مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۱، بهار ۱۳۸۹، صفحه ۷۱-۶۱

کاربرد معادلات قیود نیرویی در طراحی مسیر و کنترل مدار باز بازوهای مکانیکی افزونه

محمدجعفر صدیق [۱]، سواک طهماسیان [۲]

[۱] استادیار دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان، jafars@cc.iut.ac.ir

[۲] مربی دانشکده مکانیک دانشگاه آزاد خمینی شهر، sevakt76@yahoo.com

(تاریخ دریافت مقاله۱۳۸۸/۱۲/۱۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۳/۳۰)

چکیده: این مقاله روش جدیدی را برای طراحی مسیر بازوهای مکانیکی افزونه ارائه می‌نماید. در این روش با اعمال قیود نیرویی مناسب، هدف ثانویه توزیع بار نسبی بین عملگرها علاوه بر تعقیب مسیر محقق می‌شود. دو الگوریتم برای این منظور پیشنهاد شده است. الگوریتم اول از مجموعه کامل معادلات لازم برای توزیع بار بین عملگرها سودجسته و سپس مجموعه فوق معین معادلات حاصل از افزودن این معادلات به معادلات سینماتیکی را به روش شبه معکوس وزن‌دار حل می‌نماید. الگوریتم دوم، اما، با انتخاب یک نقطه شروع مناسب که دارای شرایط توزیع بار قابل قبول استآغاز میشود. این الگوریتم سپس با افزودن تعداد معادلات قید نیرویی لازم (به تعداد درجات افزونگی) به معادلات سینماتیک دیفرانسیلی حرکت پاسخی را به دست می‌دهد که ضمن برآورده نمودن کامل شرط تعقیب مسیر نسبت بار هر عملگر به حد مجاز آن را در یک محدوده تعریف شده قابل قبول نگه می‌دارد. نتایج برای یک ربات سه عضوی صفحه‌ای ارائه و با نتایج حل‌های قبلی مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: ربات‌های افزونه، طراحی مسیر، کنترل مدار باز، توزیع بار، قیود نیرویی

Application of Dynamic Constraint Equations to Open Loop Control of Redundant Manipulators

Mohammad Jafar Sadigh and Sevak Tahmasian

Abstract: This paper presents a novel method for path planning of redundant manipulators. The idea is to use load distribution as an objective function for resolving kinematic redundancy. The method is based on imposing a set of convenient relation among joint torques as dynamic constraints to system. Two algorithms for path planning of redundant manipulators subject to dynamic constraints are proposed. The first algorithm takes advantage of all necessary dynamic constraint equations which can be approximately solved using a pseudo-inverse technique, whereas the second algorithm is based on finding a good starting point with fair load distribution and generate the path by imposing as many dynamic constraint equations as the number of degrees of redundancy. The results for path planning of a 3-DOF planar manipulator using this method are presenteded.

Keywords: Redundant manipulators, Path planning, Load distribution,

۱- مقدمه

کاربرد ربات‌های افزونه به دلیل چابکی و مانور پذیری خوب آنها به نحو روزافزونی در حال افزایش است. با توجه به درجات آزادی اضافی در ربات‌های افزونه مسئله سینماتیک معکوس و به تبع آن طراحی مسیردر این رباتها دارای بی‌نهایت پاسخ خواهد بود. این موضوع در عین ایجاد مشکلات محاسباتی، در مقایسه با رباتهای بدون افزونگی، فضای کار وسیعی را در مقابل محققین گشوده است تا با اعمال خواسته-های اضافی مسیر مطلوب را از بین بی‌نهایت مسیر ممکن طراحی نمایند.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]

این خواسته‌ها معمولاً در قالب بهینه‌سازی یک تابع هدف و یا برقراری روابط خاص سینماتیکی بین درجات آزادی ربات و مشتقات آنها و یا برقراری روابط خاص بین عملگرها مشخص می‌گردد. رفع افزونگی درجات آزادی معمولاً در دو سطح سینماتیکی یا سینتیکی به انجام می‌رسد اگر کلیه خواسته‌های ثانویه تابعی صرف از مختصات تعمیم یافته و مشتق زمانی آنها باشد حل معادلات حاکم مستقل از دینامیک سیستم خواهد بود. این نوع حل تحت عنوان رفع افزونگی سینماتیکی شناخته می‌شود نمونه‌هایی از این دست در مراجع [۱] الی [۴] قابل مشاهده هستند.

از سوی دیگر در مواردی که خواسته‌های ثانویه تابعی از کمیات دینامیکی همچون ترک عملگرها، توان مصرفی و انرژی باشند آنگاه فرآیند رفع افزونگی و طراحی مسیر نیازمند به کارگیری معادلات حرکت برای برقراری رابطه لازم بین پارامترهای سینماتیکی موجود در معادلات مسیر مطلوب و پارامترهای دینامیکی موجود در معادلات خواسته‌های ثانویه خواهد بود. این دسته از الگوریتمها تحت عنوان الگوریتم‌های رفع افزونگی سینتیکی شناخته می‌شوند. مراجع [۵] الی [۷] نمونه‌هایی از تحقیقات اولیه در این زمینه را نشان می‌دهند.

استفاده از الگوریتم‌های هوش مصنوعی در حل مسئله سینماتیک معکوس و طراحی مسیر ربات‌های افزونه از دیگر روش‌هایی است که در دو دهه اخیر توسط محققین مورد استفاده قرار گرفته است. هر و همکاران [۸] روشی را بر مبنای ایده انتخاب مفصل اصلی برای دوران پیشنهاد نمودند. آنها برای پیاده‌سازی روش خود از منطق فازی استفاده نموده و قوانین زبانی مورد استفاده را با استفاده از الگوریتم ژنتیک برای مسئله مورد نظر تنظیم نمودند. راموس و کویو [۹] نیز با استفاده از روش فازی مسئله سینماتیک معکوس بازوهای مکانیکی را با هدف اولیه تعقیب مسیر و هدف ثانویه حداقل‌سازی لحظه‌ای توان مصرفی حل کردند. آنتونیلی و چیواریني[۱۰] نیز با استفاده از روش فازی مسئله سینماتیک معکوس را برای چند وظیفه ثانویه حل کردند. در این حل نیز تعقیب مسیر هدف اولیه بوده و اهداف ثانویه صرفاً در صورتی امکان برآورده شدن می‌یابند که در تناقض با اهداف اولیه نباشند. ژانگ و همکاران [۱۱] با استفاده از روش شبکه عصبی راه حلی را برای حل بر خط سینماتیک معکوس رباتهای افزونه با اهداف ثانویه اجتناب از حد فیزیکی مفاصل و حد سرعت مفاصل ارائه نمودند. بوکاتایا و همکاران [۱۲] یک کنترلر موقعیت فازی برای رفع افزونگی ربات های موبایل معرفی نمودند.

توزیع بار یکنواخت بین عملگرها، به لحاظ عملی از اهمیت بالایی برخوردار است، یکی از موضوعاتی است که میتواند به عنوان هدف ثانویه مورد نظر قرار گیرد. منظور از توزیع بار بین عملگرها اینست که در طی حرکت تمامی عملگرها درصد متعادلی (تقریباً مساوی) از ترک حداکثر خود را اعمال نمایند. چنین حرکتی ضمن اجتناب حداکثری از اشباع عملگرها موجب افزایش راندمان موتورها و افزایش طول عمر آنها می‌شود. به طور مثال اگر مسیر حرکت ربات به گونه‌ای باشد که یک عملگر به دفعات بار نسبی بیشتری را اعمال نماید خطر از کارافتادن این عملگر به سرعت افزایش می‌یابد. موضوع توزیع بار به عنوان یک خواسته ثانویه توسط محققین متعددی مورد بررسی قرار گرفته است.

