اول در معادله (۱) است. (بایستی به تفاوت آن با که مقدار عرض از مبدا در تابع پیشنهاد قیمت است، دقت شود). بالا نویس 0 در معادله (۱۱) به این معناست که مقدار بدست آمده برای حالتی است که واحدها پیشنهاد قیمتی برابر با هزینه حدی خود ارائه کنند. اختلاف تولید محاسبه شده برای هر واحد در معادله (۱۱) و (۱۰)، از معادله (۱۲) به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & & & \vdots & \\ \vdots & & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_N & -1\\ -1 & & & -1 & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta P_1\\ \\ \vdots\\ \Delta P_N\\ \Delta\rho\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\Delta\beta_1\\ \\ \vdots\\ -\Delta\beta_N\\ 0\end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

تغییرات حول نقطه کار را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{cases}\alpha_1\Delta P_1+\Delta\beta_1=\Delta\rho\\ \quad\vdots\\ \alpha_i\Delta P_i+\Delta\beta_i=\Delta\rho\\ \quad\vdots\\ \alpha_N\Delta P_N+\Delta\beta_N=\Delta\rho\end{cases} \quad (۱۳)$$

و :

$$\Delta P_d=\sum_{j=1}^{N}\Delta P_j=-a\rho \quad (۱۴)$$

با انتقال اجزای معادلات (۱۳) به سمت چپ، تغییرات تولید بر حسب قیمت بدست خواهد آمد:

$$\begin{cases}\Delta P_1=\frac{1}{\alpha_1}\Delta\rho-\frac{1}{\alpha_1}\Delta\beta_1\\ \quad\vdots\\ \Delta P_i=\frac{1}{\alpha_i}\Delta\rho-\frac{1}{\alpha_i}\Delta\beta_i\\ \quad\vdots\\ \Delta P_n=\frac{1}{\alpha_n}\Delta\rho-\frac{1}{\alpha_n}\Delta\beta_n\end{cases} \quad (۱۵)$$

با جمع معادلات می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\Delta P_i=\frac{\Delta\rho}{\alpha_i}-\frac{\Delta\beta_i}{\alpha_i}\\ \sum_{j\neq i}\Delta P_j=\left(\sum_{j\neq i}\frac{1}{\alpha_j}\right)\Delta\rho-\sum_{j\neq i}\frac{\Delta\beta_j}{\alpha_j}\end{cases} \quad (۱۶)$$

که برای معادله فوق تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&\alpha_{-i}=\left(\sum_{j\neq i}\frac{1}{\alpha_j}\right)^{-1}\\ &\frac{\Delta\beta_{-i}}{\alpha_{-i}}=\sum_{j\neq i}\frac{\Delta\beta_j}{\alpha_j}\\ &\Delta P_{-i}=\sum_{j\neq i}\Delta P_j\end{aligned} \quad (۱۷)$$

با تعریف انجام شده در (۱۷) می‌توان معادلات (۱۶) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases}\alpha_i\Delta P_i+\Delta\beta_i=\Delta\rho\\ \alpha_{-i}\Delta P_{-i}+\Delta\beta_{-i}=\Delta\rho\\ \Delta P_i+\Delta P_{-i}=-a\rho\end{cases} \quad (۱۸)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]

اگر هدف تعیین مقدار تغییر در قیمت به شکلی باشد که منجر به بالارفتن سود شود، می‌توان از این دسته معادلات استفاده کرد. با ترکیب معادلات فوق مقدار تغییر بهینه در قیمت یک واحد از معادله زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&-\left[2\alpha_{-i}+\alpha_i+a\alpha_{-i}(2\alpha_i+2\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i})\right]\Delta\beta_i\\&+\left(\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}\right)\alpha_{-i}P_i^0+\alpha_{-i}\Delta\beta_{-i}=0\end{aligned} \quad (۱۹)$$

نحوه دست‌یابی و اثبات این معادله در ضمیمه آورده شده است. با بسط معادلات و نوشتن آن برای همه واحدهای بازار تعداد N معادله وجود خواهد داشت. اگر تعریف شود:

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

و

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}\alpha_{-1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{-n}\end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

و

$$\begin{aligned}K=&\,2\left(I_{n\times n}+a(A+\overline{A})\right)+\\&A(\overline{A}^{-1}+a^2\overline{A})-\overline{A}\begin{bmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{bmatrix}A^{-1}\end{aligned} \quad (۲۲)$$