هولرباخ و سو[۷] روشی را بر مبنای حل شبه معکوس برای حداقل‌سازی لحظه‌ای ترک مصرفی مفاصل پیشنهاد نمودند. در این روش آنها تنظیم مقدار ترک مفاصل در نزدیکی مقدار متوسط حدود بالا و پایین علگرها به عنوان هدف ثانویه در نظر گرفتند. چونگ ولی [۱۳] روشی را بر مبنای حداقل‌سازی موضعی یک نرم مناسب از ترک وزن‌دار مفاصل ارائه نمودند. روش پیشنهادی آنها نیز از حل شبه معکوس معادلات دینامیکی و سینماتیکی دیفرانسیلی ربات استفاده می‌کرد. تنگ و همکاران [۱۴] از یک روش شبکه عصبی برای حداقل سازی نرم به بینهایت ترک عملگرها استفاده نمودند. ژانگ و همکاران [۱۵] نشان دادند که رفع افزونگی در هر دو سطح سرعت و شتاب را می‌توان در قالب یک مسئله برنامه‌ریزی مربعی مقید با قیود تساوی و نامساوی فرمول‌بندی و حل نمود. ژانگ [۱۶] سپس این روش را برای حداقل‌سازی نرم بینهایت ترک‌های مصرفی مفاصل مورد استفاده قرار داد.

همانطور که مشخص است حجم قابل توجهی از تحقیقات، که در اینجا تنها به گوشه‌ای از آنها اشاره شد، در زمینه رفع افزونگی به طور عام و رفع افزونگی با موضوع توزیع بار و حداقل سازی ترک عملگرها به انجام رسیده و گزارش شده است. هرچند از، آنجا که عمده این تحقیقات عمدتاً بر پایه حل شبه معکوس استوار است عموماً با مشکلاتی از قبیل ضعف تکرارپذیری حرکت –گزارش شده در مرجع [۷]– نیاز به معکوس سازی ماتریس‌ها و حجم بالای محاسبات و نیز ناپایداری ترک‌های محاسبه شده –گزارش شده در مرجع [۱۶]– مواجه هستند.

با توجه به مشکلات فوق، این مقاله روشی را برای توزیع بار متناسب بین عملگرها بر پایه اعمال یکدسته معادله خطی بین ترک‌ها به عنوان خواسته ثانویه معرفی می‌نماید. ایده اصلی روش بر این پایه استوار است که اگر یک ترکیب خطی از توزیع بار عملگرها در یک نقطه رضایت-

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]

بخش است حتماً یک همسایگی از آن نقطه یافت می‌شود که در آن اعمال همان ترکیب خطی از ترک عملگرهابه عنوان قیود نیرویی موجب اعمال ترک‌هایی می‌شود که شرایط توزیع بار را ارضاء خواهند کرد.

به منظور تعیین نقطه مناسب شروع که ترک اعمالی در آن از توزیع قابل قبول برخوردار باشد، یک الگوریتم جستجوی هدفدار برای کاهش ترک‌هایی که مقدار آنها بیش از محدوده مجاز باشد تحت عنوان الگوریتم بهبود توزیع ترک ارائه شده است. روش پیشنهادی برای یک نمونه ربات سه درجه آزادی صفحه‌ای اجرا شده و نتایج با نتایج یک روش استاندارد بر مبنای حل شبه معکوس و با نتایج ارائه شده توسط هولرباخ و سو [۷] مقایسه شده است.

مطالب این مقاله در شش بخش ارائه شده است پس از این مقدمه، روش رفع سینتیکی افزونگی در بخش دوم مورد بحث قرار گرفته است. بخش سوم به موضوع بیان شرط توزیع بار به فرم قیود نیرویی می‌پردازد. الگوریتم بهبود ترک در بخش چهارم ارائه شده و نتایج شبیه‌سازی برای یک مسئله نمونه در بخش پنجم ارائه شده و در نهایت نتیجه‌گیری مقاله در بخش ششم مطرح گردیده است. بخشی از مطالب این مقاله قبلا در مراجع [۱۷] و [۱۸] ارائه شده است

۲- رفع افزونگی سینتیکی

فرض کنیم $\mathbf{q} \in R^n$ و $\mathbf{X} \in R^m \ (m < n)$ به ترتیب نشان دهنده آرایه‌های مختصات فضای مفاصل و فضای کار یک ربات سری افزونه باشند. مسئله طراحی مسیر برای چنین رباتی را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

"تعیین تابع زمانی مختصات در فضای مفاصل، $\mathbf{q}(t)$، به قسمی که حرکت ربات بر اساس آن موجب گردد پنجه ربات از یک شرایط اولیه $(\mathbf{X_0}, \dot{\mathbf{X}}_0)$ به یک شرایط نهایی $(\mathbf{X_f}, \dot{\mathbf{X}}_f)$ در امتداد مسیر مطلوب $\mathbf{X}(t)$ حرکت نماید".

به این منظور لازم است معادلات سینماتیک معکوس بازو برای مسیر مطلوب در فضای کار حل شود یعنی مقدار $\mathbf{q}$ از رابطه زیر محاسبه شود:

$$\mathbf{X}(\mathbf{q}) = \mathbf{X}(t) \qquad (۱)$$

به جای حل معادلات غیر خطی فوق می‌توان مسیر را با انتگرالگیری از حل معادلات سینماتیک دیفرانسیلی ربات به دست آورد. به این منظور لازم است معادلات زیر حل شوند.

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{X}}(t) \qquad (۲)$$

که در آن $\mathbf{J}_{m\times n}$ نشاندهنده ژاکوبین بازو است. دسته معادلات (۲) که نشاندهنده m معادله خطی و n مجهول است یک دسته معادلات تحت معین[1] محسوب گشته که دارای بی‌نهایت پاسخ است. همانطور که در بخش اول ذکر شد برای تعیین یک حل یگانه برای معادلات فوق می‌توان از روش‌هایی نظیر بهینه‌سازی یک تابع هدف و یا افزودن r معادله اضافی به عنوان خواسته‌های ثانویه کمک گرفت. در این مقاله ما از روش دوم یعنی افزودن معادلات اضافی استفاده خواهیم کرد. به این منظور یک دسته معادلات قیود نیرویی به فرم زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\alpha} \qquad (۳)$$

که می‌تواند نشاندهنده رابطه‌ای بین ترک های اعمالی عملگرها در مسیر حرکت باشد. در معادله (۳) کمیا ت $\mathbf{L}_{r\times n}$ و $\boldsymbol{\alpha}_{r\times 1}$ می‌توانند مقادیر ثابت و یا تابع متغیرهای مسیر نظیر $\mathbf{q}$ و $\dot{\mathbf{q}}$ و حتی $\mathbf{X}(t)$ باشند. برای حل دسته معادلات (۲) و (۳) لازم است از n معادله حرکت نیز کمک گرفته شود. به این منظور از معادله (۲) نسبت به زمان مشتق گرفته تا رابطه زیر حاصل گردد.

$$\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \qquad (۴)$$

از سوی دیگر، فرم کلی معادله حرکت بازو به فرم زیر قابل بیان است.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} = \mathbf{B}\boldsymbol{\tau} \qquad (۵)$$

که در آن $\mathbf{M}_{n\times n}(\mathbf{q}, t)$ نشاندهنده ماتریس جرم تعمیم یافته، $\mathbf{h}_{n\times 1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ نشاندهنده بردار ترم‌های غیرخطی ناشی از شتاب-های کریولیس، جانب مرکز و ثقلی بازو و $\mathbf{B}_{n\times n}(\mathbf{q}, t)$ یک ماتریس غیرمنفرد است، که در غالب موارد با فرض هم موقعیتی عملگردها با مفاصل و با انتخاب مناسب درجات آزادی می‌تواند به ماتریس واحد تبدیل گردد.