پس معادله (۱۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$K\begin{bmatrix}\Delta\beta_1\\ \Delta\beta_2\\ \vdots\\ \Delta\beta_n\end{bmatrix}=(A+\overline{A}+a\overline{A}\overline{A})\begin{bmatrix}P_1^0\\ P_2^0\\ \vdots\\ P_n^0\end{bmatrix} \quad (۲۳)$$

حل معادله فوق منجر به یافتن مقدار تغییرات قیمت برای همه واحدها خواهد بود، به نحوی که هیچ یک از واحدها با انحراف از این تغییر قیمت خود به شکل انفرادی نمی‌تواند سود خود را افزایش دهد. این موضوع همان مفهوم نقطه تعادل نش است. در یک بازی با n بازیگر، چنان‌چه همه بازیگران در جهت کسب حداکثر سود خود حرکت کنند، هر یک باید بهترین پاسخ ممکن را با توجه به مجموعه حرکات رقیبان خود انتخاب کند و بهترین حرکت را انجام دهد. انتخاب مجموعه بهترین پاسخ‌ها از سوی همه بازیگران به نقطه تعادل نش منجر خواهد شد و هر تلاشی برای بهتر کردن تابع سود برای هر یک از بازیگران غیر منطقی و عبث خواهد بود.

بهترین پاسخ برای واحد i، یعنی مقدار تغییری که باید در پیشنهاد قیمت خویش بدهد، از حل معادله (۱۹) بدست خواهد آمد و برای مجموعه بازیگران، پاسخ هر یک (تغییر قیمت هر یک) از حل دستگاه معادلات (۲۵) منتج خواهد شد.

۴- بازار با فرض تبانی بین واحدها

گفته شد که هیچ یک از واحدهای بازار نمی‌توانند به تنهایی سود خود را از بازار افزایش دهند. این مسئله از نگاه به معادلات (۱۹) نیز قابل دریافت است. چرا که افزایش مقدار پیشنهاد قیمت واحد i منجر به کاهش تولید آن واحد خواهد شد. این کاهش تولید می‌تواند تا حدودی سودآور باشد (تا نقطه تعادل نش) اما ادامه این روند به ضرر واحد i خواهد بود زیرا که کاهش تولید آن واحد از سوی دیگر بازیگران بازار تامین خواهد شد.

اما اگر تمامی واحدها در یک تصمیم مشترک اقدام به افزایش قیمت خود نمایند، مقدار افزایش قیمت می‌تواند بر میزان کاهش تولید هر واحد پیشی گرفته و سودی را عاید واحدهای بازار کند. کاهش تولید در این حالت نتیجه رقابت واحدهای بازار و جایگزین شدن تولید دیگر واحدها به جای واحدهای رقیب نیست بلکه از واکنش مصرف‌کنندگان و از تابع تقاضای آن‌ها حاصل خواهد شد.

بدین ترتیب واحدهای بازار به شکل زیر عمل خواهند کرد:

$$\begin{aligned}\Delta\beta_i&=\Delta\beta_i^*+\Delta\beta^c\\ \Delta\beta_{-i}&=\Delta\beta_{-i}^*+\Delta\beta^c\end{aligned} \quad (۲۴)$$

در معادله (۲۴) $\Delta\beta_i^*$ میزان افزایش قیمت واحد i در نقطه تعادل نش در بازار رقابتی است و مقدار افزایش قیمت توافق شده در تبانی است. آن‌چنان که از معادله (۲۴) مشخص است و در واقع نیز چنین است، هر گونه توافق برای بالا بردن قیمت در یک تبانی پس از طی مراحل ابتدایی بازار صورت خواهد گرفت. با این تغییر در میزان افزایش پیشنهاد قیمت بازیگران میزان فروش و قیمت بازار به شکل معادله (۲۵) تغییر خواهد کرد:

$$\begin{aligned}\Delta\rho&=\frac{\alpha_i\Delta\beta_{-i}+\alpha_{-i}\Delta\beta_i}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\\&=\frac{\alpha_i\Delta\beta_{-i}^*+\alpha_{-i}\Delta\beta_i^*}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}+\frac{\alpha_i+\alpha_{-i}}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\Delta\beta^c\\&=\Delta\rho^*+\Delta\rho^c\\ \Delta P_i&=\frac{\Delta\beta_{-i}-\Delta\beta_i}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}-\frac{a\alpha_{-i}}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\Delta\beta_i\\&=\Delta P_i^*-\Delta P_i^c\\ \Delta P_{-i}&=\frac{\Delta\beta_i-\Delta\beta_{-i}}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}-\frac{a\alpha_i}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\Delta\beta_{-i}\\&=\Delta P_{-i}^*-\Delta P_{-i}^c\end{aligned} \quad (۲۵)$$