1- under determined

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]

جاگذاری $\boldsymbol{\tau}$ از معادله (۵) در معادله (۳) رابطه زیر را به دست می-دهد.

$$\mathbf{L}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{L}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{h} \qquad (۶)$$

مجموعه معادلات (۴) و (۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{h}} \qquad (۷)$$

که در آن

$$\overline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \\ \hline \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{L}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{h} \end{bmatrix} \text{ و } \overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \hline \mathbf{L}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} \end{bmatrix}$$

این مجموعه معادلات نشاندهنده $m+r$ معادله دیفرانسیل مرتبه دو است که حل آنها مسیر مطلوب را به دست می‌دهد. یادآوری این نکته لازم است که با فرض $r = n - m$ مسیر حاصل هم معادلات سینماتیک معکوس و هم معادلات قیود نیرویی را به طور کامل ارضاء می‌نماید.

چنین مسیری علیرغم وجود حل یگانه برای $\ddot{\mathbf{q}}$ ها با توجه به دلخواه بودن شرایط اولیه $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$ ، که با استفاده از $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$ بدست می-آیند، یگانه نخواهد بود. به عبارت دیگر چنین شرایط اولیه‌ای می‌تواند از بین بی‌نهایت حل قابل قبول سینماتیک معکوس با اعمال شرایط اضافی مورد نظر حاصل گردد. هرچند وقتی یک مجموعه شرایط اولیه انتخاب شد یک مسیر واحد بر اساس معادله (۷) تولید می شود. از سوی دیگر این دسته معادلات در نقاطی که ماتریس $\overline{\mathbf{M}}$ منفرد باشد هیچ حل قابل قبولی نخواهد داشت.

علاوه بر نقاط منفرد سینماتیکی ربات که در آنها رنک ماتریس ژاکوبین کاهش یافته و موجب کاهش رنک ماتریس $\overline{\mathbf{M}}$ می‌شود. نقاط دیگری نیز وجود خواهد داشت که در آنها ماتریس $\overline{\mathbf{M}}$ دچار کاهش رنک می‌شود. این نقاط که می‌توان از آنها به عنوان نقاط منفرد مجازی ویا منفرد دینامیکی یاد کرد، را نمی‌توان صرفا به موقعیت ربات ربط داد. بلکه این نقاط به نوعی نشان دهنده عدم امکان‌پذیری ایجاد شتاب $\ddot{\mathbf{q}}$ مطلوب در موقعیت مورد نظر در عین رعایت فرم خاص رابطه بین ترک عملگرهاست. این پدیده فیزیکی توسط هولر باخ و سو[۷] نیز گزارش شده است. شناسایی شرایط فیزیکی که موجب بروز چنین نقاط منفردی می‌گردد می‌تواند موضوع مناسبی برای تحقیقات آتی به شمار آید.

فرم دوگان معادله (۷) که می‌تواند مستقیماً به عنوان کنترل مدار باز برای بازو مورد استفاده قرار گیرد از جاگذاری $\ddot{\mathbf{q}}$ از رابطه (۵) در معادله (۴) و افزودن معادلات حاصل به معادله (۳) به فرم زیر حاصل می گردد.

$$\overline{\mathbf{L}}\boldsymbol{\tau} = \overline{\boldsymbol{\alpha}} \qquad (۸)$$

که در آن

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \hline \mathbf{J}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} + \ddot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{J}}\,\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \text{ و } \overline{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \hline \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

۳- بیان توزیع بار به فرم قیود نیرویی

مطابق تعریف شرایطی را که در آن رابطه زیر بین ترک‌های عملگرها برقرار باشد

$$\frac{|\tau_1|}{\tau_{\max_1}} = \frac{|\tau_2|}{\tau_{\max_2}} = \cdots = \frac{|\tau_n|}{\tau_{\max_n}} \qquad (۹)$$

شرایط توزیع بار دقیق می‌نامیم. در رابطه (۹) $\tau_{\max_i}$ یک کمیت مثبت نشاندهنده حداکثر ترک اعمالی عملگر iام است. معادله (۹) نشاندهنده $n-1$معادله است که می‌توان آن را به فرم معادله (۳) بازنویسی نمود که در آن

$$L_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sgn}(\tau_j)}{\tau_{\max j}} \;;\; j = i \\ -\dfrac{\operatorname{sgn}(\tau_j)}{\tau_{\max j}} \;;\; j = i+1 \quad ,i = 1,\ldots,n-1 \\ 0 \;;\; otherwise \end{cases} \qquad (۱۰)$$

و $\boldsymbol{\alpha} = 0$ است.

استفاده از این دسته معادلات به عنوان قیود نیرویی در معادلات (۸) کنترل مدار بازی را تولید خواهد کرد که موجب تعقیب مسیر و ارضاء همزمان قید نیرویی مربوط به توزیع با رخواهد شد. هرچند چنین امکانی معمولاً در عمل بوجود نمی‌آید چرا که معمولاً تعداد معادلات (۸) یعنی $n-1$ بیشتر از تعداد درجات افزونگی سیستم $n-m$ است. دو روش برای حل این موضوع می‌تواند مورد توجه قرار گیرد که اولی جاگذاری تمامی معادلات دستگاه (۱۰) در معادلات (۷) و حل دستگاه فوق معین ۱ حاصل با استفاده از روش شبه معکوس است و راه حل دوم

1- Over determined

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]

تقلیل تعداد معادلات دستگاه (۱۰) به $n-m$ خواهد بود. این دو راه حل در ادامه مورد بحث قرار گرفته و نتایج آنها در بخش پنجم با هم مقایسه خواهد شد.

۳-۱- حل به روش شبه معکوس:

با توجه به اینکه سطر اول معادله ماتریسی پارتیشن شده (۷) نشاندهنده معادلات مربوط به مسیر حرکت و سطر دوم مبین معادلات مربوط به توزیع نیرو است می‌توان به جای آن دستگاه معادلات وزن‌دار زیر را به روش شبه معکوس حل کرد

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{h}} \qquad (۱۱)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} w\mathbf{J} \\ \hline \mathbf{L}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} \end{bmatrix}$ ، $\tilde{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} w\left(\ddot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}\right) \\ \hline \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{L}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{h} \end{bmatrix}$

و w نشاندهنده تابع وزن است. حل دستگاه فوق به روش شبه معکوس مسیر تقریبی را بدست می‌دهد که نرم دوم خطای $\ddot{\mathbf{q}}$ آن نسبت به پاسخی که مسیر $\mathbf{X}(t)$ را تعقیب کرده و معادلات توزیع بار دقیق را نیز ارضاء کند حداقل باشد. به عبارت دیگر چنین پاسخی نه مسیر را کاملاً تعقیب می‌کند و نه منجر به توزیع بار دقیق می شود، بلکه هر کدام از این دو خواسته را تا حدی ارضاء می‌نماید. استفاده از تابع وزن w می‌تواند میزان برآورده شدن نسبی این دو خواسته را کنترل نماید به این صورت که انتخاب w کوچک موجب تعقیب مسیر بدتر و توزیع بار بهتر و انتخاب w بزرگ موجب تعقیب مسیر بهتر و توزیع بار ضعیف‌تر خواهد شد. در این روش $\ddot{\mathbf{q}}$ از حل معادله (۱۱) به فرم $\ddot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{M}}^{+}\tilde{\mathbf{h}}$ حاصل خواهد شد که در آن $\tilde{\mathbf{M}}^{+} = \left(\tilde{\mathbf{M}}^{T}\tilde{\mathbf{M}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{M}}^{T}$ نشاندهنده شبه معکوس ماتریس جرم است. نمونه‌هایی از حل عددی برای مقادیر مختلف تابع وزن w در بخش پنجم مقاله ارائه شده است.

همانطور که ذکر شد با توجه به اینکه پاسخ بدست آمده معادله (۷) را به طور دقیق ارضاء نمی‌کند نه تعقیب مسیر در این روش به صورت دقیق انجام نمی‌شود. از آنجا که معمولاً تعقیب مسیر خواسته اولیه و اصلی در مسئله طراحی مسیر است حل مسئله نیازمند الگوریتمی است که تعقیب مسیر را تضمین نموده و صرفاً توزیع بار را به صورت تقریبی ارضاء نماید. این موضوع از طریق اعمال تعداد کمتری معادله قید نیرویی (به تعداد درجات افزونگی) که مستلزم نوعی تقریب در توزیع بار است میسر خواهد شد.

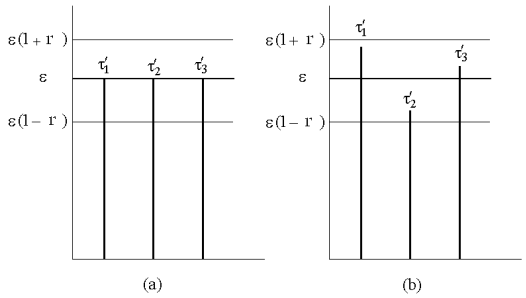
۳-۲-حل به روش کاهش معادلات قیود

این روش بر مبنای کاهش تعداد معادلات (۱۰) از $n-1$ به $n-m$ استوار است. بدیهی است که دسته معادلات کاهش یافته نمی توانندشرایط توزیع بار دقیق را مدل نمایند. به عبارت دیگر در این شرایط خواسته ثانویه به توزیع بار تقریبی تقلیل می یابد. بنا بر این فرض می‌کنیم که هدف ثانویه متوازن نگهداشتن تقریبی توزیع بار بین عملگرهاست. به این منظور باند قابل قبول برای ترک‌های بی‌بعد شده (بر حسب حداکثر مجاز هر عملگر) به صورت زیر تعریف شود.

$$\varepsilon(1-r) \le \tau_i' \le \varepsilon(1+r) \quad ,i=1,\ldots,n \qquad (۱۲)$$

که در آن $\boldsymbol{\tau}' = \left[\frac{|\tau_1|}{\tau_{\max_1}} \quad \frac{|\tau_2|}{\tau_{\max_2}} \quad \cdots \quad \frac{|\tau_n|}{\tau_{\max_n}}\right]^{\mathrm{T}}$

و $\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \tau_i'^2 \Big/ n}$ هستند. و $0<r<1$ یک ثابت دلخواه است که آن را «اندیس خلاصی» می‌نامیم. در معادله (۱۲) ε شاخص متوسط بار مورد نیاز عملگرها در یک نقطه از مسیر است و r نشاندهنده میزان دقت مورد نظر برای اعمال توزیع بار است. شکل (۱) وضعیت توزیع بار دقیق و توزیع بار تقریبی را برحسب ε و r نشان می‌دهد.



شکل ۱: - نمودار شماتیک ترک‌های بی‌بعد شده برحسب متوسط ترک (ε)و عرض باند قابل قبول (r) در شرایط توزیع بار دقیق (a) و توزیع بار تقریبی(b)

ایده اصلی الگوریتم حاضر اینست که اگر مسیر از نقطه‌ای آغاز شود که حرکت از آن نقطه روی مسیر دلخواه مستلزم اعمال ترک‌های قابل قبول $\boldsymbol{\tau}^{*}$ باشد آنگاه با توجه به پیوستگی ناشی از شرایط فیزیکی سیستم، حتماً در یک همسایگی از نقطه مذکور حرکت با توزیع بار مناسب میسر خواهد بود. بنابراین اگر در یک نقطه دلخواه($\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$) اعمال ترک $\boldsymbol{\tau}^{*}$ که رابطه (۱۲) را ارضاء می‌نماید موجب حرکت سیستم روی مسیر گردد آنگاه یک همسایگی از نقطه مورد نظر در طول

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]

مسیر را می‌توان یافت که در آن رابطه $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{L}\boldsymbol{\tau}^*$ صادق است که در آن به ازا. $i = 1,\ldots,n-m$ خواهیم داشت:

$$L_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sgn}(\tau_j)}{\tau_{\max_j}} & ; \quad i \le j \le m+i \\ 0 & ; \quad j < i \ \ or \ \ j > m+i \end{cases} \qquad (۱۳)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{L}_{(\mathbf{q}_0,\dot{\mathbf{q}}_0)}\boldsymbol{\tau}^*$$

طول چنین همسایگی تابع معکوسی از عرض باند قابل قبول (r) خواهد بود. در این روش توزیع بار دقیق را می‌توان حالت خاصی از توزیع بار تقریبی با عرض باند صفر، $r = 0$، در نظر گرفت. هرچند باید به این نکته توجه داشت که کوچک کردن r به معنی کوتاه کردن طول همسایگی نقطه اولیه‌ای است که در آن شرط رابطه (۱۲) ارضاء می‌شود. نکته جالب در این روش اینست که در طول این همسایگی، حل مسئله طراحی مسیر به حل یک دستگاه خطی n معادله مرکب از m معادلات سینماتیکی و $n-m$ معادله خطی قید نیروی تبدیل می‌شود. همچنین ذکر این نکته نیز لازم است که در این روش تعقیب مسیر نیز به صورت دقیق انجام می‌شود.

استفاده از $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\alpha}$ تعریف شده در معادله (۱۳) در معادلات (۸) کنترلر مدار باز لازم برای تعقیب مسیر با رعایت شرط مندرج در رابطه (۱۲) برای توزیع بار را بدست می‌دهد.

آنچه در این الگوریتم نیاز به تدقیق بیشتر دارد نحوه محاسبه $\boldsymbol{\tau}^*$ در نقطه شروع است این محاسبه اولین بار زمانی که حرکت آغاز می‌شود الزامی است. و پس از آن نیز هر زمان که شرط (۱۲) برای توزیع بار نقض می‌شود لازم است شرایط شروع مناسبی، $\boldsymbol{\tau}^*$ ، که حرکت از آن در امتداد مسیر نیازمند اعمال ترک قابل قبول باشد محاسبه شود. الگوریتم مورد نیاز برای این مسئله که تحت عنوان «الگوریتم بهبود توزیع ترک، TMA» نامیده خواهد شد در بخش بعد تشریح می‌شود.