همان‌طور که گفته شده است و در معادله (۲۵) نیز قابل مشاهده است در این حالت تنها واکنش مصرف‌کنندگان منجر به کاهش سطح

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]

تولید خواهد بود. قیمت به یک نسبت در بازار افزایش خواهد داشت و این افزایش قیمت می‌تواند تا حدودی کاهش درآمد حاصل از افت فروش را جبران کند. برای واحد i میزان سود در این حالت قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}\Delta\pi_i &= P_i^0\Delta\rho+\left(\frac{\alpha_i}{2}\Delta P_i+\Delta\beta_i\right)\Delta P_i\\ &= P_i^0\left(\Delta\rho^*+\Delta\rho^c\right)\\ &\quad+\left(\frac{\alpha_i}{2}(\Delta P_i^*-\Delta P_i^c)+(\Delta\beta_i^*+\Delta\beta^c)\right)(\Delta P_i^*-\Delta P_i^c)\\ &= P_i^0\Delta\rho^*+\left(\frac{\alpha_i}{2}\Delta P_i^*+\Delta\beta_i^*\right)\Delta P_i^*+P_i^0\Delta\rho^c\\ &\quad+\left(-\frac{\alpha_i}{2}\Delta P_i^c+\Delta\beta^c\right)\\ &\quad+\left(\frac{\alpha_i}{2}\Delta P_i^*+\Delta\beta_i^*\right)(-\Delta P_i^c)\\ &\quad+\left(-\frac{\alpha_i}{2}\Delta P_i^c+\Delta\beta^c\right)(-\Delta P_i^c)\\ &= \Delta\pi_i^*+\Delta\pi_i^c\end{aligned}\qquad(۲۶)$$

$\Delta\pi_i^*$ میزان افزایش سود در نتیجه اقدام واحد به صورت مستقل در بالا بردن قیمت خود است (تا نقطه تعادل نش) و از معادلات بیان شده در بخش پیش قابل محاسبه است. مقدار افزایش سود در نتیجه شرکت جستن واحد در یک تبانی برای بالا بردن قیمت است. که بدین ترتیب:

$$\begin{aligned}\Delta\pi_i^c &= \left(P_i^0+\Delta P_i^*\right)\frac{\alpha_i+\alpha_{-i}}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\Delta\beta^c\\ &\quad+\left(\frac{-a\alpha_{-i}}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\right)\Delta\beta_i^*\Delta\beta^c\\ &\quad+(-a\alpha_{-i})\left(\frac{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}/2}{(\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i})^2}\right)\Delta\beta^{c2}\end{aligned}\qquad(۲۷)$$

برای واحد i میزان سود حاصل از شرکت در تبانی باید بیشینه باشد. پس از مشتق‌گیر نسبت $\Delta\beta^c$ بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial\Delta\pi_i^c}{\partial\Delta\beta^c}=0\Rightarrow$$
$$\Delta\beta_i^c=\frac{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}{2\alpha_i+2\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\left[\frac{\alpha_i+\alpha_{-i}}{a\alpha_{-i}}\left(P_i^0+\Delta P_i^*\right)-\Delta\beta_i^*\right]\qquad(۲۸)$$

دقت در معادله (۲۸) نشان می‌دهد که مقدار افزایش قیمت بهینه در یک تبانی برای واحد i می‌تواند با مقدار بهینه افزایش قیمت برای دیگر واحدهای بازار برابر نباشد. از این جاست که مسئله چانه‌زنی بین واحدهای حاضر در یک تبانی برای نزدیک کردن توافق به سمت مقدار بهینه خود آن‌ها قابل طرح است.

۵- بررسی عددی نتایج

برای روشن شدن بیشتر روابط ارائه یک مثال عددی می‌تواند مفید باشد. مثال عددی از مرجع [۱۷] استفاده شده است. نتایج این بخش در دو زیربخش ارائه شده است. در زیربخش اول با استفاده از روابط ارائه شده، عملکرد دو واحد در شرایط رقابتی و تبانی بیان شده است. در زیربخش دوم، تبانی با حالت انحصاری مقایسه شده است و نشان داده شده است، معادل انگاشتن تبانی با یک انحصار چنان که در [۱۸] بکار رفته نادرست است.

۵-۱- رقابت بین واحدهای بازار

دو نیروگاه با سوخت فسیلی با تابع هزینه درجه دومی به شکل زیر برای تامین ۸۵۰ مگاوات بار در یک باس به کار می‌روند.

$$\begin{cases}C_1(P_1)=561+7.92P_1+0.001562P_1^2\\ C_2(P_2)=310+7.85P_2+0.001940P_2^2\end{cases}$$

تابع تقاضای زیر در نظر بگیرید:

$$P_d^t=-50\times\rho^t+1350$$

مقدار حساسیت در این مثال بالا انتخاب شده است. این مقدار از شرایط واقعی دور است اما برای ایجاد فاصله و اختلاف ملموس بین شرایط بازار با کشش تقاضا نسبت به بازار با بار ثابت، این انتخاب ضروری است. حل مسئله به شکل زیر امکان پذیر است:

$$\begin{bmatrix}0.003124 & 0 & -1\\ 0 & 0.00388 & -1\\ -1 & -1 & -50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ \rho\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7.92\\ -7.85\\ -1350\end{bmatrix}$$

حل معادلات فوق به نتایج زیر می‌انجامد:

$$P_1=477.20,\ P_2=402.26\,(MW),\ \rho=9.41\,(\$)$$

برای افزایش سود در بازار انحصار چندگانه، نقطه تعادل از معادله (۲۵) بدست خواهد آمد:

$$\begin{bmatrix}3.5359 & -1\\ -1 & 3.9727\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\beta_1^*\\ \Delta\beta_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0076 & 0\\ 0 & 0.0076\end{bmatrix}\begin{bmatrix}477.20\\ 402.26\end{bmatrix}\Rightarrow$$
$$\Delta\beta_1^*=1.34,\ \Delta\beta_2^*=1.11(\$)$$

که در نتیجه آن مقدار قیمت بازار تغییر خواهد کرد:

$$\Delta\rho_1^*=1.14\,(\$)$$

در اثر این تغییر در قیمت پیشنهادی، مقدار تولید هر یک از واحدها به نحو زیر تغییر خواهد کرد:

$$\Delta P_1^*=-64.71,\ \Delta P_2^*=7.80\,(\mathrm{MW})$$

مشخص است در این شرایط مقدار ۵۶/۹۱ مگاوات از کل تقاضای بازار کاهش یافته که متناسب با افزایش قیمت بازار است. بیشتر این میزان توان از تولید واحد یک کسر شده است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]

۵-۲- تبانی بین واحدهای بازار

ممکن است دو واحد در این شرایط به توافقی دست یابند که با افزایش مقدار قیمت پیشنهادی خود سعی در بالا بردن مقدار قیمت بازار داشته باشند. می‌توان معادلات مربط به سود خالص هریک از واحدها را از حضور در تبانی با کمک از معادله (۲۹) نوشت:

$$\Delta\pi_1^c = 345.7806\times\Delta\beta^c - 24.4775\times\Delta\beta^{c^2}$$

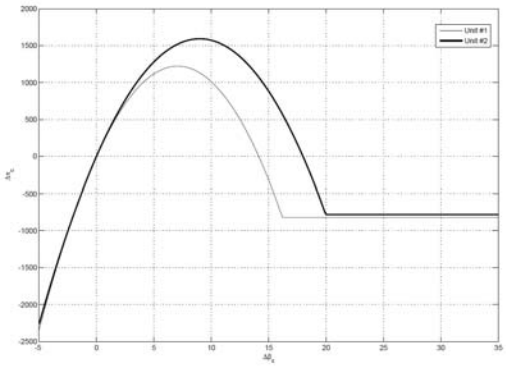
$$\Delta\pi_2^c = 354.2897\times\Delta\beta^c - 19.7082\times\Delta\beta^{c^2}$$

دو معادله نوشته شده فوق بیان‌گر میزان تغییر سود حاصل از تبانی بین واحدها را نشان می‌دهد. رسم این دو معادله در محور مختصات می‌تواند نشان دهنده تغییر سود با افزایش قیمت و تفاوت بین نقطه بهینه برای دو واحد در بازار باشد. شکل ۱ این روند را نشان می‌دهند.