۴- الگوریتم بهبود توزیع ترک

فرض کنیم در طی مسیر یکی از ترک‌های عملگرها شرط توزیع بار (۱۲) را نقض نماید. در این صورت سعی خواهیم کرد با کاهش مقدار ترک این عملگر و محاسبه ترک سایر عملگرها بر مبنای آن شرایطی را پیدا نماییم که مجدداً کلیه ترک‌ها در باند قابل قبول قرار گیرند. در اینجا توجه به این نکته لازم است که تغییر مقدار ترک یک عملگر و به تبع آن سایر عملگرها موجب تغییر مقدار شاخص متوسط ترک، ε، نیز خواهد شد. به عبارت دیگر اگر شرایط به نحوی باشد که کاهش ترک یک عملگر موجب افزایش احتمالی ترک سایر عملگرها شود نهایتا مقدار متوسط ترک‌ها اضافه شده و موجب برآورده شدن شرط توزیع بار می‌گردد.

به طور مثال فرض کنیم مقدار $\tau'_j = \max(\tau'_i)$ و $(i = 1,\ldots,n)$ از حد مجاز بیشتر باشد، بنابراین مقدار آن را با ضرب نمودن در یک فاکتور $0 < k < 1$ کاهش می‌دهیم تا مقدار جدید آن به شکل زیر بدست آید:

$$\tau_j^* = k\,\tau_j \qquad (۱۴)$$

پس از آن مقادیر شتاب و ترک متناظر برای سایر عملگرها از رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{J} & \mathbf{O}_{m\times(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{h}' \\ \ddot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{J}}\,\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{B}}$ ماتریسی است که از حذف ستون jام ماتریس $\mathbf{B}$ حاصل شده است و $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ و $\mathbf{h}'$ نیز به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_1 & \cdots & \tau_{j-1} & \tau_{j+1} & \cdots & \tau_n \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{h}' = \mathbf{h} - \mathbf{B}^{\mathbf{j}}\tau_j^* \qquad (۱۶)$$

عبارت $\mathbf{B}^{\mathbf{j}}$ در معادلات فوق نشان دهنده ستون jام از ماتریس $\mathbf{B}$ است. توجه به این نکته ضروری است که دستگاه معادلات (۱۵) حاوی $n+m-1$ معادله و $2n-1$ مجهول است که حل آن با استفاده از روش شبه معکوس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{J} & \mathbf{O}_{m\times(n-1)} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} -\mathbf{h}' \\ \ddot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{J}}\,\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

با توجه به اینکه معادلات (۱۷) تحت معین است، حل به روش شبه معکوس پاسخ دقیق دارای حداقل نرم بدست خواهد داد. پس از محاسبه $\boldsymbol{\tau}$ با استفاده از معادلات (۱۴) و (۱۷) باند قابل قبول برای ترک‌ها با استفاده از مقدار $\boldsymbol{\tau}$ جدید و بر اساس معادله (۱۲) محاسبه می‌شود. پس از این مجدداً بررسی می‌نماییم که آیا $\|\boldsymbol{\tau}'\|_\infty$ داخل باند قابل قبول قرار گرفته است؟ در صورتی که پاسخ منفی بود همین الگوریتم برای محاسبه $\boldsymbol{\tau}$ جدید از معادلات (۱۴) و (۱۷) تکرار خواهد شد. این کار تا زمانی که ترک عملگرها نامساوی (۱۲) را صدق نماید ادامه می‌یابد و پس از آن ترک بدست آمده به عنوان $\boldsymbol{\tau}^*$ برای ادامه محاسبات بر اساس آن چه در بخش ۴-۲ گفته شد به کار گرفته می‌شود.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]

بر این اساس می‌توان کل الگوریتم طراحی مسیر را به صورت زیر خلاصه نمود.

۱- یک مجموعه شرایط اولیه $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$ را با استفاده از معادلات (۱)، (۲) مطابق با $\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0$ و $\ddot{\mathbf{q}}_0$ را بر حسب $\ddot{\mathbf{X}}_0$ از معادله (۴) محاسبه نمایید.

۲- مقدار $\boldsymbol{\tau}_0$ نظیر را با استفاده از معادله (۵) محاسبه نمایید.

۳- مقدار $\boldsymbol{\tau}_0$ را با استفاده از الگوریتم بهبود ترک‌ها، اصلاح نموده تا ترک $\boldsymbol{\tau}_0^*$ که شرط توزیع بار را ارضاء می‌نماید محاسبه گردد.

۴- مقادیر $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\alpha}$ را با استفاده از معادلات (۱۳) محاسبه نمایید.

۵- مسیر را با استفاده از معادله (۷) -یا کنترل مدار باز را با استفاده از معادلات (8)- محاسبه نمایید تا جایی که یکی از ترک‌ها شرط توزیع بار را نقض نماید.

قدم‌های ۳ الی ۵ را تکرار کنید تا مسیر کامل شود.

۵- شبیه سازی عددی

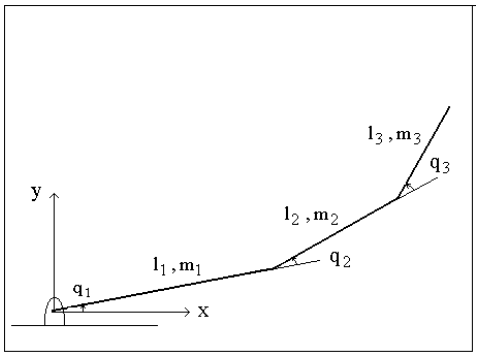
در این بخش الگوریتم‌های پیشنهادی برای طراحی مسیر یک ربات صفحه‌ای سه درجه آزادی به کار گرفته خواهد شد. مشخصات فیزیکی ربات که شماتیک آن در شکل (۲) نشان داده شده عبارتند از:

$$m_1 = 10\,(\mathrm{kg}),\ m_2 = 10\,(\mathrm{kg}),\ m_3 = 10\,(\mathrm{kg})$$
$$l_1 = 1\,(\mathrm{m}),\ l_2 = 1\,(\mathrm{m}),\ l_3 = 1\,(\mathrm{m})$$
$$\boldsymbol{\tau}_{\max} = [54 \quad 24 \quad 6]^T \ \ (\mathrm{N.m})$$

مسیر مطلوب پنجه ربات در صفحه افقی x-y به صورت زیر تعریف شده است.

$$x(t) = \begin{cases} 0.5t^2 + \sqrt{2} & ;\ 0 \le t < T \\ -0.5t^2 - 0.8944t + 1.2142 & ;\ T < t \le 2T \end{cases}$$
$$y(t) = \begin{cases} 0.5t^2 + 1 - \sqrt{2} & ;\ 0 \le t < T \\ -0.5t^2 - 0.8944t - 0.6142 & ;\ T < t \le 2T \end{cases}$$

که در آن $\mathbf{q_0} = [-45 \quad 135 \quad -135]^T$ (deg) و $\dot{\mathbf{q}}_0 = 0$ و $T = \sqrt{0.2}\,(s)$ اختیار شده اند.



شکل ۲- شماتیک یک ربات سه در جه آزادی صفحه‌ای

به منظور امکان‌پذیری صحت‌سنجی و نیز ایجاد امکان مقایسه نتایج، پارامترهای مثال فوق مشابه مثال عددی مطرح شده توسط هولرباخ و سو [۷] انتخاب شده است.