مقدار بیشینه این سود برای هر یک از واحدهای بازار چنان که از شکل‌های رسم شده نیز مشخص است بر اساس معادله (۳۰) قابل محاسبه است:

$$\Delta\beta_1^c = 7.06, \Delta\beta_2^c = 8.99\,(\$)$$

مشخص است که به دلیل تفاوت موجود در مقدار نقطه بهینه برای دو واحد بازار این امکان وجود نخواهد داشت تا هم‌زمان سود بیشیه برای واحدها فراهم آید. برای واحد دو مقدار بهینه در حدود ۹ دلار است در حالی که واحد یک در این حالت سعی خواهد کرد تا توافق انجام شده را به سمت مقدار ۷ دلار کاهش دهد.



شکل ۱- میزان تغییر سود حاصل از تبانی برای واحدهای بازار با افزایش قیمت

این امکان وجود دارد که هر دو واحد اختلافات را کنار گذاشته و در یک مقدار قیمت بینابینی (مثلا ۸ دلار) توافق کنند. اما باز هم در تولیدکننده دوم این تمایل وجود دارد تا قیمت را افزایش دهد و برعکس برای تولیدکننده اول، تلاش در جهت کاهش قیمت انجام می‌گیرد. این تمایلات و اختلاف نظرها اگر منجر به شکست تبانی نگردد ولی بهر حال در مجمع تصمیم‌گیری یا در جلسات خصوصی مطرح خواهد شد.

در صورتی که توافقی در افزایش قیمت ۸ دلار صورت بگیرد به کمک معادلات (۲۷) می‌توان تغییرات قیمت و تولید را بدست آورد. در نتیجه حل این معادلات کاهش تولید هر یک از واحدها محاسبه شده است :

$$\Delta P_1^c = 203.94, \Delta P_2^c = 164.20\,(MW)$$

در چنین قیمت سود واحدهای بازار نیز به مقدار زیر است:

$$\pi_1 = 1458.1, \pi_2 = 2043.4\,(\$)$$

مقادیر فوق نشان می‌دهد که هریک از واحدها در این مقدار تقریبا نصف تولید خود را متوقف کرده‌اند. این توقف تولید از یک سو موجبات کاهش هزینه‌های متغیر را فراهم آورده و از سوی دیگر بالابردن قیمت، درآمد کسر شده را جبران کرده است. گرچه از لحاظ تئوری هر مقدار قیمت و یا تولید در دسترس است. اما در عمل ممکن است این مقدار کاهش تولید به صرفه نباشد. این ممکن است مربوط به مواردی باشد که سرمایه‌گذاری برای مقدار خاصی از تولید صورت گرفته است یا خروج از محدوده نامی برای دستگاه‌ها و تجهیزات مشکل‌ساز و هزینه‌بر است. این مسائل به گونه‌ای باید در تابع هزینه دیده شود که در اینجا از آن صرف‌نظر شده است.

۵-۳- تبانی در مقایسه انحصار

اگر افزایش قیمت تبانی ۸ دلار باشد قیمت نهایی در بازار برابر با ۱۷/۹۱ دلار خواهد بود. فرض کنید دو واحد مستقل حاضر در بازار با یک انحصارگر جایگزین شوند. یا به بیان بهتر این دو واحد نیروگاهی زیر نظر یک شرکت فعالیت کنند. مسئله از دید انحصارگر به مسئله زیر تبدیل می‌شود:

$$\max_{\rho}(R - C)$$

R درآمد انحصارگر و C هزینه آن است. با قبول فرضیات پیشین مسئله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\max_{\rho}\left(\rho(-a\rho + b) - \sum(\frac{\alpha_i}{2}P_i^2 + \beta_i P_i + \gamma_i)\right)$$

که قید تامین بار برای آن برقرار است:

$$\sum P_i = -a\rho + b$$

با این شرایط معادله لاگرانژ نوشته می‌شود:

$$L = \sum(\frac{\alpha_i}{2}P_i^2 + \beta_i P_i + \gamma_i) - \rho(-a\rho + b) - \lambda(\sum P_i + a\rho - b)$$

از مشتق تابع لاگرانژ نسبت پارامترهای آن دستگاه معادلات زیر حاصل خواهد شد:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]

$$\begin{cases}\alpha_i P_i+\beta_i-\lambda=0\\ 2a\rho-b-a\lambda=0\\ \sum P_i+a\rho-b=0\end{cases}$$

حل دستگاه فوق به شکل زیر نیز ممکن است:

$$\left(a\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}P_1\\ \\ P_n\end{bmatrix}=b-a\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

$$\rho=\frac{b}{a}-\frac{\sum P_i}{a}$$

برای مثال عددی داده شده با جایگذاری اعداد در معادلات فوق قیمت بهینه برای انحصارگر و میزان تولید هر کدام از واحدها در بازار تعیین می‌شود:

$$P_1=243.71,\ P_2=214.26\ (\mathrm{MW}),\ \rho=17.84$$

برای مقایسه در حالت تبانی واحدها، تولید و قیمت به شکل زیر است:

$$P_1=208.5,\ P_2=245.82\ (\mathrm{MW}),\ \rho=17.91$$

می‌توان دید که قیمت در انحصار اندکی نسبت به حالت نهایی تبانی کمتر است. این مسئله منجر به افزایش کمی در تقاضا شده است. اما آن‌چه تفاوت اساسی نشان می‌دهد نحوه انجام پخش بار اقتصادی بین واحدهای بازار است. برخلاف تبانی در حالت انحصار، واحد یک که دارای تابع هزینه ارزان‌تری است تولید بیشتری را انجام می‌دهد. اگر سود انحصار محاسبه گردد، چنین بدست می‌آید:

$$\pi_1+\pi_2=1780.8+1756.4=3537.2$$

مقدار این سود از مجموع سود در تبانی (۳۵۰۰ دلار) بیشتر است که نشان دهنده افزایش سود در حالت انحصار نسبت به تبانی در بازار است. در واقع از مقایسه تمامی این اعداد می‌توان دریافت که از آن‌جا که در تبانی تلاش واحدها برای سود بیشتر به شکل مستقل صورت می‌گیرد، نتیجه حاصل ممکن است بهینه نباشد. در این حالت هرچند میزان قیمت از حد انحصار هم بیشتر شده است اما مقدار سود نتوانسته به آن میزان بالا باشد.

۶- نتیجه‌گیری

بازار برق به مانند بسیاری از بازارهای دیگر، بایستی به شکل یک بازار انحصار چندگانه دیده شود. در چنین بازاری افزایش قیمت ممکن است حاصل از یک رقابت یا به میزان بیشتری منتج از تبانی بین واحدهای بازار باشد. اما نمی‌توان تمام افزایش قیمت را حاصل از تبانی دانست و چنان‌که در بخش سوم این مقاله نشان داده شد، واحدهای بازار با تکیه به قدرت بازار خود، می‌توانند قیمت بازار را چنان جابه‌جا کنند که سود خود را در بازار افزایش دهند. در این مقاله این موضوع مورد بررسی قرار گرفت و معادلاتی برای بدست آوردن افزایش قیمت حاصل از رقابت در فضای انحصار چندگانه و هم‌چنین مدلی بررسی رفتار واحدها در تبانی، ارائه شد. نکات اصلی این تحقیق در زیر آورده شده است:

- قیمت در یک بازار چندگانه با محاسبه نقطه تعادل بازار در شرایط رقابتی و با کمک روش بهترین پاسخ در حل بازی‌های استاتیک مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شده در این شرایط هر یک از واحدها بسته به میزان قدرت خود در بازار می‌تواند با تغییر قیمت پیشنهادی یا سطح تولید، تغییری در مقدار قیمت بازار دهد به نحوی که سود خود را افزایش دهد. میزان افزایش قیمت در اثر قدرت بازار واحدها به مقدار بار، تابع هزینه واحدها و کشش تقاضا وابسته است. این مسئله با یک معادله ریاضی ارائه شد.
- افزایش قیمت در یک تبانی پس از طی دوره گذرای بازار و با معین شدن میزان قدرت واحدهای بازار تعیین می‌گردد.
- میزان افزایش قیمت تبانی، بدون دخالت دولت و نهادهای نظارتی توسط کشش تقاضا محدود می‌شود.
- این افزایش قیمت در بازار بر اساس توافق واحدها معین می‌گردد، اما باید توجه کرد که مقدار بهینه این افزایش قیمت برای همه واحدها یکسان نیست. از آن‌جا که بایستی توافق در یک مقدار مشخص افزایش قیمت صورت بپذیرد، واحدهای بازار تمایل دارند که این مقدار برابر با مقدار پیشنهادی خود آن‌ها باشد. این امر منجر به چانه‌زنی واحدها برای راضی ساختن شرکا در قبول قیمت پیشنهادی ایشان است. بسته به وزن و موقعیت واحدها در بازار، افزایش قیمت نهایی تعیین می‌گردد. به هر صورت لازم است تا این قیمت در بخش مثبت منحنی مازاد سود تمام واحدها قرار داشته باشد.
- در تبانی بالابردن قیمت توسط واحدها به منظور افزایش سود خود واحد صورت می‌گیرد. به همین دلیل ممکن است بخشی از تولید واحدهای ارازن‌تر کاهش یابد و به میزان تولید واحدهای گران‌تر افزوده گردد. از این نظر انحصار که همه واحدهای بازار را در اختیار دارد بهتر از تبانی می‌تواند میزان تولید هر واحد را تعیین کند. در یک جمله سود انحصار از تبانی بیشتر است. با یک مثال عددی نشان داده شد که اگرچه قیمت در حالت تبانی نسبت به حالت انحصاری افزایش کمی یافته است ولی مقدار فروش کل و میزان سود مجموعه انحصار از مقدار تبانی بیشتر است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]