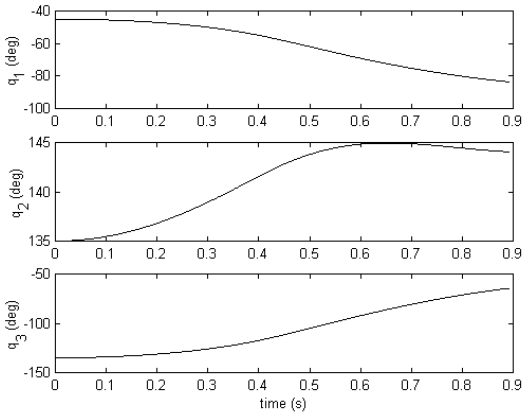
۵-۱- الگوریتم شبه معکوس:

مسیر طراحی شده بر اساس الگوریتم شبه معکوس معرفی شده در بخش (۴-۱) به ازاء $w = 1.2$ در شکل (۳) و انحراف پنجه از مسیر مطلوب نیز در شکل (۴) ارائه شده‌اند. شکل (۵) نیز مقدار ترک بی‌بعد شده با حداکثر مجاز را نشان می‌دهد. همانطور که از شکل‌ها پیداست تعقیب مسیر و توزیع بار به صورت تقریبی انجام شده‌اند هرچند عدم دقت در تعقیب مسیر که در شکل (۴) مشخص گردیده به عنوان یک نقطه ضعف اساسی در این روش مشهود است. دو شاخص اصلی چگونگی توزیع بار یعنی شاخص متوسط ترک، ε، و شاخص انحراف ترک، β، نیز در شکل (۶) نشان داده شده‌اند شاخص متوسط ترک مطابق رابطه ذیل معادله (۱۲) تعریف می شود و شاخص انحراف ترک از مقدار متوسط نیز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (\tau_i' - \mu)^2}{\sum_{i=1}^{n} \tau_i'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۸)$$

که در آن $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tau_i'$

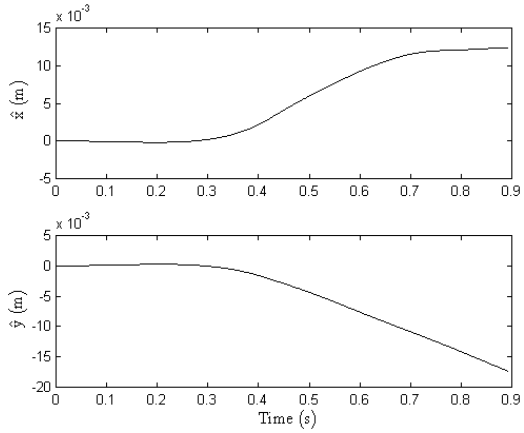
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]



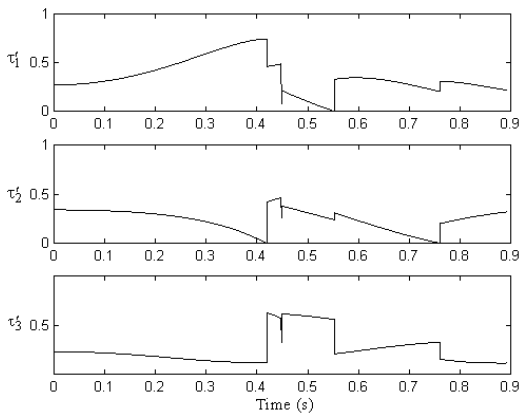
شکل ۳- مسیر طراحی شده در فضای مفاصل با استفاده از الگوریتم شبه معکوس

۵-۲- الگوریتم بهبود توزیع ترک

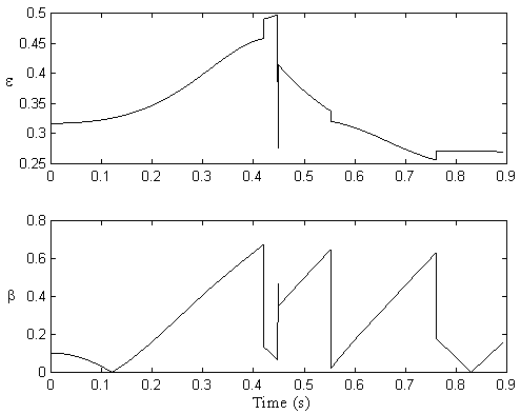
مسیر طراحی شده برای مسئله مورد نظر و نیز مقدار انحراف پنجه از مسیر در شکل‌های (۷) و (۸) نشان داده شده‌اند. همانطور که انتظار می‌رفت نتایج روش حاضر در بعد تعقیب مسیر به مراتب بهتر از الگوریتم اول بوده است. مقدار اندیس خلاصی در این مسئله برابر $r = 0.23$



شکل ۴- انحراف پنجه ربات از مسیر مطلوب در فضای کار – مسیر طراحی شده بر اساس الگوریتم شبه معکوس

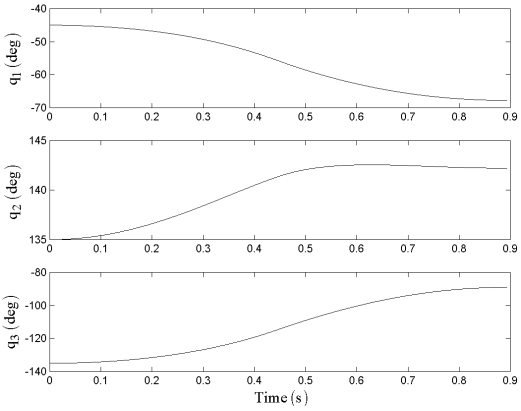


شکل ۵- تاریخچه زمانی ترک‌های بی‌بعد شده مفاصل – مسیر طراحی شده بر اساس الگوریتم شبه معکوس



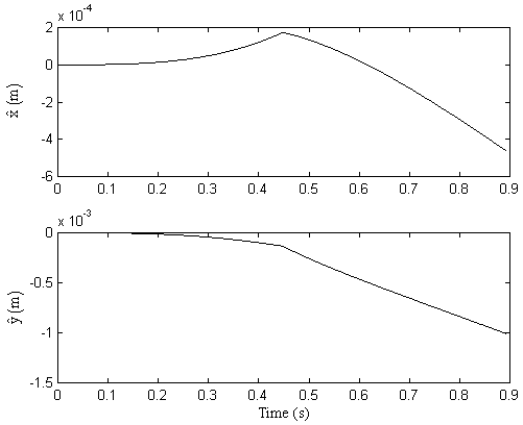
شکل ۶- مقادیر متوسط ترک بی‌بعد مفاصل، ε ، و انحراف ترک‌های بی بعد از مقدار متوسط، β ، حل بر اساس الگوریتم شبه معکوس

در نظر گرفته شده است. مقادیر ترک‌های بی‌بعد شده در طول مسیر در شکل (۹) و مقادیر متوسط ترک ε و شاخص انحراف ترک‌ها از مقدار متوسط β در شکل (۱۰) نشان داده شده‌اند. مقایسه نتایج این الگوریتم با الگوریتم شبه معکوس مشخص می‌نماید که نه تنها تعقیب مسیر بهبود یافته بلکه مقدار متوسط ترک مصرفی نیز کاهش پیدا کرده است.