مراجع

[1] Emmanuel, Rafael; Macatangay A. “Tacit Collusion in the Frequently Repeated Multi-Unit Uniform Price Auction for Wholesale Electricity in England and Wales.” European Journal of Law and Economics, vol.13, pp. 257–273 2002

[2] Stoft, Steven. Power System Economics: Designing Markets for Electricity. New York: Wiley/ IEEE Press. 2002

[3] Harrington, Joseph. “How Do Cartels Operate?” Foundations and Trends in Microeconomics, Vol. 2, No 1, pp. 1–105, 2006

[4] Sweeting, Andrew. “Market Power in the England and Wales Wholesale Electricity.” MIT Center for Energy and Environmental Research, Aug 2004

[5] Jaskow, Paul. “California’s Electricity Crisis.” Oxford Review of Economic Policy, vol. 17, No. 3, pp. 365-388, 2001

[6] Fabra, Natalia; Toro, Juan. “Price War and Collusion in the Spanish Electricity Market.” International Journal of Industrial Organization, vol. 23, pp. 155-181, 2005

[7] Liu Dun-nan; He Guang-yu; Li Rui-qing; Chen Xue-qing. “Analytical method of Supplier’s Behaviors in Electricity Market.” IEEE Conference on Power Systems Conference and Exposition, vol. 2, pp. 881-885, 2004

[8] Xiaohong Guan. “Gaming and Price Spikes in Electric Power Markets and Possible Remedies.” IEEE International Conference on Power System Technology, vol. 21, pp. 58-58, 2002

[9] Liu Dun-Nan; Wu Ya-Guang; Jiang Xiao-Liang; He Guang-Yu; Zhang Hua-Qing, “Key Performance Indices To Monitor Bidding Behaviors In Electricity Market.” IEEE Power Systems Conference And Exposition (PSCE '06), pp. 1156-1161, 2006

[10] Wu Wei-Ku; Wen Dan-Hui. “Preventing Tacit Collusion in Chinese Electricity Reform,” IEEE International Conference on Service Systems and Service Management, pp. 1-5, June 2007

[11] Frezzi, P.; Garces, F.; Haubrich, H.J. “Analysis of Short-Term Bidding Strategies in Power Markets.”IEEE Power Tech, pp. 971-976, 2007

[12] Tellidou, A.C.; Bakirtzis, A.G. “Agent-Based Analysis of Capacity Withholding and Tacit Collusion in Electricity Markets”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 22, pp. 1735-1742, 2007

[13] Feng Kong; Hongyan Liu. “Analysis of Market Power of Oligopolistic Generators.” IEEE International Conference on Services Systems and Services Management, vol. 1, pp. 7-10, 2005

[14] Cau, T. D. H.; Anderson, Edward J. “A Co-Evolutionary Approach to the Tacit Collusion of Generators in Oligopolistic Electricity Markets: Piecewise Linear Bidding Structure Case.” IEEE Congress on Evolutionary Computation, vol. 4, pp. 2306-2313, 2003

[15] Cain, M.B.; Alvarado, F.L. “The Impact of Uncertainty on Incentives to Collude In Electricity Markets.” IEEE International Conference on Probabilistic Methods Applied To Power Systems, pp. 433-438, 2004

[۱۶]] اصغرپور، محمدجواد. تصمیم‌گیری گروهی و نظریه بازی‌ها با نگرش "تحقیق در عملیات" و ... . تهران: موسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران، ۱۳۸۲

[17]Wood, Allen J.; Wollenberg, Bruce. Power Generation, Operation, and Control. 2nd Edition, New York: Wiley, 1996

[۱۸]هندرسن، جیمزمیچل. کوانت، ریچارد. "تئوری اقتصاد خرد" مترجم : جمشید پژویان، مرتضی قره باغیان، تهران، نشر رسا، چاپ دوم ۱۳۸۶

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]

ضمیمه A

معادله (۲۰) به شکل زیر است:

$$\begin{cases}\alpha_i\Delta P_i+\Delta\beta_i=\Delta\rho\\ \alpha_{-i}\Delta P_{-i}+\Delta\beta_{-i}=\Delta\rho\\ \Delta P_i+\Delta P_{-i}=-a\rho\end{cases}\qquad(۱\text{-}A)$$

در معادله (۲۰) $\Delta\beta_{-i}$ تغییرات تولید مربوط به واحدهای بازار به غیر از واحد i را نمایش می‌دهد. به عبارت دیگر در این معادله یک بازار با n بازیگر به یک بازار دوتایی تبدیل شده است. در این صورت:

$$\begin{cases}\Delta\rho=\dfrac{\alpha_i\Delta\beta_{-i}+\alpha_{-i}\Delta\beta_i}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\\ \Delta P_i=\dfrac{\Delta\beta_{-i}-\Delta\beta_i}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}-\dfrac{a\alpha_{-i}}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\Delta\beta_i\\ \Delta P_i=\dfrac{\Delta\beta_i-\Delta\beta_{-i}}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}-\dfrac{a\alpha_i}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\Delta\beta_{-i}\end{cases}\qquad(۲\text{-}A)$$

می‌توان مازاد درآمد واحد i از تغییر پیشنهاد قیمت خود را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}\Delta R_i&=P_i\rho-P_i^0\rho^0\\&=(P_i^0+\Delta P_i)(\rho^0+\Delta\lambda)-P_i^0\rho^0\\&=P_i^0\Delta\rho+\Delta P_i\rho^0+\Delta P_i\Delta\rho\end{aligned}\qquad(۳\text{-}A)$$

در این حال هزینه‌های واحد i به دلیل تغییر در سطح تولید نیز تغییر خواهد کرد:

$$\begin{aligned}\Delta C_i=&\\ &\frac{\alpha_i}{2}(P_i^n)^2+\beta_iP_i^n+\gamma-\frac{\alpha_i}{2}(P_i^0)^2-\beta_iP_i^0-\gamma\\ &=\rho^0\Delta P_i+\frac{\alpha_i}{2}\Delta P_i^2\end{aligned}\qquad(۴\text{-}A)$$

اکنون به سادگی می‌توان مقدار تغییر سود برای یک واحد را محاسبه کرد:

$$\Delta\pi_i=\Delta R_i-\Delta C_i=P_i^0\Delta\rho+\Delta P_i\Delta\rho-\frac{\alpha_i}{2}\Delta P_i^2\qquad(۵\text{-}A)$$

با جایگذاری مجموعه معادلات (A-۱) در معادله (A-۵) تغییرات سود بر اساس تغییر در پیشنهاد قیمت واحدهای بازار محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned}\Delta\pi_i&=P_i^0\Delta\rho+\left(\frac{\alpha_i}{2}\Delta P_i+\Delta\beta_i\right)\Delta P_i\\&=\frac{\left(\alpha_{-i}+\alpha_i/2+a\alpha_i\alpha_{-i}+a^2\alpha_i^2\alpha_{-i}/2+a\alpha_{-i}^2\right)}{(\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i})^2}\times\Delta\beta_i^2\\&+\left(\frac{\alpha_{-i}P_i^0}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}+\frac{\alpha_{-i}\Delta\beta_{-i}}{(\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i})^2}\right)\times\Delta\beta_i\\&+\frac{\alpha_{-i}P_i^0}{\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i}}\times\Delta\beta_{-i}\\&+\frac{\alpha_i/2}{(\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i})^2}\times\Delta\beta_{-i}^2\end{aligned}\qquad(۶\text{-}A)$$

این معادله میزان سودی است که واحد i با تغییر در مقدار قیمت خود بدست خواهد آورد و بایستی در ارتباط با بیشینه کردن مقدار آن تلاش کند. مشتق دوم این معادله نسبت به تغییرات قیمت واحد i، منفی است و در نتیجه معادله حتما دارای یک نقطه ماکزیمم است. با مشتق‌گیری از این معادله نسبت به $\Delta\beta_i$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&-\left[2\alpha_{-i}+\alpha_i+a\alpha_{-i}(2\alpha_i+2\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i})\right]\Delta\beta_i\\&+(\alpha_i+\alpha_{-i}+a\alpha_i\alpha_{-i})\alpha_{-i}P_i^0+\alpha_{-i}\Delta\beta_{-i}=0\end{aligned}\qquad(۷\text{-}A)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.2.5.5]