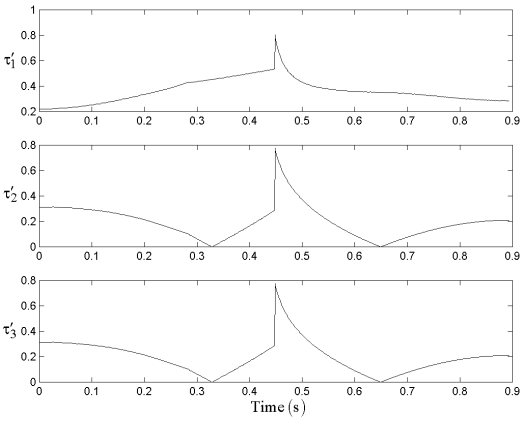


شکل ۷ مسیر طراحی شده در فضای مفاصل با استفاده از الگوریتم بهبود ترک

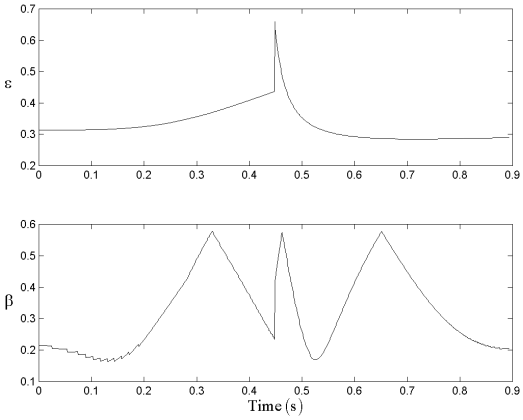
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]



شکل۸- انحراف پنجه ربات از مسیر مطلوب در فضای کار – مسیر طراحی شده بر اساس الگوریتم بهبود ترک



شکل۹- تاریخچه زمانی ترک‌های بی‌بعد شده مفاصل – مسیر طراحی شده بر اساس الگوریتم بهبود ترک



شکل ۱۰- مقادیر متوسط ترک بی‌بعد مفاصل ε و انحراف ترک‌های بی بعد از مقدار متوسط β حل بر اساس الگوریتم بهبود توزیع ترک

به منظور روشن نمودن اثر الگوریتم بهبود توزیع ترک، مقدار شاخص متوسط ترک مصرفی، ε، و شاخص انحراف ترک‌ها، β، در طول مسیر در جدول (۱) ارائه شده‌اند. ستون اول جدول نقاطی را نشان می‌دهد که در آن الگوریتم بهبود ترک عمل نموده و مقادیر ترک‌ها اصلاح شده‌اند. در زمان‌های بین مقادیر مندرج در ستون اول طراحی مسیر بر اساس اعمال $n-m$ قید نیرویی انجام گرفته است. نکته جالب در مورد نتایج اینست که الگوریتم بهبود ترک‌ها نه فقط مقدار β را کاهش می‌دهد بلکه در برخی موارد مقدار متوسط ترک مصرفی، ε، را نیز کاهش می‌دهد.

جدول ۱- مقادیر ترک متوسط (ε) و شاخص انحراف ترک (β) قبل و بعد از اجرا الگوریتم بهبود ترک

	قبل		بعد	
Time	ε	β	ε	β
0	0.318	0.449	0.313	0.214
0.025	0.313	0.219	0.314	0.205
0.055	0.315	0.204	0.314	0.194
0.074	0.314	0.195	0.314	0.185
0.089	0.314	0.187	0.314	0.176
0.104	0.315	0.180	0.315	0.169

همانطور که قبلاً توضیح داده شده شاخص خلاصی، r، نقش عمده‌ای بر شاخص انحراف ترک‌ها، β، و نیز طول مسیر محاسبه شده قبل از نیاز به اصلاح مجدد ترک‌ها دارد. برای نشان دادن این موضوع مقادیر مختلف β برای شرایط اولیه مثال مورد نظر بر اساس مقادیر متفاوت r محاسبه شده است. جدول (۲) مقدار شاخص انحراف و نیز تعداد قدم‌های محاسبات ترک برای بهبود ترک‌ها را نشان می‌دهد. همانطور که از نتایج مشخص است افزایش r موجب افزایش سرعت الگوریتم بهبود ترک به قیمت کاهش دقت توزیع بار (افزایش β) شده است.

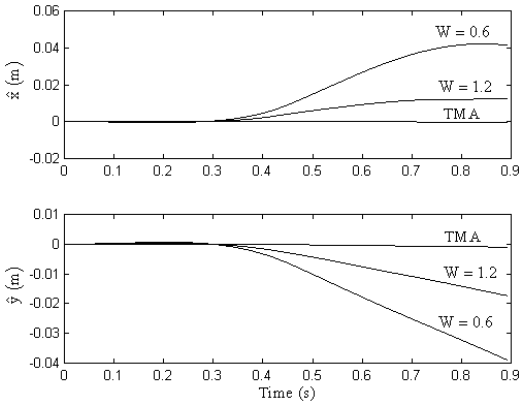
جدول ۲- مقدار قدم‌های لازم برای اجرای الگوریتم بهبود ترک و شاخص انحراف ترک از مقدار متوسط به عنوان تابعی از عرض باند ترک‌های قابل قبول

r	تعداد قدم محاسبات	β
0.40	9	0.3476
0.35	13	0.3040
0.30	17	0.2624
0.25	21	0.2234
0.20	24	0.1965
0.15	28	0.1646

شکل‌های (۱۱) و (۱۲) مقدار انحراف پنجه از مسیر و شاخص انحراف ترک‌ها را به ازاء مقادیر مختلف w در مقایسه با الگوریتم

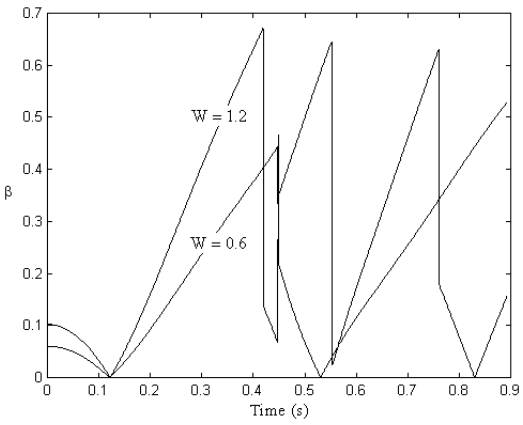
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]

بهبود ترک‌ها نشان می‌دهد. همانطور که انتظار می‌رود افزایش W موجب بهبود تعقیب مسیر در قبال هزینه کاهش دقت توزیع بار می‌گردد. از سوی دیگر الگوریتم بهبود ترک‌ها نتایج بهتری در تعقیب مسیر و توزیع بار در مقابل هزینه افزایش نسبی حجم محاسبات ارائه می‌نماید.



شکل ۱۱–مقایسه اثر تابع وزن بر خطای مسیر در روش شبه معکوس با روش بهبود ترک (TMA)

شکل‌های (۱۳) و (۱۴) نتایج الگوریتم بهبود ترک‌ها را با نتایج حاصل از سه روش ارائه شده در مرجع[۷]نشان می‌دهد.

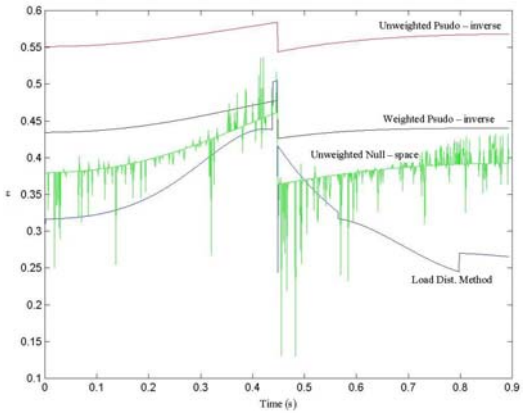


شکل ۱۲– اثر تابع وزن بر انحراف ترک‌ها از مقدار متوسط – روش شبه معکوس

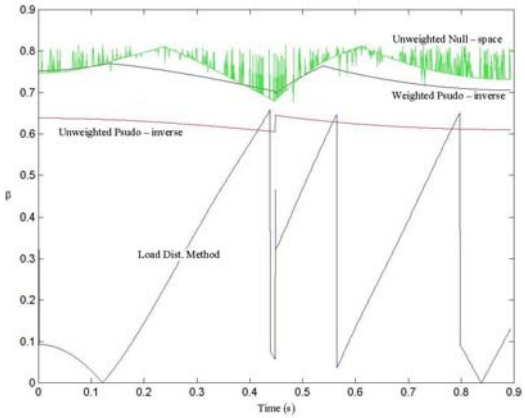
همانطور که از نتایج مشخص است روش پیشنهادی در این مقاله مقادیر متوسط ترک عملگرها، ε، و شاخص انحراف ترک ، β، را نسبت به نتایج ارائه شده توسط هولرباخ و سو بهبود بخشیده است. از آنجا که روش‌های پیشنهادی هولرباخ و سو نیز توزیع بار را به عنوان وظیفه ثانویه لحاظ کرده‌اند. اختلاف عمده‌ای در کیفیت تعقیب مسیر مشاهده نمی‌شود

۶- نتیجه‌گیری

این مقاله روشی را برای طراحی مسیر و محاسبه ترک لازم (کنترل مدار باز) برای یک ربات افزونه بر اساس هدف ثانویه توزیع بار بین عملگرها ارائه می‌نماید. دو الگوریتم برای حل مسئله فوق بر مبنای اعمال قیود نیرویی ارائه شده‌اند که الگوریتم اول از روش استاندارد حل شبه معکوس استفاده می‌نماید. الگوریتم دوم که دستاورد اصلی این



شکل ۱۳– مقایسه نتایج روش بهبود ترک با نتایج روش‌های ارائه شده در مرجع [۷] برای مقدار متوسط ترک مصرف



شکل ۱۴– مقایسه نتایج روش بهبود ترک با نتایج روش‌های ارائه شده در مرجع [۷] برای شاخص انحراف ترک از مقدار متوسط

مطالعه محسوب می‌گردد بر مبنای یک روش بدیع برای بهبود ترک پایه‌گذاری شده است. نتایج این الگوریتم با الگوریتم اول و نیز نتایج ارائه شده توسط سایر محققین در حل مسئله طراحی مسیر برای یک ربات سه درجه آزادی صفحه‌ای مقایسه شده است که نشان از توانایی الگوریتم پیشنهادی دارد. همانطور که از روابط انتظار می‌رود حل مسئله حاضر علاوه بر نقاط منفرد سینماتیکی، ربات را با نقاط منفرد دیگری که قبلاً نیز توسط محققین گزارش شده است و از آن به عنوان نقاط مجازی و یا نقاط منفرد دینامیکی یاد می‌شود مواجه می‌نماید. حجم کم

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]

محاسبات برای الگوریتم حاضر پیاده‌سازی بر خط آن را در صورت رفع مشکلات ناشی از نقاط منفرد دینامیکی میسر می‌سازد..

مراجع

[1] Liegeois, A., 1977, "Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms". *IEEE Trans. Syst., Man, Cyber*n., **SMC-7**, pp.868-871.

[2]. Whitney, D.E., 1969. "Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses", *IEEE Trans. Man-Machine Syst*., **MMS-10**, pp. 47-53.

[3] T. Yoshikawa, 1984, "Analysis and control of robot manipulators with redundancy", in Robotics Research: The First International Symposium, MIT Press, pp.735-748

[4] H. Hanafusa, T. Yoshikawa, and Y. Nakamura, 1981, "Analysis and control of articulated robot arms with redundancy," in Prep. 8th IFAC Word Congress, pp. XIV-78-83, Aug. 1981.

[5] Hu, B., C.L. Teo and H.P. Lee, 1995, "Local optimization of weighted joint torques for redundant robot manipulators", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **11** (3), pp. 422-425.

[6] T. Yoshikawa, 1985, "Dynamic manipulability of robot manipulators," in Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation,, St. Louis, MO, 1985, pp. 1033-1038..

[7] Hollerbach, J.M. and K.C. Suh, 1987. Redundancy resolution of manipulators through torque optimization", *IEEE Journal of Robotics and Automatio*n, **RA-3** (4), pp. 308-316.

[8] M.G. Her, C.-Y. Chen, Y.-C. Hung, and M. Karkoub, 2002, "Approximating a robot inverse kinematics solution using fuzzy logic tuned by genetic algorithms", *Int J Adv Manuf Technol* 20, pp. 375-380.

[9] M.C.Ramos, Jr, and,A.J.Koivo, 2002, "Fuzzy logic-based optimizzation for redundant manipulators", *IEEE transactions on fuzzy systems*, VOL,10, NO, 4, pp. 498-509

[10] Gianluca Antonelli, Stefano Chiaverini, 2003, "A fuzzy approach to redundancy resolution for underwater vehicle-manipulator systems," *Control Engineering Pracice* 11, 445-452.

[11] Yunong Zhang, Jun Wang, and Youshen Xia, 2003, "A dual neural network for redundancy resolution of kinematically redundant manipulators subject to joint limits and joint velocity limits," *IEEE transactions on neural networks*, VOL., 14, NO. 3, pp. 658-666.

[12] M .Boukattaya, M. Jallouli, and T. Damak, 2008, "Dynamic redundancy resolution for mobile manipulators with joints velocity limits avoidance", *proceeding of 5th International multi-conference on systems, sygnals and devices*

[13] C.Y.Chung, B.H.Lee, M.S.Km and C.W.Lee, 2000, "Torque optimizing control with singularity-robustness for kinematically rrdundant robost", *Journal of intelligent and robotic system* 28: 231-258

[14] Wai Sum Tang, Jun Wang, And Yangsheng Xu," 1999, Infinity-norm torque minimization for redundant manippulators using a recurrent neural network" *Proceedings of the 38th Conference on decision & control Phoenix,Arizona USA* ,pp. 2168-2173

[15] Yunong Zhang, Shuzhi Sam Ge, and Tong Heng Lee, 2004, "A unified quadratic-programming-based dynamical system approach to joint torque optimization of physically constrained redundant manipulators", *IEEE transactions on systems, man,and cybernetics-part: cybernetics*, vol. 34 ,no.5.,pp. 2126-2132

[16] Yunong Zhang, 2006, "Inverse-free computation for infinity-norm torque minimization of robot manipulators", *Journal of mechatronics*, vol. 16, pp 177-184

[17] Sadigh, M. J., and Tahmasian, S., 2005, "Redundancy Resolution using Load Distribution Consideration" Proceedings of Methods and Models in Automation and Robotics, Poland, pp. 555-560.

[18] Sadigh, M. J., and Tahmasian, S., 2003, "Control of Redundant Manipulators with Load Distribution Consideration" Proceedings of Methods and Models in Automation and Robotics, Poland, pp. 981-985.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.1.4.2]